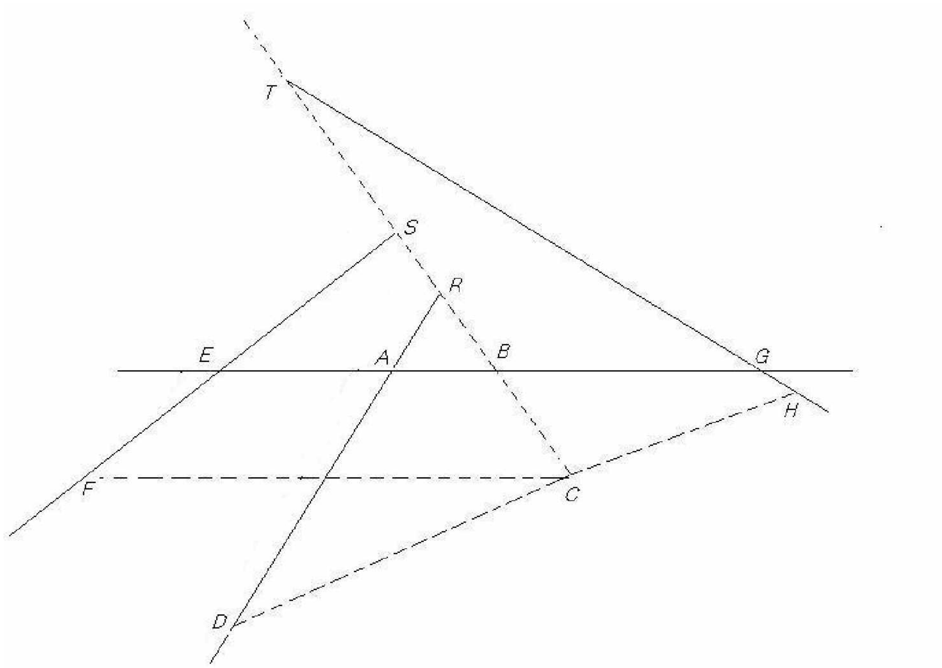
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E DA TERRA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS

NATURAIS E MATEMÁTICA



ANÁLISE DO LIVRO I DO *GEOMETRIA* DE DESCARTES:

Apontando caminhos para o ensino da Geometria Analítica segundo uma abordagem histórica

CARMEN ROSANE PINTO FRANZON

Natal/RN
2004

CARMEN ROSANE PINTO FRANZON

ANÁLISE DO LIVRO I DO *GEOMETRIA* DE DESCARTES:

apontando caminhos para o ensino da Geometria Analítica segundo uma abordagem histórica

Dissertação apresentada como exigência para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, à banca examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Orientadora: Arlete de Jesus Brito

Natal/RN

2004

CARMEN ROSANE PINTO FRANZON

ANÁLISE DO LIVRO I DO *GEOMETRIA* DE DESCARTES:

apontando caminhos para o ensino da Geometria Analítica segundo uma abordagem histórica

Dissertação apresentada como exigência para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, à banca examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
Orientadora: Arlete de Jesus Brito

BANCA EXAMINADORA

____
Profª. Drª. Arlete de Jesus Brito (Orientadora)

____
Profª. Drª. Circe Mary Silva da Silva Dynnikov (Examinadora Externa)

____
Prof. John Andrew Fossa, PhD (Examinador Interno)

Natal/RN, 05 de Agosto de 2004

Dedico este trabalho a meu querido filho Rafael.

Agradeço a todos que contribuíram para que fosse possível a realização desse trabalho.

RESUMO

O objetivo central desse trabalho é de apresentar uma análise do livro I do *Geometria* de Descartes fazendo uma reflexão sobre o ensino de Geometria Analítica atual indicando algumas questões pedagógicas, a partir das quais podem ser criadas situações problematizadoras a serem discutidas em sala de aula a partir de tal texto.

Para atingir tais objetivos primeiramente fizemos uma revisão bibliográfica sobre a importância e potencialidades pedagógicas da história da matemática. Em seguida explicitamos nossas opções metodológicas tanto em relação às questões de cunho pedagógico quanto às questões de histórico que são abordadas no texto. Depois fizemos uma retrospectiva histórica da matemática dos gregos até o século XVII. Posteriormente fizemos um estudo da vida e da trajetória dos estudos de René Descartes tentando compreender as razões que o levaram a dedicar-se à matemática e à construção de seu método. Daí, analisamos o livro I da obra *Geometria* de Descartes, pois nela estão os princípios da Geometria Analítica. Discutimos alguns pontos importantes de seu método, analisamos a criação e o desenvolvimento de sua geometria estabelecendo um paralelo com os princípios da Geometria Analítica, indicando questões pedagógicas que podem ser desenvolvidas a partir de seu texto. Finalmente, tendo por base os estudos desenvolvidos elaboramos a conclusão.

Palavras chaves: história da matemática, ensino, Geometria Analítica, Descartes.

RESUMÉ

Le objectif principal de ce travail est de realiser une analyse du livre I de Geometrie de Descartes, em faisant une reflexion sur l'enseigment de la Geometrie Analytique actuel et de mettre em evidence quelques questions pedagogiques a partir desquelles peuvent se genérer dês situations problematiques qui seront debatues em classe a partir du texte.

Pour aheindre ces objectifs, premiérement nous avons fait une revision bibliografique sur l'importance et les potencialités pedagogiques de l'histoire des mathématiques. Ensuite nous avons explicite nos options métodologiques aussi bien en ce qui concerne les questions d'ordre pedagogique que les questions d'ordre historique qui sont abordées dans le texte.

Ensuite nous avons fait une retrospective historique des grecs jusqu'au dixseptième siècle. Puis nous avons fait une étude de la vie et de la trajectoire de René Descartes em essayant de comprende les raisons qui l'ont amené à se dédier aux mathématiques et à la création de sa méthode. De là nous avons analysé le livre I de l'oeuvre Geometrie de Descartes, puisqu'il contient les principes de la Geometrie Analytique. Nous avons commenté quelques points importants de as méthode, nous avons analysé la creation et le developpement de sa geometrie em établissant un parallèle avec les principes de la Geometrie Analytique, em montrant les questions pedagogiques qui peuvent être developpées a partir de son texte. Finalement, em ayant pour base les études developpées, nous avons fait la conclusion.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO..9

CAPÍTULO II – METODOLOGIA...33

2.1. Quanto ao caráter histórico**...33**

2.2. Quanto ao caráter pedagógico**..38**

CAPÍTULO III – ANÁLISE HISTÓRICA DO DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA E DA ÁLGEBRA...41

3.1. Geometria e Álgebra: relações e distanciamentos**...41**

3.2. Sistemas Referenciais**...64**

3.3. A Álgebra no Renascimento**...67**

3.4. Estudo das Curvas**...73**

3.5. A Matemática das variáveis**..75**

CAPÍTULO IV – DESCARTES: SUA VIDA, SEUS ESTUDOS, SUA OBRA............80

4.1. Vida e obra de Descartes**...82**

4.2. A filosofia de Descartes**...92**

4.3. O modelo cosmogônico de Descartes**...94**

CAPÍTULO V – ANÁLISE DO LIVRO I DO *GEOMETRIA*..98

CAPÍTULO VI – CONCLUSÃO...144

REFERÊNCIAS..147

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

A pesquisa aqui apresentada teve como motivação o fato de, como professora de matemática no ensino médio, exercendo esse ofício no Centro de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte – CEFET/RN há 14 anos e, anteriormente, na Escola Técnica Federal do Amazonas, ter percebido algumas falhas que ocorrem no processo ensino-aprendizagem de Geometria Analítica, e a necessidade de superá-las, bem como pela expectativa de colaborar em cursos de formação de professores.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, propostos pelo Ministério da Educação em 1999, a matemática deve ser ensinada abrangendo os aspectos formativo, instrumental e científico. Em seu papel formativo, a matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e aquisição de atitudes; em relação ao caráter instrumental, ela torna-se um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento e no cotidiano; como ciência, deve ser vista como um sistema axiomático que possibilita validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. Mas, para que estes aspectos sejam desenvolvidos, segundo Pozo (2001), o currículo deve ser articulado de modo que sejam abrangidos conteúdos atitudinais, procedimentais e verbais. De modo geral, podemos dizer que conteúdos atitudinais são aqueles que envolvem as atitudes comportamentais do aluno; procedimentais, os que compreendem desde simples técnicas, métodos e destrezas até estratégias e raciocínios usados para executar alguma tarefa; e verbais ou conceituais, quando se referem a fatos, conceitos e princípios que foram construídos ao longo da história da humanidade. O objetivo de ensinar atitudes é conseguir fazer com que os alunos adquiram, como valores, certas normas e formas de comportar-se, que serão refletidas em sala de aula e em seu cotidiano, dispensando assim a necessidade de adotar procedimentos coercitivos para atitudes desejadas, mas sim que estas sejam obtidas de modo espontâneo e autônomo. O objetivo de ensinar procedimentos vem do fato de que em uma sociedade dinâmica como a que vivemos, na qual os conhecimentos e as necessidades formativas mudam rapidamente, mais do que saber algo é necessário saber *aprender a aprender*. Assim, o aluno precisa adquirir procedimentos e capacidades que lhe permitam, futuramente, adaptar-se às mudanças e demandas dessa sociedade. Quanto ao objetivo em ensinar conteúdos verbais, devemos levar em conta que não é possível aprender ciência sem que eles estejam presentes. No entanto, é importante que a seleção deles esteja subordinada à compreensão de seu uso e de seus fundamentos, pois desta forma estaremos dando condições ao aluno, de compreender conceitos e princípios mais gerais.

Porém, tais objetivos não têm sido, em geral, alcançados no atual ensino de matemática. Miguel (1994), no artigo *Reflexões acerca da educação matemática contemporânea,* levanta algumas concepções pedagógicas predominantes entre os professores, no que se refere ao ensino da matemática. Embora tenha havido, da época em que tal artigo foi escrito aos dias atuais, mudanças na forma de encarar a educação, o artigo de Miguel (1994) não se tornou obsoleto, pois as concepções pedagógicas que ele analisa nesse texto ainda se fazem presentes no ensino atual de matemática e freqüentemente representam obstáculos ao processo ensino-aprendizagem.

Quando se refere aos fins e valores a serem promovidos pela educação matemática nos ensinos fundamental e médio, Miguel (1994) observa que há uma pretensa neutralidade e descompromisso do professor em relação ao processo educativo, quando este trabalha os conteúdos visando apenas aos aspectos técnicos envolvidos. Trabalhando os conteúdos dessa maneira, o professor deixa de analisar a maneira como se dá o desenvolvimento do conhecimento matemático e a razão de determinada teoria ter se desenvolvido e tomado a forma que tomou. Nessa perspectiva, o professor acaba “gerando nos estudantes a sensação de que o único sentido de um ato está no próprio ato” (MIGUEL, 1994, p. 54), desvinculando, assim, o processo educativo da vida sócio-política, apresentando a matemática como uma ciência que já surgiu pronta, que não tem história.

Ao analisar o ensino contemporâneo da matemática, em sua dimensão psicológica, Miguel (1994) constata que a concepção adotada no ato educativo é a de que o papel do sujeito – ou seja, do aluno –, apenas se limita a registrar estímulos vindos do exterior. Esse papel é desempenhado de modo passivo; então, “ensinar é sinônimo de usar a palavra e aprender é sinônimo de ver e ouvir” (MIGUEL, 1994, p. 54).

Além disso, freqüentemente, a transmissão dos conteúdos se dá por meio de informações já prontas e sistematizadas, revelando uma concepção tecnicista no método de ensino. De acordo com esse ponto de vista, o que importa é a rapidez com que o aluno dá a resposta correta. Então, para que o método seja eficaz, os conteúdos são trabalhados livres de contradições ou problematizações. Desse modo, tiramos do aluno a possibilidade de criticar e de analisar novas informações. No entanto, é por meio do levantamento e da análise das contradições, da interação de uma nova idéia com outras já construídas pelo aluno, que essas novas informações adquirem significado.

Ao constatarmos que o ato pedagógico envolve as concepções discutidas até o presente momento temos idéia do paradigma[1] que prevalece na educação matemática nos ensinos fundamental e médio.

Quanto ao ensino da Geometria Analítica é possível observarmos, em geral, esta opção metodológica, pois damos prioridade ao acúmulo de conhecimentos e à transmissão de conceitos e idéias desta teoria, não levando em conta aspectos importantes, tais como as motivações que levaram ao seu desenvolvimento. Além disso, para que o aluno *aprenda* os conteúdos rapidamente e dê respostas *corretas*, ensinamos estes conteúdos seguindo a lógica de conhecimentos aceitos na comunidade científica, partindo, em geral, do simples ao complexo, e sem que apresentem contradições ou problematizações. Essa forma de trabalhar conduz professor e aluno à falta de diálogo e à falta de crítica, excluindo qualquer possibilidade de construção do conhecimento por parte do aluno. Segundo essa visão, aprende ciência quem reproduz o conhecimento do modo mais fiel possível ao que lhe foi transmitido.

Frente a essas condições, verificamos que se faz necessária uma mudança tanto na prática pedagógica quanto na concepção de ciência adotada pelo professor, acerca do ensino da Geometria Analítica. É preciso lembrar que, se anos atrás, muitas vezes o ensino era baseado em técnicas e memorizações, hoje, tendo como referência pesquisas realizadas em diversos campos como, por exemplo, em Educação Matemática, Psicologia Educacional e Pedagogia, esse tipo de ensino é questionável. Do ponto de vista de Miguel (1994), é possível desafiarmos esse paradigma através de um diálogo entre a pedagogia, a matemática e a história, e,

[1] Segundo KUHN (1992, p. 219) “um paradigma é aquilo que os membros de uma comunidade partilham e, inversamente, uma comunidade científica consiste em homens que partilham um paradigma”

assim, encontrarmos melhores maneiras para conduzir o processo ensino-aprendizagem.

Em relação à história da matemática, podemos dizer que as discussões sobre suas potencialidades pedagógicas ocorrem a algum tempo. Atualmente, esse tema está presente em todo congresso que reúne educadores e/ou historiadores matemáticos. As discussões incluem, entre outras, questões relativas à inserção de componentes históricos no ensino de matemática não só nos níveis fundamental e médio, mas também em cursos de formação para o exercício do magistério nos diferentes graus de ensino.

Podemos tomar como exemplo o VI ENEM[2] realizado em São Leopoldo – RS, em julho de 1998. Nesse evento, um dos temas das discussões foi a “História da Matemática no ensino”. Foram apresentadas dez Comunicações Orais agrupadas sob a denominação *História e Educação Matemática* e um dos debates intitulou-se *História e Educação Matemática: Tendências para o início do século XXI*, tendo Antonio Miguel, Circe Maria Silva da Silva Dynnikov e Sérgio Roberto Nobre como debatedores. Nesse debate, reconheceu-se que cada vez mais a história da matemática ganha espaço como instrumento metodológico no meio acadêmico educacional, mas se ressaltou que ela é mais do que um simples instrumento metodológico se trata de uma área de conhecimento matemático, um campo de investigação científica; por esse motivo, exige que o professor tenha conhecimentos específicos para uma atuação competente em sala de aula ao abordar assuntos que envolvam componentes históricos. Porém, grande parte dos professores atuantes não obteve, em seus cursos de formação, qualificação em história da matemática, bem como a maior parte dos futuros professores ainda não obterá tal qualificação.

[2] ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática.

Essa falta de conhecimento, aliada a pouca bibliografia referente à história da matemática destinada ao professor, irá refletir em sua atuação profissional tornando-se um empecilho para a utilização de tal tema em sala de aula nos diferentes níveis de ensino. É, portanto, desejável uma qualificação em tal área, tanto por parte dos professores já atuantes, por meio de cursos de formação continuada ou em pós-graduação, como dos futuros professores, mediante inclusão de história nos currículos dos cursos de licenciatura.

No VI EBRAPEM[3], realizado em Campinas – SP em Novembro de 2002 –, esse tema também foi pauta de discussões. Além de cerca de vinte Comunicações Orais versarem sobre história da matemática, a palestra proferida por Maria Ângela Miorim e Antonio Miguel, sob o título *A prática social de investigação em história da matemática: algumas considerações teórico-metodológicas* apresentaram uma

> visão acerca do modo como vem se constituindo, em nosso país, a prática social de investigação no âmbito da História da Matemática, bem como uma caracterização inicial da produção acadêmica no interior dessa prática. (MIORIM; MIGUEL, 2002, p. 15)

Ao proceder à caracterização da produção acadêmica brasileira em história da matemática, Miorim e Miguel (2002) identificaram seis campos de investigação, sendo um deles classificado como “História na Educação Matemática”. Nesse campo, foram incluídas as investigações cujo objeto são as formas de participação da história da matemática e/ou da educação matemática na educação matemática.

Para esses autores, a questão que se coloca, a respeito das potencialidades pedagógicas da história da matemática, é a da necessidade ou não de estabelecer “um vínculo invariante entre a produção cultural da humanidade no passado e a

---

[3] EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática.

construção do conhecimento no plano individual, no presente” (MIORIM; MIGUEL, 2002, p. 13). Como elementos invariantes, os autores destacam:

> Seleção adequada de conteúdos de ensino, ordenação adequada dos conteúdos de ensino, seleção de métodos de ensino adequados, explicitação clara e adequada de objetivos para o ensino, motivação, trabalho com os obstáculos epistemológicos, trabalho com os mecanismos operatórios cognitivos de passagem, consciência da unidade da matemática, percepção da natureza do pensamento matemático, desmistificação da matemática, autonomia intelectual, pensamento crítico, apreciação estética de demonstrações e métodos matemáticos, conscientização acerca de usos sociais eticamente reprováveis da matemática, constituição da identidade cultural (MIORIM; MIGUEL, 2002, p. 13)

Na visão de Miorim e Miguel (2002), no caso de se adotar uma perspectiva de subordinação do presente em relação ao passado, por meio de um elemento invariante, a forma que a história da matemática vai aparecer na educação matemática vai depender da concepção que se tem sobre aprendizagem da matemática e sobre a maneira de se produzir conhecimento matemático no passado e no presente.

No entanto, ainda que as potencialidades pedagógicas da história da matemática sejam amplamente discutidas e que muitos matemáticos e educadores matemáticos posicionem-se a favor do uso da história da matemática em sala de aula, tanto nos ensinos médio e fundamental quanto no universitário, tal uso não é consensual.

Miguel (1993), em sua tese intitulada *Três estudos sobre a história e educação matemática,* inclui uma análise de alguns obstáculos à utilização pedagógica da história, destacando as concepções de André Lichnerowicz, Edwin E. Moise, I. Grattan-Guiness e Victor Byers, explicitando seus argumentos e propondo eventuais alternativas para esses obstáculos.

Para Lichnerowicz, citado por Miguel (1993), um dos objetivos do ensino da matemática é o de iniciar os alunos no espírito científico contemporâneo. Mas existe uma grande defasagem entre a matemática ensinada nas escolas até o nível médio e a matemática ensinada nas universidades, defasagem esta representada pelo choque de concepções adotadas nesses níveis escolares. No ensino pré-universitário, adota-se a concepção clássica da matemática procedente dos gregos, ao passo que, na universidade, se aceita a concepção não clássica da matemática desenvolvida nos últimos cem anos. Em sua opinião, esse choque de concepções torna-se estorvo ao ensino da matemática. Por isso, para ele, é necessário romper com o ensino tradicional atrelado à história, e transmitir uma concepção contemporânea dos conhecimentos que se pretende ensinar.

Outra razão, segundo Lichnerowicz, para não se fazer um ensino do tipo histórico, é o fato do contemporâneo, no desenvolvimento cronológico da matemática, superar epistemologicamente o histórico, tornando este último obsoleto. Para o autor isso ocorre porque uma das características da matemática é a de repensar integralmente seus conteúdos e, dessa maneira, o que se constituía, historicamente, em noções primitivas e teoremas sofre profundas modificações, transformando-se em simples exercícios, de acordo com uma nova ótica.

Nesse aspecto, o *histórico* no ensino da matemática identifica-se com o *não contemporâneo*, com o obsoleto. Assim, Lichnerowicz justifica a impossibilidade de iniciar os alunos pré-universitários no espírito da matemática contemporânea por meio do histórico. Na verdade, ele defende um ensino não histórico, pois acredita que

> as abordagens atualizadas são tidas como pedagogicamente mais adequadas por serem, ao mesmo tempo, mais rigorosas, mais práticas e didaticamente mais eficazes,

> pois conduzem-nos aos objetivos visados mais rapidamente e com menos esforços.(MIGUEL, 1993, p. 91)

O mesmo argumento usado por Lichnerowicz na década de 50, qual seja, de que o ensino de matemática deve basear-se nas abordagens atualizadas, é usado por Moise na década de 60. Ele justifica sua opção dizendo que algumas partes da matemática, desenvolvidas no passado, estão mortas, pelo menos em relação ao estilo, se forem comparadas à forma com que foram desenvolvidas no passado com a forma que têm no presente. Ele exemplifica essa posição dizendo que para um aluno entender cálculo não é necessário que ele entenda Newton.

Porém, ao adotarmos, no ensino de matemática, uma concepção contemporânea nos ensinos fundamental e médio, estaremos trabalhando apenas com a forma acabada, transmitindo apenas os resultados, privando nosso aluno do conhecimento das origens e das modificações que tal conteúdo passou. Segundo Caraça (1978, p.13)

> A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam hesitações, outras dúvidas, outras contradições.

Por outro lado, os motivos para não introduzir componentes históricos no ensino de matemática, apresentados tanto por Moise quanto por Lichnerowicz, parecem fundamentar-se na concepção mantida por Hermann Hankel, matemático e historiador da matemática alemão, que viveu no século XIX, segundo a qual, ao contrário das outras ciências, na matemática não se derrubam teorias, mas sim se constrói um novo discurso para antigas estruturas.

No entanto, no ponto de vista de Miguel (1993) se for feita uma distinção radical entre conteúdo e forma, a concepção de Hankel pode ser contestada e assim os argumentos de Moise e Lichnerowicz enfraquecem. Mas, esta concepção pode ser aceita pelo fato de que grande parte dos núcleos temáticos sofre sucessivas transformações, tornando-se mais genéricos, mais abstratos e mais rigorosos. Mesmo assim, ainda é possível tomar duas posições antagônicas em relação ao papel da história da matemática em seu ensino. Se o sentido do desenvolvimento histórico da matemática for o da abstração e generalização crescentes, o cronologicamente posterior supera em rigor e potencialidade de aplicação o anterior. É esta concepção adotada por Moise e Lichnerowicz. No entanto, pode-se adotar uma atitude pedagógica oposta a esta, questionando a possibilidade de atingir de forma compreensiva e significativa às abordagens contemporâneas a partir delas mesmas. Se para Lichnerowicz as abordagens contemporâneas são reinterpretações do histórico então

> como pode o aprendiz reinterpretar algo que ainda não interpretou em primeira instância? Por que conceder essa oportunidade apenas aos construtores históricos dos conceitos e teorias e sonegá-la aos seus aprendizes da atualidade? (MIGUEL, 1993, p. 92)

Grattan-Guiness, de acordo com o texto de Miguel (1993), apesar de acreditar que mais importante que o conteúdo seja o espírito metodológico no qual este conteúdo é apresentado, também aponta algumas dificuldades à utilização pedagógica da história da matemática.

Uma dessas dificuldades diz respeito a pouca literatura disponível e adequada sobre a história da matemática anterior aos dois últimos séculos. Byers concorda com Grattan-Guiness e acrescenta que um dos fatores que tornam a literatura disponível imprópria ao uso didático é o fato de as publicações destacarem os resultados matemáticos sem darem importância à forma de sua produção. São justamente esses aspectos não-lógicos subentendidos aos processos de descoberta que têm importância pedagógica. No entanto, é possível, segundo Miguel (1993), encarar essa dificuldade como um estímulo para continuar as investigações nesse sentido, tendo em vista que esse problema faz parte do trabalho de todo historiador e não apenas dos historiadores da matemática.

Outra dificuldade apontada por Grattan-Guiness refere-se ao fato de que a introdução do elemento histórico no ensino, em vez de torná-lo mais fácil, torna-o mais árduo. O estudante, ao se deparar com problemas originais e com as soluções que foram propostas historicamente, precisa reconstituir um contexto que não lhe é familiar e para isso gasta muito tempo e esforço. Entretanto, o próprio Grattan-Guiness acrescenta que o tempo e energia que se gasta nesse processo, se ganham em significado, sentido e criatividade.

Um terceiro obstáculo colocado por Grattan-Guiness em relação ao uso pedagógico da história da matemática diz respeito ao uso de uma história contextualizada em âmbito elementar. Para ele, a história da matemática, inserida nos conteúdos de ensino, deve ser abordada apenas na universidade. Nas demais séries, especialmente na educação primária, hoje denominada primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental, deve-se utilizar o que chama *história satírica* pelo fato de as crianças não perceberem nenhum sentido no progresso histórico e associarem os temas científicos a coisas imediatas. *História satírica*, para Grattan-Guiness, é a história cronológica descontextualizada de um tema. Segundo Miguel (1993), utilizar a *história satírica* é desligar a matemática do contexto de sua produção, dando ênfase pedagógica às idéias, aos processos e métodos matemáticos. Entretanto, se nos deslocarmos do campo da matemática para o campo da educação histórica, a questão que se coloca diz respeito ao momento adequado para o início do aprendizado de história. Uma história representada pela compreensão do passado histórico e não construída por fatos isolados. Na construção do pensamento histórico, a criança apresenta algumas dificuldades, porém através de uma iniciação pedagogicamente adequada, ela poderá superá-las gradualmente.

> [...] se a intervenção pedagógica é necessária tanto à construção do pensamento matemático quanto do histórico, e se ambos os tipos de pensamento se defrontam com obstáculos de natureza distinta à sua constituição isolada [...] vemos na construção solidária não uma superposição catalisadora das dificuldades específicas a cada campo distinto, mas a possibilidade de instauração de uma reciprocidade esclarecedora e superadora. (MIGUEL, 1993, p. 105)

Então, apesar das dificuldades apontadas quanto à utilização pedagógica da história da matemática, constatamos que ela pode tornar-se um importante instrumento metodológico no processo ensino-aprendizagem.

O VI ENEM e o VI EBRAPEM são exemplos de eventos ocorridos em diferentes épocas, separados por um intervalo de tempo significativo, os quais incluíram discussões envolvendo história da matemática e as possibilidades de usá-la pedagogicamente. Mas, além de estar presente em eventos nacionais e internacionais ligados à História da Matemática ou à Educação Matemática, esse tema também aparece nos PCNS - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Há também uma crescente publicação de artigos científicos abordando o tema. Podemos tomar como exemplo o Caderno Cedes 40, intitulado História e Educação Matemática cujos artigos foram escritos por educadores/historiadores matemáticos que dão ênfase à utilização da história da matemática como recurso a ser empregado em sala de aula nos níveis fundamental e médio e na formação de professores.

Nobre (1996, p. 30), em seu artigo intitulado *Alguns “porquês” na história da matemática e suas contribuições para a educação matemática,* publicado no periódico mencionado acima, destaca a necessidade de que, “ao transmitir um conteúdo, o professor deve estar ciente de que a forma acabada, na qual ele se encontra, passou por inúmeras modificações ao longo de sua história”.

Comenta que o homem, historicamente, questiona-se sobre o porquê da ocorrência de certos fenômenos naturais. A partir desse questionamento vai a busca da resposta, podendo levar vários anos ou mesmo séculos para chegar até ela. Nessa busca, geralmente um longo processo, acontece várias descobertas e muitas teorias são criadas. Mas, a partir do momento em que chega ao resultado, abandona todo o processo. O resultado passa a ser visto como algo *natural*, sem que se questione sua origem.

Então, para buscarmos as contradições da ciência, para que deixemos de ser apenas transmissores de conteúdos prontos, acabados e inquestionáveis, Nobre (1996, p. 31) propõe que demos

> um tratamento diferenciado à transmissão dos conhecimentos, ou seja, que se tente acompanhar o conceito a ser trabalhado a partir de seu desenvolvimento histórico. Desta forma, a educação assume um caminho diferente. Em vez de ensinar a praticidade dos conteúdos escolares, investe-se na fundamentação deles. Em vez de ensinar o para quê, ensina-se o porquê das coisas.

Ensinando desse modo, daríamos ao aluno a oportunidade de tornar-se um questionador, não apenas das coisas da matemática, mas também das coisas do mundo e da sociedade em que vive, contribuindo para a formação de um cidadão em sua plenitude. Assim, reconheceríamos a dimensão política dentro da ação educativa.

Mas, para que a história da matemática componha formalmente currículos de ensino pré-universitário, é fundamental que componentes históricos sejam incluídos nos cursos de formação de professores, atuando como auxiliar na construção do conhecimento matemático e também fornecendo subsídios aos professores para sua futura prática pedagógica.

A importância de componentes históricos no ensino em cursos para professores tem sido colocada, há bastante tempo, por historiadores e educadores matemáticos. Em 1904, no 3º Congresso Internacional de Matemática já se recomendava a inclusão de elementos históricos no currículo do curso de Matemática. A concordância sobre tal importância não diminuiu desde aquele tempo, mas as justificativas e motivações para sua prática modificaram. Se antigamente a história tinha apenas função motivacional para sala de aula de futuros professores, não levando em conta a história como meio de conhecimento do próprio professor, hoje este quadro mudou e talvez a função principal da história nos cursos de formação seja de propiciar ao professor um conhecimento mais abrangente da matemática.

É esse o ponto de vista defendido por Miguel; Brito (1996, p. 50), no artigo *A história da matemática na formação do professor de matemática,* ao destacarem que “por meio dela (historicidade nas disciplinas) o licenciado seria beneficiado, uma vez que lhe seria dada oportunidade de construir os seus conhecimentos de matemática dentro de um perspectivo histórico e sócio cultural”.

Para esses autores, a participação orgânica da história da matemática na formação dos futuros professores, isto é, a inclusão da história da matemática nas disciplinas de conteúdo específico e não como uma disciplina isolada das demais, contribuiria para uma compreensão mais adequada de tópicos importantes para a ação pedagógica do professor, tais como:

> a concepção da natureza dos objetos da matemática, a função da abstração e da generalização, a noção de rigor e o papel da axiomatização, a maneira de entender a organização do saber, os modos de se compreender a dimensão estética da matemática e a valorização da dimensão ético-política da atividade matemática (MIGUEL; BRITO, 1996, p. 50)

A inserção de história da matemática na formação de professores é pauta de discussões, não apenas no âmbito nacional, mas também no mundial. O livro *History in Mathematics Education – The ICMI Study,* apresentado no Congresso ICMI[4] no ano de 2000, trás uma análise do papel desempenhado pela história da matemática nos diversos níveis dos sistemas de ensino do mundo. Aborda também diferentes concepções do uso da história e as diversas práticas, além de trazer uma reflexão sobre aspectos teóricos e práticos desse ensino. O livro em questão é resultado do evento *Study Conference* realizado na França no período de 20 a 25 de abril de 1998. Nesse evento, reuniram-se cerca de 80 especialistas, dentre os quais, educadores de matemática, professores, matemáticos, historiadores de matemática, administradores educacionais e outros, com o objetivo de elaborar tal documento.

O quarto capítulo desse livro, intitulado *History of Mathematics for Trainer Teachers* (*História da Matemática para treinamento de professores),* é dedicado a um relato do ensino da história da matemática para futuros professores em âmbito internacional, incluindo o Brasil. Nesse capítulo, são destacadas quatro funções principais em relação à inclusão de componentes históricos no treinamento de futuros professores. São elas:

1. permitir aos professores conhecer o passado da matemática;

---

[4] ICMI: International Commission on Mathematical Instruction (Comissão Internacional de Instrução Matemática).

2. aumentar o conhecimento dos professores sobre a matemática que eles vão ensinar;

3. equipar professores com métodos e técnicas para incorporação de material histórico em sua prática;

4. aumentar o conhecimento da evolução de sua profissão e do currículo.

Ainda nesse capítulo são explicitadas e analisadas algumas dificuldades que surgem na prática do professor e possíveis soluções para elas.

Segundo esse relato, um efetivo obstáculo ao uso da história da matemática em sala de aula é a falta de conhecimento histórico do professor, pois a inclusão de componentes históricos na prática pedagógica do professor dos níveis fundamental e médio depende, dentre outros fatores, do seu próprio conhecimento sobre o tema. Para diminuir essa dificuldade, devem ser feitos esforços no sentido de estender e generalizar componentes históricos em cursos de professores, apesar de ocorrer problema análogo nesse outro nível, pois os próprios professores universitários muitas vezes são autodidatas nessa área.

Outra dificuldade apontada diz respeito à contextualização da matemática. Para ela se efetivar, é necessário que o professor tenha uma visão geral da história. Esse conhecimento geral deve ser assegurado pelo currículo escolar, sendo necessário estabelecer cooperação com professores historiadores no campo universitário. É recomendável também obter cooperação de professores filósofos, devido à estreita relação entre a evolução da idéias matemáticas e o desenvolvimento de conceitos da filosofia.

