UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

MARTA MARIA MAURÍCIO MACENA

CONTRIBUIÇÕES DA INVESTIGAÇÃO EM SALA DE AULA PARA UMA APRENDIZAGEM DAS SECÇÕES CÔNICAS COM SIGNIFICADO

NATAL – RN

2007

MARTA MARIA MAURÍCIO MACENA

CONTRIBUIÇÕES DA INVESTIGAÇÃO EM SALA DE AULA PARA UMA APRENDIZAGEM DAS SECÇÕES CÔNICAS COM SIGNIFICADO

NATAL – RN

2007

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial Especializada do Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Macena, Marta Maria Maurício

Contribuições da investigação em sala de aula para uma aprendizagem das secções cônicas com significado / Maria Marta Maurício Macena. – Natal, 2007.

162 f. – Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2007.

1. Matemática – Aprendizagem – Dissertação. 2. Matemática – Ensino – Dissertação. 3. Matemática – História – Dissertação. 4. Secções cônicas – Pesquisa – Dissertação. I. Título.

CDU 51:37

MARTA MARIA MAURÍCIO MACENA

CONTRIBUIÇÕES DA INVESTIGAÇÃO EM SALA DE AULA PARA UMA APRENDIZAGEM DAS SECÇÕES CÔNICAS COM SIGNIFICADO

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 24 / 4 / 2007

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes - Orientador
(Presidente da Banca)

Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa - UEFS

Profa. Dra. Claudianny Amorim Noronha – UFRN

Profa. Dra Bernadete Barbosa Morey – UFRN

Dedico

Aos meus pais, Ananias Maurício Macena (em memória) e Adélia Maurício Macena (em memória) que, crédula, sempre impulsionou o meu crescimento.

Aos meus irmãos, Silvinha (em memória), Dé e Mônica.

Aos meus sobrinhos, Moisés, Mikelli, Suelem, Adrielli, Adriel, Elaine e Manoel.

Agradeço:

Ao meu Deus, Criador, Mantenedor e Redentor.

Ao Prof. Dr. Iran Abreu Mendes pela orientação, amizade e atenção que me dedicou durante todo curso.

Aos professores do programa que contribuíram com muitas das idéias aqui desenvolvidas.

Ao Centro Federal de Educação Tecnológica da Paraíba – CEFET/PB onde a pesquisa foi desenvolvida.

Aos meus queridos alunos e alunas das $3^{\underline{as}}$ séries (2001, 2004 e 2005) do CEFET/PB, sujeitos dessa pesquisa.

Aos parentes, pela compreensão, pelo incentivo e pelo apoio.

Aos amigos que estimularam e ajudaram na realização deste trabalho.

Todo professor deve cuidar de que seu trabalho tenda a resultados definidos. Antes de tentar ensinar uma matéria, deve ter em seu espírito um plano distinto, e saber o que precisamente deseja conseguir. Não deve ficar satisfeito com a apresentação de qualquer assunto antes que o estudante compreenda os princípios nele envolvidos, perceba a sua verdade, e esteja apto a referir claramente o que aprendeu.

Ellen G. White, 1977.

Entendo matemática como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural.

Ubiratan D’Ambrosio, 2002.

RESUMO

Neste trabalho, analisamos as possibilidades didáticas de uso da investigação em sala de aula, a partir de uma experiência com estudantes do ensino médio no Centro Federal de Educação Tecnológica da Paraíba – CEFET PB, na qual abordamos o estudo das secções cônicas. Para o alcance dos nossos objetivos tomamos como aporte teórico as concepções referentes à aprendizagem significativa em conexão com a investigação em história da matemática. A pesquisa em sala de aula efetivou-se através de atividades que instigaram, no aprendiz, o desejo de investigar os conceitos próprios das secções cônicas. Os resultados das atividades propostas e postas em prática mostraram a eficácia e a eficiência de tal metodologia na construção do conhecimento requerido, nos mostrando que a investigação em sala de aula conduz os envolvidos, nesse processo, a olhar de forma mais globalizante para as origens e os métodos utilizados para desenvolver, além das várias representações apresentadas pela matemática, o que, certamente conduz, principalmente os alunos, a uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Aprendizagem, Cônicas, Educação, História da Matemática, Investigação.