Outro ponto questionado é o impacto produzido pelo uso da história da matemática em sala de aula. Raramente tal impacto é avaliado, o que pode levar a uma visão irreal e exagerada de sua eficiência no ensino. É desejável, portanto, estabelecer avaliações sistemáticas e, se possível, manter vínculo com os professores que saem das universidades, acompanhando, durante algum tempo, sua prática pedagógica.

Finalmente, de acordo com o texto, para se obter maior integração de componentes históricos nos conteúdos curriculares, é necessário ter ampliado o quadro docente especializado em história da matemática, bem como haver um maior desenvolvimento de material pedagógico adaptado ao ensino.

Tivemos oportunidade de vivenciar alguns desses obstáculos, quais sejam, o conhecimento histórico insuficiente sobre Geometria Analítica para usar sua história em sala de aula e a dificuldade em encontrar material pedagógico adequado ao ensino quando buscamos subsídios na história da matemática, especificamente da Geometria Analítica, para utilizá-la em sala de aula. Essa busca aconteceu pelo fato de que, como professora de ensino médio, exercendo essa função junto ao Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte – CEFET/RN, já há algum tempo nos parece impróprio o enfoque mecanicista adotado no ensino de Geometria Analítica bem como o modo de conduzir as aulas ao abordar tal conteúdo. Essa sensação tornou-se mais presente quando participamos, em nosso local de trabalho, de discussões sobre o ensino e sua adequação às novas diretrizes constantes nos Parâmetros Curriculares Nacionais de 1999.

Sentimos então necessidade de promover alguma mudança no modo de desenvolver o conteúdo de Geometria Analítica em sala de aula. Por tratar-se de um assunto que, no ensino médio, apresenta poucas possibilidades de aplicações práticas ou de relacioná-lo a problemas do cotidiano, sentimos dificuldade em concretizar tal mudança. Nessa época, surgiu a oportunidade de fazermos o curso de especialização em História da Matemática na Universidade Federal do Rio

Grande do Norte e então vislumbramos a possibilidade de mudar o enfoque mecanicista adotado no ensino de Geometria Analítica investindo na fundamentação e no desenvolvimento histórico de seus conteúdos, dando-lhes significação por meio da inclusão da história da Geometria Analítica em atividades didáticas.

Decidimos, então, que o tema de nossa monografia a ser apresentada no final de tal curso seria este: faríamos um estudo sobre história da Geometria Analítica com o objetivo de obter subsídios de modo a possibilitar a criação de atividades didáticas aplicáveis em sala de aula adequadas ao ensino médio.

Nosso conhecimento sobre esse tema limitava-se a leituras esporádicas em periódicos ou livros especializados e a leitura dos textos sobre história constantes nos livros didáticos, uma vez que, quando cursamos a Licenciatura de Matemática, recebemos grande quantidade de informações sobre os conteúdos matemáticos, porém nenhuma relacionada à história da matemática.

Antes de iniciar a pesquisa bibliográfica para composição da monografia, imaginávamos que iríamos encontrar na história uma seqüência de conteúdos se não igual ao menos próxima daquela que trabalhamos no nível médio quando ensinamos Geometria Analítica. Essa seqüência é iniciada com o estudo do Plano Cartesiano, em seguida trata da distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, condição de alinhamento de três pontos e só depois dessas etapas passa-se para a equação da reta, depois equação da circunferência e assim por diante. No entanto, quando iniciamos tal pesquisa, constatamos que a origem e o desenvolvimento da Geometria Analítica nada tem a ver com a seqüência de conteúdos trazida nos livros didáticos adotados em tal nível de ensino, que a Geometria Analítica não é um ramo da matemática, mas sim um método e que foi criada para resolver problemas geométricos. Ou seja, na origem, ela está intimamente ligada à geometria euclidiana, conexão que não estabelecemos normalmente quando a desenvolvemos com nossos alunos.

Concluímos que, ao conduzir o ensino seguindo a seqüência tradicional, trabalhamos com a Geometria Analítica em sua forma atualizada, e assim, em inúmeras vezes, ensinamos um conteúdo apenas para que o aluno compreenda o próximo, deixando de acompanhar seu desenvolvimento histórico, de questionar por que e como surgiu a Geometria Analítica. Essa maneira de abordar os conteúdos leva o aluno a assumir a concepção de que a Geometria Analítica e, numa visão mais ampla a própria Matemática, surgiu tal qual ensinamos hoje, totalmente organizada logicamente e que os conteúdos vão sendo criados num movimento contínuo, obedecendo a uma seqüência lógica previamente determinada. Dessa forma, não evidenciamos a dialética interna da Matemática e subtraímos a oportunidade de o aluno vivenciar como se dá o desenvolvimento de uma ciência. É conveniente observar que isso ocorre tanto no nível médio quanto em cursos de formação de professores e de formação continuada.

Entendemos que uma das alternativas a ser seguida para promover uma mudança neste enfoque adotado no ensino de Geometria Analítica, tornando o ensino mais significativo, é a inclusão de sua história. Quanto aos cursos de formação de professores e de formação continuada, a história pode desempenhar um papel subsidiário em seus currículos, se for incluída como parte integrante dos conteúdos das disciplinas, e não como disciplina isolada, por meio do ensino dos conteúdos envolvidos segundo seu desenvolvimento histórico. Dessa forma, ela auxilia na construção do conhecimento matemático e possibilita a compreensão da matemática como um processo dinâmico, permitindo o abandono da visão estática que muitas vezes detemos a respeito dessa ciência.

Nos deparamos também com a dificuldade de encontrar material destinado ao uso pedagógico abordando a Geometria Analítica segundo um ponto de vista histórico. A maioria dos textos que contém a história da Geometria Analítica não é dirigida ao uso pedagógico. Muitos deles abordam pontos da criação e do desenvolvimento de tal conteúdo de forma fragmentada, nem sempre com explicações suficientes para sua compreensão. O livro *Geometria* de Descartes, considerado por inúmeros historiadores como o precursor da Geometria Analítica é difícil de ser compreendido, sendo necessário um estudo aprofundado para o seu entendimento.

Compreendemos que, mediante o ensino das disciplinas segundo uma abordagem histórica, forneceremos subsídios teóricos de modo que tanto os atuais professores quanto os que ainda vão exercer essa prática no futuro sintam-se incentivados e capazes de fazer uso de tal conteúdo em sua prática pedagógica.

Para abordar a Geometria Analítica, segundo uma visão histórica, entendemos que devemos considerar seus princípios. Os princípios da Geometria Analítica, geralmente em número de dois, são amplamente citados em livros e artigos que versam sobre esse assunto. Existe unanimidade, entre os estudiosos, sobre um dos princípios, a saber, o uso de coordenadas; mas quanto ao outro princípio não existe uniformidade. Ora é citado como a aplicação de métodos algébricos à geometria, ora como a introdução de grandezas variáveis ou ainda como a correspondência entre uma curva plana e uma equação de duas variáveis.

Apesar do segundo princípio ser enunciado de diferentes formas, consideramos que elas não são contraditórias, mas se complementam, pois é através da aplicação de métodos algébricos à geometria juntamente com o conceito implícito de variável aplicado ao sistema de coordenadas que Descartes chegou a uma equação para representar uma curva.

No texto *O Desenvolvimento da Geometria Analítica e a Influência de Descartes e Euler na Obra de Auguste Comte*, Silva (1993/1994), ao fazer uma análise a respeito do desenvolvimento da Geometria Analítica ao longo dos tempos, explicita os princípios da Geometria Analítica segundo dois pontos de vista. Ao investigar a contribuição que Descartes e Fermat deram à Geometria Analítica, Silva (1993/1994, p. 52) cita Tropfke[5] para quem "é necessária a concorrência dos dois seguintes princípios para que a Geometria Analítica ocorra: 1) a aplicação de um sistema de coordenadas; 2) a recíproca ligação da álgebra com a Geometria".

Mais adiante ao comentar a obra de Fermat afirma que

> ele formula claramente o princípio da Geometria Analítica, que é o seguinte: 'Quando numa equação final duas quantidades desconhecidas são encontradas, temos um *locus* (lugar geométrico), a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva'. (SILVA, 1993/1994, p. 53)

Considerando que estes princípios estão na obra *Geometria* de Descartes, o qual não é de fácil compreensão, decidimos fazer uma análise de alguns pontos abordados por Descartes no livro I dessa obra, indicando quais deles, em nossa visão, podem ser explorados no ensino da Geometria Analítica tanto para os atuais professores quanto para os futuros professores.

A partir desse ponto de vista, a questão que se coloca é a seguinte: quais discussões pedagógicas acerca de conceitos envolvidos na Geometria Analítica podem ser levantadas a partir do estudo do livro I da obra *Geometria* de Descartes?

Por essa razão, nosso objetivo primordial com este trabalho é o de realizar uma análise do livro I do *Geometria* de Descartes, fazendo um estudo sobre o ensino de

---

[5] Geschichte der Elementar – Mathematik in Systematischer Darstellung, vol 2, 1903.

Geometria Analítica atual e apontar algumas questões pedagógicas, a partir das quais podem ser criadas situações problematizadoras a serem discutidas em sala de aula a partir de tal texto. Como objetivo secundário, podemos indicar a disponibilização de material que sirva de suporte na preparação de atividades didáticas, envolvendo conteúdos de Geometria Analítica segundo uma abordagem histórica, e que poderá ser consultado por professores que desejem trabalhar seguindo essa perspectiva.

Para atingir tais objetivos primeiramente fizemos uma revisão bibliográfica sobre a matemática no decorrer dos tempos, analisamos histórica e matematicamente as obras *Regras para Direção do Espírito, Meditações, O Discurso do Método* e *Geometria* de Descartes, verificamos as relações entre seu método filosófico e a matemática, nos detendo no livro I do *Geometria*, por conter os princípios da Geometria Analítica e estruturamos o trabalho final formado por seis capítulos que contém os pontos descritos a seguir.

Consideramos como primeiro capítulo a presente introdução. Nela, como pudemos observar, fizemos uma revisão bibliográfica sobre a importância e potencialidades pedagógicas da história da matemática e analisamos algumas dificuldades inerentes à inclusão da história no ensino. Acrescentamos uma reflexão sobre o ensino atual, especialmente em relação à Geometria Analítica, e a possibilidade de dar outro enfoque a ele por meio do uso da história da matemática. O objetivo deste primeiro estudo foi de verificar a viabilidade de, mediante a inclusão da história da matemática, modificar o modo de abordar a Geometria Analítica, tornando seu ensino mais significativo.

O segundo capítulo traz a metodologia utilizada para a composição do presente trabalho, onde explicitamos nossas opções metodológicas tanto em relação às questões de cunho pedagógico quanto às questões de histórico que são abordadas no texto.

O terceiro capítulo traz uma retrospectiva histórica da matemática dos gregos até o século XVII. Foram analisados os caminhos que a matemática seguiu ao longo dos séculos, as razões que levaram a eles, a ênfase dada ora à álgebra, ora à geometria e os principais avanços obtidos. Fizemos também um estudo histórico dos sistemas referenciais, das curvas e do desenvolvimento histórico das variáveis. O objetivo desse capítulo foi o de acompanhar historicamente a trajetória que levaria à criação da Geometria Analítica, seguindo as diferentes abordagens dadas ao chamado *problema de Pappus* ou *problema de três e quatro retas*, primeiramente por Apolônio, depois por Pappus e finalmente por Descartes.

O quarto capítulo é dedicado a um dos principais expoentes em se tratando de matemática e filosofia do século XVII, considerado por muitos autores como o criador da Geometria Analítica e pai da filosofia moderna, René Descartes. O objetivo desse capítulo foi, por meio do estudo de sua vida e da trajetória de seus estudos, tentar compreender as razões que o levaram a dedicar-se à matemática e à construção de seu método e ao aplicá-lo à matemática desenvolver os princípios da Geometria Analítica.

No quinto capítulo, discutimos alguns pontos importantes de seu método, sem nos aprofundarmos nas questões filosóficas, mas as estudando na medida em que elas influenciaram sua produção matemática. Analisamos a criação e o desenvolvimento de sua geometria estabelecendo um paralelo com os princípios da Geometria Analítica, apontando questões que podem ser desenvolvidas em cursos de formação de professores, tanto inicial quanto continuada. O objetivo desse quinto capítulo foi estabelecer um vínculo entre a geometria de Descartes e o ensino atual, indicando trechos de seu livro que oportunizam discussões de cunho pedagógico.

Finalmente elaboramos o capítulo seis, contendo a conclusão, tendo por base os estudos desenvolvidos.

CAPÍTULO II – METODOLOGIA

Retomando o objetivo central deste trabalho, a saber, o de elaborar uma análise do livro I do *Geometria* de Descartes refletindo sobre o ensino atual de Geometria Analítica para apontar algumas questões pedagógicas que podem ser trabalhadas utilizando a história da matemática, resgatando sua criação e desenvolvimento, se fez necessário abordar duas questões de naturezas diferentes, uma histórica e outra pedagógica. Então devemos explicitar nossas opções metodológicas quanto a cada uma dessas questões.

2.1. Quanto ao caráter histórico.

Ao se deparar com nosso trabalho, as primeiras questões que podem ocorrer ao leitor são: Por que resgatar a obra de Descartes? Conhecer suas concepções e princípios pode enriquecer projetos pedagógicos?

Para respondê-las, precisamos retomar as razões que nos levaram a fazer a pesquisa que culminou no presente texto, ou seja, relembrar que nossa intenção primeira foi de buscar os princípios que deram origem ao que, hoje, chamamos Geometria Analítica, com o objetivo de usar pedagogicamente a história da matemática. Para isso, iniciamos a revisão de literatura quando constatamos que, embora não haja consenso entre historiadores e estudiosos de matemática sobre onde estão estes princípios, se nos trabalhos dos gregos sobre as cônicas ou nos estudos de Descartes e Fermat, não se pode negar que o nome de Descartes é freqüentemente associado à criação da Geometria Analítica.

Além disso, mesmo Descartes tendo sido uma figura controvertida que, não apenas em vida, mas em diferentes épocas, ora sofreu severas críticas ora foi reverenciado, é inegável que desempenhou um papel importante tanto no pensamento filosófico quanto no pensamento matemático.

É o que constatamos no artigo que versa sobre o desenvolvimento da Geometria Analítica escrito por Silva (1993/1994, p. 32), segundo o qual: “Para Auguste Comte foi, sem dúvida, Descartes (1596–1650) o criador da Geometria Analítica, e ainda, segundo ele, a Matemática só iniciou como ciência com Descartes”.

Levamos em conta também o fato do *Geometria* ser uma obra clássica, onde estão os princípios da Geometria Analítica, os quais podem ser enunciados como a inter-relação da álgebra com a geometria e a penetração mútua de seus métodos com a ajuda do método das coordenadas. De acordo com historiadores da matemática, esse fato representou um fenômeno revolucionário na Matemática e foi sob a influência dessa obra que a Geometria Analítica se desenvolveu. Fermat também compôs um livro contendo essas idéias; no entanto, sua obra não teve a mesma repercussão que a obra de Descartes.

Por essas razões optamos por estudar a obra de Descartes e nos referimos a ele como o criador da Geometria Analítica, conscientes de que ele não foi o único a se dedicar a tal estudo naquela época.

A partir dessas opções surge outro questionamento: Porque nos atemos ao livro I do *Geometria* e não a toda sua obra ou a trechos isolados dela?

Como já explicitamos, nosso interesse pela obra de Descartes vem do fato de nela estarem os princípios da Geometria Analítica e de podermos, por meio dela, resgatar historicamente a criação e o desenvolvimento dessa teoria, no caso da Geometria Analítica.

Analisar com profundidade toda essa obra não seria viável num trabalho deste porte, pois o *Geometria* é uma obra muito densa e bastante complexa. Poderíamos ter analisado trechos isolados dessa obra, no entanto perderíamos a seqüência lógica utilizada por Descartes no desenvolvimento de sua teoria, aspecto que consideramos importante de ser analisado ao trabalharmos esses conteúdos seguindo uma abordagem histórica. Além disso, os princípios da Geometria Analítica, são encontrados no livro I do *Geometria*.

Por esses motivos, optamos por analisar o livro I do *Geometria*, tentando dar profundidade à nossa análise e não perder de vista a seqüência lógica utilizada na criação de tal teoria.

Depois de termos feito estas opções, a saber, as escolhas de Descartes e do livro I de sua obra, sentimos necessidade de buscar as razões que levaram à criação de tal teoria na época em que foi escrita e não em outra. Encontrar que fatores contribuíram para que a criação da Geometria Analítica fosse atribuída, por diversos estudiosos, a Descartes.

Tentamos então reconstruir a trajetória da criação da Geometria Analítica. Para isso, fizemos uma retrospectiva histórica abrangendo o surgimento e desenvolvimento da matemática grega, não deixando de mencionar a existência de uma matemática anterior a ela, até a matemática do século XVII. Incluímos um estudo dos sistemas referenciais, das curvas e analisamos a influência da introdução de variáveis na matemática. Como o *problema de Pappus* e a existência de uma álgebra já bastante desenvolvida desempenharam um papel importante nos estudos de Descartes, fizemos recortes da história da matemática, privilegiando a abordagem destes assuntos, abandonando as referências a outros estudos que não influenciaram diretamente na criação da Geometria Analítica.

Nesse sentido, demos ênfase aos trabalhos de Apolônio, Pappus e Diofanto, não significando que a matemática dessa época fosse restrita a eles, mas por terem sido personagens que influenciaram Descartes de algum modo. Também demos ênfase aos trabalhos de matemáticos árabes e europeus que se dedicaram aos estudos de álgebra com o objetivo de seguir o desenvolvimento desse assunto ao longo da história, até chegar à época de Descartes e Fermat.

Como o objetivo dessa reconstrução histórica foi reconstruir a trajetória da Geometria Analítica seguindo as diversas abordagens dadas ao *problema de Pappus* e ao desenvolvimento da álgebra, escolhemos uma ordem cronológica do desenvolvimento histórico. Também decidimos por uma história interna, embora não tenhamos deixado de considerar aspectos externos ao desenvolvimento da matemática ao contextualizarmos as diferentes épocas.

Depois dessa retrospectiva histórica, tentamos reconstruir historicamente a vida e a obra de Descartes, tendo o cuidado de contextualizar a época em que viveu, observar a trajetória de seus estudos e fatos que o levaram a se dedicar ao estudo das matemáticas. Optamos, ao seguir seus passos, pela ordem cronológica. Utilizamos, como fonte de pesquisa, traduções de algumas de suas obras, dentre elas, *O Discurso do Método, Meditações, Regras para Direção do Espírito* e também textos de historiadores da matemática e de estudiosos de sua filosofia.

Antes de centrarmos nossos estudos no *Geometria,* entendemos ser necessário compreender um pouco da filosofia de Descartes, analisando os caminhos que o conduziram à criação de um método baseado na matemática e, ao aplicá-lo à matemática, ter criado o que chamamos, atualmente, de Geometria Analítica.

Apesar de, ao longo deste trabalho, termos feito referências ao contexto histórico das diferentes épocas em que houve inovações ou deslocamento geográfico do centro de estudos, concentramo-nos no desenvolvimento das idéias, dos conceitos. Entendemos que, ao adotarmos essa abordagem, não prejudicamos o desenvolvimento do nosso trabalho. Ao fazer uma reflexão sobre a pesquisa histórica, Schubring (1999, p. 197) ao analisar a dicotomia entre uma abordagem *interna* ou uma abordagem *externa* quanto à metodologia da pesquisa na história da matemática, concluiu que

> na realidade, a oposição entre uma história das idéias e uma história social não existe mais. O que existe ainda, são escolhas diferentes do ponto principal do trabalho por historiadores individuais ou por grupos de historiadores.

Além disso, mesmo centrando nosso estudo na figura de Descartes, não deixamos de analisar o contexto histórico-cultural de sua época, situando suas idéias em consonância com as discussões da comunidade científica da época em que viveu. Desse modo, ao invés de considerá-lo um *herói*, consideramo-lo um produto de sua comunidade. Na concepção de Thomas Kuhn, um produto da ciência *normal*, renunciando assim a uma história feita por heróis, uma história de gênios.

Também, ao longo de toda revisão histórica, tentamos evitar anacronismo em relação ao diferentes significados que determinadas palavras assumiram em épocas diversas.

Quanto à seleção de material, utilizamos principalmente fontes secundárias, tendo o cuidado de comparar as informações constantes em diferentes fontes de uma mesma época, procurando minimizar a influência das concepções ideológicas de seus autores.

2.2. Quanto ao caráter pedagógico

Consideramos que, embora nosso trabalho tenha um cunho histórico em sua essência, ele é pedagógico uma vez que a análise do livro I do *Geometria* teve como finalidade investigar como as idéias que deram origem à Geometria Analítica podem ser inseridas no contexto pedagógico.

A partir dessa idéia, para verificar a viabilidade da inclusão da história no ensino de matemática, especialmente no ensino de Geometria Analítica, fizemos um estudo sobre as suas potencialidades pedagógicas. Concluímos que uma abordagem histórica pode tornar-se um instrumento importante a ser utilizado no ensino. Entendemos que é possível tentar acompanhar a criação e o desenvolvimento de determinada teoria matemática a partir de seu desenvolvimento histórico, construindo o conhecimento matemático a partir do resgate da história que envolve a criação e o desenvolvimento dessa teoria. Dessa forma, a história da matemática participa como uma ferramenta que ajuda o professor a ensinar pelo significado e compreensão, auxilia na construção do conhecimento matemático e possibilita a compreensão da matemática como uma ciência dinâmica. Além disso, tanto os atuais professores quanto os futuros professores ao aprenderem a Geometria Analítica segundo uma abordagem história podem se sentir incentivados a usá-la em sua prática pedagógica.

Com base nesse pressuposto, a saber, que a história da matemática pode participar na mudança de enfoque dada ao ensino da Geometria Analítica, visando à melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem de matemática, primeiramente fizemos um levantamento bibliográfico sobre o ensino da álgebra e então partimos para a análise do livro I da obra *Geometria* de Descartes.

Como nosso objetivo em analisar a obra de Descartes foi de apontar questões problematizadoras envolvendo a criação e o desenvolvimento da Geometria Analítica, preocupamo-nos essencialmente em analisá-lo como conteúdo matemático.

Para essa análise, fizemos uso de uma edição bilíngüe francês-inglês, contendo a versão original em fac-símile da obra *Geometria* de Descartes e de uma versão em espanhol de tal obra. Traduzimos o livro I e o comentamos, acrescentando explicações que entendemos ser cabíveis, tomando por base o amplo material bibliográfico consultado e o nosso conhecimento matemático de tal conteúdo. Tivemos o cuidado de analisar as informações obtidas neste material comparando seu conteúdo ao contido no livro de Descartes. Essa análise nos possibilitou reflexões de cunho pedagógico.

Como observamos na introdução do presente trabalho, quando iniciamos nossa pesquisa histórica, constatamos que a origem e o desenvolvimento da Geometria Analítica não têm a ver em nada com a seqüência de conteúdos adotada no ensino. A abordagem da Geometria Analítica, contrariamente ao que fazemos hoje, não foi iniciada pelo sistema de coordenadas, mas sim mostrando como questões de geometria podiam ser resolvidas com o auxílio da álgebra.

A partir dessas reflexões, tendo como apoio nossa experiência de mais de cinco anos, trabalhando com esse conteúdo em sala de aula no ensino médio e estudos realizados em textos escritos por educadores e historiadores da matemática, apontamos questões a partir das quais podem ser criadas situações problematizadoras para serem discutidas em sala de aula a partir do texto escrito por Descartes.

CAPÍTULO III – ANÁLISE HISTÓRICA DO DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA E DA ÁLGEBRA

3.1. Geometria e Álgebra: relações e distanciamentos

É atribuído a Descartes, matemático e filósofo francês, que viveu no século XVII de nossa era, a criação da Geometria Analítica, mas as questões das quais ela originou-se já haviam sido estudadas anteriormente. Uma destas questões foi o *problema de três e quatro retas*, também conhecido como *problema de Pappus*. Este problema foi estudado por Euclides, em 300 a.C., depois foi resolvido por Apolônio de Perga no século II a.C., revisto por Pappus no século IV d.C. e finalmente generalizado por Descartes no século XVII, para n retas, e resolvido através de um novo método, a Geometria Analítica.

Segundo alguns autores Apolônio poderia ter sido o criador da Geometria Analítica. Um dos motivos que impossibilitou esse fato foi a limitação imposta pela álgebra geométrica utilizada, nessa época, pelos gregos, além da falta de uma álgebra simbólica. Os problemas que hoje são abordados com ajuda de álgebra eram tratados pelos gregos geometricamente.

Mas por que, na matemática grega se utilizava uma álgebra geométrica? O que significa álgebra geométrica? Como se deu a criação da álgebra simbólica? Por que motivo se considera que a Geometria Analítica só foi criada no século XVII? Que fatores impediram a sua criação em uma época anterior, se as questões das quais ela surgiu já haviam sido postas no século II a.C.?

Para que essas questões possam ser respondidas, é preciso fazer uma retrospectiva histórica, abrangendo o surgimento e desenvolvimento da matemática grega e o progresso, ao longo dos tempos, da álgebra.

Iniciar nosso estudo com a matemática grega não significa adotar a idéia de que antes dos gregos não tenha havido matemática. Pelo contrário, entendemos que a história das matemáticas faz parte da própria história da humanidade.

Os diferentes povos primitivos tiveram diferentes formas e vias de desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos, mas tinham em comum os conceitos básicos da matemática, como números, figuras e medidas. Por exemplo, as civilizações da América, como os Maias, na América Central, que alcançaram o auge por volta de 200 a 900 de nossa era; os Astecas, na América Central, a partir do século XI; e os Incas, na América do Sul, a partir dos meados do século XIII. Todos esses povos tiveram um desenvolvimento matemático independente daquele da Eurásia e África.

A sociedade oriental, especialmente egípcios e babilônios, a partir do segundo milênio a.C., desenvolveu uma matemática que consistia em um conjunto de regras isoladas deduzidas da experiência e ligadas a problemas práticos. O que se conhece da matemática do Egito Antigo se encontra principalmente no Papiro de Rhind, que data de aproximadamente 2000 a.C. Da matemática da Babilônia Antiga, conjunto do que hoje chamamos estados situados entre os rios Tigre e Eufrates, o que se conhece está nas tablitas de argila encontradas. A tradição matemática dos babilônios durou até cerca de 200 a.C. Segundo análise de Struik (1989, p. 45-46) em sua obra *História Concisa das Matemáticas*,

> A ênfase inicial foi dada naturalmente à aritmética prática e à medição. Porém, uma ciência cultivada durante séculos como um ofício especial e cuja tarefa não é apenas aplicar, mas também ensinar os seus segredos desenvolve tendências para a abstração. Gradualmente, ela virá a ser estudada por si própria. A aritmética transformou-se em álgebra, não só porque possibilitava melhores cálculos práticos, mas também porque era o resultado natural de uma ciência cultivada e desenvolvida nas escolas dos escribas. Pelas mesmas razões, a medição deu origem aos começos – mas não mais do que isso – da geometria teórica.

A civilização grega surgiu nos últimos séculos do segundo milênio a.C., quando a Bacia do Mediterrâneo foi palco de grandes transformações econômicas e políticas. Naquela época, ao mesmo tempo em que Egito e Babilônia reduziram seu poder, surgiram novos povos, dentre eles, os Gregos. Durante o século VII e VI a.C. sobrevieram as cidades-estado gregas, com uma estrutura diferente do que se conhecia então. Os gregos estabeleceram uma nova organização social que possibilitou o aparecimento de um homem com outra mentalidade. Os proprietários de terra já não tinham poder absoluto, precisavam lutar com uma nova classe social, uma classe de mercadores, independente e politizada. Essa classe podia usufruir algum lazer e filosofar acerca do mundo. A ausência de uma religião instituída, além de levar os habitantes a um tipo de misticismo, estimulou o desenvolvimento de uma visão científica do mundo.

Com o surgimento da civilização grega, o interesse da matemática deixou de ser exclusivamente prático para tornar-se uma discussão intelectual e filosófica de princípios.

> Os primeiros estudos da matemática grega tinham um objetivo principal: compreender o lugar do homem no universo de acordo com um esquema racional. A matemática ajudava a encontrar a ordem no caos, a ordenar as idéias em seqüências lógicas, a encontrar princípios fundamentais. (STRUIK, 1989 p. 73).

Nessa matemática não era suficiente a pergunta *Como*, se colocava também a questão *Por quê?*.

Em relação às razões pelas quais a matemática grega deixou de ser um conhecimento prático-dedutivo para tornar-se um conhecimento dedutivo, não há unanimidade entre os historiadores. Não existem fontes que nos dêem o panorama da matemática grega nos primeiros anos de sua formação. É preciso buscar as informações em comentadores posteriores e em pequenos fragmentos transmitidos por autores mais recentes, o que ocasiona opiniões diversas a esse respeito.

Szabó , no artigo *Transformação da matemática em ciência dedutiva e o início da fundamentação sobre definições e axiomas* citado por Brito (1995, p.24) analisa três diferentes possibilidades do porquê dessa transformação.

> Segundo ele, o primeiro tipo de explicação relaciona o surgimento da matemática dedutiva ao avanço sócio-político-cultural do estado grego; ao desenvolvimento da dialética, entendida como a arte da disputa de argumentos entre debatedores; e ao estágio de evolução lógica dessa cultura. Um segundo tipo de resposta à questão seria que os gregos herdaram um conhecimento matemático considerável dos egípcios e dos babilônios. Porém as prescrições da matemática oriental de diferentes origens nem sempre eram conciliáveis. Por exemplo, a fórmula para a área do círculo encontrada pelos babilônios era $3r^2$, já os egípcios utilizavam a fórmula $\left(\left(\frac{8}{9}\right)2r\right)^2$. Os gregos viram-se obrigados a decidir quais das fórmulas eram corretas e isso os levou para o caminho da dedução, da demonstração matemática. A última tentativa para elucidar esse fato compara o desenvolvimento da matemática dedutiva e sua fundamentação sobre definições e axiomas com o nascimento da lógica Aristotélica.

Mas, segundo a maioria dos historiadores, Tales de Mileto (624–548 a.C.) foi o primeiro a aplicar procedimentos dedutivos da filosofia grega à geometria. Os resultados obtidos por ele foram importantes, não tanto por seu conteúdo, mas por terem sido obtidos a partir de raciocínios lógicos e dedutivos, ainda que de forma parcial e incompleta.

Depois de Tales, Pitágoras (580–500 a.C.) aprimorou os aspectos dedutivos da matemática. Fundou a famosa Escola Pitagórica, que além de ser um centro de estudos de filosofia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade estreitamente unida por ritos e cerimônias secretas. Essa Escola deu inúmeras e grandiosas contribuições para a matemática ao estudar as propriedades dos números, a aritmética, bem como ao estudar a geometria, a música e a astronomia.

A matemática pitagórica começou sob influência babilônica. Inicialmente, os pitagóricos dedicaram-se ao estudo das propriedades dos números inteiros, ou seja, questões pertencentes à aritmética. Para os pitagóricos, a essência de tudo podia ser explicada em termos das propriedades intrínsecas dos números inteiros e suas razões, mas, em algum momento, a aritmética cedeu lugar à geometria pura. Supõe-se que um dos motivos para essa mudança tenha sido a descoberta da incomensurabilidade, que praticamente redimensionava a fé pitagórica nos inteiros, levando-os a dar primazia à geometria.

Quando e como aconteceu a descoberta da incomensurabilidade não se sabe ao certo. É provável que tal descoberta não tenha sido divulgada imediatamente. A sugestão mais aceitável é a de que essa descoberta tenha sido feita pelos próprios pitagóricos antes de 410 a.C. ao comparar o lado e a diagonal do quadrado. Porém, há controvérsias, indicando a possibilidade de que tal descoberta tenha ocorrido ao comparar a diagonal e o lado do pentágono regular. O polígono cujos vértices são as intersecções das diagonais de um pentágono regular é um pentágono regular menor e tomando-se as intersecções das diagonais desse novo pentágono obtém-se outro pentágono menor, sendo possível continuar esse processo indefinidamente. Dessa forma, chega-se a conclusão de que a razão entre a diagonal e o lado do pentágono regular não é racional, ou seja, que a diagonal e o lado do pentágono regular são incomensuráveis. Mas, independente da forma como apareceu a incomensurabilidade, o certo é que, a partir dessa descoberta, a matemática sofreu profundas modificações, passando a haver predomínio do que hoje denominamos álgebra geométrica sobre a aritmética.

Na álgebra geométrica, as operações algébricas como somas, diferenças, produtos, quocientes e raízes quadradas, bem como suas propriedades, eram efetuadas e demonstradas geometricamente. Para isso, os gregos criaram processos geométricos como o método das proporções e o método de aplicação de áreas. Parte considerável dessa álgebra geométrica é creditada aos pitagóricos, sendo atribuída a eles a origem desses métodos.