ABSTRACT

In this work, the didactical possibilities of investigation use in classroom, through an experience with high school students from Federal Center of Technological Education of Paraíba, as well as the study of conic sections were analysed. In order to fulfill our goals the theoretical conceptions concerning the meaninful learning in conection with the investigation of mathematics history were taken into account. The classroom research occurred by means of activities which encouraged the learner to investigate his own concepts on the conic sections. The results of the proposed activities showed the effectiveness and the efficiency of such a methodology as regards the making up of the required knowledge. They also reveal that the investigation in the classroom guides the ones involved, in this process, to have a wider look at the origins, the methods used and the several representations presented by mathematics that certainly lead, specially the students, to a meaninful learning.

Keywords: Learning, Conic, Education, Mathematics History, Investigation.

LISTA DE FOTOS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

10. INTRODUÇÃO

Lecionando matemática para o ensino médio desde agosto de 1982, testemunhando e participando de inovações após inovações dentro das práticas educacionais e convivendo, no dia-a-dia, com as persistentes dificuldades básicas pedagógicas, sentimos a carência de um ensino e de uma aprendizagem com significado. Nesse sentido percebemos que “o mais importante fator isolado que influencia a aprendizagem é o que o aprendiz já sabe. Determine isto e ensine-o de acordo”. (AUSUBEL, 1968, p. vi *apud* NOVAK, 1981, p. 9).

Novak afirma, ainda, que

> Determinar o que o aluno já sabe significa identificar os elementos existentes no estoque de conhecimento do aprendiz que são relevantes ao que esperamos ensinar, [...].A idéia central na teoria de Ausubel é o que ele descreve como *aprendizagem significativa*. Para Ausubel, aprendizagem significativa é um processo no qual uma nova informação é relacionada a um aspecto relevante, já existente, da estrutura de conhecimento de um indivíduo. [...] Quando conceitos relevantes não existem, na estrutura cognitiva de um indivíduo, novas informações têm que ser aprendidas mecanicamente. [...] Aprendizagem mecânica é sempre necessária quando um indivíduo adquire informações, em uma área do conhecimento, completamente não relacionada ao que ele já sabe. [...] Alguns estudos indicam que a maioria das informações aprendida mecanicamente nas escolas é perdida dentro de seis a oito semanas. (NOVAK, 1981, 56, 58, 59 e 66).

Segundo Ontoria (2004), o que corresponde à aprendizagem memorística é a aprendizagem superficial a qual contrapõe-se a aprendizagem com significado que procura aprofundar-se principalmente na compreensão do conteúdo ou da informação, sendo o próprio aluno o edificador do seu conhecimento por meio de sua forma de pensar. Denominação semelhante é dada por Moreira (1982) quando atribui a esse tipo de aprendizagem a expressão mecânica. No entanto, precisamos “reconhecer que mecânica → significativa é um *continuum* e não uma dicotomia” (NOVAK, 1981, p. 62).

Inquieta-nos o perigo de, em sala de aula, apresentarmos teorias matemáticas áridas, acabadas em si mesmas, numa cuidada organização lógica que deixa passar a impressão de que seus fundadores avançavam de um teorema para o seguinte de maneira simples e natural, capazes de superar qualquer dificuldade (KLINE, 1992). Também, o perigo de apresentarmos um ensino puramente mecânico em que, memorizando receitas para a resolução de exercícios específicos, a compreensão peculiar ao assunto seja adiada.

Sendo o significado um importante fator para a aprendizagem, necessitamos de metodologias de ensino e de aprendizagem que levem de forma eficiente e eficaz[1] a apreensão de um novo conhecimento.

Numa incursão histórica, devemos buscar os fundamentos, as raízes das teorias matemáticas hoje desenvolvidas para ampliarmos a compreensão dos conceitos. Talvez não cheguemos à total clareza de tais teorias e tais conceitos, mas poderemos chegar a uma idéia da sua natureza, e até reviver conflitos e frustrações que os matemáticos passaram ao longo de um árduo caminho até construir uma estrutura considerada importante. Assim, junto com o aprendiz, conquistaremos a capacidade de enfrentar as próprias deficiências e os tropeços que surgem ao longo de uma investigação, e poderemos reconhecer que muitas dificuldades encontradas nesse percurso assemelham-se àquelas enfrentadas no início da descoberta do conhecimento estudado.

A presente pesquisa analisa a possibilidade de uso de uma abordagem metodológica diversificada para o ensino e a aprendizagem de geometria analítica, particularizando, no estudo das secções cônicas, a elipse, a hipérbole e

---

[1] Segundo Chiavenato (1983, p. 171-172): "*Eficácia* é uma medida normativa do alcance de resultados, enquanto a *eficiência* é uma medida normativa da utilização dos recursos nesse processo. [...] Enquanto a *eficiência* [método] se concentra nas operações e tem a atenção voltada para os aspectos internos da organização, a *eficácia* se concentra no sucesso quanto ao alcance dos objetivos e tem a atenção voltada para os aspectos externos da organização".

a parábola. Apresentamos aqui uma investigação, em sala de aula, com atividades matemáticas organizadas com a intenção de instaurar conflitos, insatisfações, curiosidades e dúvidas. Ou seja, instigar o aprendiz na busca de um conhecimento matemático com significado. Essa procura pode estar relacionada com atividades manipulativas estruturadas, com resolução de problemas do cotidiano, com atividades em laboratório[2], e principalmente com a busca cuidadosa da trajetória histórica dos conceitos matemáticos (MENDES, 2001). Vemos assim, a possibilidade de, com essa pesquisa, atenuar a carência que sentimos de metodologias adequadas ao ensino e à aprendizagem para as secções cônicas.

Num conjunto de "atividades didáticas que visam auxiliar os alunos a se apropriarem do saber e não apenas recebê-lo" (ASTOLFI, 1994, p. 114) – sejam essas atividades coletivas ou por vezes individuais – certamente, poderemos presenciar entre os aprendizes, a troca de idéias, a segura atuação de natos líderes delegando tarefas, a escolha de hipóteses, a satisfação e o interesse ao investigar e tomar posse do novo conhecimento, a realização de debates ferrenhos até uma decisão final, e finalmente, certa capacidade de considerar vários pontos de vista. Esse é um momento em que os investigadores aprendizes mostram-se autônomos (KAMII, 1994a, 1994b). Algumas dessas atitudes, esperadas pelo professor mediador, poderão não ser manifestas, cabendo-lhe, no momento oportuno, a intervenção que conduzirá à aprendizagem.

> [...] é relevante o significado que as atividades têm para o aprendiz. Para que o indivíduo consiga se apropriar do saber, este deve ter sentido para este indivíduo, corresponder a seus interesses. A afetividade é considerada como o aspecto energético da atividade, da cognição. (MICOTTI, 1999, p. 158).

[2] Laboratório aqui pode ter como guia as idéias de René Thom usada por Ferreira (2001, p. 16-17).

Com as atividades manipulativas estruturadas, estaremos provocando o ressurgimento dos saberes, das técnicas, das questões e das idéias, que o aluno já traz consigo, sobre o mundo e a respeito das coisas que o cercam (ASTOLFI, 1994). Assim será possível proporcionar uma afinidade cognitiva entre o aprendiz e o novo conhecimento, pois a investigação ganha significado quando desperta no aprendiz o desejo de *bisbilhotar* – geralmente na fase arranque[3] (PONTE et. al., 2003).