A álgebra geométrica exigia homogeneidade nos termos de uma equação, o que representava uma limitação à matemática. Não podia haver soma de segmentos com áreas nem de áreas com volumes. Resolver a equação que hoje escrevemos $x^2 + ax = b^2$ significava determinar um segmento de reta x tal que o quadrado construído sobre ele acrescentado de um retângulo construído sobre o mesmo segmento de reta x e sobre um segmento de reta a, resultaria em um retângulo de área igual a um quadrado dado. A equação linear $ax = bc$, era considerada como uma igualdade entre as áreas ax e bc e não como a igualdade entre as razões $a/b = c/x$.

Apolônio de Perga (262–190 a.C.) viveu em Alexandria, foi astrônomo de renome e estudou diversos assuntos matemáticos, sendo conhecido na época como *o grande geômetra*. Sua obra principal foi *As Cônicas*, na qual apresentou um estudo exaustivo das secções cônicas, chegando a dar as equações da elipse, hipérbole e parábola, na linguagem geométrica utilizada naquela época. A importância dessa obra, não reside apenas no fato de conter resultados novos, mas devido à metodologia e renovação conceitual contida nas demonstrações geométricas apresentadas por Apolônio. Nessas demonstrações, apareceu pela primeira vez, ainda que em forma incompleta, a idéia de sistema de coordenadas, no modo da teoria dos diâmetros conjugados. Diâmetros conjugados são o próprio diâmetro de uma elipse ou de uma hipérbole e o diâmetro formado pelos pontos médios de um conjunto de cordas paralelas ao diâmetro da elipse ou da hipérbole.

Apolônio demonstrou que a reta traçada pela extremidade do diâmetro da elipse ou da hipérbole, sendo paralela ao diâmetro conjugado, é tangente à cônica, isto é, conforme o conceito grego estático de tangente a uma curva, a reta tocará a cônica e nenhuma outra reta cairá entre ela e a cônica (Figura 1). Apolônio usou o diâmetro e a tangente em sua extremidade como um sistema de referência de coordenadas e estabeleceu, na forma retórica[6], as equações das curvas, relacionando o que hoje chamamos abcissas e suas ordenadas.

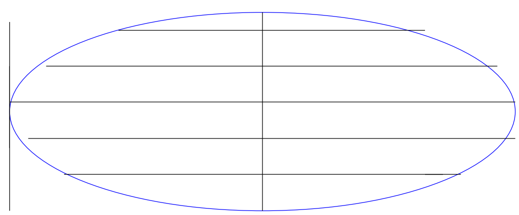


Figura 1: Diâmetros conjugados

No livro III, Apolônio resolveu o *problema do lugar com relação a três ou quatro retas*. Problema do lugar geométrico é aquele que tem por objetivo descobrir um conjunto de pontos que satisfaça a uma determinada condição. Por exemplo, o lugar geométrico dos pontos do plano que estão situados a uma mesma distância de determinado ponto desse mesmo plano é uma circunferência.

O problema com relação a três ou quatro retas é comentado por Pappus em seu sétimo livro da *Coleção* como segue:

> [...] Se três linhas são dadas em posição e se linhas retas são traçadas de cada uma a um mesmo ponto fazendo ângulos determinados com as três retas dadas e se lá é dada a razão do retângulo contido por duas das linhas assim traçadas e o quadrado da

[6] Pelo fato dos matemáticos da Antigüidade não possuírem uma álgebra desenvolvida não tinham um simbolismo adequado. Faziam então uso da forma retórica, na qual os argumentos de resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos.

> outra, o ponto fica no lugar sólido dado em posição, isto é, numa das três secções cônicas. Da mesma forma, se linhas são traçadas fazendo ângulos determinados com quatro linhas retas dadas em posição e se o retângulo de duas linhas assim traçadas conduzem uma razão determinada ao retângulo da outras duas; então de certa forma, o ponto fica em uma secção cônica dada em posição [...] (DESCARTES, 1954, p. 21)

Em termos atuais, a questão em relação a quatro linhas é explicada e ilustrada (Figura 2) por Gaukroger (2002, p. 269) da seguinte forma:

> [...] são dadas quatro retas, nas posições AB, BD, CD e AC. Temos que descobrir o lugar geométrico dos pontos P, a partir do qual é possível traçar as linhas PQ, PR, PS e PT até as quatro retas, sempre fazendo com que cada uma delas forme o mesmo ângulo com a linha com que se encontra, de tal modo que PQ.PR mantenha sempre uma determinada proporção com PS.PT. O lugar geométrico é uma cônica que passa pelas quatro intersecções (A, B , C, D) das quatro linhas.

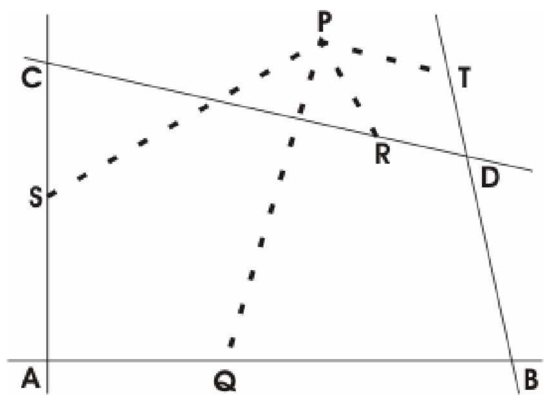


Figura 2: Problema de três e quatro retas

Apolônio, após mais de 50 proposições enunciadas e demonstradas geometricamente[7] chegou ao lugar procurado: a uma das secções cônicas.

Por meio desse estudo, Apolônio poderia ter criado a Geometria Analítica, mas não a criou por diversas razões. Uma das razões foi o fato de que na geometria

[7] Os gregos faziam uso do que Lorenzo (1989, p. 49) chamou *Estilo geométrico*. Para ele, estilo abrange a natureza da Matemática, seus métodos e sua linguagem. O *estilo geométrico* dá ênfase ao aspecto axiomático-dedutivo. Emprega símbolos em aspecto espacial, como representação fiel do objeto. Apesar do rigor utiliza a intuição sensível nas demonstrações. Esta intuição está presente no 5º postulado de Euclides e em toda sua obra, através do uso de símbolos: as figuras geométricas, sem as quais muitas proposições seriam indemonstráveis ou mal explicadas.

grega considerava-se que, o que hoje denominamos, equações era determinadas por curvas, mas não que curvas pudessem ser definidas por equações. Assim, não era suficiente definir curvas abstratamente como lugares satisfazendo a condições dadas sobre, o que hoje denominamos, coordenadas. Para garantir que um lugar fosse realmente uma curva era necessário exibi-lo como uma secção de um sólido ou descrevê-lo por um processo cinemático de construção. Outra razão: poucos tipos de curvas eram estudados, como as secções cônicas, a quadratriz de Hípias (c. 425 a.C.), a espiral de Arquimedes (c. 287 a.C.), a conchóide de Nicomedes (c. 240 a.C.) e a cissóide de Dioclés (c. 180 a.C.), não havendo necessidade de obter métodos gerais. Por fim, como já foi mencionado anteriormente, as limitações da álgebra geométrica, utilizadas pelos gregos e a falta de uma álgebra simbólica foram fatores decisivos para o não desenvolvimento da Geometria Analítica por Apolônio.

No final do século II a.C., o auge da geometria grega chegou ao fim. Os fatos que marcaram esse fato foram a morte de Apolônio e o declínio da cultura grega. Somou-se a esses acontecimentos a complexidade e as deficiências apresentadas pela álgebra geométrica utilizadas na geometria. Era necessário um meio de comunicação oral para transmitir a geometria, pois para seguir a seqüência de idéias era preciso acompanhar a construção de diagramas com as explicações correspondentes. Estas deveriam ser dadas oralmente; no entanto, as escolas de instrução direta não sobreviveram à ocupação romana que foi iniciada nessa época.

Com o advento do império romano, um espírito cosmopolita dominou os centros culturais. A matemática que se desenvolveu nos três séculos posteriores foi a matemática aplicada. Os problemas de geometria pura passaram a segundo plano e só eram examinados quando necessários em alguma área de aplicação. Nesse período, predominaram estudos nas áreas de astronomia e geografia, óptica e mecânica e na trigonometria. A aritmética e a álgebra também ganharam espaço.

Segundo Kline (1972), nos trabalhos relacionados à aritmética desenvolvidos por Arquimedes e Apolônio no século III a.C. e por Ptolomeu no século II d.C., aquela matéria ainda se encontrava ligada à geometria e era usada para calcular grandezas geométricas. Mesmo assim, esses trabalhos representaram um passo em direção ao ressurgimento da aritmética e ao nascimento da álgebra como matérias independentes da geometria. No século I d.C., com Heron e Nicômaco e, posteriormente, no final do século III e início do século IV, com Diofanto, os problemas aritméticos e algébricos foram tratados por si mesmos e não em dependência da geometria.

Heron formulou e resolveu problemas algébricos mediante procedimentos aritméticos puros. Por exemplo, resolvia o problema *dado um quadrado tal que a soma de sua área e seu perímetro é 896 pés, determinar seu lado* completando quadrados[8]. Descrevia as operações a serem realizadas, sem demonstrar nada. Em sua obra *Geométrica*, ao referir-se à soma de área, circunferência e diâmetro, supõe-se que se reportava à soma de seus valores numéricos, ou seja, dava continuidade à prática dos babilônios para quem áreas e comprimentos eram palavras usadas para exprimir incógnitas aritméticas. Muitas vezes, identifica-se o trabalho de Heron com o início do declínio da geometria grega.

Nicômaco escreveu o *Introductio Arithmetica* que, de acordo com Kline (1972), foi o primeiro livro no qual a aritmética, no sentido da teoria dos números, era tratada com total independência da geometria.

[8] Em notação atual o problema consiste em encontrar x tal que $x^2 + 4x = 896$. Heron soma 4 a cada membro obtendo $x^2 + 4x + 4 = 900$, ou seja, $(x+2)^2 = 900$. Então, extraindo a raiz quadrada obtém-se $x + 2 = 30$. Daí têm-se $x = 28$.

> A *Introductio* teve valor porque é uma apresentação sistemática, ordenada, clara e ampla da aritmética dos inteiros e as razões de inteiros, livre da geometria. Não era original quanto às idéias, mas foi uma recompilação de grande utilidade. Incorporava propriedades especulativas, estéticas, místicas e morais dos números, mas nenhuma aplicação prática. A *Introductio* foi o texto habitual de aritmética durante mil anos. Em Alexandria, a partir da época de Nicômaco, a aritmética se converteu em tema de estudo favorito, acima da geometria. (KLINE, 1972, p. 190)

Nessa época a álgebra também passou a ser trabalhada pelos gregos através de problemas que eram resolvidos por meio de técnicas algébricas. Alguns desses problemas eram os mesmos dos textos babilônios ou do papiro de Rhind e foram escritos em forma literária sem qualquer simbolismo ou demonstração dos métodos empregados em suas resoluções.

O ponto culminante da álgebra foi alcançado com Diofanto (246–330 d.C.), que considerado o pai da álgebra. Esse estudioso teve grande importância para o desenvolvimento da álgebra como matéria independente de geometria e exerceu influência sobre matemáticos europeus do Renascimento que se dedicaram à teoria dos números.

A obra mais importante de Diofanto foi *Arithmética* e, embora possa ser comparada aos grandes clássicos da Antigüidade, quase nada tem em comum com a matemática grega tradicional. Em linguagem atual, diríamos que se trata de uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números. Grande parte dos problemas que constam dessa obra tiveram motivações geométricas, mas a forma de Diofanto resolvê-los não foi com uso de régua e compasso através de esquemas geométricos, mas sim expressando todas as quantidades desconhecidas em função de apenas uma delas.

Na *Arithmética,* Diofanto não tratou de operações algébricas ou das funções algébricas, mas apresentou uma coleção de 189 problemas de aplicações de álgebra. Esses problemas eram estudados em termos numéricos específicos e as equações eram apresentadas com números determinados e, para ilustrar a resolução de equações do 2º ou 3º graus, por exemplo, Diofanto propunha um problema particular de origem geométrica que dependesse dessa equação, supondo que em outros casos o procedimento seria o mesmo.

> Desta maneira, o aspecto algébrico da obra de Diofanto é baseado no pioneirismo em que as soluções são encontradas para um problema particular e, com o decorrer da exposição vão se acumulando regras de manipulação de equações, algumas altamente engenhosas, dependendo de artifícios sutis que demonstram a grande capacidade de seu autor. (LINTZ, 1999, p. 365)

Um esquema que chegou perto de ser um método geral foi o de, ao resolver um problema que requeria dois números que satisfizessem duas condições simultaneamente, escolhia os dois números de modo a satisfazer uma das condições, para depois atacar o problema de satisfazer a outra condição. Por exemplo, ao *achar dois números tais que sua soma fosse 20 e a soma dos quadrados 208*, os números eram representados, em notação atual, por $(10 + x)$ e $(10 - x)$. Daí, também em notação atual, $(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208$ e então se chegava a $x = 2$.

Sua maneira de executar as operações era completamente aritmética, não buscava na geometria a justificativa de suas afirmações.

Diofanto aplicou identidades algébricas, resolveu problemas que conduziam a diversos tipos de equações, tais como equação de 1º grau com uma ou mais incógnitas, equações indeterminadas de 2º grau, equações lineares com duas incógnitas, equações quadráticas, equações quadrática simultâneas e expressões cúbicas ou de maior grau que deviam ser igualadas a um número quadrado. Também reduziu todas as equações quadráticas a cinco tipos.

Diofanto não fazia distinção clara entre problemas determinados e indeterminados. Suas resoluções eram apresentadas em texto contínuo e não buscavam idéias gerais, mas solução correta para os problemas. A álgebra de seu tempo não admitia os números irracionais, nem os negativos e tampouco os imaginários, por isso desprezava as equações que tinham tais soluções. Em geral, apresentava apenas uma solução, positiva e racional, para os problemas; as raízes negativas de equação de 2º grau não eram consideradas e quando a equação apresentava duas soluções positivas, só considerava a maior. A apresentação de solução única se justificava pelo fato de que Diofanto não se propunha a resolver uma *equação*, mas sim a resolver um *problema*. As equações, até então, não tinham sentido por si próprias.

A *Arithmética* foi uma obra importante não só pelo enfoque dado às equações, mas também pela introdução do uso de abreviações para potências de números e para relações e operações. Diofanto podia escrever equações quase tão resumidamente como atualmente. Usava símbolos para representar um número desconhecido, abreviações para representar as potências desse número até a de expoente seis, coeficientes numéricos escritos após os símbolos das potências a que estivessem associadas, representações de adição por justaposição adequada dos símbolos para os termos e subtração representada por uma abreviação da letra colocada antes dos termos a serem subtraídos. A criação desse simbolismo foi muito importante para o desenvolvimento da álgebra posterior.

A álgebra de Diofanto estava mais próxima da álgebra herdada dos babilônios do que de seus predecessores gregos. Preocupava-se em encontrar soluções corretas para os problemas, resolvendo cada um deles sem classificá-los ou dar soluções gerais. Tanto Diofanto quanto Heron e Nicômaco seguiram a metodologia dos textos egípcios e babilônios no que se refere à álgebra e à aritmética, dizendo como fazer as coisas, sem se preocuparem em dar demonstrações dedutivas e ordenadas. Os diferentes tipos de números – inteiros, fracionários e racionais – não estavam realmente definidos. Não existia base axiomática sobre a qual se pudesse levantar uma estrutura dedutiva. As demonstrações dedutivas de Euclides e Apolônio haviam sido esquecidas; por isso, a aritmética e a álgebra foram desenvolvidas sem nenhuma estrutura lógica, preocupações que, mais tarde, iriam tomar conta dos matemáticos europeus.

Se, por um lado, Diofanto dedicava-se ao estudo da álgebra, por outro, Pappus tentava reacender o interesse pela geometria. Pappus de Alexandria viveu do final do século III ao início do século IV d.C. Foi comentador e geômetra. Sua obra mais importante é a *Coleção*, que consta de oito livros e foi composta em aproximadamente 320 d.C. Nela, estão incluídos trabalhos de mais de trinta matemáticos da Antigüidade, além de numerosas proposições originais e generalizações novas, muitas destas, generalizações de teoremas já existentes.

No livro III Pappus comentou a diferença entre um teorema e um problema, destacando que num teorema deve-se provar algo, ao passo que num problema deve-se construir algo que satisfaça condições preestabelecidas. Introduziu a classificação dos problemas em planos, sólidos e lineares. Um problema era chamado plano quando podia ser resolvido por retas e círculos, ou seja, com o uso de régua e compasso[9]; sólido quando sua solução requeria uso de secções cônicas e era linear quando sua solução exigia construção de outras curvas que não retas,

[9] Segundo Eves (1992, p. 29) Euclides em sua obra *Elementos* não menciona o uso de régua (sem escala) e compasso *dobradiço* (fechava-se assim que uma das partes era retirada do papel). Entretanto nos três primeiros postulados são enunciadas as construções permitidas: (1) traçar uma reta por dois pontos; (2) prolongar uma reta limitada continuamente segundo uma reta e (3) descrever um círculo com qualquer centro e qualquer distância. Estas construções são equivalentes ao uso de régua e compasso. É atribuído a Platão (390 a.C.) a restrição ao uso destes instrumentos para construções.

círculos e cônicas, tais como espirais, cissóides, etc. Pappus descreveu algumas tentativas de soluções dos três famosos problemas da Antigüidade[10], classificando a duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo como problemas sólidos e a quadratura do círculo como problema linear.

No livro IV, abordou questões importantes da geometria. Esse livro contém grande quantidade de novos resultados. Pappus insistia no fato de que cada problema devia ser resolvido com uma construção adequada a ele. Assim, lugares lineares não deviam ser usados para resolver problemas sólidos, nem lugares sólidos ou lineares para resolver problemas planos.

No livro VII, há uma descrição detalhada do que se chama o método de análise e dos trabalhos que constituem *O Tesouro da Análise*. *O Tesouro da Análise* é uma coleção abrangendo obras de Euclides, Apolônio, Aristeu e Erastóstenes, cujos conteúdos eram considerados essenciais para aqueles que quisessem se tornar capazes de resolver problemas envolvendo curvas. Uma das obras incluídas no *Tesouro da Análise* é *Porismas* de Euclides. Um porisma era um equivalente a uma equação para uma curva ou lugar geométrico. Daí sugere-se que Euclides e Apolônio não estariam tão longe quanto se pensa do que chamamos Geometria Analítica.

Nesse livro, há também uma discussão do famoso *lugar relativo a três ou quatro retas*, o qual passou a ser conhecido como *problema de Pappus*. Esse problema já tinha sido proposto por Apolônio, mas Pappus deu a impressão de que ele foi o primeiro a ampliá-lo para cinco e seis retas. Pappus verificou que, para seis

[10] Os três famosos problemas da Antigüidade são problemas que foram amplamente discutidos, em diferentes épocas e que não podem ser resolvidos com uso de régua e compasso. (1) Quadratura do círculo: trata-se de construir um quadrado cuja área é igual à área de um círculo dado; (2) Trissecção de um ângulo: trata-se de dividir um ângulo dado em três partes iguais e (3) Duplicação do cubo: trata-se de encontrar uma construção geométrica da aresta de um cubo cujo volume seja o dobro de um cubo dado.

retas, o lugar geométrico é uma curva cujos pontos são determinados pela condição de o produto das distâncias desses pontos a três destas retas está numa razão fixa para o produto das distâncias dos mesmos pontos às outras três. Essa curva podia ser determinada, pois era estabelecida uma razão entre dois sólidos.

Para os matemáticos gregos da Antigüidade, só tinham sentido resultados que pudessem ser representados geometricamente. Assim um produto entre duas linhas tinha sentido por representar a área de um retângulo cujos lados eram essas linhas e, da mesma forma, o produto entre três linhas também tinha sentido por representar o volume de um sólido cujas dimensões eram essas linhas. Eles não concebiam o produto de quatro linhas ou mais por não ser possível estabelecer um sentido geométrico para esse resultado. Em conseqüência desta concepção, as curvas podiam ser definidas através de produtos de no máximo três linhas.

Por isso, mesmo percebendo que para qualquer número de retas uma curva específica ficaria determinada, Pappus não vai além das seis retas. Outro motivo que impediu Pappus de criar a Geometria Analítica, foi o fato de não ter utilizado a álgebra desenvolvida por Diofanto, o qual tinha usado expressões como quadrado-quadrado para potência quatro e cubo-cubo para potências seis, criando a possibilidade de ser estabelecido um produto de mais de três linhas.

Mas, Pappus era somente geômetra e Diofanto somente algebrista. Foi preciso esperar cerca de treze séculos até que aparecesse Descartes para estabelecer uma ligação entre a álgebra e a geometria e então criar a Geometria Analítica utilizando como ponto de partida esse mesmo problema.

Depois de Pappus, poucos resultados matemáticos significativos foram alcançados pelos gregos. Posteriormente apareceram alguns comentadores, mas juntamente com a queda do império romano veio o fim da hegemonia grega.

A matemática grega desenvolveu-se do século VI a.C. ao século VI d.C. embora não tenha mantido um desenvolvimento estável, tendo períodos de intensa atividade e outros períodos de declínio.

> Estudaram (os gregos) as secções cônicas: elipse, hipérbole e parábola; demonstraram certos teoremas relativos aos elementos do que se chama geometria projetiva; guiados pelas necessidades da astronomia, desenvolveram a geometria esférica (no século I d.C.) e os elementos da trigonometria e calcularam as primeiras tábuas de senos (Hiparco no século II a.C. e Cláudio Ptolomeu no século II d.C.); determinaram as áreas e volumes de diversas figuras complexas; por exemplo, Arquimedes encontrou a área do segmento de uma parábola demonstrando que é 2/3 da área do retângulo que o contém. Os gregos também conheciam o teorema que diz que, de todos os corpos de área superficial dada, a esfera é a de maior volume, mas sua demonstração não se tem conservada nem é provavelmente completa. (ALEKSANDROV, 1994, p. 57-58)

Porém, no século VI o centro de estudos deslocou-se para o Oriente e, embora essas civilizações fizessem estudos sobre geometria, sua preocupação primordial era com operações aritméticas e métodos algébricos.

A civilização hindu é anterior ao ano 2000 a.C., mas não há registro de qualquer tipo de matemática hindu antes de 800 a.C. De 800 a.C. a 200 d.C. há registro de alguma produção matemática na Índia, bastante rudimentar.

No ano 600, com o uso dos nove símbolos para os números de 1 a 9, adotaram a notação posicional de base 10. O zero que era utilizado pelos alexandrinos só para indicar espaço vazio, adquiriu sentido como número e foi definido seu comportamento nas operações. Utilizaram frações como razões de inteiros, sem a barra horizontal para separar numerador do denominador e suas operações aritméticas eram muito parecidas com as atuais. Introduziram os números negativos para indicar dívidas, e criaram as regras das quatro operações com esses números, mas não os adotaram de modo incondicional, pois em soluções de problemas só consideravam valores positivos. Não admitiam raízes quadradas de números negativos. Sua grande contribuição na aritmética foi o modo de encarar os números irracionais, admitindo que tivessem as mesmas propriedades dos inteiros.

> Os hindus eram menos sofisticados que os gregos na hora de detectar as dificuldades lógicas implícitas no conceito de número irracional. Seu interesse no cálculo lhes fez passar por cima de considerações filosóficas, ou questões que os gregos acreditavam ser fundamentais. Não obstante, ao aplicar alegremente aos irracionais métodos semelhantes aos usados com os racionais ajudaram no progresso das matemáticas. Ademais, toda sua aritmética foi completamente independente de sua geometria. (KLINE, 1972, p. 252)

Na álgebra, usaram abreviaturas de palavras e alguns símbolos para descrever as operações, superando a simbologia de Diofanto. Quando havia mais de uma incógnita, a primeira era denominada incógnita e as outras eram denominadas por cores. Escreviam os problemas e suas soluções utilizando essa simbologia, sem justificativas ou demonstrações.

Em relação às equações, os hindus avançaram mais que Diofanto. Usavam o método de completar quadrado para resolver equações quadráticas e admitiam duas raízes incluindo as negativas e irracionais. O procedimento para encontrar as soluções inteiras da equação $ax + by = c$ é o mesmo utilizado atualmente. Trabalhavam também com equações quadráticas indeterminadas. A álgebra hindu era aplicada principalmente na astronomia, embora também fosse aplicada a problemas de comércio.

Os árabes também desempenharam um papel importante na álgebra. O império muçulmano estendia-se da Índia à Espanha, incluindo o norte da África e o sul da Itália , resultado de conquistas obtidas de 632, após a morte de Maomé, até 750. A partir de então, os árabes passaram a interessar-se pelas artes e pela ciência, absorvendo a cultura dos povos dominados. Convidaram cientistas hindus a virem para sua capital Bagdá, estabeleceram contatos com os gregos do Império

Bizantino e tiveram sob seu domínio os centros culturais da época. Desse modo, os árabes tinham acesso a todo trabalho científico importante da época.

Por volta de 800 d.C., obtiveram uma cópia dos *Elementos* de Euclides que traduziram para o árabe. Posteriormente traduziram obras de Ptolomeu, Aristóteles, Apolônio, Arquimedes, Heron e Diofanto, incluindo muitas vezes comentários. Algumas dessas obras, perdidas nos originais gregos, puderam ser encontradas mais tarde na Europa graças a sua versão árabe.

A civilização árabe foi dinâmica e sua cultura se difundiu amplamente até 1300. De 1100 a 1300, época das Cruzadas, os árabes orientais sofreram ataques dos cristãos, enfraquecendo militarmente e em conseqüência seu território foi invadido e conquistado pelos mongóis. Em 1492, os cristãos derrotaram os árabes ocidentais. Não seguiremos as numerosas transformações políticas e etnológicas no mundo islâmico, mesmo que tenham trazido altos e baixos para o desenvolvimento da astronomia e da matemática, mas sim trataremos de alguns aspectos relevantes especialmente quanto ao desenvolvimento da matemática árabe.

Da aritmética hindu, os árabes adotaram e melhoraram os símbolos numéricos e sua idéia de notação posicional. No livro *De numero hindorum* (*Sobre a arte hindu de calcular*) de al-Khowarizmi, de quem se sabe apenas que morreu pouco antes de 850, há uma exposição completa dos numerais hindus.

Assim como os hindus, os árabes trabalharam naturalmente com os irracionais. Tanto Omar-Khayyam (1048?–1122) quanto Nasîr-Eddin (1201–1274) afirmaram que toda razão de grandezas podia ser considerada como um número, mesmo que fossem incomensuráveis. No entanto, não trabalharam com os números negativos, mesmo conhecendo os trabalhos dos hindus com os negativos e suas regras de operações. Também, contrariamente a Diofanto e aos hindus, os árabes, em sua abordagem matemática, apresentavam uma organização sistemática, indo das premissas às conclusões.

Na álgebra, a maior contribuição árabe é representada pela obra *Al-jabr wa'l muqabalah* (*Álgebra*) de al-Khowarizmi, escrita por volta de 830. É desse título que vem o termo álgebra. A palavra *al-jabr* significa *restauração* ou *completação* e refere-se à transposição de termos de um lado para o outro lado da equação e a palavra *muqabalah* significa *redução* ou *equilíbrio* e refere-se ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação.

> A álgebra é em essência a doutrina das operações matemáticas consideradas formalmente a partir de um ponto de vista geral, com abstração dos números concretos. Seus problemas estão relacionados fundamentalmente com as regras formais para a transformação de expressões e a solução de equações. Al-Khowarizmi colocou no título de seu livro os nomes reais de duas das regras formais mais gerais, expressando deste modo o verdadeiro espírito da álgebra (ALEKSANDROV, 1994, p. 62)

Essa idéia de equilíbrio já estava presente na teoria da Balança de Jâbir ibn Hayyân, alquimista que viveu no século VIII. Segundo pesquisas realizadas por Paul Kraus, estudioso da teoria jabiriana, a ciência da Balança englobava todos os dados do conhecimento humano e seu propósito era descobrir em cada corpo a relação que existia entre o manifesto e o oculto. A operação alquímica se apresentava como uma operação psico-espiritual, pois as fases da operação realmente realizada sobre uma matéria real coincidiam com as fases do retorno da Alma a si mesma. Para nossos dias, não têm sentido as cifras estabelecidas por Jâbir, mas na sua época era "a única 'álgebra' que podia dar conta do grau de 'energia espiritual' da Alma incorporada às Naturezas" (CORBIN, 1994, p. 128).

Por um lado a obra de Al-Khowarizmi representou um retrocesso em relação à obra de Diofanto por tratar de problemas mais elementares além de não utilizar qualquer tipo de simbolismo, apresentando uma álgebra totalmente retórica, mas por outro lado estava mais próxima da álgebra elementar de hoje, pois continha uma exposição direta e elementar de resolução de equações, principalmente de 2º grau.

Até o capítulo seis, Al-Khowarizmi fez uma exposição completa de equações, de modo bastante sistemático, contrariamente a Diofanto e aos hindus. Abrangeu as equações do tipo $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 + bx = c$ e $ax^2 = bx + c$, com a, b e c sempre positivos resolvendo aquelas que contêm três termos *completando quadrado*[11]. Adotou como raízes somente os números reais positivos, podendo ser irracionais.

A *Al-jabr wa'l muqabalah* contém uma ampla variedade de problemas que ilustram os seis casos de equações citadas. A partir de al-Khowarizmi, podia-se dizer que, depois de um problema ter sido posto em forma de equação, para resolvê-lo era suficiente operar segundo as regras de *al-jabr e muqabalah*.

A origem da álgebra árabe se deu por influência tanto dos hindus e mesopotâmicos quanto dos gregos. As equações, apresentadas em forma numérica utilizando regras arbitrárias, lembram a matemática da Babilônia antiga e da Índia Medieval; porém, pelo fato de não apresentar em sua álgebra qualquer sincopação e excluir a análise indeterminada, é mais provável que sua fonte tenha sido Mesopotâmica. A influência grega se faz presente quando al-Khowarizmi, depois de dar soluções algébricas às equações quadráticas, explica e justifica seus processos geometricamente. Após o capítulo VI, Al-Khowarizmi, citado por Boyer (1974, p.

---

[11] O problema *um quadrado e dez de raízes são iguais a 39 unidades* era resolvido completando o quadrado da seguinte maneira: "Tomemos a metade do número de raízes, isto é, neste caso, cinco e multipliquemos esta quantidade por si mesma e o resultado é vinte e cinco. Acrescentado a trinta e nove, o que dá sessenta e quatro; tomemos sua raiz quadrada, o oito e resta a metade do número da raiz, precisamente cinco, e dá um resto de três. Esta é a raiz". (KLEIN, 1972, p. 261)
Em linguagem algébrica atual temos, $x^2 + 10x = 39 \Rightarrow x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \Rightarrow (x + 5)^2 = 64 \Rightarrow x + 5 = 8 \Rightarrow x = 3$.

168), escreve: “Já dissemos o bastante, no que se refere a números, sobre os seis tipos de equações. Agora, porém, é necessário que demonstremos geometricamente a verdade dos mesmos problemas que explicamos com números”

Além de resoluções de equações, Al-Khowarizmi determinou regras para operações com expressões binomiais, inclusive de produtos do tipo $(10 + x)(10 - x)$. Isso demonstra que, apesar dos árabes rejeitarem raízes negativas, conheciam as regras para operar com números negativos.

Houve muitos outros matemáticos árabes, dentre eles merece destaque Omar Kahayyam (1050–1122), cuja obra principal tem por título *Álgebra*. Omar Kahayyam foi além de al-Khowarizmi, pois incluiu em seu trabalho, resoluções de equações de 3º grau. Acreditava que equações de 3º grau não podiam ser resolvidas através da aritmética, resolvia-as apenas geometricamente utilizando secções cônicas, idéia que já tinha sido utilizada por matemáticos antigos. Generalizou o método de resolução de equações, abrangendo todas as equações de 3º grau que possuíam raízes positivas. Ao resolver equações quadráticas, apresentava tanto soluções aritméticas quanto soluções geométricas.

Além de equações determinadas de 2º e 3º graus, os árabes também resolveram equações indeterminadas de 2º e 3º graus. Estudaram equações do tipo $x^3 + y^3 = z^3$, deram as somas das potências primeira, segunda, terceira e quarta dos n primeiros números naturais e fizeram estudos em trigonometria. Apesar disso, o maior avanço na álgebra foi representado pela resolução de equações de 3° grau por intersecção de cônicas.

> Se havia chegado assim a duas tradições ou conceitos de matemáticas independentes entre si: por uma parte, o corpo de conhecimentos lógico e dedutivo estabelecido pelos gregos, que servia para o ambicioso propósito de compreender a natureza, e por outra, as (tradições) fundamentadas empiricamente e orientadas à prática, criadas pelos egípcios e babilônios e ressuscitadas pelos gregos-alexandrinos e prolongadas pelos

> hindus e árabes. Uma favorece a geometria e a outra, a aritmética e a álgebra. Ambas tradições e ambos objetivos foram continuados e levados a cabo. (KLINE, 1972, p. 269)

Quando Toledo, na Espanha moura, caiu nas mãos dos cristãos, em 1085, os mais significativos textos árabes e gregos foram traduzidos para o latim. O século XII foi um período no qual o saber antigo, preservado pela cultura muçulmana, foi passado à Europa Ocidental através das traduções. Os *Elementos* de Euclides foi uma das primeiras obras a ser traduzida do árabe para o latim, em 1142 por Adelard de Bath (1075–1160). Mas a Europa Ocidental demonstrou maior interesse pela matemática árabe do que pela matemática grega. As obras de Al-Khowarizmi foram as mais traduzidas na época. O início dos estudos de álgebra na Europa medieval pode ser considerado como sendo o ano de 1145 quando foi feita, por Robert de Chester, uma tradução popular da *Álgebra* de al-Khowarizmi.