Seguindo uma metodologia adequada, esperamos que as atividades de ensino e de aprendizagem, em conexão com a história da matemática e mediadas pelo professor, guiem o aprendiz pela via da descoberta.

Os momentos áureos de nossa pesquisa deram-se em dois períodos no Centro Federal de Educação Tecnológica da Paraíba – CEFET/PB (Unidade Sede). O primeiro período, no quarto bimestre de 2004 com três turmas de 3ªs séries do ensino médio e depois, no quarto bimestre de 2005, com nove alunos de 3ªs séries do ensino médio.

Nessas ocasiões, buscando recursos e soluções, tornaram-se evidentes os obstáculos próprios da construção do conhecimento, estes foram sendo superados a partir de discussões em grupo e também de nossa mediação. Procuramos conduzir o aprendiz por um caminho preciso, dinâmico e aprazível (DELIZOICOV et. al., 2002; MENDES, 2005, 2006; ONTORIA PEÑA, 2004; BRASIL, 1999; SILVA, 2002). A intenção foi vencer a distância entre o conhecimento pessoal e as aquisições visadas pelo programa da escola (MICOTTI, 1999).

---

[3] A fase *arranque* é considerada por Ponte et. al.(2003) como uma fase inicial, o ponto de partida, curta e crítica.

10.1. JUSTIFICATIVA

Cegos à percepção da matemática como um organismo vivo e expressivo, os livros didáticos nos apresentam os conteúdos matemáticos dispostos de forma equilibrada, precisa, lógica e emplumada, sem excessos nem contradições aparentes (MIGUEL; MIORIM, 2004). Bem diferentes da forma como cada conhecimento foi elaborado ao longo de um caminho, cheio de idas e vindas, mudanças de rumo, hesitações, dúvidas e contradições (KLINE, 1992; PONTE et. al., 2003). Tal caminho, na diligente busca do entendimento, fica oculto ao aprendiz, um caminho que até mesmo o professor pode desconhecer. E por desconhecê-lo persiste num ensino de forma puramente mecânica, memorística ou arbitrária (CAMPANÁRIO, 2002; MOREIRA, 1982; NOVAK, 1981; ONTORIA PEÑA, 2004; VASCONCELLOS, 2006). Desta forma é que o ensino e a aprendizagem chegam a ficar sem significado tanto para o professor como para o aprendiz.

Cabe ao professor, consciente de sua tarefa, buscar formas de provocar o aprendiz no sentido de mobilizar-se cognitivamante e, com atividades específicas, examinar fragmentos latentes na memória do aprendiz, a fim de trazer à tona elementos que possam ser relevantes à aquisição do novo conhecimento. Melhor ainda se, nesse processo, a cumplicidade entre o educador e o aprendiz estiver inundada pela paixão *detetivesca* destacada por Braumann (2002 *apud* PONTE et. al., 2003).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) nos orientam a promover um ensino que leve a uma aprendizagem ativa na qual, além do domínio de conceitos e da capacidade de utilizar fórmulas, o aprendiz desenvolva atitudes e valores. Faz-se necessário alterar hábitos há muito consolidados. Não mais alunos como pacientes (BRASIL, 1999), não mais professor como detentor de todo saber da ciência que, “por vezes, a projeção, pelo aluno, no professor, de ‘sujeito do saber’, acaba sendo repudiada pelo próprio aluno” (NEVES, 2002, p. 54).

Analisando os PCNEM e observando as opositoras manifestações dos envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem, é impossível não destacarmos a resistência à mudança (HOFFMANN, 2004; ONTORIA PEÑA, 2004; VASCONCELLOS, 2006) por parte de instituições de ensino, de professores e de alunos, condicionados à reprodução e à passividade (BERTONI, 1993).

Há um temor em mudar o curso usual do ensino que tem pretensões de manipular e direcionar a aprendizagem. Assim, metodologias alternativas para o ensino e a aprendizagem da matemática são rejeitadas em favor do quadro, giz, livro-texto e da exposição oral do professor. Por esta opção, pode ser transmitido um conhecimento árido, descontextualizado, desconexo e fora das articulações cognitivas cotidianas do estudante. Logo em seguida, sem significado algum para o crescimento intelectual afetivo e cidadão deste indivíduo, a assimilação de uma aprendizagem forçada é avaliada. Se o aprendiz não é capaz de reproduzir o que foi ensinado, logo é qualificado como negligente, relapso, bagunceiro, incapaz ou de limitações cognitivas (VASCONCELLOS, 2006).

É de conhecimento geral que, mesmo de forma não adequadamente sistematizada, muitos professores tentam inovar em sala de aula fazendo uso de algumas atividades pedagógicas diferenciadas. O perigo está em desenvolver tal prática de maneira que o atrativo cubra a compreensão dos conceitos. Assim considera o Fossa:

> Talvez não seja uma ousadia descomunal afirmar que a grande maioria da comunidade da educação matemática tem chegado a consenso de que o ensino baseado em atividades estruturadas [bem estruturadas] é uma das maneiras mais eficazes de ensinar matemática [...], o professor geralmente [quando o faz] lança mão das escassas atividades que tem achado em uma revista ou em um congresso, e acaba utilizando-as mais como um mecanismo de motivação do que como um instrumento compreensivo de instrução. [...] Poucos têm o tempo, ou mesmo a índole, de mergulhar nas profundas águas geladas do passado a fim de trazer à tona um pedacinho do tesouro ali submerso. (FOSSA, 2001, p. 59).

Baldino (1993) também se refere a essa resistência como sendo uma inércia própria de quem prefere permanecer no sistema de ensino tradicional vigente no qual um professor, totalmente sábio, deposita o conhecimento matemático em alunos dentre os quais somente alguns terão o privilégio de aprender (CARVALHO, 1993).

Como a “história é repleta de conexões matemáticas – conexões entre tópicos de matemática, conexões entre matemática e aplicações, conexões entre matemática e outras disciplinas” (WILSON; CHAUVOT, 2000 *apud* BROLEZZI, 2003, p. 16), há uma concordância de idéias entre vários autores de que o “uso da História da Matemática” é um importante instrumento investigativo para o ensino e a aprendizagem da Matemática com significado. (BROLEZZI, 2003; FOSSA, 2001; GONÇALVES, 2005; MENDES, 2001a, 2001b, 2002; MIGUEL; MIORIM, 2004; BRASIL, 1999; FERREIRA, 1994, 2001).

> [Formulando] questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e [procurando] essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso, [<u>investigar</u>, que] constitui uma poderosa forma de construir conhecimento, [...] <u>é procurar conhecer o que não se sabe</u>. (PONTE et. al., 2003, p. 9, 10 e 13, grifo nosso).

Essas características da habilidade de investigação sempre estiveram presentes no espírito de quem aprende, pois:

> Investigar significa [...] desenvolver e usar um conjunto de processos característicos da actividade matemática, como testar e provar conjecturas, argumentar, usar procedimentos de natureza metacognitiva. (ABRANTES, 1996, p. 1-2).

Assim, num contexto de investigação, o estudante, que passa de réu a construtor do seu conhecimento, é direcionado a aprender a aprender (ONTORIA PEÑA, 2004; BRASIL, 1999; POZO, 1998; VASCONCELLOS, 2006), a monitorar o próprio desempenho. Portanto, em detrimento de um aluno passivo, temos um aluno atuante. Atuante nessa matemática que provoca a cognição criativa das pessoas, rica em conteúdo, extensa, mutável, útil e bonita e que foi objeto de paixão de muitos cientistas (BROLEZZI, 2003). E, assistido pelo professor, este aluno passa a investigá-la na "[...] sua dimensão dinâmica de ciência que cresce por um processo de críticas sucessivas, de referimentos de teorias e do confronto de teorias conflitantes" (CARVALHO, 1993).