Naquele século, surgiram diversas exposições dos numerais hindus, ou indo-arábicos, mas a transição do sistema romano para esse novo sistema numérico foi bastante lento e só triunfou no século XVI. Um dos principais defensores desse novo sistema numérico foi Leonardo de Pisa (c.1180–1250), mais conhecido por Fibonacci, em sua obra *Liber Abaci* (*Livro do Ábaco*) de 1202. Essa obra é um tratado sobre métodos e problemas algébricos na qual se recomenda veementemente o uso dos numerais indo-arábicos, através de uma exposição dos nove símbolos hindus, juntamente com o símbolo do zero e explanação dos processos usuais aritméticos, incluindo a extração de raízes. A idéia inicial incluída nessa obra é de que a aritmética e a geometria estariam interligadas e se auxiliariam mutuamente, forma de pensar da época medieval. Fibonacci “tratou de problemas indeterminados, que lembram Diofanto, e problemas determinados, que lembram Euclides, os árabes e os chineses” (BOYER, 1974, p. 187). Aplicou com freqüência as identidades $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$, que haviam sido usadas por Diofanto e pelos árabes. Utilizava álgebra para resolver problemas geométricos seguindo a tradição dos babilônios e árabes.

Outro matemático importante desse século foi Jordanus Nemorarius ou Jordanus de Nerome, do qual se sabe apenas a data de sua morte, 1237. Seus grandes feitos em matemática foram os seguintes: ter sido o primeiro a usar letras em vez de numerais para denotar números, o que possibilitou a enunciação de teoremas algébricos gerais, e também o primeiro a dar, em forma geral, a regra equivalente à resolução de equações quadráticas. O uso de letras já tinha ocorrido anteriormente, mas não para representar números. Euclides havia usado letras para representar segmentos de retas e nas provas geométricas de Al-Khowarizmi apareciam diagramas com letras muito embora todas suas equações apresentassem números específicos como coeficientes, ou seja, ele não tinha método para representar a idéia de generalidade. Jordanus foi o primeiro a usar letras para representar números sugerindo o conceito de parâmetro, porém seus sucessores abandonaram o uso de letras com essa finalidade.

3.2. Sistemas referenciais

Segundo análise de Brito (2003, p. 67),

> As necessidades de localização sobre a superfície terrestre foram um dos motivos que fizeram com que, desde a Antigüidade, a astronomia e a geografia estivessem intimamente relacionadas à geometria.

Ptolomeu (c.85–c.165), na obra *Geografia*, utilizou um sistema de latitudes e longitudes com coordenadas numéricas praticamente igual ao que usamos atualmente, porém como não havia meios de determinar com precisão as longitudes, ocorreram erros substanciais. Conforme análise de Boyer (1974), os mapas de Ptolomeu serviram de protótipo para a construção de outros mapas até a Idade Média. No Renascimento, devido às grandes navegações, impôs-se a necessidade de melhorar os mapas, surgindo assim estudos de cartografia, como os desenvolvidos por Mercator (1512–1594). Em seu artigo *História das técnicas de localização no globo terrestre e suas relações com a geometria*, Brito (2003, p. 67) afirma que,

> [...] a maior inovação para a cartografia do século XVI veio com o geógrafo flamengo Gerard Mercator (1512 – 1594) que em 1569 publicou o primeiro mapa, *Nova at aucta orbis terrae descriptio*, baseado numa rede retangular formada de duas coleções de retas paralelas eqüidistantes, uma para as latitudes e outra para as longitudes.

Anteriormente, Apolônio no século III a.C. havia caracterizado as secções cônicas por meio do que hoje chamamos coordenadas, embora não usasse coordenadas numéricas. No século XIV, Nicole Oresme (c.1323-1382) contribuiu para o aperfeiçoamento de sistemas de coordenadas.

Nicole Oresme foi um sábio francês que se tornou bispo de Lisieux e deu contribuições ao estudo de séries infinitas e na teoria das proporções. Forneceu regras para combinar proporções equivalentes às nossas regras sobre expoentes, escritas atualmente como $x^m . x^n = x^{m+n}$ e $(x^m)^n = x^{m.n}$. Sua maior contribuição foi na sugestão daquilo que agora chamamos representação gráfica de funções. Anteriormente, houve algumas sugestões a respeito dessa representação, porém Oresme mostrou-se superior em clareza e influência. As discussões sobre a quantificação das *formas* variáveis como, por exemplo, a velocidade de um objeto móvel, estendiam-se por mais de um século e eram demasiadamente prolixas devido à falta de instrumentos de análise adequados.

> Durante o século quatorze o estudo das mudanças em geral, e do movimento em particular, foi um tópico favorito nas universidades, especialmente em Oxford e Paris. Em Merton College, Oxford, os filósofos escolásticos tinham deduzido uma formulação para o movimento de velocidade com variação uniforme, que tem o nome de regra de Merton. Expressa em termos de distância e tempo, a regra diz essencialmente que se um corpo se move com movimento uniformemente acelerado, então a distância coberta será igual à que seria percorrida por outro corpo que se deslocasse com movimento uniforme durante o mesmo intervalo de tempo com velocidade igual à do primeiro no ponto médio do intervalo de tempo. Como nós o formularíamos, a regra diz que a velocidade média é a média aritmética entre as velocidades inicial e final. (BOYER, 1974, p, 190)

Oresme conhecia esse resultado e antes de 1361 ocorreu-lhe a idéia de traçar uma figura ou gráfico da maneira pela qual variam a velocidade e o tempo para um corpo que se move com aceleração constante. Sobre uma reta horizontal, ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes) e para cada instante ele traçou, perpendicularmente à reta horizontal, um segmento de reta (ou latitudes) cujo comprimento representava a velocidade. Percebeu que as extremidades das latitudes estavam sobre uma reta e que, se o corpo partisse do repouso, todos os segmentos que representavam as velocidades preenchiam um triângulo retângulo e que a área deste retângulo era a distância percorrida pelo corpo (Figura 3)

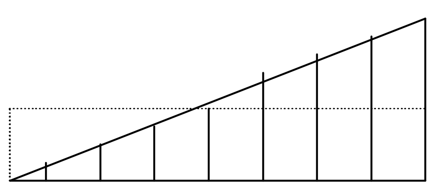


Figura 3: Latitude de formas

Os termos latitude e longitude usados por Oresme são equivalentes aos termos ordenada e abcissa usados atualmente e sua representação gráfica é semelhante a da Geometria Analítica dos dias atuais. Por estar mais interessado na área sob a curva, Oresme não se deu conta de que estava representando uma curva plana em relação ao que hoje denominamos sistema de coordenadas como uma função de uma variável, princípio fundamental da Geometria Analítica. Essa representação ficou conhecida como *latitude de formas* e continuou a ser usada até a época de Galileu.

3.3. A Álgebra no Renascimento

Depois de Oresme, iniciou-se um período de declínio na Europa Ocidental. A peste negra assolou a Europa. A Inglaterra e a França, que no século XIV tinham assumido a liderança na matemática, foram devastadas pela Guerra dos Cem Anos.

Somente no século XV, início do Renascimento, a arte e o saber ressurgiram na Europa. Com a queda de Constantinopla, ocorrida em 1453, refugiados chegaram à Itália trazendo obras gregas. Da recuperação dessas obras resultou o renascimento nas ciências. Entretanto, em relação à matemática, esse período caracterizou-se pela continuidade da tradição medieval, ou seja, a matemática continuou a desenvolver-se em álgebra, talvez por ser mais compreensível do que a matemática clássica dos gregos.

Mas a geometria não foi totalmente esquecida. Regiomontanus (1436–1476), matemático mais influente deste século, além de trigonometria, considerou problemas de construção geométrica estudados por Euclides. A diferença fundamental entre Regiomontanus e Euclides é que enquanto em Euclides os termos eram dados em quantidades gerais, Regiomontanus dava valores numéricos aos segmentos, mesmo quando pretendia que seus métodos fossem gerais. Sua álgebra era retórica como a apresentada por al-Khowarizmi.

Em 1484 Nicolas Chuquet, que morreu por volta de 1500, compôs a obra *Triparty en la science des nombres*, tratando de álgebra. Nessa obra, a álgebra é essencialmente retórica. Na primeira parte, apresentou as operações aritméticas utilizando para elas os nomes plus, moins, multiplier e partye par, para soma, adição, multiplicação e divisão respectivamente e utilizou os símbolos *p* e *m* para indicar as duas primeiras operações. Apresentou notação exponencial de grande importância para a época incluindo expoente zero e expoentes negativos. Usou notações como, por exemplo $.5.^{1}$ para $5x$, $.6.^{2}$ para $6x^2$, $.9.^{2.m}$ para $9x^{-2}$ e deu algumas leis dos expoentes como, por exemplo, representando em simbologia atual, $72x : 8x^3 = 9x^{-2}$. Na segunda metade da última parte deste livro, tratou de resoluções de equações e apresentou, pela primeira vez, número negativo isolado, como por exemplo, na equação $.4.^{1}egaulx\ a\ m.2.^{0}$, que em simbologia atual é escrito $4x = -2$. Na última parte dessa obra escreveu a *Regle des premiers*[12], ou, a *Regra das Incógnitas*.

A *Triparty en la science des nombres* é a obra mais antiga da Renascença que trata da álgebra, porém a mais conhecida é *Summa de arithmética, geometrica, proportioni et proportionalita* do frade italiano Luca Paccioli (1445–1514), de 1494. Foi a primeira obra de álgebra impressa. Escrita em italiano, continha tudo o que era conhecido naquela época sobre aritmética, álgebra, geometria e trigonometria. Continha também o primeiro tratado de contabilidade de dupla entrada. Paccioli fez uso de numerais indo-arábicos, o que já era comum naquela época, e apresentou notação aritmética não muito diferente da atual. Em álgebra incluiu a resolução usual de equações lineares e quadráticas. Paccioli no final de seu livro observou que “a solução das equações que na nossa notação atual escreve-se $x^3 + mx = n$, $x^3 + n =$

[12] No século XV e XVI diversos nomes foram dados à incógnita: *res* (latim), *chose* (francês), *cosa* (italiano), *coss* (alemão). Chuquet a chamou *premier.* A segunda potência chamava *champs*, a terceira *cubiez,* a quarta *champs de champ.*

mx parecia tão impossível no estado da ciência de então quanto a quadratura do círculo" (STRUIK, 1989, p. 145)

No começo do século XVI, surgiram muitas obras alemãs em álgebra. *Arithmética Integra*, de Michael Stifel (1487–1567) foi a mais importante pelo tratamento dado aos números negativos, radicais e potências. Por meio dessa obra foram difundidos os símbolos + para adição e – para subtração, apresentando uma regra especial de quando usá-los. *Arithmética Integra* é um tratado completo da álgebra como era conhecida até 1544, incluindo exemplos de equações quadráticas.

Contrariamente à idéia de Paccioli, em 1545 Gerônimo Cardano (1501–1576), considerado o maior algebrista da Europa, tornou pública a resolução algébrica de equações cúbicas e quárticas em sua obra *Ars magna*. Possuía uma álgebra retórica e através de resoluções de equações específicas (com coeficientes numéricos) considerava-as gerais. Quando escrevia *Seja o cubo e seis vezes o lado igual a 20*, em linguagem atual $x^3 + 6x = 20$, ele estava pensando em todas as equações que têm *um cubo e coisa igual a número*, em linguagem atual $x^3 + px = q$. No *Ars magna*, Cardano tratou todos os tipos de equações cúbicas, conforme os vários termos aparecessem de um mesmo lado ou não da igualdade. Isso pelo fato de só serem considerados coeficientes positivos. Para resolvê-las, pensava geometricamente. Assim podemos entender seu método como sendo de *completação do cubo*. Para resolver equações quárticas, separou-as em vinte casos e resolveu-as por um processo complicado, transformando-as em equações cúbicas para então proceder na sua resolução.

Segundo análise de Boyer (1974, p. 10), o método, criado por Cardano para resolução de equações cúbicas e quárticas, pode ter sido a maior contribuição à álgebra desde que os babilônios descobriram como resolver equações quadráticas completando quadrados, quatro milênios antes, mesmo não sendo tão útil para aplicações práticas quanto o método de aproximações sucessivas utilizado na época. As descobertas de Cardano, além de provocarem um impulso nos estudos relacionados à álgebra, também impuseram observação a uma nova espécie de números, as raízes quadradas de números negativos, que até então tinham sido evitadas. Uma equação como $x^2 = -2$ era considerada não resolúvel, assim não havia necessidade de serem consideradas raízes quadradas de números negativos. Porém, na resolução da equação $x^3 = 15x + 4$, encontrava-se, pela fórmula de Cardano, $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Por outro lado, sabia-se, por substituição, que o número 4 era raiz da equação e Cardano sabia que tal equação tinha uma só raiz positiva. Bombelli mostrou o papel importante que os números, hoje chamados imaginários, iriam futuramente desempenhar ao chegar a conclusão que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ deveria ter a forma $2+b\sqrt{-1}$ para que x = $2+b\sqrt{-1}$ + $2-b\sqrt{-1}$ ou seja $x = 4$.

Uma das características da matemática na Europa renascentista era a tendência em relacionar álgebra à geometria. Essa característica esteve presente primeiramente na obra de Regiomontanus e depois em outro algebrista italiano importante, Rafael Bombelli (1526–1573). Bombelli além de ter sido o pioneiro a trabalhar com raízes quadradas de números negativos, como Regiomontanus, resolvia problemas de geometria, algebricamente. A diferença é que, enquanto Regiomontanus utilizava uma álgebra retórica, Bombelli fazia uso de novos simbolismos[13]. Bombelli também relacionava demonstrações geométricas à

[13] Escrevia “1Zp.5rm.4 (isto é, 1 zenus plus 5 res minus 4)” (BOYER, 1974, p. 211) , para representar a equação $x^2 + 5x - 4$, sendo *p* usado para simbolizar a adição e *m* a subtração.

resolução de equações cúbicas, estabelecendo o caminho inverso da geometria-álgebra.

Na transição do Renascimento para a Idade Moderna a maior parte dos países da Europa Ocidental participou do desenvolvimento da matemática. Quem se destacou foi o francês François Viète (1540–1603), considerado o pai da álgebra literal. Ele deu contribuições nas áreas de aritmética, álgebra, trigonometria e geometria, porém a sua contribuição mais importante foi em álgebra.

Naquela época, a álgebra árabe já estava dominada e havia sido aperfeiçoada, tanto pela resolução de equações cúbicas e quárticas, quanto pelo uso parcial de simbolismos, que abrangia abreviações para uma incógnita e suas potências bem como símbolos para operações e para relação de igualdade. No entanto, essa álgebra não tinha se libertado de tratar casos particulares (as equações possuíam coeficientes numéricos). Um geômetra poderia, num diagrama representar todos os triângulos, enquanto os algebristas não tinham um esquema correspondente para escrever todas as equações do 2º grau, o que representava uma limitação e impedia o progresso da álgebra.

Viète ao usar vogal para representar uma quantidade desconhecida e consoante para representar uma grandeza ou número supostamente conhecido, fez pela primeira vez distinção entre o conceito de parâmetro e a idéia de uma quantidade desconhecida, abrindo caminho para a generalidade da expressão de uma equação. Porém sua álgebra ainda era sincopada como a dos medievais, usava palavras e abreviações em vez de símbolos. Mais tarde Harriot (1560–1621) e William Oughtred (1574–1633) aperfeiçoaram o uso de simbolismos proporcionando o desenvolvimento da álgebra simbólica, que iria atingir maturidade com a *Geometria* de Descartes.

Mas, apesar da generalidade de sua expressão para equações, Viète ainda estava preso ao princípio grego de homogeneidade, do qual, após uma geração, Descartes se libertou. Segundo esse princípio, um produto de dois segmentos era necessariamente concebido como uma área, a segmentos de retas só podiam ser adicionados segmentos de retas, áreas adicionadas à áreas e volumes a volumes. Essa homogeneidade mostra que seu pensamento, mesmo algébrico, mantinha-se próximo da geometria de Pappus e Apolônio.

Viète interpretou as operações algébricas fundamentais, geometricamente. Dessa forma, percebeu que para resolver equações quadráticas era suficiente régua e compasso; para resolver equações cúbicas interpolava duas médias geométricas entre duas grandezas, ou seja, resolvia equações quadráticas e cúbicas geometricamente associando a álgebra e a geometria. Porém, quando um problema geométrico conduzia Viète a uma equação final em duas incógnitas, ele dizia que o problema era indeterminado e abandonava-o. Talvez se ele, em vez de abandonar tais problemas, investigasse as propriedades geométricas da indeterminação, houvesse criado a Geometria Analítica.

> Na matemática do século XVI há tendências variadas e conflitantes, mas podemos perceber nela, tanto quanto na ciência os resultados de uma confrontação entre idéias estabelecidas e novos conceitos, e entre a visão teórica e as exigências de problemas práticos.(BOYER, 1974, p. 231).

No final do século XVI, os matemáticos europeus haviam acumulado grande quantidade de fatos e tinham chegado a um estágio tal na álgebra, na trigonometria, na geometria e nos métodos de cálculos que esses temas se tornaram parte essencial dos progressos técnico e científico. Os contemporâneos de Viète estavam mais preocupados com aspectos práticos do que com aspectos teóricos da matemática. Nas palavras de Boyer (1974, p. 231), “Viète não era exatamente uma voz clamando no deserto, mas é verdade que a maior parte de seus contemporâneos estava preocupada principalmente com os aspectos práticos da matemática.”

3.4. Estudo das curvas

No século XVI, apesar de a direção dos maiores progressos ter convergido para a álgebra, a geometria pura agregou alguns representantes. Um deles foi o alemão Johannes Werner (1468–1528), primeiro a interessar-se pelas curvas, depois de Pappus. Em sua obra *Elementos de Cônicas*, impressa em 1522, fez estudos sobre a parábola e a hipérbole, embora primariamente estivesse interessado pela duplicação do cubo. Essa obra se relaciona de perto com a matemática grega, embora não possa ser comparada às *Cônicas* de Apolônio.

Albrecht Dürer (1471–1528), artista alemão renascentista também se interessou pela geometria, estudando algumas curvas, mas por falta de instrumentos algébricos não as estudou analiticamente.

Outro representante em geometria foi Francesco Maurolico (1494–1575), padre italiano de origem grega. Ele conhecia os tesouros da geometria antiga e trabalhou, juntamente com Frederigo Commandino, que morreu em 1575, no sentido de que o interesse pela geometria fosse reativado. Traduziram as *Cônicas* de Apolônio e a *Coleção Matemática* de Pappus. Maurolico, a partir de algumas indicações em Pappus, tentou reconstruir o quinto livro das *Cônicas* de Apolônio, que estava perdido. Apesar do esforço de Maurolico e Commandino, não foi dado o devido valor às obras matemáticas gregas. Um dos motivos foi o fato de a geometria da primeira metade do século XVI depender apenas das propriedades elementares de Euclides;

e outro, das obras encontrarem-se em grego e não em latim, o que dificultava sua difusão. Além disso, o interesse primordial da matemática era sua aplicação. Por isso, os matemáticos da época sentiam-se mais atraídos pelas possibilidades de aplicação da obra de Arquimedes do que pelos resultados teóricos de Apolônio.

Após a morte de Maurolico, em 1575, os estudos de matemática tomaram rumo diverso da geometria, voltando-se para álgebra, até atingir um nível que tornasse possível a criação da geometria algébrica.

No século XVII, a geometria pura volta a ser estudada e observamos, conforme análise de Grattan-Guiness (1984), o cálculo daquela época intimamente ligado ao estudo das curvas. As primeiras curvas a serem estudadas foram as secções cônicas, a quadratriz de Híppias, a espiral de Arquimedes, a conchóide de Nicômedes e a cissóide de Diócles, que já haviam sido estudadas pelos gregos. Depois passaram a ser estudadas outras curvas, dentre elas, a ciclóide, as parábolas e hipérboles de ordem superior, a espiral de Galileu e a conchóide de um círculo, que é uma variação das ovais de Descartes. Dessas curvas, as que passaram a ser alvo de intenso estudo foram as secções cônicas, seguidas pela ciclóide.

Algumas dessas curvas auxiliavam na resolução de problemas, tais como encontrar tangentes, áreas de superfícies e valores máximos e mínimos, e retificar arcos. Muitas vezes, a solução desses problemas era aplicado à física e à astronomia, enquanto outras curvas, como as ovais de Descartes e a espiral de Galileu, estavam ligadas diretamente a resolução de problemas da física. Mesmo assim, esses estudos podem ser considerados uma continuação da tradição da matemática grega, uma vez que os gregos já haviam trabalhado nos tipos de problemas mencionados acima. Somente no final da década de 50 do século XVII é que, a partir de um problema da física, acontece uma descoberta matemática em relação ao estudo das curvas. Isso ocorreu quando Christiann Huygens (1629–1695) ao estudar as oscilações de um pêndulo, verifica que a involuta de uma ciclóide é uma ciclóide, ou inversamente,a evoluta de uma ciclóide também é uma ciclóide.

3.5. A matemática das variáveis.

No século XVII, apesar da geometria pura ganhar espaço, os métodos matemáticos continuaram a ser amplamente aplicados nas ciências naturais, principalmente na mecânica. Foi nesse século que Galileu, Kepler e Newton formularam suas leis e as demonstraram matematicamente. O êxito na revelação e formulação matemática de numerosas leis das ciências naturais conduziu à criação das ciências exatas, que "se apresentavam em forma de uma ciência geral, a qual explicava fenômenos particulares com a efetividade das leis gerais da natureza, formuladas matematicamente" (RÍBNIKOV, 1987, p.153). Naquela época, ocorreu uma profunda mudança qualitativa no conteúdo da matemática, sendo fortemente influenciada pela matemática grega e pela matemática do período precedente. No entanto, apesar da matemática grega ser admirada pelo seu alto grau de rigor, seus métodos não eram heurísticos, não se adaptando bem à necessidade de sugerir idéias de como abordar problemas novos. Por isso, tornou-se necessária a busca de outros métodos, que, mesmo não sendo tão rigorosos como os da matemática grega, fossem capazes de sugerir idéias para a solução de novos problemas.

René Descartes (1596–1650) e Pierre de Fermat (1601–1665) continuaram a utilizar métodos algébricos na geometria e criaram a Geometria Analítica. A partir da Geometria Analítica, vão se desenvolver quase todos os conteúdos da matemática superior contemporânea. Segundo F. ENGELS, citado por RÍBNIKOV (1987, p. 154) “O ponto de virada das matemáticas foi a variável de Descartes. Graças a isto se introduziu nas matemáticas o movimento e com ele a dialética [...]”.

Segundo Aleksandrov (1994), os conceitos de variável e função estiveram presentes também na obra de Galileu quando este estudou a queda dos corpos, e estabeleceu que a distância percorrida na queda cresce proporcionalmente ao quadrado do tempo. Porém, Descartes separou a matemática de raciocínios metafísicos e não aplicou o conceito de variável a questões práticas enquanto Galileu usou os conceitos matemáticos de variável e função em generalizações abstratas de variáveis concretas como distância e tempo.

Em sua obra *Geometria,* Descartes introduziu o conceito de grandeza variável segundo dois aspectos: “na forma de coordenada variável de um ponto, que se move ao longo de uma curva e na forma de um elemento variável do conjunto de números, ao qual corresponde os pontos de um segmento coordenado dado” (RÍBNIKOV, 1987, p. 158). Nessa obra, Descartes aplica à matemática, o método que havia criado e que, de acordo com sua visão, permitia chegar ao conhecimento de todas as coisas. A aplicação desse método resultou em sua geometria, que deu origem à Geometria Analítica dos dias de hoje. Seus princípios, isto é, introdução de coordenadas e aplicação à geometria dos métodos algébricos, estão inseridos nesta obra, publicada como um apêndice do *Discurso do Método,* onde Descartes expõe seu método.

Descartes considerava que o método geométrico utilizado pelos gregos fatigava a imaginação. Seu objetivo ao aplicar seu método à matemática era duplo: “(1) – por processos algébricos libertar a geometria de diagramas e; (2) – dar significado às operações da álgebra por meio de interpretações geométricas.” (BOYER, 1974, p.

249). Porém, mesmo estabelecendo uma relação entre álgebra e geometria, Descartes não se afastou da geometria existente, mas por meio do seu método, deu um novo tratamento a ela, reduzindo os problemas geométricos a problemas em que só era preciso conhecer os comprimentos de algumas linhas para fazer sua construção. Utilizou seu método também para dar uma interpretação geométrica à álgebra. Isso pode ser verificado na primeira parte do *Geometria*, quando se dedicou a dar um correspondente geométrico de operações algébricas, demonstrando como as operações algébricas podiam ser efetuadas geometricamente. Dessa forma, justificou a introdução de termos aritméticos em geometria e desenvolveu uma álgebra simbólica semelhante à atual. Considerou o produto de dois segmentos como um segmento o que possibilitou o abandono do princípio da homogeneidade. Para Descartes x^2 e x^3 eram linhas e não áreas e volumes como pensavam os gregos antigos, o que permitiu fazer operações do tipo $a^2b^2 - b$, que não eram permitidas na matemática grega. Também interpretou geometricamente a resolução de equações quadráticas.

Fermat desenvolveu simultaneamente um sistema análogo ao de Descartes. Os princípios da Geometria Analítica estavam contidos também na obra de Fermat, *Isagoge ad locum planos et sólidos (Introdução dos lugares planos e espaciais).* Essa obra era conhecida desde 1636, mas só foi publicada em 1679, depois da morte de Fermat. Nela, além da equação geral da reta e da circunferência, encontramos uma discussão sobre hipérboles, elipses e parábolas. Primeiramente, Fermat demonstrou que a equação de uma reta que passa pela origem de coordenadas tem a forma $ax = by$. Depois, deduziu a equação da circunferência em coordenadas retangulares com centro na origem de um sistema de coordenadas e em seguida as equações das cônicas referidas a um sistema de eixos, perpendiculares em geral. Também investigou a forma geral de equações de 1º e 2º graus mediante transformações de coordenadas, reduzindo-as à forma normal e assim simplificando seu tratamento geométrico. Na mesma época em que estava desenvolvendo sua Geometria Analítica Fermat fez duas descobertas significativas. Descobriu um método que, em essência, é o que atualmente chamamos *diferenciação*, o qual foi chamado *Método para achar Máximos e Mínimos* e descobriu também como aplicar seu processo para achar a tangente a uma curva algébrica da forma $y = f(x)$.

Segundo análise de Boyer (1974, p. 254), a exposição de Fermat era mais sistemática e didática que a de Descartes. No entanto, a obra de Fermat não exerceu influência tão significativa quanto a *Geometria* de Descartes. Isso se deu principalmente pelos seguintes fatores: em primeiro lugar, a *Introdução* foi editada bem mais tarde que a *Geometria,* sendo conhecida por poucas pessoas já que circulava apenas em manuscritos, enquanto a *Geometria* foi amplamente divulgada; e, em segundo lugar, Fermat usou a notação de Viète, o que fez com que a linguagem fosse de difícil compreensão, enquanto Descartes criou uma simbologia de mais fácil entendimento e que é bem próxima da que usamos atualmente.

Nos primeiros 50 a 70 anos após sua criação, a Geometria Analítica passou por um período de afirmação e reconhecimento, havendo muitas discussões sobre sua legitimidade, comodidades e possibilidades de seus métodos, acumulando lentamente novos resultados. No século XVII, abriu-se a possibilidade para a criação da análise de variáveis. Posteriormente, por um lado, acelerou a formação da análise infinitesimal e, por outro, transformou-se num instrumento imprescindível para a mecânica de Newton, que, no século XVIII, utilizou-a e desenvolveu-a em sua obra *Enumeração das curvas de 3ª ordem*. Clairaut (1713–1765) estendeu-a ao espaço tridimensional em um sistema de três eixos coordenados retangulares e Euler, em 1748, deu-lhe um aspecto próximo do atual na segunda parte de sua obra *Introdução à análise*; mas, segundo Ribnikov (1987), foi Lacroix (1764–1848) o primeiro a usar a denominação Geometria Analítica.

CAPÍTULO IV – DESCARTES: SUA VIDA, SEUS ESTUDOS, SUA OBRA

Os séculos XVI e XVII caracterizaram-se pelo espírito renascentista de mudança e pela paixão pelas descobertas. Houve grande expansão tanto técnica quanto científica. Foi época de um novo alvorecer – a Revolução Científica, cujos principais expoentes até então eram Nicolau Copérnico, Johannes Kepler e Galileu-Galilei.

Eles provocaram mudanças em concepções mantidas até essa época. Nicolau Copérnico (1473–1543) revolucionou a visão do mundo ao refutar a teoria geocêntrica de Ptolomeu e retomar a idéia do heliocentrismo. A aceitação do heliocentrismo, em contraposição à concepção geocêntrica de tradição aristotélica, produziu os germes da revolução científica moderna e representou um marco na história das ciências. Mas, contrariamente ao que se pensa hoje sobre as órbitas dos planetas, Copérnico mantinha a idéia de perfeição do movimento circular. Foi Kepler (1571–1630), astrônomo e astrólogo alemão, quem decifrou o complexo movimento dos planetas, demonstrando a sua natureza elíptica e não circular, contrariando o ideal da forma circular, que se tinha até então. Galileu-Galilei (1564–1642) astrônomo italiano, com a utilização de uma luneta para observar o céu, descobriu que a Via Láctea era formada de estrelas, que o Sol tinha manchas e que Júpiter, com seus satélites, constituía um minissistema planetário. Observando o movimento dos corpos celestes, comprovou o sistema heliocentrista de Copérnico, fato que o levou à criação de uma nova astronomia planetária. No entanto, em 1633, sob ameaça de excomunhão e morte pela Igreja, renegou formalmente suas descobertas.

O espírito renascentista trazia consigo a rejeição das idéias até então aceitas e que eram garantidas sobretudo pelo peso de autoridades. O prestígio da Igreja e do Estado foi abalado pelo movimento da Reforma e pelas guerras. As afirmações da ciência e da filosofia medievais, baseadas principalmente na autoridade da Igreja, foram postas em confronto com os dados das novas descobertas científicas, instalando-se um espírito de descrença e dúvida. Partiu-se, então, nos campos filosófico e científico, para a tentativa de superar as incertezas. Era preciso encontrar um método que conduzisse a ciência à verdade. Essa foi uma preocupação que se generalizou a partir do final do século XVI e caracterizou a investigação filosófica do século XVII.

Podemos distinguir, nessa época, duas importantes orientações metodológicas: o racionalismo e o empirismo cujos precursores foram Descartes (1596–1650) e Francis Bacon (1561–1628), respectivamente. Esses movimentos filosóficos se opuseram às idéias que vigoravam durante o Feudalismo e tinham diferentes formas de explicar o caminho para atingir o conhecimento.

> Segundo o empirismo, nosso conhecimento é erigido por um grande número de experiências sensíveis[14] e da indução. Já para o racionalismo, o conhecimento é conseguido exclusivamente por via racional e dedutiva. O método dedutivo da matemática e a própria matemática tornam-se então os baluartes do racionalismo e os pontos de convergência das críticas empiristas [...] A partir do racionalismo, impõe-se como rigor o estabelecimento das leis as quais buscam definir a essência de tudo o que pode manifestar-se à consciência, no tempo e no espaço. Essas leis são entendidas como as verdades da natureza e são concebidas pela física matemática. (BRITO, 1995, p. 74).

Para Descartes, só seria possível chegar ao conhecimento verdadeiro de todas as coisas mediante o método que seria edificado exclusivamente na razão.

[14] Estamos utilizando o termo *experiências sensíveis* para diferenciar este tipo de experiência das *experiências mentais*.

Descartes refutava a idéia de que o conhecimento poderia vir dos sentidos. Esse fato pode ser comprovado através da Quinta Meditação quando afirma que

> E aqui posso me objetar que talvez a idéia de triângulo tenha vindo ao meu espírito por intermédio de meus sentidos, porque vi algumas vezes corpos de figura triangular, pois posso formar em meu espírito uma infinidade de outras figuras, a cujo respeito não se pode alimentar a menor suspeita de que jamais tenham caído sob os sentidos e não deixo, todavia, de poder demonstrar diversas propriedades relativas à sua natureza [...] (DESCARTES, 1996b, p. 311).

Dessa maneira, contrapunha-se ao empirismo de Bacon para quem o verdadeiro caminho para atingir o conhecimento seria recolher “os axiomas dos dados dos sentidos e particulares, ascendendo contínua e gradualmente até alcançar, em último lugar, os princípios de máxima generalidade.” (BACON, 1999, p. 36)

Descartes acreditava que a chave para a compreensão do universo era o método matemático. Antes de Descartes, Galileu já dizia que não era possível compreender o universo sem entender a língua e conhecer os caracteres com os quais ele estava escrito e para Galileu o universo estava escrito na linguagem matemática, cujos caracteres eram triângulos, circunferências e outras figuras geométricas.

Foi nesse clima de transformações que Descartes construiu sua filosofia.

4.1. Vida e Obra de Descartes

Descartes nasceu em 31 de março de 1596, em La Haye, na França e dedicou sua vida à investigação científica e filosófica. Quatorze meses após seu nascimento ,tornou-se órfão de mãe e foi viver com sua avó. A falta de relações com os demais membros de sua família e especialmente com seu pai, que lhe tinha em baixa estima, contribuiu para deixá-lo com um caráter triste e melancólico, características proclamadas por ele mesmo, anos mais tarde, em sua correspondência com a Princesa Isabel da Holanda.

Aos dez anos, foi enviado ao colégio jesuíta La Flèche, um dos mais célebres colégios daquela época, em regime de internato, onde permaneceu por oito anos. Devido a sua precária saúde, Descartes foi autorizado a permanecer na cama até um pouco mais tarde, hábito que manteria ao longo de sua vida e, anos mais tarde, aproveitaria este repouso solitário para a meditação. Muitas de suas idéias filosóficas e científicas foram concebidas nesse momento matinal.

Quando Descartes chegou, La Flèche tinha sido recentemente inaugurada. Em 1604, Henrique IV, então rei da França, doou um palácio e recursos para a Companhia de Jesus fundar esse colégio. Henrique IV tinha laços tão estreitos com La Flèche que, ao morrer, seu coração foi depositado na capela do colégio. A Companhia de Jesus utilizava seus colégios para desenvolver seu projeto de formação de uma elite cristã e dar instrução aos futuros governantes da vida pública. Os valores de autodisciplina e autocontrole eram relevantes bem como os valores baseados na piedade cristã. A educação que Descartes recebeu em La Flèche tinha um profundo espírito religioso e cívico. Esse civismo assumia um caráter de fidelidade à monarquia.

> A marca daquela origem burguesa e do espírito conservador de La Flèche irá transparecer, segundo muitos intérpretes, no pensamento cartesiano, embora contrabalançada pelo senso de tolerância ditado pelo eixo central de sua construção filosófica – a razão. (PESSANHA, 1996, p. 10)

Os métodos pedagógicos de La Flèche incluíam estratégias para formação de autodisciplina através de premiação pública das condutas positivas. Tinham preocupação por atender as dificuldades individuais e respeitar os ritmos de aprendizagem de cada um. Incluíam no currículo jogos e atividades lúdicas. A prática de esportes era estimulada e a dança e o teatro eram considerados como elementos educativos, que ajudavam na assimilação de bons hábitos e maneiras. Havia diariamente *lectio* e *repetitiones*, semanalmente *sabatinae disputationes* e mensalmente as *menstruae disputationes.*

As *lectio* tratavam-se de leitura e comentários de um texto e no final o professor esclarecia individualmente as dúvidas dos alunos. As *repetitiones* ocorriam à tarde e eram dirigidas por um aluno avançado. Esses alunos recapitulavam o que tinha sido visto nas *lectio* e esclareciam dúvidas e dificuldades. As *disputationes* eram debates, na presença do professor, entre alunos previamente escolhidos. Um deles, o *defendens*, devia expor e defender uma tese, enquanto o outro, o *argumentaes*, devia opor-se a essa tese, e então o *defendens* devia tentar superar esses argumentos. Terminada essa fase, os demais alunos podiam intervir sobre o tema. Esses debates eram feitos em latim, sendo proibido o uso da língua materna.

> Em biografia mais antiga sobre Descartes, escrita por Baillet e editada em Paris em 1691, este comenta que companheiros de Descartes em La Flèche recordavam que utilizava um método pessoal quando lhe tocava ser *defendens* em uma *disputatione* de tema filosófico. Ao que parece a variante que utilizava não desgostava nem o Padre Charlet, o reitor, nem a seus professores. Inicialmente fazia diversas perguntas a fim de precisar as definições de alguns termos. Depois indagava à audiência o que se entendia sobre diferentes princípios tratados na *lectio*. Na continuação buscava o acordo na formulação de determinadas verdades conhecidas. Concluído o preâmbulo, desenrolava sua argumentação a respeito da tese e era francamente complexo desmontá-la. Na realidade estamos ante uma antecipação do método que empregará em sua obra filosófica, aperfeiçoando-a. (BLAS, 2001, p. 25)

Os cinco primeiros anos de sua estada em La Flèche foram dedicados ao estudo de um núcleo central humanístico-literário, as *humanidades*, composto de um ano preparatório, três anos de gramática e um ano de retórica. Presumia-se que ao estudar profundamente gramática, retórica e dialética. o aluno estaria fazendo um exercício mental que o prepararia para compreender as idéias e entender a realidade. A língua clássica era o latim, mas estudava-se também o grego.

Após esses cinco anos de estudo, a maior parte dos alunos deixava o colégio, porém Descartes permaneceu mais três anos, dedicando-se ao estudo de dialética, filosofia natural, matemáticas, metafísica e ética. Os estudos em dialética, filosofia natural, metafísica e ética fundamentavam-se em fontes aristotélicas e comentários das obras de Aristóteles elaboradas por filósofos jesuítas. O livro básico de dialética era *Organon* de Aristóteles, que continha os princípios da lógica e que era instrumento para todas as ciências. Em La Flèche, dedicava-se pouco tempo às matemáticas – durante um ano, uma hora diária de aula – e utilizava-se como referência a obra de Clavius intitulada *Sobre o modo que as disciplinas matemáticas podem ser desenvolvidas nos colégios da Sociedade*. Nessa obra, Clavius classificava as disciplinas matemáticas segundo estudassem matematicamente objetos de um modo abstrato, e aí incluía a geometria e a aritmética; ou sensível, incluindo a astrologia, a música, a geodésica, a mecânica, o cálculo prático, a perspectiva e a arquitetura civil e militar. A ênfase era dada à matemática sensível, o que chamamos hoje matemática aplicada.

Em 1614, com dezoito anos de idade, Descartes deixou La Flèche. Anos mais tarde, Descartes iria mencionar, no *Discurso do Método,* as esperanças e decepções que o ensino de La Flèche lhe provocou:

> Fui nutrido nas letras desde a infância, e por me haver persuadido de que, por meio delas, se podia adquirir um conhecimento claro e seguro de tudo o que é útil à vida, sentia extraordinário desejo de aprendê-las. Mas, logo que terminei todo esse curso de estudos, ao cabo do qual se costuma ser recebido na classe dos doutos, mudei inteiramente minha opinião. Pois me achava enleado em tantas dúvidas e erros, que me parecia não haver obtido outro proveito, procurando instruir-me, senão o de ter descoberto cada vez mais a minha ignorância. E, no entanto, estivera numa das mais célebres escolas da Europa, onde pensava que deviam existir homens sapientes, se é que existiam em algum lugar da Terra. (DESCARTES, 1996a, p. 67)

A decepção de Descartes não era causada pelo sistema de ensino de La Flèche nem pelos seus mestres, mas sim pelos próprios conteúdos das chamadas *humanidades.* Escreveria, também no *Discurso do Método*:

> Depois, quanto às outras ciências, na medida em que tomam seus princípios da Filosofia, julgava que nada de sólido se podia construir sobre fundamentos tão pouco firmes [...] Eis por que, tão logo a idade me permitiu sair da sujeição de meus preceptores, deixei inteiramente o estudo das letras. (DESCARTES, 1996a, p. 70)

Paralelamente à decepção causada pelas *humanidades*, Descartes demonstra interesse pelas matemáticas. Em sua concepção, as matemáticas exibiam uma construção sólida e clara, impondo-se com a força de suas demonstrações, contrariamente à fragilidade dos argumentos das humanidades. Em suas palavras:

> Comprazia-me, sobretudo com as matemáticas, por causa da certeza e da evidência de suas razões: mas não notava ainda seu verdadeiro emprego, e, pensando que serviam apenas às artes mecânicas, espantava-me de que, sendo seus fundamentos tão firmes e tão sólidos, não se tivesse edificado sobre eles nada de mais elevado. (DESCARTES, 1996a, p. 69).

Quando deixou La Flèche, foi para Poitiers estudar direito civil e canônico, graduando-se dois anos mais tarde. Estudou também, de maneira informal, medicina.

No verão de 1618, Descartes alistou-se no exército de Maurício de Nassau, na Holanda. Podia parecer estranho que um erudito fosse alistar-se em um exército, mas havia uma importante relação entre o pensamento erudito e a ciência aplicada posta a serviço da administração, inclusive do exército. A educação, sob a supervisão de Simon Stevin (1548–1620), matemático e engenheiro holandês, era muito importante no exército de Maurício de Nassau. Naquela época, Descartes entrou em contato com campos científicos diversos, como a geometria, a hidrostática e a arquitetura militar.

Em novembro de 1618, conheceu Isaac Beeckman (1588–1637), estabelecendo-se entre ambos uma relação na qual Descartes podia ser visto como um discípulo de Beeckman. Este o estimulou a relacionar a física à matemática. Abordaram, de início pessoalmente, e depois mediante correspondência, questões tanto de caráter puramente geométrico quanto questões relacionadas à física. Algumas das questões geométricas tinham sua origem e suas aplicações em problemas da física. Estudaram questões relativas à cinemática de movimento de queda livre, aos princípios de hidrostática e à teoria dos intervalos musicais e às consonâncias perfeitas.

Na primavera de 1619, Descartes deixou o exército de Nassau para ingressar no exército de Maximiliano da Baviera, em Ulm na Alemanha, que tinha o mesmo modelo de exército de Maurício de Nassau. Nesse tempo, continuou a manter contatos com Beeckman, por correspondência, desenvolvendo, junto com ele, estudos em geometria, incluindo o problema da quadratura do círculo, da trissecção de um ângulo e da duplicação do cubo.

Segundo Blás (2001), na noite de 10 de novembro de 1619, Descartes teve três sonhos cuja descrição é a que segue. Nos dois primeiros sonhos, Descartes se via caminhando por ruas desconhecidas com o corpo dobrado pela dor. Era então arrastado por um vento forte até um colégio, enquanto as pessoas passavam por ele caminhando sem serem importunadas pelo vento. Descartes os interpretou como advertências sobre sua vida passada. O vento seria o *gênio maligno*[15], que, quando

[15] Descartes usou o *gênio maligno* como um artifício para levar a dúvida a uma dimensão extrema. “E se a realidade fosse regida por um *malin génie*, um princípio de malignidade e de malícia, que justamente manifestasse sua mais requintada maldade ao fazer com que o homem estivesse errando toda vez que tivesse a mais forte impressão de estar certo?” (PESSANHA, 1996, p. 15)

impedido de seguir seu caminho, poderia causar sérios danos. No último sonho, Descartes encontra um livro sobre uma mesa. Ao abri-lo, via que se tratava de um dicionário. Por baixo do dicionário, tinha um livro de poemas intitulado *Corpus Poetarum*. Lia ao acaso um verso e este dizia: *Que caminho seguirá em vida?* Nesse momento, um homem desconhecido recita um poema chamado *Sim e Não*. No sonho, Descartes lhe diz que esse poema estava no livro, mas ao procurá-lo não o encontra. Então Descartes mostra a esse homem um poema que considera mais belo e que começa com a mesma frase que havia lido ao acaso anteriormente: *Que caminho seguirá em vida?*.

Descartes interpretou esses sonhos como sinais de que havia uma missão filosófica destinada a ele. Segundo sua interpretação, o dicionário simbolizaria os conhecimentos científicos e a antologia representaria a filosofia e a sabedoria. O verso seria o ponto de partida para buscar os caminhos dos *fundamentos da verdadeira ciência*, os quais abririam a via para o conhecimento claro e seguro de todas as coisas, idéia que anos mais tarde tomaria forma no *Discurso do Método*. De acordo com Blas (2001), alguns autores defendem a idéia de que quando Descartes se referia à descoberta dos *fundamentos de uma maravilhosa ciência*, estava fazendo menção a suas reflexões sobre o método para construir o conhecimento; outros, de que Descartes estaria se referindo à descoberta de como conectar a álgebra e a geometria, cujo desenvolvimento iria aparecer no terceiro apêndice do *Discurso do Método*, o *Geometria*.

Conforme Pessanha (1996), a partir de 1620, Descartes renunciou à carreira militar para dedicar-se à investigação científica e filosófica, permanecendo em Ulm até 1622. Nesse tempo, relacionou-se com Faulhaber, professor de matemática no Colégio de Engenharia Militar. Por meio dele, entrou em contato com membros da

Rosacruz, confraria que na época se caracterizava por um misticismo de índole fortemente racional. Influenciado pelos estudos que os rosacruz realizaram sobre a representação de números com ajuda de malha de pontos Descartes escreveu *Sobre os Sólidos*. Nessa obra, fez referência a essas representações: os números figurados ou figurativos. Esses números representam um elo de ligação entre a geometria e a aritmética, pois expressam o número através de pontos em determinadas configurações geométricas[16].

Depois de *Sobre os Sólidos,* ainda na época em que permaneceu em Ulm, Descartes escreveu *Estudo da Boa Mente*, obra que se perdeu, e começou a escrever *Regras para a Direção do Espírito*. Essas obras contêm investigações metodológicas sobre como construir o conhecimento e são precursoras do *Discurso do Método,* publicada em 1637.

Após 1622, Descartes regressou à França, onde permaneceu dois anos. Lá conheceu Marin Mersenne (1588–1648), ótico e geômetra, que servia de elo entre os melhores matemáticos do momento. Nesse tempo, continuou trabalhando questões matemáticas, estudou também ótica, lentes e espelhos, e o problema da refração e reflexão da luz.

Depois desse tempo, Descartes viajou novamente. Agora para a Itália, onde pretendia viver, mas a intransigência da Inquisição contra os que defendiam as idéias de Copérnico, lhe fez desistir desse propósito. Retornou a Paris, onde havia liberdade de pensamento e discutiam-se novas idéias, embora sob o olhar vigilante dos teólogos da Sorbone. Permaneceu ali até 1628.

[16] Os números figurados originaram-se com os pitagóricos que “investigaram as propriedades desses números, acrescentado-lhes uma marca do seu misticismo e colocando-os no centro de uma filosofia cósmica que tentava reduzir todas as relações fundamentais a relações numéricas.” (STRUIK, 1989, p. 78). Esses números são classificados em poligonais e poliédricos, conforme sua representação seja no plano ou no espaço, respectivamente.

Assim que chegou a Paris, participou de um encontro na casa do núncio do Papa, junto a um grupo de intelectuais. Nessa reunião, solicitou à audiência que lhe dissesse uma verdade tradicionalmente aceita e uma falsidade com igual caráter. Mediante uma cadeia de afirmativas, as quais iam sendo aceitas pela platéia, chegou à conclusão, aceita pela audiência, de que a tese tomada como verdadeira era falsa, e, a falsa, verdadeira. Então, o público lhe pediu conselhos de como fugir desses sofismas, ao que Descartes lhes antecipou algumas idéias de seu *método*.

Em 1628, Descartes termina sua primeira obra filosófica, as *Regras para a Direção do Espírito*. No final daquele ano, Descartes fixou-se na Holanda, onde permaneceu até 1649. Múltiplos são os trabalhos e temas que Descartes abordou nesses anos. Além de estudos em refração, ocupou-se com problemas metafísicos, argumentos sobre a existência de Deus e problemas geométricos.

No final de 1633, concluiu estudos nos aspectos físicos e filosóficos de uma série de fenômenos da natureza, que culminarão, mais tarde, com a publicação de *Os Meteoros*. A princípio, essas reflexões eram parte da obra *Tratado do Mundo e da Luz*, seu mais ambicioso projeto, no qual expôs sua cosmovisão, ou seja, sua visão integrada do mundo inanimado, do reino animal e do homem. O trabalho já estava quase pronto para ser impresso quando Descartes soube da condenação, pela Inquisição, de Galileu, motivada por uma tese a que ele também havia aderido: a do movimento da terra. Por prudência, Descartes renunciou à publicação de sua obra, conforme expõe em carta endereçada à Mersenne:

> Havia tido a intenção de enviar-lhe *O Mundo* como presente de Ano Novo, mas indaguei em Leiden se já estava disponível *O sistema do mundo* de Galileu, que tinha ouvido que havia sido publicado em Roma no ano passado. Disseram-me que efetivamente se publicou, mas que todas as cópias haviam sido queimadas em Roma e que Galileu foi acusado e sancionado. Fiquei tão surpreso que decidi queimar todos meus papéis ou ao menos não deixar que ninguém os veja. Não podia imaginar que ele, um italiano e creio que em boa relação com o Papa, possa ser um criminoso só

> porque tentou e conseguiu, estabelecer que a Terra se move. Devo admitir que se isto é falso também seriam os fundamentos de toda minha filosofia. É uma parte tão essencial de meu tratado que não posso eliminá-la sem deixar o trabalho global defeituoso. Mas, ao não querer publicar um discurso que tenha uma só palavra que a Igreja desaprove, prefiro suprimi-lo antes que publicá-lo em forma mutilada. (BLAS, 2001, p. 122)

Mais tarde, parte desses estudos foram publicados na obra *Princípios de Filosofia*, onde descreveu sua teoria sobre a origem do universo.

Em 1637, foi publicado o *Discurso do Método*, que é composto de um prefácio de mesmo nome e três ensaios: *Dióptrica, Os Meteoros e Geometria.* Essa obra foi publicada originalmente em francês, uma tendência que estava surgindo na época, contrariamente à Idade Média quando as obras científicas e filosóficas eram escritas em latim, a língua universal dos estudiosos. No Renascimento começou-se a escrever no vernáculo, e não em latim, por exemplo, obras importantes como o *Triparty en la science des nombres* de Nicolas Chuquet, escrita em francês, bem como *Summa Aritmética* de Luca Paccioli, escrita em italiano, ambas do século XV. Depois dessa publicação, Descartes dedicou vários anos de sua vida intelectual a uma volumosa correspondência sobre seus estudos filosóficos e científicos.

As *Meditações Metafísicas* começaram a ocupar o espírito do filósofo por volta de 1629, mas só foram impressas em 1641. Essa obra foi severamente questionada por filósofos e teólogos. Descartes redigiu então as *Respostas*, que inclui elementos importantes para a compreensão de suas doutrinas. Em 1649 foi publicado o *Tratado das Paixões.* Somente em 1664, 14 anos após sua morte, foram publicados os *Princípios da Filosofia.* Correspondem à fase mais madura do pensador e constituem a realização de seu sonho de criar uma enciclopédia do conhecimento, que havia iniciado com o *Tratado do Mundo.*

Em Outubro de 1649, a convite da rainha Cristina, da Suécia, Descartes foi para Estocolmo. A partir de janeiro, começou a dar lições de filosofia à rainha. Essas lições ocorriam de madrugada. Descartes, que tinha por hábito levantar-se tarde da cama, devido a sua delicada saúde, não resistiu aos rigores do inverno. Adquiriu uma pneumonia, falecendo em 11 de fevereiro do ano de 1650.

4.2. A filosofia de Descartes

Embora o *Discurso do Método* seja sua obra mais famosa e nela contenha uma introdução de sua filosofia, o que há de mais significativo dela está nos *Princípios de Filosofia* e nas *Meditações*. Essas obras contêm sua teoria do conhecimento e a plena aplicação do método universal que entendia dever orientar toda a pesquisa do que considerava ser a verdade. *Princípios de Filosofia* é uma obra composta de quatro partes: a primeira parte é dedicada aos fundamentos do conhecimento verdadeiro, ou primeiros princípios; a segunda, denominada *Princípios das Coisas Materiais*, ocupa-se da natureza dos corpos, das formas da matéria, do movimento e do vácuo; a terceira, constitui o exame da composição do universo, a partir dos princípios das coisas materiais que na parte anterior estabelecera. Nela, trata o problema do movimento da terra, de forma a conciliar as teses do sistema de Copérnico com as doutrinas da Igreja. Na quarta parte, Descartes dedica-se ao estudo da estrutura da Terra.

O fim que Descartes perseguiu foi descobrir, para a Filosofia, um novo caminho e dar-lhe uma estrutura de absoluta segurança. Em sua concepção, o sistema de toda a Filosofia devia desenvolver-se tão clara e conseqüentemente como as verdades matemáticas. Segundo Descartes, as razões certas e evidentes eram encontradas nas demonstrações feitas pelos matemáticos da Antigüidade, na Aritmética e na Geometria. O que Descartes sugeria como recurso para a construção da ciência e também para a sabedoria da vida era seguir os imperativos da razão, que, a exemplo de sua manifestação matemática, operava por intuições e análise. Para ele

> somente a evidência intelectual pode constituir critério de objetividade, [...] a verdade das evidências é garantida metafisicamente pela veracidade divina; e as ciências são fundadas em evidências racionais primeiras; as falsas evidências são as do preconceito, as da infância e as dos sentidos (JAPIASSU, 2001, p. 94).

Mas o que era evidente para Descartes? Tudo que se apresentasse clara e distintintamente[17]. Atualmente define-se *evidência* em sentido corrente como sendo "tudo aquilo que se impõe ao espírito com uma força tal que parece desnecessário demonstrá-lo ou prová-lo" (JAPIASSU, 2001, p. 94), porém, segundo Lintz (1999) nas primeiras tentativas de demonstração no século VI a.C., a *evidência* tirada de uma figura valia como hipótese. Naquela época "a intuição, a evidência e o raciocínio dedutivo não se diferenciavam com clareza" (LINTZ, 1999, p. 43-44), o que exigia demonstração e o que podia ser tomado como *evidente* não era claramente estabelecido.

Descartes pretendeu estabelecer a filosofia em bases totalmente novas. E o novo ponto de partida era a dúvida, a dúvida absoluta que conduziria à verdade absoluta. Descartes aceitou o desafio da dúvida para combatê-la com suas próprias armas, ampliou a dúvida ao máximo, passando a duvidar até das idéias claras e distintas as quais são concebidas por todos da mesma maneira. Para Descartes, na medida em que a dúvida era estendida até sua máxima dimensão, manifestava seu limite e podia dar lugar à superação, encontrando um núcleo de certeza. Em seu 7º artigo dos *Princípios do Conhecimento Humano* de seus *Princípios da Filosofia*

---

[17] Para Descartes *claro* significava o que era presente e manifesto a um espírito atento e *distinto* o que era preciso e diferente de todos os outros, ou seja, o que é definido.

Descartes (1984, p. 55) afirmou “Que não poderemos duvidar sem existir, e que isso é o primeiro conhecimento certo que se pode adquirir”, de onde veio sua inferência EU PENSO LOGO EXISTO.

4.3. O modelo cosmogônico de Descartes

Martins (1994) no livro *O Universo: teorias sobre sua origem e evolução* faz uma descrição da concepção que Descartes tinha sobre a origem do universo. Descartes não discutiu alguns aspectos como a origem da vida e do homem, mas procurou explicar um grande número de aspectos do universo que haviam sido descobertos pouco tempo antes. Nessa teoria, Deus tinha um papel fundamental. Sua contribuição era relevante e se dava no momento da criação da matéria inicial e em seu movimento. Todo o restante ocorria como conseqüência das leis naturais, que também eram criadas por Ele. Inicialmente Descartes imaginava o universo como um espaço totalmente preenchido por uma matéria homogênea, sólida, como um imenso bloco de cristal. Essa matéria era agitada por Deus, de modo desordenado, em todas as direções, fragmentando-a em pequenos blocos.

Esses blocos possuíam dois tipos de movimentos iniciais. Um movimento interno de rotação de cada pedaço em torno de si mesmo, que fazia com que a matéria inicialmente sólida fosse se fragmentando em pedaços cada vez menores, e um movimento de rotação de grupos de partículas em torno de um centro comum.

Os blocos iniciais não tinham forma arredondada, senão não preencheriam todo o espaço. Mas, pela rotação e pelo choque com os outros blocos, iam perdendo as pontas e tornavam-se arredondados. Dessa forma, pela ação do movimento, havia a fragmentação da matéria primitiva originando três tipos de partículas ou elementos. O *terceiro elemento* era constituído por partículas sólidas maiores, o *segundo elemento* era constituído por partículas esféricas muito pequenas resultantes do arredondamento das partículas sólidas e o *primeiro elemento* era algo ainda menor e preenchia todo espaço não ocupado por esses outros tipos de matéria.

Daí decorria o princípio fundamental da teoria de Descartes: não havia vazio na natureza, mas apenas deslocamentos de partes da matéria que se substituíam umas às outras. Portanto, o movimento só era possível se essa matéria se fragmentasse ao infinito. Todo deslocamento de uma partícula inseria-se necessariamente na permutação em anel de um conjunto de partículas, originando turbilhões e redemoinhos de matéria distribuídos no espaço.

Nos redemoinhos, os diferentes tipos de *elementos* ocupavam diferentes lugares. No centro de cada redemoinho formava-se um espaço redondo ocupado pela matéria com as menores partículas e que estavam sempre se movendo com grande velocidade. Esse era o processo de formação das estrelas.

O *segundo elemento* ocupava quase todo o volume do turbilhão e suas partículas redondas escorregavam umas sobre as outras com facilidade formando um tipo de líquido. Essas esferas tinham tamanhos diferentes e as menores ficavam mais próximas do centro do turbilhão. A parte do turbilhão mais próxima do centro girava mais depressa e os círculos sucessivamente mais afastados levavam um tempo maior para completar uma volta.

O *terceiro elemento* era formado a partir da matéria recebida pelos pólos da estrela, na qual havia partículas maiores e irregulares. Elas se prendiam umas às outras formando partículas maiores e mais lentas, ficando presas à superfície da estrela, formando uma espécie de nata escura. Essa era a justificativa para a existência das manchas solares, que podiam aumentar ou diminuir de tamanho pela agitação contínua do primeiro elemento, que estava colidindo o tempo todo contra essa camada do terceiro elemento.

Essas manchas podiam crescer até cobrir toda a superfície da estrela formando uma casca opaca. Se a estrela rompesse a casca, tornando-se novamente brilhante, ressurgia como uma *estrela nova*; caso contrário, permanecendo recoberta pela casca, todos os seus processos iam enfraquecendo, e acabava sendo capturada por um outro turbilhão vizinho, no centro do qual existia outra estrela e se transformava em um planeta ou cometa.

Ao se integrar a outro turbilhão, a estrela recoberta ficava a certa distância do centro, girando juntamente com a matéria do segundo elemento em torno da estrela central, transformando-se em planeta, no caso de ser muito sólida. Se a estrela não ficasse presa a um turbilhão, mas passasse de um para outro, transformava-se em cometa.

Para explicar a formação do sistema solar, Descartes imaginava que podiam existir diversos turbilhões próximos um do outro e de diferentes tamanhos. A formação da Lua era explicada pela existência de uma estrela de um turbilhão menor que se recobriu de uma casca e foi capturada pelo turbilhão no qual a Terra ainda era uma estrela. Depois, a Terra perdeu o brilho e juntamente com a Lua penetrou no grande turbilhão no qual o Sol seria sua estrela. A Lua e a Terra possuíam movimento de rotação, pois toda estrela girava no centro de seu turbilhão. A Lua girava em torno da Terra porque tinha sido capturada pelo turbilhão da Terra e esses movimentos foram conservados quando a Terra entrara no turbilhão do Sol. A formação dos outros planetas e de cometas ocorrera da mesmo modo. Os planetas menos sólidos estabeleciam-se em lugares mais próximos do centro do turbilhão do Sol. Os planetas giravam em torno do Sol no mesmo sentido e em órbitas situadas praticamente no mesmo plano porque eram arrastados pelo único turbilhão que girava em torno do sol. Alguns fenômenos da natureza, tais como os vulcões, os terremotos, a existência de montanhas e vales, eram explicados pelo fato de o interior dos planetas ser composto pelo primeiro elemento, semelhante ao fogo, e de a casca da Terra não ser muito espessa.

O modelo cosmogônico de Descartes teve enorme sucesso no século XVII, porque era uma teoria mais rica que as anteriores e porque os mecanismos para cada fenômeno eram bastante compreensíveis e aceitáveis para a época. No entanto, em 1687, Newton, em sua obra *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, criticou veementemente o modelo de Descartes. Isso porque, no final do século XVII, a física sofreu por uma reformulação a partir da qual passou a se exigir que as teorias permitissem fazer cálculos e previsões quantitativas. O mais grave defeito da teoria de Descartes foi o de não ter uma base matemática, mas sim uma base na física qualitativa.

CAPÍTULO V – ANÁLISE DO LIVRO I DO *GEOMETRIA*

No século XVII a visão aristotélica da natureza foi gradualmente abandonada. Se

> [...] o conhecimento, na Europa, durante a Idade Média, era entendido como o caminho de reconciliação do homem com o mundo, na Idade Moderna, o conhecimento é visto como um meio de dominar a natureza, extraindo dela a riqueza material (BRITO, 1995, p. 73)

O pensamento moderno foi marcado pela confiança na razão. Por esse motivo foi chamado, pelo filósofo francês Merleau-Ponty no século XX, de o *grande racionalismo*. O mundo exterior não fornecia mais a garantia da certeza do conhecimento. A realidade apresentava-se dispersa, múltipla e relativa, não havia mais a pólis, o Império ou uma Igreja única. Cabia à razão a tarefa de unificar o mundo. Seria ela quem daria a condição de certeza do conhecimento. Para não errar, era preciso criar um método seguro e Descartes, assim como outros pensadores da época, buscou este método: “um método geral de pensamento capaz de facilitar as descobertas e encontrar a verdade nas ciências” (STRUIK, 1989, p. 162).

Para Descartes, a certeza e a verdade de toda ciência dependiam somente do conhecimento verdadeiro de Deus. Na Meditação Quinta, afirmou que, conhecendo o Criador, seria possível adquirir uma ciência perfeita. Ele não definiu *verdade*, mas, afirmou que “todas as coisas que conheço clara e distintamente são verdadeiras” (DESCARTES, 1996b, p. 311). Em sua concepção, os estudos deveriam conduzir o espírito ”para emitir juízos sólidos e verdadeiros sobre tudo o que se lhe depara“ (DESCARTES, 1985, p. 11), não apenas “para resolver esta ou aquela dificuldade da escola, mas para que, em cada circunstância da vida, o intelecto mostre à vontade o que deve escolher" (DESCARTES, 1985, p. 12); ou seja, as *verdades* a serem buscadas não eram apenas as verdades das ciências, mas as verdades de todas as coisas. Para compor sua filosofia, partiu do princípio que a *verdade* existia e era única, pensamento vigente na época.

Segundo Struik (1989), naquela época, as ciências naturais que apresentavam algum grau de coerência sistemática eram a astronomia e a mecânica, cuja chave de compreensão era a matemática. Além disso, devido às suas proposições convincentes, a matemática era vista como um exemplo de que a verdade nas ciências podia ser encontrada. Assim, ela tornou-se o meio mais seguro para a compreensão do universo. Esse fato explica o interesse de Descartes pela matemática não ser pela própria matemática, mas, como Platão na Antigüidade, como Pascal em sua época e como mais tarde para Leibniz, buscar nela um modelo de raciocínio. É o que constatamos na regra XIV da obra *Regras para a Direção do Espírito*, na qual Descartes afirmou que seu método não foi criado para resolver problemas de matemática, mas que era preciso aprender as matemáticas para cultivá-lo. Nesse sentido, pode-se afirmar que sua intenção ao utilizar a matemática era de acostumar seu espírito às verdades não se contentando com falsas razões, pois em sua concepção só a matemática apresentava raciocínios rigorosos, e conseqüentemente, quando o espírito estivesse acostumado aos raciocínios matemáticos, estaria preparado à pesquisa de outras verdades, já que em toda parte há somente uma e mesma forma de raciocinar.

Descartes buscou um modelo de raciocínio na matemática e ao aplicar esse modelo a ela criou, o que hoje chamamos, Geometria Analítica, ou seja, o método cartesiano, elaborado a partir do raciocínio usado nas matemáticas, deu nela seus frutos. Ele unificou tanto as notações quanto o método de dois ramos clássicos da matemática, a Aritmética e a Geometria e desenvolveu, para a época, uma sistematização rigorosa das notações algébricas. Com essa criação deu um passo para que surgissem conceitos como o de funções, variáveis e constantes, que juntamente com o conceito de limite, possibilitou o surgimento de uma *nova matemática* que se desenvolveu do século XVII até o início do século XX.

Ele mostrou quais os caminhos que seguiu em busca da verdade na obra intitulada *Discurso do Método*, publicada em 1637, embora seus princípios já estivessem contidos nas *Regras para a Direção do Espírito*, escrita em 1628, onde mencionou que "o método é necessário para a procura da verdade" (DESCARTES, 1985, p. 23). Por método Descartes entendia

> regras certas e fáceis, que permitem a quem exatamente as observar nunca tomar por verdadeiro algo de falso e, sem desperdiçar inutilmente nenhum esforço da mente, mas aumentando sempre gradualmente o saber, até atingir o conhecimento verdadeiro de tudo o que será capaz de saber. (DESCARTES, 1985, p. 24)

No *Discurso do Método* Descartes disse que "o meu desígnio não é ensinar aqui o método que cada qual deve seguir para bem conduzir sua razão, mas apenas mostrar de que maneira me esforcei para conduzir a minha" (DESCARTES, 1996a, p. 66). Ele justificou a necessidade de tentar conduzir a si mesmo na busca da verdade, por entender que freqüentemente nos convencemos mais pelos exemplos e costumes do que pelo conhecimento certo e que nenhuma opinião seria mais válida que outra, nem que uma verdade dita por toda uma comunidade seria mais verossímil do que se dita por uma só pessoa.

Descartes afirmou que sua intenção não era mais do que

> [...] procurar reformar meus próprios pensamentos, e construir num terreno que é todo meu. De modo que, se, tendo minha obra me agradado bastante, eu vos mostro aqui o

> seu modelo, nem por isso quero aconselhar alguém a imitá-lo (DESCARTES, 1996a, p. 76-77).

Porém em seguida afirmou que preferiu ir lentamente mesmo que avançasse pouco, dedicando “bastante tempo em elaborar o projeto da obra que ia empreender, e em procurar o verdadeiro método para chegar ao conhecimento de todas as coisas de que meu espírito fosse capaz” (DESCARTES, 1996a, p. 77)

Então, apesar de não aconselhar a quem quer que fosse imitá-lo, ele entendeu que criou o *verdadeiro método* e não apenas um dentre outros métodos. Assim, pode-se deduzir que ele pretendia ser um exemplo para os outros pensadores.

Refletindo sobre a Lógica, a Análise dos Antigos[18] e a Álgebra dos modernos[19], que estudara quando jovem, disse que essas artes deviam contribuir com alguma coisa para seu objetivo, mas, examinando-as, percebeu algumas deficiências. Concluiu que era necessário buscar outro método que tendo as vantagens desses três, não tivessem seus defeitos. Quanto à Lógica concluiu que apesar de ter preceitos bons e verdadeiros tinha uma porção que eram nocivos ou supérfluos, servindo “mais para explicar a outrem coisas que já se sabem, ou mesmo, como a arte de Lúlio, para falar, sem julgamento, daquelas que se ignoram, do que para aprendê-las” (DESCARTES, 1996a, p. 77). Segundo Abrão (2002), Raimundo Lúlio (c.1233 – 1315), monge espanhol, com a finalidade de converter os muçulmanos à fé cristã, tentou demonstrar a verdade da fé por meios racionais, usando raciocínios coerentes e ordenados logicamente. Chegou a inventar uma espécie de máquina para fornecer mecanicamente todas as combinações possíveis entre as diversas

---

[18] Segundo Granger (1996) a Análise, designa o método que consiste em supor conhecido o que é desconhecido, em estabelecer as relações que ligam o conhecido ao desconhecido, até que se possa construir a linha desconhecida a partir destas relações. Entre os Antigos, esse método se apresenta sob a forma geométrica.

[19] Para Descartes a Álgebra nada mais é do que uma espécie de Aritmética, que permite tratar os números do mesmo modo que os Antigos tratavam as figuras.

noções de fé cristã. Lúlio, como Descartes, havia tido a intenção de criar uma ciência universal, que seria tronco comum de todos os ramos do saber: a matemática. Mas, apesar de haver diversos paralelos entre a *arte luliana* e as preocupações de Descartes, não é possível dizer que Lúlio tenha influenciado Descartes de modo significativo. Este havia estudado as obras de Lúlio, mas acabou decepcionando-se com elas.

Devido a critica feita à Lógica, ao invés de adotar o grande número de preceitos que a compunham, Descartes criou seus próprios preceitos metodológicos e afirmou que seria suficiente adotá-los desde que eles fossem sempre observados. Esses ensinamentos, constantes no *Discurso do Método,* representam submissão à exigência estritamente racionais e podem ser descritos da seguinte forma:

- *Preceito da evidência*: só considerar verdadeiro o que for evidente[20], ou seja, evitando a precipitação e a prevenção, e de não aceitar como verdadeiro nada que não se apresente clara e distintamente ao espírito;
- *Preceito da análise*: dividir cada uma das dificuldades que se apresentem em tantas parcelas quantas sejam necessárias e possíveis para resolvê-las;
- *Preceito da síntese*: conduzir com ordem os pensamentos, começando dos objetos mais simples e mais fáceis de serem conhecidos, para depois tentar gradualmente o conhecimento mais complexo;
- *Preceito da enumeração*: realizar enumerações completas e revisões gerais de modo a ter certeza de que nada foi omitido.

Quanto à Análise dos geômetras e à Álgebra dos modernos, disse que

> além de se estenderem apenas a matérias muito abstratas, e de não parecerem de nenhum uso, a primeira permanece tão adstrita à consideração de figuras, que não

[20] Ver página 93 do presente trabalho

> pode exercitar o entendimento sem fatigar muito a imaginação, e esteve-se de tal forma sujeito, na segunda, a certas regras e certas cifras, que se fez dela uma arte confusa e obscura que embaraça o espírito, em lugar de uma ciência que o cultiva (DESCARTES, 1996a, p. 77).

Por isso Descartes se propôs a tomar o que havia de melhor na Análise Geométrica e na Álgebra, corrigindo, segundo ele, seus defeitos.

Contrariamente aos Escolásticos, que separavam as Matemáticas, de acordo com seu objeto, em Matemáticas Puras (Geometria e Aritmética) e Mistas (Astronomia, Música e Óptica), Descartes defendeu a idéia de uma matemática universal (Mathesis universalis). Na regra IV afirmou que

> E ainda que esteja decidido a falar aqui muito de figuras e de números, porque não se pode pedir a nenhuma das outras disciplinas exemplos tão evidentes e tão certos, quem, no entanto, prestar atenção à minha idéia, aperceber-se-á facilmente de que estou a pensar nada menos do que nas Matemáticas vulgares e que exponho uma outra disciplina de que elas são mais roupagem do que partes. Esta disciplina deve efetivamente conter os primeiros rudimentos da razão humana e estender-se para fazer brotar verdades a respeito de qualquer assunto [...] (DESCARTES, 1985, p. 25, 26).

No século XVII a idéia de uma Mathesis universalis teve ampla circulação. Segundo Gaukroger (2002), é possível que essa idéia tenha se originado tanto em Aristóteles quanto em Proclo, embora a fonte mais provável seja a matemática do quinhentista belga Adrianus Romanus (1561–1615), que desenvolveu esse pensamento em sua obra *Apologia pro Archimedes* de 1597.

Descartes entendia que a matemática não devia ser numérica ou geométrica, mas sim uma ciência universal na qual estivesse incluído o que há de comum na Geometria e Aritmética para depois aplicá-las a outros objetos. Ele procurava algo que abrangesse a Aritmética e a Geometria sem distinção, que fosse além do conteúdo aritmético e geométrico específico. Para Descartes o objeto a ser concebido para demonstrar o que havia de verdadeiro no campo da Aritmética e da

Geometria devia ser *extenso,* sem considerar mais nada nele além da extensão, e "por extensão, entendemos tudo o que tem um comprimento, uma largura e uma profundidade, sem inquirir se é um verdadeiro corpo ou um espaço apenas" (DESCARTES, 1985, p. 94).

Em sua concepção, as regras do método que queria aplicar universalmente estavam manifestas no raciocínio matemático. Conforme suas palavras, "entre os que buscavam a verdade nas ciências, só os matemáticos puderam encontrar algumas demonstrações, isto é, razões certas e evidentes" (DESCARTES, 1996a, p. 79). Por isso decidiu começar pelas mesmas coisas que os matemáticos começaram, buscando nos geômetras o raciocínio rigoroso que, segundo ele, através de longas cadeias de razões chegavam às mais difíceis demonstrações. Descartes acreditava que tudo o que se podia conhecer era possível de ser deduzido a partir das coisas mais simples e mais fáceis de se conhecer, desde que guardada a ordem necessária para deduzir umas das outras.

A aplicação de seu método à matemática foi apresentada em um dos três ensaios que acompanhou o *Discurso do Método*: o *Geometria,* sua única publicação matemática. A impressão do livro terminou no dia 8 de julho de 1637, em Leyden, e foi publicado nesse mesmo ano. De acordo com o costume da época, omitiu-se o nome do autor da obra, com o intuito de conhecer melhor as opiniões e as críticas. O *Discurso do Método* foi amplamente difundido e discutido, porém o *Geometria* tornou-se a parte menos investigada. Isso se deveu ao fato de sua exposição não ter sido clara, além de exigir conhecimentos de geometria e álgebra. Descartes omitiu propositadamente muitos detalhes, o que tornou o *Geometria* difícil de ser compreendido. Essa atitude é admitida por ele ao afirmar que

> Eu não pararei para explicar isto em maiores detalhes, porque eu lhe privaria do prazer de você mesmo dominar este assunto, como também da vantagem de treinar sua mente através do trabalho sobre ele, que é o principal benefício derivado desta ciência. Porque eu não encontro aqui algo tão difícil que não possa ser trabalhado por uma pessoa de algum modo familiarizada com a geometria ordinária e com álgebra, e que considere cuidadosamente tudo que está posto neste tratado (DESCARTES, 1954, p. 10)

Se Descartes realmente acreditava serem desnecessárias maiores explicações, se queria propositadamente problematizar a matemática, ou se pretendia que sua obra fosse compreendida por poucos, não é possível julgar. Porém, pela dificuldade que seus contemporâneos tiveram para entendê-la, reconheceu-se a necessidade de serem dadas explicações adicionais a respeito de seu conteúdo. Depois de um ano da publicação do *Geometria,* Descartes recebeu e aprovou um extenso comentário sobre sua obra intitulado *Notae breves*, feito por Florimond Debeaune (1601–1652). Posteriormente o *Geometria* foi divulgado através da publicação em 1649 da obra *A geometria a Renato Des Cartes* (Geometria por René Descartes), de Frans van Schooten (1615–1660), uma versão em latim do *Geometria* acompanhada de material explicativo juntamente com as *Notae breves* de Debeaune. Depois, Schooten fez outras versões mais ampliadas que foram publicadas nos anos de 1659, 1661, 1683 e 1695. Por esse motivo, Boyer (1974, p. 272) comentou que “não é exagero dizer que embora a geometria analítica fosse introduzida por Descartes, ela foi estabelecida por Schooten”.

O *Geometria,* como parte do *Discurso*, é iniciado na página 297 e compõe-se de três partes, ou três livros: o Livro I é intitulado *Problemas de Construção que requerem somente linhas retas e círculos;* o Livro II tem por título *Sobre a Natureza das Linhas Curvas*; o Livro III é denominado *Sobre a Construção de Problemas Sólidos ou Supersólidos*. Contém ao todo 51 figuras, sendo apenas 34 delas diferentes entre si, pois quando o autor referia-se a alguma figura já feita anteriormente ela era novamente colocada junto ao texto. Em nenhuma figura esteve presente explicitamente um sistema de eixos coordenados ortogonais. Cada livro encontra-se dividido em diversas partes, ou seções, de acordo com o assunto que fosse tratado. O texto foi apresentado continuamente, sem separação para cada nova seção, a indicação de nova seção consta na margem da página, na altura da linha que inicia novo assunto. A indicação da página, onde se encontra cada seção, está em um sumário elaborado para cada livro.

O livro I vai da página 297 a 314. É o menos extenso, contém seis figuras sendo uma delas repetida e foi dividido em nove seções. Descartes iniciou-o dando um correspondente geométrico às operações algébricas, mostrando como a multiplicação, a divisão e a extração de raiz quadrada são efetuadas geometricamente. Depois construiu a simbologia que iria usar na obra. Em seguida, mostrou como se chega a equações que servem para resolver problemas. Fez então um estudo sobre os tipos de equações de segundo grau e como resolvê-las. Finalmente, aplicou seu método na resolução algébrica do *problema de Pappus* para quatro retas. É nesse livro que os princípios gerais da Geometria Analítica estão mais explícitos.

O livro II vai da página 315 a 369. É o mais extenso. Tem, no total, 29 figuras: 19 diferentes entre si e as demais repetidas. Foi dividido em dezessete seções. Descartes iniciou com comentários sobre a diferença entre curvas mecânicas e curvas geométricas para então sugerir uma nova classificação das curvas. Em seguida, dedicou-se à resolução geométrica do *problema de Pappus*. Depois, tratou da construção e propriedades de tangentes e normais à determinadas curvas. Finalmente, expôs quatro novos gêneros de *ovais* e deu suas propriedades de reflexão e refração.

O livro III vai da página 370 a 413 e tem 16 figuras, sendo apenas 10 diferentes entre si. Apresenta dezessete seções. O autor incluiu um amplo estudo de equações: sua resolução, discussão de suas raízes e relações entre os coeficientes. Mostrou que uma equação tem tantas raízes quanto seu grau e descreveu a chamada *regra dos sinais* a qual permite saber, observando os sinais dos coeficientes da equação, o número máximo de soluções ou raízes positivas e negativas da mesma[21]. Dedicou-se também a problemas de terceiro grau, incluindo estudos sobre a trissecção de um ângulo.

O *Geometria*, apesar do nome, não tratou exclusivamente de geometria, mas também de álgebra, além de associar a álgebra e a geometria com o objetivo de apresentar soluções de problemas[22]. É uma obra matemática apresentada em um texto contínuo, não seguindo o padrão axiomático, como o existente nos *Elementos* de Euclides, que apresenta a matemática como uma cadeia dedutiva de proposições, ou seja, a partir de definições e axiomas demonstra outras proposições. Portanto, a matemática do *Geometria* não segue uma abordagem dedutiva nos moldes dos *Elementos*.

---

[21] Estando a equação na forma geral, isto é, o segundo membro da igualdade reduzido a zero e seus termos em ordem decrescente em relação aos expoentes da incógnita, ela terá no máximo tantas raízes positivas quanto as trocas de sinais dos coeficientes dos termos e tantas raízes negativas quanto a permanência dos sinais dos coeficientes dos termos. É mencionado *no máximo* para eliminar deste cômputo as possíveis raízes imaginárias e repetidas. Por exemplo, a equação $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ tem três trocas de sinais (+1, – 9, +26, –24) e, segundo esta regra, no máximo três raízes positivas (suas raízes são 2, 3 e 4). A equação $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ tem uma troca de sinais e três permanências, então terá no máximo uma raiz positiva e três negativas (suas raízes são – 4, –3, –2 e 5).

[22] Pode-se perguntar qual o motivo que levou Descartes a intitular seu ensaio por *Geometria* e não por *Álgebra*, se ele tratava destes dois assuntos. É razoável lançarmos algumas hipóteses baseadas em suas palavras da Regra IV. Descartes acreditava que os Antigos haviam conhecido os princípios de uma *verdadeira* matemática, cujos vestígios estavam em Pappus e Diofanto, ou seja, na Aritmética e na Geometria. Para ele estas duas disciplinas eram as mais simples e caminho para as outras disciplinas que faziam parte das Matemáticas – a Astronomia, a Música, a Óptica, a Mecânica e outras. Considerava a Álgebra como um gênero da Aritmética que "permitia fazer para os números o que os Antigos faziam para as figuras" (DESCARTES, 1985, p. 25). Então, como, para ele, os princípios da matemática estavam contidos na Aritmética e na Geometria e que a Álgebra era um gênero de Aritmética, seu livro por tratar destes dois assuntos poderia ter por título tanto *Geometria* quanto *Álgebra*. Mas em sua concepção a Álgebra não passava de *uma geometria para os números*. Daí é plausível que o título fosse *Geometria*, pois desta forma o título abrangeria estes dois campos.

O livro I do *Geometria* é iniciado com a seguinte frase: “Qualquer problema de geometria pode facilmente ser reduzido a tais termos que o conhecimento do comprimento de certas linhas retas é suficiente para sua construção.” (DESCARTES, 1954, p. 2). O objetivo do livro I era apresentar um novo meio, algébrico, para resolver problemas geométricos, ou seja, mostrar que se pensarmos em termos algébricos poderemos combinar os recursos de ambos os campos, algébrico e geométrico, para resolver problemas geométricos. A intenção de Descartes era libertar a geometria dos diagramas que, segundo ele, fatigavam a imaginação.

Primeiramente estabeleceu uma relação entre números e linhas para posteriormente relacionar a álgebra literal com as curvas geométricas. Para isso mostrou, na primeira seção cujo título é *Como os cálculos aritméticos são relacionados com as operações de geometria*, como as operações aritméticas correspondem a construções com régua e compasso, justificando assim a introdução de termos aritméticos em geometria. Segundo suas palavras:

> Da mesma maneira que a aritmética consiste de somente quatro ou cinco operações, isto é, adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes, que é uma espécie de divisão, para encontrar linhas pedidas é somente necessário somar ou subtrair outras linhas; ou então tomar uma linha que eu chamarei de unidade para relacionar tão próximo quanto possível de números, e que pode em geral ser escolhida arbitrariamente, e dada duas outras linhas, encontrar uma quarta linha que estará para a linha dada quanto a outra está para a unidade (que é o mesmo que multiplicação); ou, ainda, encontrar uma quarta linha que está para a linha dada como a unidade está para a outra (que é equivalente a divisão); ou finalmente, encontrar um, dois, ou mais meios proporcionais entre a unidade e alguma outra linha (que é o mesmo que a extração de raiz quadrada, raiz cúbica, etc da linha dada). E eu não vacilei em introduzir estes termos aritméticos na geometria com a finalidade de tornar-me mais claro. (DESCARTES, 1954, p. 2-5)

Descartes não mencionou como fazer a adição e subtração de segmentos. Explicou como fazer a multiplicação, a divisão e a extração de raízes, mostrando geometricamente que, quando estas operações são efetuadas entre segmentos, resultam em segmentos. O que foi feito na segunda seção sob o título *Como são feitas geometricamente a multiplicação, a divisão e a extração de raízes quadradas*. Para isso, utilizou diagramas e não usou qualquer tipo de simbolismo a não ser duas letras maiúsculas, lado a lado, para indicar segmentos.

Explicou sucintamente como proceder na multiplicação entre dois segmentos. Disse que para multiplicar BD por BC devia-se tomar AB como unidade, depois unir os pontos A e C e então traçar DE paralelo a CA. Daí, afirmou que BE seria o produto de BC por BD (Figura 4).

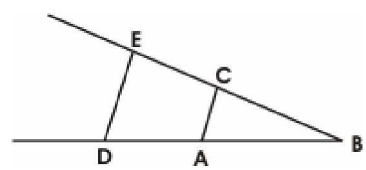


Figura 4: Multiplicação entre dois segmentos

Essa é toda a explicação, acompanhada de um diagrama como a figura acima, que Descartes deu para a multiplicação de dois segmentos. É provável que ele tenha chegado a essa conclusão usando semelhança de triângulos, pois conforme nota de rodapé dos tradutores da versão do *Geometria* utilizada neste trabalho, em carta enviada à Princesa Elizabeth, Descartes declarou que:

> Na solução de problemas geométricos [...] não usei outro teorema exceto os que afirmam que os lados de triângulos semelhantes são proporcionais e que o quadrado da hipotenusa[23] é igual à soma dos quadrados dos lados [...] (DESCARTES, 1954, p. 10).

[23] Na época era usual referir-se à *hipotenusa* como *base do triângulo*. Não é possível saber qual o termo usado por Descartes, pois não tivemos acesso ao texto original. Este trecho foi retirado de uma nota de rodapé da versão do *Geometria* que utilizamos, elaborada pelos tradutores.

Pode-se complementar a demonstração de Descartes da seguinte forma:

Os triângulos BAC e BDE são semelhantes [24]

Então, em notação atual, tem-se a proporção $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$

Daí BD.BC = BA.BE.

E como BA é a unidade, ou seja, BA = 1, temos BD.BC = BE, ou seja, BE é o produto entre BD e BC.

Usar proporções não era novidade na época, pois a ferramenta algébrica dos gregos havia sido a teoria das proporções, contida nos *Elementos* de Euclides, e essa teoria tinha sido utilizada pelos estudiosos antigos e medievais. O que Descartes fez de novo foi introduzir a unidade e transformar uma proporção entre segmentos em produto de segmentos. Por meio desse procedimento, Descartes mostrou que o produto entre dois segmentos é outro segmento e não uma grandeza plana ou espacial, como entendiam os gregos. Dessa forma, preservando o significado geométrico das operações, pode abandonar o princípio da homogeneidade vigente desde os gregos.

Segundo esse princípio, o produto de dois segmentos era necessariamente uma área, o produto de três segmentos era necessariamente um volume e não era concebível o produto de mais de três segmentos[25]. Assim a^2, a^3, ab^2 deixaram de ser vistos como áreas e volume e passaram a ser encarados como segmentos de reta. Além do mais, ao tratar a multiplicação como Descartes, ou seja, que o produto de dois segmentos é outro segmento, deixou de existir limitação na quantidade de segmentos a serem multiplicados. Conforme suas palavras:

---

[24] pois o ângulo $\hat{B}$ é comum e os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{D}E$, bem como os ângulos $B\hat{C}A$ e $B\hat{E}D$ são iguais já que os lados AC e DE são paralelos.

[25] Para os gregos, encontrar o produto entre os segmentos BC e BD era necessário construir um retângulo de lados BC e BD. A área deste retângulo representava o produto entre os segmentos.

> Aqui deve ser observado que *a^2, b^3* e expressões similares, eu ordinariamente deixo significar simples linhas que, entretanto eu nomeio quadrados, cubos, etc, de forma que eu posso fazer uso das condições empregadas na álgebra (DESCARTES, 1954, p. 5).

Esse fato tornou a álgebra geométrica mais flexível.

A partir desse ponto do texto de Descartes, é plausível introduzir uma discussão pedagógica a respeito da dualidade do significado de expressões do tipo a^2 *e* a^3, ampliando, desse modo, o campo conceitual dos futuros professores, chamando a atenção para o fato de que se hoje damos maior ênfase ao sentido algébrico dessas expressões, elas não deixam de ter significado geométrico. Podemos aproveitar e comentar que a matemática não se desenvolve apenas por acréscimo de novos conteúdos, mas também por modificação nos conceitos existentes.

Depois de explicar o procedimento para efetuar a multiplicação, mostrou como proceder no caso da divisão. Utilizou o mesmo diagrama e indicou que para fazer a divisão de BE por BD unia-se os pontos E e D, traçava-se AC paralela a DE. O resultado da divisão seria o segmento BC. Então mostrou como extrair raízes quadradas. Disse ainda que trataria de raízes cúbicas e outras raízes mais adiante.

Passou então à explicação da simbologia que iria usar. Isso foi feito na terceira seção intitulada *Como usamos os símbolos em geometria*. Para introduzir as notações que exprimem as operações explicadas anteriormente, disse que:

> Freqüentemente não é necessário então traçar as linhas no papel, mas é suficiente designar cada uma por uma simples letra. Deste modo, para somar as linhas BC e GH, eu chamo uma de a e outra de b e escrevo $a + b$. Então $a - b$ indicará que b é subtraído de a; ab que a é multiplicado por b; $\frac{a}{b}$, que a é dividido por b; aa ou a^2 que a é multiplicado por ele mesmo; a^3 que é o resultado multiplicado por a e assim indefinidamente. Novamente, se eu desejar extrair a raiz quadrada de $a^2 + b^2$, eu

> escrevo $\sqrt{a^2 + b^2}$; se eu desejar extrair a raiz cúbica de $a^3 - b^3 + ab^2$, eu escrevo $\sqrt[3]{C.a^3 + b^3 + ab^2}$ e similarmente para outras raízes. (DESCARTES, 1954, p. 5)

Aqui podemos discutir com os futuros professores o papel das convenções quanto à simbologia matemática. Descartes criou sua simbologia e deixou explícito o que ia usar. Nem sempre o professor faz esse contrato com o aluno, imaginando que a simbologia matemática é *natural*. A partir desse fragmento do texto, podemos discutir a importância de deixar claro qual a simbologia que será usada e de que é possível o aluno criar sua própria simbologia desde que ele deixe claro qual é. Pode-se aproveitar e discutir as mudanças que houve ao longo da história, em relação à simbologia, destacando o fato de que a partir da criação do simbolismo ocorreu a separação entre a linguagem matemática e a linguagem materna, ou seja, em determinado momento a matemática adquiriu uma forma própria de representar e registrar suas idéias.

Retomando a simbologia utilizada por Descartes, expressões do tipo $a^2b^2 - b$ foram usadas por ele que, para isto, considerou a expressão a^2b^2 dividida uma vez pela unidade e a quantidade b multiplicada duas vezes pela unidade, ou seja, reduziu ambos os termos para terceiro grau, ou terceira dimensão. Aqui, observa-se que apesar de Descartes ter abandonado o princípio grego da homogeneidade, ainda justificava a adição de segmentos que apresentavam potências diferentes, reduzindo-os à mesma potência através da divisão ou multiplicação pela unidade. Além da notação exponencial e da notação para as operações entre segmentos, Descartes usou letras do começo do alfabeto como parâmetros e do fim como incógnitas, como usamos atualmente.

A notação matemática criada por Descartes é bastante semelhante à atual e encerrou um aspecto muito importante para a evolução da matemática. Cada símbolo deixou de ser representante de um número determinado e passou a representar um conjunto de números quaisquer. Com isso as operações aritméticas adquiriram um caráter de generalidade e assim o enfoque deixou de ser aritmético e passou a ser algébrico. O ganho ao tratar de casos gerais ao invés de casos particulares é explicitado na regra XVI quando Descartes afirmou que

> [...] por exemplo, se se procurar a base de um triângulo retângulo[26], cujos lados são 9 e 12, o calculador dirá que ela é igual à $\sqrt{225}$ ou 15: ao passo que nós poremos *a* e *b* no lugar de 9 e 12 e acharemos que a base do triângulo é igual a $\sqrt{a^2+b^2}$, e estas duas partes a^2 e b^2 permanecerão distintas, as quais se confundem no número. (DESCARTES, 1985, p. 108).

Ou seja, além do caráter geral de sua álgebra, Descartes julgava importante a transparência das operações presentes neste seu novo modo de trabalhar.

Aqui é possível discutir pedagogicamente o aspecto de generalidade que se obtém ao substituir números específicos por letras e que, historicamente, nem sempre esse aspecto foi considerado. Descartes usou esse procedimento e deixou clara sua intenção de obter um caráter de generalidade até então não obtido. Pode-se dar ênfase ao significado e à vantagem de usar variáveis para representar números e, a partir dessa idéia, discutir o significado das fórmulas, tentando proporcionar a compreensão das mesmas, evitando que o aluno substitua as fórmulas por números de modo mecânico, ou seja, evitando o enfoque restrito às regras lógicas que sustentam as relações entre os símbolos, mas desenvolvendo um entendimento dos símbolos como uma representação evolutiva da matemática.

Depois de indicar a simbologia que iria usar, disse que linhas seriam nomeadas por letras, como por exemplo, AB = 1, GH = a, BD = b, associando dessa forma uma

---

[26] Como já mencionado, os matemáticos daquela época referiam-se à hipotenusa de um triângulo retângulo como *base* do triângulo.

medida numérica a uma grandeza geométrica. Descartes afirmou também que, para se ter certeza de lembrar os nomes das linhas, uma lista separada deveria ser feita sempre que nomes fossem determinados ou trocados. Ao utilizar símbolos escritos, concisos, ele sugeriu uma ajuda à memória, pois se podia recorrer a eles muito rapidamente em movimento de intuição simultâneo, deixando o espírito livre para as *idéias presentes*. Descartes descreveu a vantagem de usar uma simbologia deste tipo na regra XVI da obra *Regras para a direção do espírito* mencionando que:

> [...] Por este meio, não só faremos economia de muitas palavras, mas, o que é o principal, apresentaremos os termos da dificuldade sob uma forma tão pura e tão simples que, sem nada se omitir de útil, jamais se encontre neles algo de supérfluo e que ocupe inutilmente a capacidade do espírito, enquanto a nossa mente tiver de abarcar vários objetos ao mesmo tempo. (DESCARTES, 1985, p. 107).

Essa passagem possibilita questionar pedagogicamente aspectos que não são tão *naturais* como parecem, tais como a necessidade de utilizar letras diferentes para linhas diferentes, associação de medida numérica à grandeza geométrica, vantagem da simbologia matemática, uma vez que, usando uma linguagem concisa tem-se uma visão global do problema, quando essa linguagem apresenta significado para o aluno. Podemos também chamar a atenção para o fato de que a matemática não é apenas uma ciência a serviço das outras ciências, citando como exemplo o aprimoramento da simbologia conseguido por Descartes. Muitas vezes a matemática se desenvolve em função de pressões vindas de outros setores do conhecimento humano, mas nesse caso foram necessidades internas que levaram Descartes a buscar uma nova simbologia. E essa nova simbologia auxiliou o desenvolvimento de uma *nova* matemática.

A nova simbologia criada por Descartes teve grande importância para a matemática. Um dos motivos pelos quais a obra de Fermat, que apresentava um sistema análogo ao de Descartes, não ter tido uma influência tão significativa como o

Geometria, foi o fato de Fermat usar a simbologia de Viète, de difícil compreensão. Por exemplo, a equação Dx = By em Fermat era *D in A aequetur B in E* (BOYER, 1974, p. 254) enquanto a equação $z^2 = -az + b^2$ em Descartes era z^2 ꝏ --az+bb, bem mais concisa e de compreensão mais imediata.

No decorrer do *Geometria,* encontra-se o símbolo ꝏ para indicar a igualdade[27]; para indicar a operação de adição ou que certo número era positivo usava +, com o traço horizontal maior que o vertical; para indicar a operação de subtração ou que certo número era negativo usava --, com um pequeno espaço entre os dois sinais; para indicar raiz quadrada usava $\sqrt{\ }$, cujo traço horizontal nem sempre ia até o fim da expressão e não era ligado à parte inferior do sinal, e para indicar a operação de raiz cúbica usava $\sqrt{C.}$ e a expressão em seguida do *C.*. Na maior parte das vezes preferia usar *aa* ao invés de a^2, mas para potências maiores que três, quase sempre usava a indicação por expoente. Por exemplo, para representar $a^2b^2 - b$ escrevia *aabb -- b* (DESCARTES, 1954, p. 299), para representar $z^2 = az + b^2$ escrevia z^2 ꝏ az + bb (DESCARTES, 1954, p. 302). Para indicar que um segmento era igual a alguma expressão usava indistintamente o sinal ꝏ e expressões como *qui est*, *est*, *sera*, *seroit*, *estant*. Por exemplo para escrever que BS = $\frac{dk + dx}{z}$ usava BS est $\frac{dk + dx}{z}$ (DESCARTES, 1954, p. 311) e quando havia uma expressão fracionária ou um termo embaixo do outro, o sinal da adição se transformava numa espécie de cruz de malta. A equação que atualmente escrevemos como $x^2 = \pm ax \pm b^2$, Descartes escrevia xx ꝏ + ou -- ax + ou -- bb. Para representar proporções, por exemplo, AB : BR = z : b escrevia “AB, & BR, est ausfy donnée, & ie a pose comme

[27] De acordo com informações de rodapé da tradução utilizada neste trabalho é provável que Descartes tenha sido o primeiro a usar tal símbolo. Supõe-se que o sinal ꝏ foi inspirado na ligação das duas primeiras letras da palavra latina *aequetur* que significa *igual.*

de z à b” (DESCARTES, 1954, p. 310). Quando o coeficiente da incógnita tinha mais de um termo, como, por exemplo, $(cfglz - dchz^2)y$, escrevia os dois termos um embaixo do outro com o colchete: $\left.\begin{array}{r} + cfglz \\ {-}{-}dchz^2 \end{array}\right\} y$ (DESCARTES, 1954, p. 325)

Na maior parte das vezes, usava o sinal * quando não aparecia o termo de grau imediatamente menor que o precedente. Por exemplo, escrevia “$z^3 = * {-}{-}\ qz + p$” (DESCARTES, 1954, p. 400) para representar $z^3 = qz + p$, indicando que não tinha termo em z^2. Representava equações praticamente como representamos atualmente. Por exemplo, a equação $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ era representada por “$x^4\ {-}{-}\ 4x^3\ {-}{-}\ 19xx + 106x - 120 \propto 0$. Para representar $\pm$ usava $+$ *ou* -- e também “.”, por exemplo, $x^4 \pm px^2 \pm qx \pm r = 0$. Em Descartes era escrita da seguinte maneira: “$+ x^4 * .pxx\ .\ qx\ .\ r \propto 0$” (DESCARTES, 1954, p. 385), o sinal * representava, no caso, a falta do termo em x^3.

A equação $y^6 \pm 2py^4 + (p^2 \pm 4r)y^2 - q^2 = 0$ era escrita da seguinte maneira:

$$y^6\ .2py^4 * \left.\begin{array}{r} + pp \\ .4r \end{array}\right\} yy\ {-}{-}\ qq = 0$$

(DESCARTES, 1954, p. 383)

Ao verificar a simbologia usada por Descartes, observamos que, embora semelhante à atual, tem algumas diferenças. Podemos levar essa questão para uma discussão pedagógica no sentido de que é possível aceitar as simbologias criadas pelos alunos já que a simbologia é uma convenção e sofreu muitas alterações no decorrer dos tempos.

Tendo mostrado como as operações algébricas eram interpretadas geometricamente e qual a simbologia que iria usar, Descartes voltou-se para a aplicação de técnicas algébricas a problemas geométricos. Inicialmente deu as regras de formação de equações para depois mostrar como usá-las na resolução de problemas planos. Essas regras são apresentadas na quarta seção sob o título *Como usamos equações na solução de problemas*.

Descartes não explicitou seu método no *Geometria*, mas foi construindo-o ao longo da obra. Para explicar como resolver um problema Descartes afirmou que:

> Se nós desejarmos solucionar qualquer problema, primeiro supomos a solução já efetuada e damos nomes para todas as linhas que parecem necessárias para sua construção – as que são desconhecidas e as que são conhecidas. (DESCARTES, 1954, p. 6).

Aqui fica claro que ele inspirou-se no método que os antigos utilizavam e chamavam de Análise, segundo o qual devia-se considerar obtido o que era pedido, para então se chegar a alguma coisa conhecida ou algum princípio fundamental. Descartes inovou ao associar a esse método a álgebra, encorajando assim o desenvolvimento de técnicas algébricas independentes de visualizações geométricas.

Depois disso, Descartes explicou como usar equações na resolução de problemas. Disse que deveríamos proceder como se o problema estivesse solucionado, combinando as linhas para que todas as quantidades pudessem ser escritas de duas maneiras. E aí teríamos a equação. Em suas palavras:

> [...] Então, não fazendo distinção entre linhas conhecidas e desconhecidas, nós temos que examinar a dificuldade no caminho que mostrar mais naturalmente as relações entre estas linhas, até conseguirmos expressar uma mesma quantidade de duas maneiras. Isto constituirá uma equação, pois os termos de uma destas duas expressões é igual aos termos da outra. (DESCARTES, 1954, p. 9)

Aqui é possível discutir um aspecto importante da matemática e questão de dificuldade dos alunos. Segundo Duval (1995), os registros de representação mais complexos, ao contrário do que é afirmado correntemente, são os que tem como ponto de partida o enunciado em linguagem corrente. Ele afirma que as resoluções dependem primeiramente da compreensão do enunciado e da conversão das informações, ou seja, escrever um problema, em linguagem matemática, a partir do seu enunciado, envolve uma série de mecanismos cognitivos e é algo bem mais amplo que fazer uma mera *tradução* da linguagem verbal para a linguagem matemática. Devemos considerar também que o simbolismo é um instrumento algébrico que, ao ser utilizado na resolução de problemas, envolve um modo de pensar. É o que Lins ([19--?], p. 01) comenta no texto *Entre a Aritmética e a Álgebra: reflexões sobre o que parecia certo* ao afirmar que

> o domínio dos instrumentos algébricos e de um modo algébrico de pensar são condições quase necessárias para a elaboração e compreensão de uma vasta parte do conhecimento matemático.

Além disso esse autor considera que se têm basicamente duas explicações para as dificuldades apresentadas pelos estudantes no entendimento, interpretação e uso de simbolismo algébrico:

> i) persistência dos significados que certos símbolos tinham quando usados em ‘aritmética’ e ii) incapacidade cognitiva (no sentido de que para lidar com expressões ‘abstratas’ a/o estudante deve ter atingido um certo nível de desenvolvimento intelectual) (LINS, [19--?], p. 01)

Então podemos aproveitar o texto de Descartes para destacar a importância e a dificuldade envolvidas na transformação de um problema da linguagem materna para a linguagem algébrica.

Conforme nota de rodapé da edição utilizada neste trabalho, van Schooten na página 149 ilustrou a afirmação feita por Descartes anteriormente com o seguinte problema: “Dado um segmento de reta AB contendo qualquer ponto C, é pedido prolongar o segmento AB até D de forma que o retângulo AD.DB seja igual ao quadrado sobre CD”[28]. Segundo van Schooten, com o método de Descartes esse problema seria resolvido da seguinte maneira:

Primeiramente seriam dados nomes aos segmentos, tanto os conhecidos quanto os desconhecidos. Então, AC = a, CB = b e BD = x e daí AD = $a + b + x$ e CD = $b + x$.

Depois expressar-se-ia a mesma quantidade de duas maneiras, ou seja, AD.DB = $(a + b + x).\ x = ax + bx + x^2$ e $CD^2 = (b + x)^2 = b^2 + 2bx + x^2$. A partir dessas duas expressões, constituir-se-ia uma equação igualando essas duas quantidades, isto é, já que AD.DB = CD^2 então $ax + bx + x^2 = b^2 + 2bx + x^2$.

Finalmente, escrever-se-ia a quantidade desconhecida igual às quantidades conhecidas, ou seja, como $ax - bx = b^2$ então $x = \frac{b^2}{a - b}$.

O exemplo anterior nos mostra que, por meio de seu método, Descartes possibilitou a resolução de problemas geométricos, que eram resolvidos pelos antigos com uso de diagramas e aplicação de áreas[29], por meio de técnicas algébricas e, portanto, independente de visualizações geométricas.

[28] Em linguagem atual este problema seria: *Dado um segmento de reta AB contendo qualquer ponto C, é pedido prolongar o segmento AB até D de forma que a área do retângulo de lados AD e DB seja igual à área do quadrado de lado CD.*
[29] O método de aplicação de áreas era feito da seguinte maneira:

- *aplicar a um segmento de reta dado, um paralelogramo ficando aquém por um paralelogramo* significava construir sobre o segmento de reta AB um paralelogramo AQRS, sendo Q entre A e B (Figura 5).
- *aplicar a um segmento de reta dado, um paralelogramo* significava construir um paralelogramo AQRS sobre o segmento de reta AB tal que Q coincida com B (Figura 6).
- *aplicar a um segmento de reta dado, um paralelogramo excedendo por um paralelogramo,* significava construir um paralelogramo AQRS sobre o segmento de reta AB, sendo Q no prolongamento de AB (Figura 7).

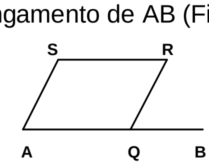


Figura 5

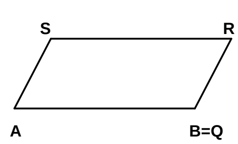


Figura 6

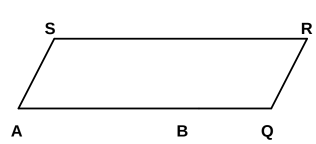


Figura 7

Descartes também explicitou que se devia encontrar tantas equações quantas fossem as linhas desconhecidas, ou seja, em linguagem atual, que o número de equações devia ser igual ao número de incógnitas, e que, se isso não ocorresse, o problema seria indeterminado. Em suas palavras:

> Nós temos que encontrar tantas equações quantas linhas desconhecidas supõe-se existirem, mas se, depois de considerar tudo que é envolvido não encontrar tantas, é evidente que esta questão não é inteiramente determinada (DESCARTES, 1954, p. 9).

Percebe-se que aqui Descartes antecipou uma classificação para os problemas planos – determinados ou indeterminados – de acordo com o número de equações e número de incógnitas obtidas, como fazemos atualmente.

Os PCNS destacam a importância do trabalho em resolução de problema no processo ensino-aprendizagem ao observar que “[...] é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências[...]” (PCNS, 1998, p. 251.). A partir desta parte do texto de Descartes pode-se discutir pedagogicamente a importância de trabalhar com problemas destacando que na maior parte das vezes nos detemos nos problemas, determinados, e na necessidade de mudarmos essa forma de abordagem dos problemas, ampliando as discussões incluindo problemas indeterminados. Também é importante discutir o método de Descartes como processo heurístico, ou seja, como um método para resolução de problemas, explicitando que, apesar de sua importância, esse não é o único método para resolução de problemas.

Mais adiante Descartes afirmou que ao equacionar um problema plano, ou seja, aqueles que se resolvem mediante régua e compasso, obtinha-se uma equação de no máximo 2º grau. Isso foi feito na quinta seção sob o título *Problemas planos e suas soluções*. Em suas palavras,

> E se pode ser resolvido através de geometria ordinária, isto é, pelo uso de linhas retas e círculos traçados sobre uma superfície plana, quando a última equação tiver sido completamente resolvida permanecerá no máximo, somente o quadrado de uma quantidade desconhecida, igual ao produto desta raiz por alguma quantidade conhecida, acrescida ou diminuída por alguma outra quantidade também conhecida. (DESCARTES, 1954, p. 13)

Anteriormente Descartes tinha explicitado a representação das equações ao afirmar que

> [...] deste modo nós temos que combiná-las (as equações) até restar uma única linha desconhecida que será igual a uma linha conhecida, ou seu quadrado [...] que será igual à diferença entre duas quantidades, uma das quais é conhecida [...], isto é, z, que eu chamo que quantidade desconhecida é igual a b; ou, o quadrado de z é igual ao quadrado de b diminuído de a multiplicado por z [...] Isto pode ser expresso por $z = b$ ou $z^2 = -- az + bb$ [...] (DESCARTES, 1954, p. 9)

Mencionou então que esta raiz ou linha desconhecida podia facilmente ser encontrada. Descartes fez um estudo sobre as equações quadradas, agrupando-as em três tipos[30]: $z^2 = az + b^2$, $y^2 = -ay + b^2$ e $z^2 = az - b^2$. Ao resolver qualquer equação quadrada, Descartes considerava como solução apenas as raízes positivas. Por isso não considerou equações do tipo $z^2 = -az - b^2$, uma vez que estas não possuem raízes positivas[31]. Quando a equação resultante do problema

[30] Observa-se que Descartes não utiliza a mesma letra z para os três tipos de equação. Na versão original têm-se"$z^2 \propto az + bb$ [...] $yy \propto --ay + bb$ [...] e $z^2 \propto az—bb$" (DESCARTES, 1954, p. 302-303)

[31] De fato a equação $z^2 = -az - b^2$, com $a > 0$ e $b > 0$, não tem raízes positivas. Esta equação equivale a $z^2 + az = -b^2$, ou seja, $z(z + a) = -b^2$. Suponhamos que $c > 0$ seja raiz da equação. Então $c (c + a) = -b^2$. Como o segundo membro da igualdade é negativo, temos que apenas um dos dois fatores do primeiro membro da igualdade deve ser negativo. Como $c > 0$ por hipótese, obrigatoriamente $c + a < 0$, ou seja, $c < -a$. Como a é positivo $-a$ é negativo. Daí temos uma ‘contradição, pois não é possível termos ao mesmo tempo c maior que zero e menor que um número negativo. Concluímos então que a equação $z^2 = -az - b^2$ não tem raízes positivas.
Outra maneira de verificar este fato é através da soma e produto das raízes. Numa equação do tipo $z^2 + az + b^2 = 0$, com $a,b > 0$, temos que a soma das raízes é $-a$ e o produto das raízes é b^2. Pelo fato

não possuía raiz positiva, Descartes julgava a construção do problema impossível. Em seguida, Descartes propôs a resolução de cada um dos três tipos de equações, não no sentido algébrico dos babilônios, mas geometricamente, à maneira dos gregos, porém sem usar o método de aplicação de áreas.

Aqui fica evidente o esforço de Descartes para encontrar resultados gerais. A busca pela generalidade é uma das características da geometria de Descartes. Até então, os resultados obtidos tanto pelas geômetras antigos quanto pelos algebristas eram particulares. Os geômetras não perdendo de vista a figura descrita, e os algebristas tratando de equações particulares, com coeficientes numéricos. Ao resolver as equações com coeficiente literais, Descartes deu um método que permitia resolver qualquer equação de segundo grau e não apenas casos particulares.

Como os gregos, Descartes assumiu que na solução de uma equação deviam ser usados apenas os meios mais simples apropriados ao grau da equação, ou seja, para resolver equações quadradas, era suficiente usar apenas retas e círculos; para resolver equações cúbicas e quárticas, bastavam as seções cônicas, etc.

Descartes propôs a resolução de equações do tipo $z^2 = az + b^2$ da seguinte maneira (figura 8):

da soma das raízes ser um número negativo temos que pelo menos uma das raízes é negativa. Como o produto das raízes é positivo e uma das raízes é negativa então a outra raiz também é negativa.

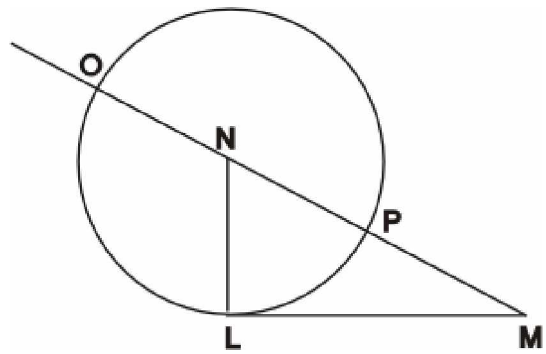


Figura 8: Resolução de equações do tipo $z^2 = az + b^2$

Primeiramente instruiu que fosse construído o triângulo retângulo NLM[32] com o lado LM igual a b, a raiz quadrada da quantidade conhecida b^2, o outro lado LN igual a $\frac{1}{2}a$, metade da outra quantidade conhecida que foi multiplicada por z, que supõe ser a linha desconhecida. Indicou então que prolongasse a hipotenusa[33] MN até O tal que NO ficasse igual a NL. Daí afirmou que a linha inteira OM era a linha requerida z e que ela era expressa por $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ (figura 8).

Essa foi toda a explicação dada por Descartes juntamente com o diagrama. Os tradutores, em nota de rodapé, complementam-na com a seguinte explicação:

Da figura temos[34] OM.PM = LM².

Considerando OM = z, como OP = a, PM = $z - a$ e LM = b temos $z\ (z - a) = b^2$.

Daí $z^2 - az = b^2$, ou seja, $z^2 = az + b^2$.

Mas[35] MN = $\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$

---

[32] O ponto N é o centro da circunferência.

[33] Descartes escreveu *prolongando a base do triângulo*, porque na época a hipotenusa era comumente tomada como base do triângulo retângulo, como já mencionamos nesse trabalho.

[34] A relação OM.PM = LM² é verdadeira devido a semelhança dos triângulos LPM e OML, de onde vem $\frac{PM}{LM} = \frac{LM}{OM}$ e daí OM.PM=LM².

[35] Pelo Teorema de Pitágoras.

Como OM = *z* e OM = ON + NM vem que OM = $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$.

Para equações do tipo $y^2 = -ay + b^2$, onde *y* é a quantidade desconhecida, Descartes considerou o mesmo triângulo retângulo NLM, sobre a hipotenusa MN faz NP igual a NL. Afirmou então que PM é o y procurado e que $y = -\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$.

Complementamos esta explicação da seguinte maneira:

De modo análogo ao caso explicado anteriormente considerando PM = *y*, têm-se OM = $y + a$

Sendo OM.PM = LM² vem que $(y + a).y = b^2$.

Então $y^2 + ay = b^2$. Donde $y^2 = -ay + b^2$.

Mas OM = $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$, NP = $\frac{a}{2}$, ON = $\frac{a}{2}$ e PM = OM – ON – NP.

Então PM = $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$.

Assim $y = -\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$.

Nesses dois casos, Descartes considerou apenas uma raiz, que é a raiz positiva.

Descartes passou então para solução de equações do tipo $z^2 = az - b^2$. Primeiramente, fez NL igual a $\frac{1}{2}a$ e LM igual a *b* como antes, mas em vez de unir os pontos M e N, traçou MQR paralela a LN, descrevendo o círculo com centro em N através de L, cortando MQR nos pontos Q e R.

Afirmou que a linha procurada z é MQ ou MR e que era expressa de duas maneiras: $z = \frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$ e $z = \frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$.

Disse ainda que se o círculo não cortasse nem tocasse a linha MQR a equação não teria raízes e assim a construção do problema seria impossível.

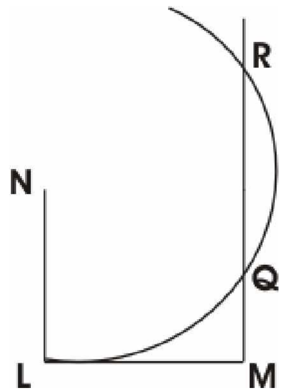


Figura 9[36]: Resolução de equações do tipo $z^2 = az - b^2$.

Novamente, essa foi toda a demonstração dada por Descartes. Os tradutores a complementaram com seguinte explicação:

Temos[37] MR.MQ = LM²

Se MR = z, tem-se[38] MQ = $a - z$.

Então $z.(a - z) = b^2 \Rightarrow za - z^2 = b^2 \Rightarrow z^2 = az - b^2$

Se MQ = z tem-se MR = $a - z$

Então $(a - z).z = b^2 \Rightarrow az - z^2 = b^2 \Rightarrow z^2 = az - b^2$

Portanto, considerando *O* o ponto médio de QR[39] tem-se[40]:

---

[36] Observa-se que *b*, ou seja LM, tem que ser menor que $\frac{1}{2}a$, senão a linha MR não corta o círculo.

[37] Pois os triângulos STR e LMQ são iguais. O triângulo SRL é reto em S. Então os ângulos MRL = TSR e como os ângulos TSR = MLQ então os ângulos MLQ = MRL. Portanto os triângulos LMQ e LMR são semelhantes, então $\frac{MR}{LM} = \frac{LM}{MQ}$

[38] Pois MQ = RT e MT = *a*

[39] Os pontos N e O são alinhados então OM = $\frac{1}{2}a$

$$MQ = OM - OQ = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} \text{ e } MR = MO + OR = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$ [41]

Os tradutores comentaram ainda que Descartes aqui deu ambas raízes, mas ambas positivas. Se MR fosse tangente ao círculo, isto é, se $b = \frac{1}{2}a$, as raízes seriam iguais, enquanto que se $b > \frac{1}{2}a$, a linha MR não cortaria o círculo e as raízes seriam imaginárias.

Também, tem-se que: MR.QM = LM², ou seja, $z_1.z_2 = b^2$ e RM + QM = $z_1 + z_2 = a$.

No *Geometria*, Descartes colocou as limitações tanto da álgebra quanto da geometria, não demonstrando preferência por nenhuma. Seu objetivo era usar o que cada uma tinha de melhor. Segundo análise de Gaukroger (2002, p. 224-225):

> O poder da álgebra, segundo interpretação cartesiana, estava em ela ser uma técnica de resolução de problemas, identificada por Descartes com a antiga arte da análise. A álgebra funcionaria explicando as incógnitas em termos dos dados conhecidos, fornecendo-lhes um simbolismo que lhes permitiria serem ordenadas em equações que vinculariam os dados conhecidos às incógnitas de maneira sistemática. Esse método tinha imensas vantagens sobre as provas geométricas tradicionais, e Descartes acreditava que a demonstração algébrica revelava de um modo completamente transparente os passos implicados na resolução dos problemas.

Pode-se verificar o poder do método de Descartes fazendo uma comparação entre as soluções da Proposição 11 do livro II dos *Elementos* de Euclides, utilizando o método grego e o método de Descartes.

---

[40] $OQ = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ pois no triângulo NOQ tem-se NO = b, NQ = $\frac{1}{2}a$, pelo Teorema de Pitágoras $b^2 + OQ^2 = \frac{1}{4}a^2$ então $OQ^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$.

[41] pois OR = OQ

Seu enunciado é o seguinte: “Dividir um segmento de reta de forma que o retângulo contido pelo todo e um dos segmentos seja igual ao quadrado sobre o segmento restante” (EUCLID, 1956, p. 402)

A demonstração, que é uma construção geométrica, feita por Euclides é a que segue[42]:

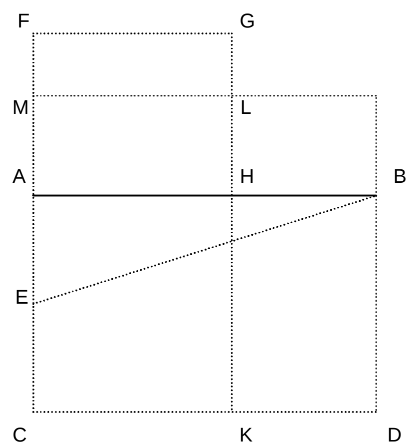


Figura 10: Proposição 11 do livro II de Euclides

Seja AB um segmento de reta. Queremos cortar AB, de forma que o retângulo contido pelo todo e um dos segmentos seja igual ao quadrado sobre o segmento restante, ou seja, a área do retângulo de lados AB, BH seja igual à área do quadrado de lado AH.

Vamos construir o quadrado ABDC sobre AB. Tomar o ponto E, médio de AC e unir BE.

Vamos prolongar o segmento CA até F, de modo que EF seja igual a BE.

Vamos fazer o quadrado AHGF de lado AF e prolongar o segmento GH até K.

---

[42] Esta demonstração foi retirada do livro II de Euclides, mas foi adaptada à linguagem atual. Euclides referia-se à área do quadrado simplesmente como *o quadrado*, ao quadrado AHGF como *quadrado FH descrito sobre AF*, ao quadrado de lado EF como *quadrado em EF* ou *quadrado sobre EF*, ao retângulo de lados AB, BH como *retângulo contido por AB, BH* ou *retângulo AB, BH*.

Eu afirmo que AB foi cortado em H de modo a fazer com que a área do retângulo de lados AB, BH seja igual à área do quadrado de lado AH.

Como o segmento de reta AC foi dividido ao meio por E e somando FA a ele, o retângulo de lados CF, FA junto com o quadrado de lado AE é igual ao quadrado de lado EF (de acordo com a Proposição II.6).

Mas EF é igual a EB, então o retângulo de lados CF, FA junto com o quadrado de lado AE é igual ao quadrado de lado EB.

Mas os quadrados de lados BA e AE são iguais ao quadrado de lado EB, porque o ângulo A é reto (Proposição I.47); então o retângulo de lados CF, FA junto com o quadrado de lado AE é igual aos quadrados de lados BA, AE.

Vamos subtrair de cada um o quadrado de lado AE, então o retângulo de lados CF, FA que sobra é igual ao quadrado de lado AB.

Agora, o retângulo de lados CF, FA é o retângulo CFGK, para AF igual a FG, e o quadrado de lado AB é o quadrado ABDC, então FK é igual a AD.

Deixemos AK ser subtraído de cada um, então FH que sobra é igual a HD.

E HBDK é o retângulo de lados AB, BH, para AB igual a BD; e FGHA é o quadrado de lado AH.

Então o retângulo de lados AB, BH é igual ao quadrado de lado AH.

Então o segmento de reta dado AB foi cortado em H para fazer o retângulo de lados AB, BH igual ao quadrado de lado AH.

Esse mesmo problema é resolvido algebricamente, por meio do método de Descartes como segue:

Damos nomes aos segmentos conhecidos e aos desconhecidos. Assim, chamando AB de a e AH de x, temos o retângulo contido pelo todo e por um dos segmentos representado por AB.BH e o quadrado sobre o restante representado por AH^2.

Então AB.BH = $a\ (a - x)$ e $AH^2 = x^2$.

Pela condição dada no problema, essas duas expressões devem representar a mesma quantidade. Então temos $x^2 = a(a - x)$, ou seja, $x^2 = a^2 - ax$.

Para escrever a quantidade desconhecida x em termos da quantidade conhecida, precisa-se resolver a equação de segundo grau, $x^2 = a^2 - ax$, equivalente a $x^2 = - ax + a^2$. Descartes resolvia essa equação conforme o segundo caso demonstrado anteriormente, considerando o triângulo retângulo NAB e sobre a hipotenusa BN fazendo NP igual a NA. Como OB = $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2}$, NP = $\frac{a}{2}$, ON = $\frac{a}{2}$ e PB = OB – ON – NP.

Então PM = $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$.

Assim x = $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2}$.

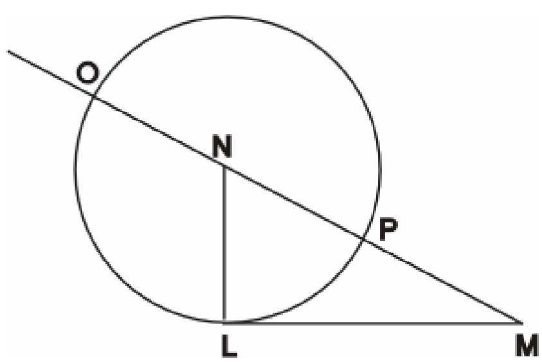


Figura 11: Proposição 11 do livro II de Euclides por Descartes

Conforme análise de Schuster, descrita por Gaukroger (2002, p. 226),

> [...] a notação algébrica registra e permite que se apreenda com facilidade a cadeia dedutiva implicada na descoberta da solução, ao passo que a solução geométrica "resulta num diagrama complexo, que registra mas não *revela* os passos implicados na resolução da dificuldade". A demonstração algébrica deixa claro o que foi feito com as quantidades conhecidas e desconhecidas a cada passo.

Através dessa parte do texto, pode-se fazer uma abordagem histórica da resolução de equações de segundo grau, fazendo uma comparação do método utilizado pelos gregos com o método utilizado por Descartes, mostrando como o abandono da homogeneidade dos gregos tornou a álgebra mais flexível e libertou a matemática dos esquemas geométricos utilizados pelos gregos, que nas palavras de Descartes *fatigavam a imaginação*. É interessante discutir que, apesar de Descartes pretender libertar a matemática de esquemas geométricos, não descartou completamente a representação geométrica e que, quando resolvemos alguns dos problemas de Geometria Analítica, apesar de não ser necessário representá-los graficamente, visualizamos o que estamos fazendo algebricamente, o que é interessante no processo ensino-aprendizagem, uma vez que tal processo tem se caracterizado atualmente por formalismos excessivos. Também podemos comparar com o método atual de resolução de equações, observando o desenvolvimento de um método ao longo dos tempos.

Após a explanação sobre resolução de equações quadradas, Descartes usou seu método para generalizar e resolver o *problema de três e quatro retas*, também conhecido como *problema de Pappus* (que está enunciado nas páginas 47 e 48 do presente trabalho) e que considerava não totalmente resolvido pelos antigos. Isso é feito na seção seis sob o título *Exemplo de Pappus*.

Antes, porém, disse que as raízes descritas anteriormente podiam ser encontradas por outros métodos, mas que tinha dado este para mostrar que se podia construir todos os problemas de geometria ordinária, fazendo não mais do que estava compreendido nas quatro figuras[43]. Fez então uma crítica aos matemáticos antigos, afirmando que eles haviam tido muito trabalho, escrevendo muitos livros sobre geometria, mas que não tinham um método seguro para resolver todas as proposições. Fundamentou essa crítica nas palavras de Pappus, segundo as quais o *problema de três ou quatro retas* não havia sido resolvido completamente nem por Euclides, nem por Apolônio. Descartes citou esta passagem que estava no livro VII da *Coleção* de Pappus,

> Além disso ele (Apollonius) diz que o problema do lugar relativo a três ou quatro retas não foi completamente resolvido por Euclides e que nem ele nem qualquer outro foram capazes de resolvê-lo completamente, nem foram capazes de adicionar qualquer coisa a qual Euclides tinha escrito, por meio de seções cônicas, só o que já tinha sido demonstrado por Euclides (DESCARTES, 1954, p. 18)

Em seguida, Descartes deu a versão de Pappus para o enunciado do problema. Nesse enunciado, Pappus afirmou que se fossem dadas três linhas em posição e, a partir de um ponto, fossem traçadas três linhas fazendo ângulos determinados com cada uma das linhas dadas, de tal forma que tivesse uma razão entre o retângulo contido por duas das linhas traçadas[44] e o quadrado da outra, o ponto ficaria no lugar sólido dado em posição, ou seja, numa das três seções cônicas. Seguindo a mesma ótica, ele analisou a questão para outros números de linhas, estabelecendo a razão entre o produto de algumas das linhas e o produto das outras. Disse que para quatro retas o lugar geométrico do ponto seria também uma das três cônicas. Para duas retas, o lugar seria plano, mas para mais de quatro retas, o ponto geraria lugares desconhecidos até aquele tempo, isto é, impossíveis

---

[43] Descartes refere-se às figuras correspondentes à explicação das operações de multiplicação, equivalente à figura 4 do presente trabalho, de divisão e às duas referentes à resolução de equações quadradas equivalentes às figuras 8 e 9 do presente trabalho.
[44] Naquela época para referir-se ao produto de duas linhas dizia-se: *o retângulo contido por duas linhas*, para referir-se ao produto de três linhas dizia-se: *o sólido paralelepípedo retângulo contido por três linhas.*

de determinar através de métodos comuns, mas que poderiam ser chamados simplesmente *linhas*, sem saber, no entanto, sua natureza ou propriedades já que não havia síntese de nenhuma dessas linhas. Afirmou que para cinco ou seis linhas, era possível estabelecer a relação entre o sólido paralelepípedo retângulo e o produto das outras linhas, mas para “mais de seis linhas, não podemos dizer se há relação de algo contido por quatro linhas e pelo que está contido pelo resto, já que não existe figura de mais de três dimensões” (DESCARTES, 1954, p. 21)

Com relação a essa passagem, Descartes comentou a limitação imposta aos antigos pelo uso de termos aritméticos em geometria. Disse que eles não podiam ir além do ponto em que viam claramente a relação entre esses dois assuntos e que isso causava “muita obscuridade e embaraço nas suas tentativas de explicação” (DESCARTES,1954, p. 21). Justificou essa posição por observar que Pappus prosseguiu no seu enunciado, dizendo que, apesar de não ser compreensível uma figura com mais de três dimensões, era possível enunciar e, por meio de razões compostas, demonstrar as proposições antes citadas para qualquer número de retas, embora não houvesse nenhuma síntese que permitisse conhecer os lugares dos pontos quando houvesse mais de quatro retas.

Nesse ponto, Descartes deu seu enunciado para o *problema de Pappus* generalizando-o para qualquer número de linhas dizendo que:

> A questão cuja solução foi começada por Euclides e levada adiante por Apollonius, mas que não foi completada por ninguém, é esta: Tendo três, quatro ou mais linhas dadas em posição, é primeiro pedido encontrar um ponto do qual podem ser traçadas muitas outras linhas, cada uma fazendo um ângulo determinado com uma das linhas dadas, de forma que o retângulo formado por duas das linhas assim traçadas esteja em determinada proporção com o quadrado da terceira (se existirem apenas três) ou o retângulo das outras duas (se existirem quatro); ou ainda, o paralelepípedo construído sobre três esteja em determinada proporção com o produto das outras duas (se existirem cinco) ou, o paralelepípedo das outras três (se forem seis); ou (se forem sete) o produto obtido multiplicando quatro delas juntas esteja em determinada proporção com produto das outras três; ou (se existirem oito) com o produto das outras

> quatro. Assim a questão admite a extensão para qualquer número de linhas. Mas, já que existe sempre um número infinito de diferentes pontos satisfazendo esta exigência, é também pedido descobrir e traçar a curva que contém todos tais pontos.” (DESCARTES, 1954, p. 22)

Comentou que Pappus não tratou de descrever nem determinar a seção cônica descrita pelos pontos quando se têm três ou quatro linhas, nem explicou a linha descrita pelos pontos quando se tem um número maior de linhas. Afirmou então que “isto me levou a tentar descobrir se, através de meu próprio método, eu poderia ir tão longe quanto eles tinham ido” (DESCARTES, 1954, p. 25)

O método de Descartes no *Geometria* consistia em partir de um problema geométrico, escrevê-lo em linguagem de equação algébrica e depois de simplificar a equação ao máximo, resolvê-la geometricamente. Descartes percebeu a força de seu método ao tratar desse problema, o que fez na seção sete intitulada *Solução do problema de Pappus*. Conforme comentário dos tradutores, pode-se dizer que aqui começou o trabalho de Descartes.

Esse ponto do texto nos permite, no processo pedagógico, discutir que a matemática, historicamente, esteve relacionada à resolução de problemas, que a criação de novas teorias matemáticas esteve ligada, de algum modo, com a resolução de alguma questão ou dificuldade ligadas à matemática ou a outro campo do saber. No caso a criação da Geometria Analítica, esteve ligada à resolução do problema de Pappus.

Outro aspecto que pode ser discutido se refere aos padrões de rigor da matemática. Ao ingressarem em cursos de licenciatura de matemática, os futuros professores entram em contato com os padrões atualizados de rigor, aprendem a utilizá-los e compreendem a necessidade de sua existência em certos campos da matemática. No entanto, é necessário que eles tenham consciência de que, no decorrer dos tempos, tanto a importância dada ao rigor quanto à concepção de rigor sofrem alterações. No texto *Is mathematical truth time-dependent?* Grabiner (1974) comenta que em diferentes épocas ocorreram revoluções que mudaram a visão dos matemáticos a respeito da natureza das verdades matemáticas. Exemplifica esse fato ao analisar que, no século XVIII, os matemáticos estavam mais preocupados com novos resultados do que com o rigor, e que no início do século XIX, por diversos motivos, inclusive pela preocupação com o ensino, o enfoque dado à matemática passou a ser sobre o rigor.

Esse fato pode ser exemplificado pelo texto de Descartes, pois, em vez de ele expor uma matemática axiomatizada, nos moldes dos *Elementos* de Euclides, tratou de resolver problemas em um texto contínuo, apresentando assim uma noção de rigor diferente da noção de rigor contida nos *Elementos.*

Primeiramente Descartes analisou os diversos casos, de acordo com o número de linhas:

- para três, quatro ou cinco linhas (as cinco não paralelas), diz que os pontos pedidos podem ser encontrados por "geometria elementar, isto é, usando régua e compasso e aplicação dos princípios que eu já expliquei." (DESCARTES, 1954, p. 25). Disse também que, no caso de três ou quatro retas, os pontos não ficam sempre sobre uma seção cônica, mas que podem estar sobre um círculo ou sobre uma linha reta (formas degeneradas das seções cônicas);

- para seis, sete, oito ou nove linhas (as nove não paralelas) e cinco retas paralelas, diz que os pontos podem ser encontrados por geometria de lugares sólidos[45], isto é, usando uma das seções cônicas. Diz também que no caso de cinco, seis, sete ou oito linhas, os pontos ficam sobre uma curva do próximo grau mais alto

[45] Como já afirmamos anteriormente, os matemáticos do século XVII usavam o termo *lugares sólidos* para se referir às três secções cônicas. A linha reta e o círculo eram chamados de *lugares planos* e as outras curvas eram chamadas *lugares lineares.*

que as seções cônicas, mas que em casos excepcionais os pontos pedidos podem ficar sobre uma seção cônica, um círculo ou uma linha reta.

- para dez, onze, doze ou treze retas (as treze não paralelas) e nove retas paralelas, os pontos podem ser encontrados, usando uma curva do próximo grau mais alto que o das seções cônicas. E no caso de nove, dez, onze ou doze retas, os pontos ficam sobre uma curva do próximo grau mais alto que no caso precedente.

- e assim por diante, indefinidamente, sempre usando uma curva de próximo grau mais alto que no caso precedente para encontrar os pontos e localizando-os numa curva do próximo grau mais alto que no caso anterior.

Após essa análise, Descartes enunciou o problema utilizando simbologia, e considerando qualquer número de linhas. Em suas palavras:

> Sejam AB, AD, EF, GH, etc. várias linhas dadas em posição e deve-se encontrar um ponto C, do qual traçando outras linhas as linhas dadas, como CB, CD, CF e CH, de maneira que os ângulos CBA, CDA, CFE, CHG, etc. sejam dados, e que o produto da multiplicação de uma parte destas linhas, seja igual ao produto da multiplicação das outras: ou então que elas tenham uma proporção dada, o que não faz, de modo algum, mais difícil o problema (DESCARTES, 1954, p. 26-29)

Depois afirmou que havia realizado o que os antigos tinham tentado fazer e que daria a demonstração em poucas palavras. Considerou o raciocínio válido para qualquer número de linhas retas dadas em posição, mas referiu-se a quatro linhas, tanto no diagrama quanto na demonstração algébrica. Descartes em sua resolução caracterizou o ponto C de modo que as retas CB, CD, CF e CH e os ângulos CBA, CDA, CFE, CHG fossem tais que CB.CF = CD.CH.

No diagrama a seguir (Figura 12) as linhas AB, AD, EF, GH (cheias) são as retas dadas e as linhas CB, CD, CF e CH (tracejadas) são as retas traçadas segundo ângulos dados.

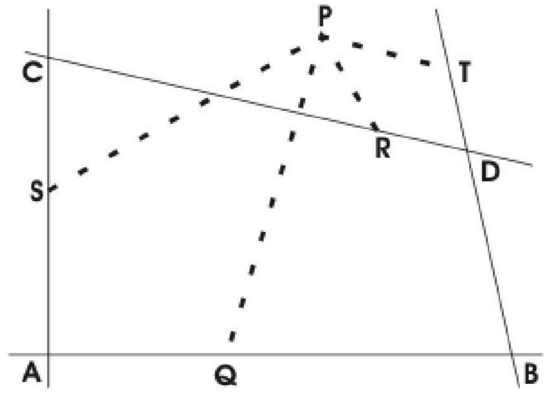


Figura 12: O problema de três e quatro retas

Em seguida, Descartes apresentou sua resolução algébrica para encontrar o ponto C, o que fez na oitava seção sob o título *Como devemos tomar os termos para chegar à equação neste exemplo*.

Descartes disse que consideraria a coisa feita e para simplificar tomaria uma das linhas dadas (AB) e uma das linhas traçadas (BC), como linhas principais, para as quais iria referir todas as outras. Disse que designaria por x o segmento da linha AB compreendido entre A e B e por y o segmento da linha CB compreendido entre C e B. Ordenou que todas as linhas fossem prolongadas até que encontrassem as linhas principais AB e BC, sendo necessário que nenhuma linha fosse paralela às linhas principais.

Quando Descartes tomou duas linhas como linhas principais, para referir todas as outras, usou uma espécie de sistema de coordenadas, diferente do atual *sistema cartesiano ortogonal*, pois essas duas linhas não precisavam ser perpendiculares.

Aqui se pode discutir, pedagogicamente, um aspecto importante na obra de Descartes e que pode ser considerado o princípio da Geometria Analítica: o uso de sistema de coordenadas associado a técnicas algébricas. E mais: que o sistema a se utilizar não precisa necessariamente ser ortogonal – usamos este por ser mais simples em algumas situações – e também que os eixos não precisam ser fixos. Em geral se tem a concepção de que o sistema de eixos *cartesianos* foi criado por Descartes da forma como o usamos. No entanto, Descartes utilizou um sistema de coordenadas oblíquo e não usava coordenadas negativas. Foi Fermat quem utilizou um sistema, onde as ordenadas eram tomadas perpendicularmente ao eixo das abcissas. E, conforme SILVA (1993/1994), a obra *Application de l'algèbre à la géométrie* de 1718, de Guisnée "parece ser o primeiro livro em que as coordenadas *x* e *y*, no sistema cartesiano retangular, são interpretadas como segmentos em relação a dois eixos perpendiculares" (SILVA, 1993/1994, p. 58).

Também podemos discutir que a Geometria Analítica que trabalhamos está em sua forma final, que foi obtida ao longo dos tempos, mas que ela não foi criada pronta como a temos hoje.

Retomando a resolução do *problema de Pappus,* conforme representação da Figura 12, as linhas dadas cortam AB nos pontos A, E e G cortam BC nos pontos R, S e T.

Declarou, então, que, como todos os ângulos do triângulo ARB são conhecidos[46], a razão entre os lados AB e BR é também conhecida[47].

Afirmou, pois, que se fizermos AB : BR = *z : b*, como AB = *x*, temos BR = $\frac{bx}{z}$;

Como B está entre C e R (na figura em particular) nós temos CR = $y+\frac{bx}{z}$[48].

[46] pois BC corta AB segundo ângulos dados, as retas AB e AD são dadas em posição, então o ângulo BAD é conhecido, o ângulo RBA é conhecido e, portanto o ângulo ARB também é conhecido.

[47] pela lei dos senos, embora não se saiba os comprimentos da linhas AB e BR, sabe-se a proporção entre eles, pois, $\frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{BR}=\frac{\operatorname{sen}R}{AB}\Rightarrow\frac{AB}{BR}=\frac{\operatorname{sen}R}{\operatorname{sen}A}\Rightarrow\frac{AB}{BR}=\frac{z}{b}$

[48] pois CR = CB + BR

Quando R está entre C e B, CR = $y - \frac{bx}{z}$ e quando C está entre B e R, temos CR = $-y + \frac{bx}{z}$.

Como os três ângulos do triângulo DRC são conhecidos[49] a razão entre os lados CR e CD é conhecida[50].

De modo análogo ao anterior, chamando a razão CR : CD = *z : c*, como CR = $y + \frac{bx}{z}$ temos CD = $\frac{c}{z}.y + \frac{bc}{z^2}.x$[51].

Como as linhas AB, AD, EF são dadas em posição, a distância de A até E é conhecida. Chamando essa distância de k então EB = *k* + *x* (neste caso). Quando B está entre E e A, EB = *k* – *x* e quando E está entre A e B, EB = – *k* + *x*.

Como todos os ângulos do triângulo ESC são conhecidos, a razão entre BE e BS é conhecida. Chamando esta razão BE : BS = *z : d*, temos BS = $\frac{kd + xd}{z}$[52] e CS = $\frac{yz + dk + dx}{z}$[53].

Quando S está entre B e C nós temos CS = $\frac{yz - dk - dx}{z}$ e quando C está entre B e S, temos CS = $\frac{-yz + dk + dx}{z}$.

Os ângulos do triângulo FSC são conhecidos e conseqüentemente a razão entre CS e CF também é conhecida. Se CS : CF = *z : e* então CF = $\frac{yez + kde + dex}{z^2}$[54].

---

[49] o ângulo CRD é o mesmo que ARB, que é conhecido, CD corta AD segundo ângulo dado, então CDR é conhecido e assim DCR também é conhecido.

[50] pela lei dos senos, como anteriormente explicado

[51] pois CD = $\left(y + \frac{bx}{z}\right)\frac{c}{z}$

[52] pois BS = $BE.\frac{d}{z}$, como BE = k + x $\Rightarrow$ BS = $\frac{(k + x).d}{z}$

[53] pois CS = y + BS

O comprimento AG é conhecido e chamando-o *l* temos BG = *l – x.*

Como todos os ângulos do triângulo BGT são conhecidos, a razão entre BG e BT também é. Se chamarmos BG : BT = *z : f* temos BT = $\frac{lf - xf}{z}$[55] e CT = $\frac{yz + ll - xf}{z}$[56].

No triângulo TCH, a razão entre CT e CH é conhecida. Se CT : CH = *z : g* e CH = $\frac{yzg + lfg - fgx}{z^2}$[57].

Em resumo, podemos dizer que Descartes estabeleceu as razões que são conhecidas:

$$\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}, \quad \frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}, \quad \frac{BE}{BS} = \frac{z}{d}, \quad \frac{CS}{CF} = \frac{z}{e}, \quad \frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}, \quad \frac{CT}{CH} = \frac{z}{g}.$$

e como EA = *k*, AG = *l* são conhecidos e CB = *y* e AB = *x* são desconhecidos.

E chega a:
$$\begin{cases} CB = y & CF = \dfrac{dex + zey + kde}{z^2} \\ CD = \dfrac{bcx + czy}{z^2} & CH = \dfrac{-fgx + zgy + lfg}{z^2} \end{cases}$$

E, assim, Descartes demonstrou que o comprimento de qualquer linha que passa por C, formando certos ângulos com as linhas dadas, pode ser expresso por três termos; ou seja, uma expressão da forma *ax* + *by* + *c*, onde *x* e *y* são quantidades desconhecidas e a, b e c são números reais positivos ou negativos, inteiros ou fracionários. Isso não é válido quando as linhas dadas são paralelas a

---

[54] pois CF = $CS.\frac{e}{z} \Rightarrow CF = \frac{yz + dk + dx}{z}.\frac{e}{z}$

[55] pois BT = $BG.\frac{f}{g}$ mas BG = $l - x \Rightarrow BT = (l - x).\frac{f}{g}$

[56] pois CT = CB + BT $\Rightarrow CT = y + \frac{lf - xf}{z}$

[57] pois CH = $CT.\frac{g}{z} \Rightarrow CH = \frac{yz + ll - xf}{z}.\frac{g}{z}$

AB, e daí o termo contendo x desaparece ou quando as linhas dadas são paralelas a CB, e daí o termo contendo y desaparece. Segundo Descartes, esses casos são muito simples para que requeiram explicação adicional.

Concluiu também que, no produto de qualquer número dessas linhas, o grau de qualquer termo que contém x ou y não será maior que o número de linhas, expresso por meio de x ou y, a partir do qual é criado. Assim, nenhum termo será de grau maior que o segundo se duas linhas são multiplicadas, nem o grau será maior que três se três linhas são multiplicadas e assim por diante.

Declarou ainda que a condição dada para determinar o ponto C, ou seja, que o produto de um certo número de linhas (duas no caso de quatro retas) seja igual ou esteja em proporção com o produto das outras, é expressa por uma única equação em duas quantidades desconhecidas, isto é, uma equação indeterminada. Então se pode dar qualquer valor para x ou y e encontrar o valor do outro na equação. Afirmou que quando o problema não é proposto para mais de cinco linhas, a quantidade x, que não é usada para expressar a primeira das linhas, não pode ser de grau maior que o segundo. Se for atribuído um valor para y, teremos $x^2 = \pm\ ax \pm b^2$; e então x pode ser encontrado com régua e compasso pelo método explicado anteriormente.

Asseverou também que, se, tomarmos um número infinito de valores para y, obteremos um número infinito de valores para x e, portanto, um número infinito de pontos C, por meio dos quais poderemos traçar a curva pedida.

Nessa passagem, Descartes assegurou que é possível construir a curva por meios algébricos, como fazemos hoje em dia. Quebra assim uma tradição grega. Para os gregos não era suficiente definir curvas abstratamente como lugares satisfazendo a condições sobre as coordenadas; era necessário exibi-lo como uma seção de um sólido, ou descrevê-lo através de um processo cinemático. Segundo alguns estudiosos esse é um dos princípios fundamentais da Geometria Analítica, isto é, a descoberta de que equações indeterminadas em duas incógnitas correspondem a lugares geométricos. Esse aspecto pode ser discutido pedagogicamente comparando com o ensino atual de Geometria Analítica no qual trabalhamos com as equações algébricas da reta, da circunferência e das cônicas.

Finalmente, Descartes analisou os casos em que são dadas mais de quatro retas, concluindo que para cada duas linhas introduzidas a equação se tornava um grau maior e a curva conseqüentemente se tornava mais complexa.

Até aqui Descartes deu uma demonstração analítica do *problema de três e quatro retas*. Ele encerrou essa parte dizendo que estava completo o que queria demonstrar, a resolução do problema de Pappus; mas que, para passar à segunda parte, era preciso fazer algumas demonstrações quanto à natureza das curvas. Em suas palavras: “Isto completa a primeira parte do que quis demonstrar aqui, mas antes de passar para a segunda é necessário fazer algumas demonstrações gerais concernentes à natureza das linhas curvas.” (DESCARTES, 1954, p. 37).

Ao analisarmos o *Geometria* de Descartes constatamos que ele não iniciou a abordagem da geometria pelo sistema de coordenadas, como fazemos atualmente ao iniciar o conteúdo de Geometria Analítica, nem sua exposição seguiu um padrão axiomático como o que estava presente nos *Elementos* de Euclides com definições, seguidas de axiomas e proposições. Até aquele momento, Os *Elementos* representavam um paradigma na ciência pelo grau de perfeição apresentado em sua geometria. Com a criação do que hoje chamamos Geometria Analítica, cujo ator principal foi Descartes, esse paradigma foi quebrado e iniciou-se a Idade Moderna na matemática.

Mas que tipo de mudança tão profunda ocorreu a partir de Descartes? Vamos analisar alguns aspectos para compreender isso.

Em primeiro lugar, devemos levar em conta que as obras matemáticas da Antigüidade eram baseadas em sistemas axiomáticos. Axiomatização de uma teoria ou de um ramo da ciência, segundo PIAGET; GARCIA (1982), é uma formulação sistemática de elementos previamente elaborados. Por meio dela, procura-se clarificar as relações lógicas existente entre esses elementos. Os matemáticos gregos usavam duas formas de argumentação matemática: a análise e a síntese. A análise consistia em técnicas que possibilitavam encontrar a solução de um problema, mas não equivaliam a uma comprovação; a síntese mostrava como chegar à solução a partir dos princípios elementares e valia como comprovação. Em vista disso, embora fossem usados os dois métodos, geralmente só a síntese, que é uma forma de demonstração dedutiva e que valia como comprovação, era apresentada. Dessa forma, se demonstrava que o conhecimento matemático era criado através de dedução a partir de princípios gerais. Descartes discordou dessa idéia e rejeitou sistemas axiomáticos. Para ele, a matemática consistia na solução de problemas e não na demonstração axiomática, rejeitando, dessa maneira, a abordagem dedutiva. Essa rejeição resultou num aspecto importante de seu método: a preponderância da análise em detrimento da síntese. Descartes também recusou a silogística como instrumentos de descoberta. De acordo com análise de Gaukroger (2002), o ponto de partida para os estudos de Descartes foi a *Álgebra* de Clavius. Na *Álgebra,* Clavius interpretava a análise em termos de silogística, tornando dedutivo todo o processo e não apenas sua parte sintética. Clavius apresenta a primeira proposição do livro I de Euclides, qual seja, “Sobre um segmento de reta dado construir um triângulo eqüilátero" (EUCLID, 1956, p. 241) em termos de silogismo da seguinte maneira:

> "Todo triângulo com três lados iguais é eqüilátero.
> O triângulo ABC tem três lados iguais.
> Logo, o triângulo ABC é eqüilátero" (GAUKROGER, 2002, p. 168)

Depois diz que todas proposições matemáticas podem ser analisadas da mesma maneira, ou seja, para Clavius

> a análise é situada como pouco mais do que uma preparação para a síntese; é simplesmente um exercício de tradução de proposições geométricas sob a forma silogística, para que a estrutura dedutiva das demonstrações geométricas possa ser vista como realmente é, ou seja, um exercício da lógica aristotélica. Se guardarmos isso em mente, poderemos começar a compreender o toque polêmico do ataque de Descartes às demonstrações "estéreis" dos antigos, assim como sua tentativa de dissociar por completo a análise e a síntese. A reconstrução da geometria em termos silogísticos faria dela uma empreitada rigorosamente aristotélica, perdendo-se por completo o objetivo de reformular o conhecimento nos moldes da matemática. Não surpreende, portanto, que Descartes rejeitasse tão decididamente o valor da síntese (GAUKROGER, 2002, p. 168)

Essa rejeição vai se refletir no *Geometria*, o qual apresenta algumas provas sintéticas, mas é mediante a análise que leva adiante seus estudos, promovendo, como vimos, a solução do *problema de Pappus*, considerado por muitos estudiosos como um dos problemas mais difíceis da Antigüidade.

Ao finalizarmos a análise do texto de Descartes, podemos discutir pedagogicamente a seqüência lógica utilizada por ele ao criar sua teoria, bem como a importância e o significado da quebra de paradigmas na ciência, tomando a matemática como exemplo.

CONCLUSÃO

Retomando a questão colocada no início da presente dissertação, ou seja, quais discussões pedagógicas acerca de conceitos envolvidos na Geometria Analítica podem ser levantadas a partir da análise do livro I da obra *Geometria* de Descartes e tendo em vista as discussões propostas neste trabalho, entendemos que o texto de Descartes pode ser utilizado em sala de aula com o objetivo de introduzir discussões de caráter pedagógico envolvendo questões não apenas relacionadas aos conceitos envolvidos na Geometria Analítica como também relacionadas à natureza da matemática. Em resumo, podemos criar situações problematizadoras envolvendo questões que dizem respeito:

- à dualidade do significado de expressões do tipo a^2 e a^3, ou seja, seu significado geométrico e seu significado algébrico;
- ao papel das convenções quanto à simbologia matemática;
- ao aspecto de generalidade na matemática obtido ao substituir números específicos por letras;
- ao significado e vantagem de usar variáveis para representar números específicos associando esta idéia às fórmulas da Geometria Analítica;
- à importância da compreensão do significado da linguagem matemática para sua manipulação coerente;
- à importância e dificuldade na transformação de um problema, da linguagem materna para a linguagem algébrica;
- à importância de trabalhar com resolução de problemas e necessidade de trabalhar não apenas com problemas determinados, mas também com problemas indeterminados;
- à abordagem histórica da resolução de equações de segundo grau;

- à concepção de que a criação de novas teorias matemáticas está ligada , em geral, à resolução de questões ligadas à própria matemática ou a outro campo do saber;
- à concepção de rigor na matemática e as alterações que esta concepção sofreu ao longo da história;
- ao uso de coordenadas associado à técnicas algébricas;
- ao significado e importância da quebra de paradigma nas ciências e em particular na matemática;
- ao estudo do método e da seqüência lógica utilizada por Descartes ao compor sua obra.

Porém a priorização dada, em geral, ao uso de técnicas em detrimento da compreensão e significação dos conteúdos de Geometria Analítica em currículos tradicionais, a dificuldade de compreensão da obra de Descartes, a ligação entre a geometria desenvolvida por Descartes e os fundamentos da Geometria Analítica não ser facilmente estabelecida, e o fato dos alunos estarem mais acostumados ao ensino de técnicas do que à análise de textos matemáticos são dificuldades previsíveis de serem encontradas ao incluir, num currículo de Geometria Analítica, as questões anteriormente relacionadas.

No entanto podemos encarar estas dificuldades como desafios. Ao propormos um currículo articulado com o desenvolvimento histórico da Geometria Analítica estaremos mudando o enfoque predominantemente mecanicista dado ao ensino desta disciplina. Ao fazermos uso de um texto como base para estas discussões estaremos incentivando o aluno à compreensão e interpretação de um texto matemático bem como oportunizando ao aluno/professor entrar em contato com a criação de uma teoria seguindo a lógica de sua construção, fatos que podem contribuir para que o aluno torne-se mais questionador.

Além disso, por meio destas discussões o aluno pode ampliar seu campo conceitual em alguns pontos e compreender melhor como se dá a criação e o desenvolvimento de uma teoria, tendo como exemplo a criação e o desenvolvimento da Geometria Analítica.

REFERÊNCIAS

ABRÃO B. E Coscodai M. (Org.) **História da Filosofia**. Trad. Bernadette Siqueira Abrão. Nova Cultural, 2002.

ALEKSANDROV A. D., Kolmogorov A.N., Laurentiev M.A. y otros. **La matemática:** su contenido, métodos y significado, Verson española de Manuel López Rodriguez. Madrid: Alianza Editorial, 1994.

BACCA J. D. G. **Elementos de Geometria** Versão: Davi G. Bacca, México: Universidade Nacional Autônoma de México, 1944.

BACON, F. **Verdadeiras indicações acerca da interpretação da natureza**. Trad. José Aluysio Reis de Andrade. São Paulo: Nova Cultural. 1999 In: Coleção Os pensadores

BATTISTI C. A. **O método de análise em Descartes:** da resolução de problemas à constituição do sistema do conhecimento. Cascavel: Edunioeste, 2002.

BAUMGART J. K. **Álgebra:** Tópicos de História da matemática para uso em sala de aula.Trad. Hygino H. Domingues Atual Editora, 1997.

BARON, M. E. B. **Curso de história da matemática** – Origens e desenvolvimento do cálculo: Unidade 1 – A Matemática Grega, Trad. José Raimundo B. Coelho, Editora Universidade de Brasília, 1985.

BLAS, Á. C. **Descartes**: geometría y método. Madrid: Nivola Libros Ediciones; 2001.

BOYER, C. B. **História da matemática**, Trad. Elza F. Gomide, São Paulo: Ed. Edgard Blücher Ltda, 7ª ed, 1974.

_____. **Tópicos da matemática para uso em sala de aula** – Cálculo, São Paulo: Atual Editora Ltda, 1993.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1999.

BRITO, A J. **Geometrias não-euclidianas**: Um Estudo Histórico-Pedagógico. Dissertação de Mestrado – São Paulo: Unicamp. 1995.

_____. **História das técnicas de localização no globo terrestre e suas relações com a geometria.**

_____. e MIORIM M. A. **A história na formação de professores de matemática:** reflexões sobre uma experiência In: Seminário Nacional de História da Matemática, 3., 1999, Vitória. **Anais** do III Seminário Nacional de História da Matemática, Vitória, 1999. p. 255-274.

_____. e CARVALHO, Dione L. **Geometria e outras metrias**, Natal: Editora da SBHMat, 2001.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 7ª ed. Lisboa. [s.n.], 1978.

CASSIRER, E. **A filosofia do Iluminismo** Ed. Unicamp, 1992.

COURANT, Richard e ROBBINS, H. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.

CORBIN H. **Historia de la filosofía islámica** Trad. Agustín López y María Tabuyo, Galiimard: Editorial Trotta, 1964-1968.

D'AMBRÓSIO, U. **"História e educação matemática"** In: Caderno Cedes – Centro de Estudos Educação e Sociedade N º 40 – História e Educação Matemática, Campinas: 1ª edição, Ed. Pappirus. 1996.

_____. **O fazer matemático:** uma perspectiva histórica. In: Seminário Nacional de História da Matemática, 3., 1999, Vitória. **Anais** do III Seminário Nacional de História da Matemática, Vitória, 1999. p. 96-113.

DAVIS, P. J. e HERSH R. **O Sonho de Descartes**, Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves Editora S.A., 1988.

_____. e HERSH R. **A experiência matemática**, Lisboa: Gradiva Publicações Ltda. 1995.

DUVAL R. **Semiosis et pensée humaine:** Registres sémiotiquet et apprentissages intellectuels Suiça: Peter Lang,1995.

DESCARTES, R. **Discurso do método** Trad. J. Guinsburg e Bento Prado Júnior. São Paulo: Nova Cultural, 1996a. In: Coleção Pensadores.

_____. **Meditações.** Trad. J. Guinsburg e Bento Prado Júnior. São Paulo: Nova Cultural, 1996b. In: Coleção Pensadores.

_____. **The geometry of Rene Descartes with a facssimile of the first edition** Trad. David Eugene Smith e Marcia L. Latham. New York: Dover Publications, Inc. 1954.

_____. **Regras para a direcção do espírito**, Lisboa: Edições 70, 1985.

_____. **La geometria** Trad Pedro Rossel Soler, Buenos Aires: Ed. Espasa 1947.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**, Trad. Hygino H. Domingues, Campinas: Ed. da Unicamp, 1995.

_____. **Geometria**: Tópicos da Matemática para uso em sala de aula, Trad: Hygino H Domingues, Atual Editora, 1992.

EUCLID. **The elements**, Trad. T. L. Heath, Dover, Nex York, 1956. v. 2

FASHEH, M. - "Matemática, Cultura e Poder" In: **Zetetiké** – CEMPEM – FE/UNICAMP, Campinas: V. 6 – Nº 9 Jan/jun. 1998.

FAUVEL, J., MAANEN, Jan van. **History in mathematics education**: The ICMI study, Netherlands: Kluvwer Academic Publishers, 2000. v. 6.

FIORENTINI, D **–** "Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil" In: **Zetetiké** – Campinas: CEMPEM FE/UNICAMP, Ano 3 – N º 04 – Novembro 1995.

FOSSA, J. A. **Hamlet antipholus e antipholus**: lucubrações pedagógicas sobre a História da Matemática. In: ENEM, 5., 1995, Aracaju. **Anais** do V ENEM, Aracaju, 1995. p. 281-283.

_____. **Ensaios sobre a educação matemática**. Pará: Eduepa, 2001.

GAUKROGER, S. **Descartes** – uma biografia intelectual. Trad. Vera Ribeiro, Contraponto, 2002.

GERDES, P. **Matemáticos e a origem de conceitos geométricos elementares.** Sobre o despertar do pensamento geométrico – Tese (Doutorado em) Univ. Eduardo Mondlane, 1987, p. 13-16.

GRABINER, Judith V. **Is mathematical trhth time-dependent?** In: The Americam Mathematics Monthly. Abril, 1974.

GRANGER, G-G. **Introdução**. In: Coleção Pensadores – Descartes. São Paulo: Nova Cultural, 1996.

GRATTAN-GUINESS I. (comp.) – **Del Cálculo a la teoria de conjuntos**, 1630 – 1910. Una introducción histórica. Madrid: Ed. Alianza Editoria S/A, 1984.

GUILLEN, M. **Pontes para o infinito** – O lado humano das matemáticas, Lisboa: Gradiva – Publicações Ltda, 1998.

GUINSBURG, J. e JÚNIOR, B. P. **Descartes – vida e obra**, São Paulo: Editora Nova Cultural Ltda, 1996.

HOGBEN, L. **Maravilhas da matemática:** Trad. Paulo Moreira da Silva, Roberto Bins e Henrique Carlos Pfeifer, 2ª ed. Editora Globo, 1970.

HOLLINGDALE, S. **Makers of mathematics**, New York: Penguin Books, 1994.

ITARD, J. **Essais d’histoire des mathématiques**, Paris: Libraire A. Blanchard, 1984.

JAPIASSU, H. e MARCONDES, D. **Dicionário básico de filosofia**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 3ª ed. 2001.

KLINE, M. **El pensamiento de la Antigüedad a nuestros dias.** Madrid: Alianza Editorial, 1972, vol III.

KUHN, T. S. **A estrutura das revoluções científicas.** Trad. Beatriz Vianna Boeira e Nelson Boeira, São Paulo: Editora Perspectiva, 1992.

LEWIS G. R. **Descartes e o Racionalismo** Trad. Jorge de Oliveira Baptista Porto: Rés Editora, 2001?

LINDQUIST, M. M. e SHULTE, A. P. (organizadores). **Aprendendo e ensinando geometria.** São Paulo: Atual Editora, 1998.

LINS, R.C. **Entre a aritmética e a álgebra:** reflexões sobre o que parecia certo. Artigo sem indicações de imprenta e descrição física. [S.l.:s.n], [19--?]

_____. “O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico”. In **Dynamis**, volume I, n. 7, p. 29-39, abr/jun 1994.

LINTZ, R. G. **História da matemática** – volume I, Blumenau: Editora da FURB, 1999.

LORENZO, J. **Introducción al estilo matemático**, Madrid: Ed. Editorial Tecnos S.A., Reimpresión, 1989.

LOSEE, J. **Introdução histórica à filosofia da ciência**, Lisboa: Terramar - Editores, Distribuidores e Livreiros Ltda, 1998.

MARTINS, R. A. **O universo:** teorias sobre sua origem e evolução. São Paulo: Moderna, 1994. (Coleção polêmica).

MENDES, I. A. **O uso da história no ensino da matemática:** reflexões teóricas e experiências. Pará: Eduepa, 2001.

MIGUEL, A. “Reflexão acerca da Educação Matemática contemporânea” In: **A Educação Matemática em Revista** – SBEM, N º 2 – 1º Sem. 1994.

_____. **Três estudos sobre a história e educação matemática**. Campinas: Tese (Doutorado em), Faculdade de Educação – UNICAMP, 1993.

_____. e BRITO, A. J. “A história da matemática na formação do professor de matemática” In: **Caderno Cedes – Centro de Estudos Educação e Sociedade** N º

40 – História e Educação Matemática, 1ª edição, Campinas: Ed. Pappirus Editora, 1996.

_____. **Abrindo o debate em torno da metodologia da pesquisa em história da matemática.** In: Seminário Nacional de História da Matemática, 3., 1999, Vitória. **Anais** do III Seminário Nacional de História da Matemática, Vitória, 1999. p. 139-151.

MIORIM M. A., Miguel A. **A prática social de investigação em história da matemática:** algumas considerações teórico-metodológicas. In: EBRAPEM 6., 2002, Campinas. **Anais** do VI EBRAPEN, Campinas, 2002. p. 06-17.

MOURÃO, R. R. F. **O livro de ouro do universo**. 4ª edição, Rio de Janeiro: Ediouro Publicações S.A., 2001.

NOBRE S., Dynnikov C., Miguel A. **História e Educação da Matemática:** tendências para o início do século XXI. In: ENEM, 6., 1998 São Leopoldo. **Anais** VI ENEM, São Leopoldo, 1998. p. 122-123.

_____. "Alguns porquês na história da matemática e suas contribuições para a educação matemática" In: **Caderno Cedes – Centro de Estudos Educação e Sociedade** Nº 40 – História e Educação Matemática, 1ª edição, Campinas: Ed. Pappirus Editora, 1996.

PAVANELLO, R. M. "O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências" In: **Zetetiké – CEMPEM** FE/ UNICAMP, Campinas: Ano 1 – Nº 01 – Março 1993.

PESSANHA, J. A. M. **Vida e obra** In Coleção Pensadores – Descartes. São Paulo: Nova Cultural, 1996.

PIAGET, J. e GARCIA, R. **Psicogênesis e história de la ciência.** México: Siglo Veintiuno Editores S.A., 1982.

POZO, J. I. e CRESPO, M.A. **Aprender y ensenar ciencia.** Madrid: Ediciones Morata, 2001.

RÍBNIKOV, K. **História de las matemáticas**, Moscou: Editorial Mir, 1987.

ROSSI, P. **A ciência e a filosofia dos modernos: aspectos da resolução científica**, São Paulo: Editora UNESP, 1992.

SCHUBRING G. **A pesquisa em história da matemática:** questões metodológicas In: Seminário Nacional de História da Matemática, 3., 1999, Vitória. **Anais** do III Seminário Nacional de História da Matemática, Vitória, 1999. p. 192-203.

SILVA, C. M. S. “O desenvolvimento da Geometria Analítica e a Influência de Descartes e Euler na Obra de Auguste Comte” In: **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**, nº 14, Curitiba: Ed. da UFPR, 1/2, 1993/1994.

_____. “Lacroix e a popularização da geometria analítica” In: **Educ. Mat. Pesqui.** São Paulo: v. I, n. 1, 1999.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas.** Lisboa: Gradiva Publicações 1ª ed., 1989.

SZABÓ, A. “The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on defininitions an axioms” in *Scripta Mathematica*. Vol. XXVII. n. 2. p. 113 – 119.