Se o educador tem como propósito empregar a história da matemática nessa perspectiva investigatória, torna-se indispensável o uso de recursos previamente e arduamente armazenados, o que exige de si tempo e estudo, pois "para ensinar, o professor necessita de conhecimentos e práticas que ultrapassem o campo de sua especialidade" (DELIZOICOV et. al., 2002). Apenas dessa forma, ele terá a garantia de que o seu saber não estará limitado a apenas o que lhe expõem os livros didáticos (GIL-PÉREZ, 2001). No entanto, há professores que, preferindo continuar dependente do exposto em tais livros, impõem aos estudantes técnicas obscuras em suas origens e finalidades (BERTONI, 1993) e não cedem ao encanto da trabalhosa e satisfatória busca de metodologias alternativas para o ensino e a aprendizagem com significado da matemática.

Quando adotamos uma postura investigativa em sala de aula, com atividades bem estruturadas (resolução de problemas, atividades manipulativas, uso de laboratório, especulações históricas), além da envaidecida satisfação ao presenciar a construção do conhecimento pelo aluno, nos sentimos gratificados e realizados pessoalmente devido à execução de um trabalho dinâmico e compensador (DELIZOICOV et. al., 2002; BROLEZZI, 2003). O aluno foi conduzido na construção de um conhecimento matemático com significado para o cotidiano, para o agora, e não só para um desconhecido e incerto futuro.

Crendo-se na real possibilidade da atuação do professor como orientador e do aluno como um orientando que trabalha ativamente, tendências metodológicas estão se desenvolvendo, estão em estudo ou estão em exercício na atualidade. Referindo-se a mudanças que ocorrem para melhor. Nesse sentido, Silva (2002, p. 63) menciona algumas dessas tendências:

> A situação hoje vivida pela educação, no que se refere à matemática, não tem por que se perpetuar. Ao contrário, há evidências de que ela começa a mudar e mudar para melhor. Nesta mudança, há várias tendências. Fala-se em modelagem matemática, resolução de problemas, etnomatemática, história da matemática, uso de computadores, [...] com o mesmo objetivo de tornar o ensino mais eficaz e um aprendizado consideravelmente mais atraente.
> Este progresso didático pode acarretar a ampliação da autonomia do aluno e a aproximação de sua realidade com a matemática.

Tal autonomia, ponderada por Kamii (1994a, 1994b), conduz o aprendiz, de forma eficiente e eficaz, ao saber que na ocasião é investigado.

Buscando metodologias alternativas para o ensino e para a aprendizagem de matemática, devemos levar em conta o currículo oficial e os programas de matemática para os diversos anos de escolaridade (ABRANTES, 1999). No CEFET/PB, a geometria analítica é vista no quarto bimestre do terceiro ano do ensino médio.

Segundo Abrantes (1999) e Ponte et. al. (2003), a geometria, um campo privilegiado de matematização da realidade, é especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas, talvez mais do que qualquer outro domínio da matemática, isso, desde os níveis escolares mais elementares. Possibilitando assim, a escolha e a concepção de tarefas de natureza exploratória e investigativa que podem ser desenvolvidas na sala de aula.

Em relação à geometria analítica, questionamos a possibilidade de desenvolver, no ensino médio, uma atividade investigativa que problematize a visualização, a representação, as propriedades, as relações com o cotidiano, os conceitos e a construção de lugares geométricos das secções cônicas – elipse, hipérbole e parábola. Dessa forma vários pesquisadores vêm desenvolvendo estudos voltados à melhoria do ensinar da Geometria. Para isso propõem técnicas pedagógicas que enfatizem os aspectos criativos e estimulem os professores a trabalhar com mais satisfação nas atividades geométricas, transformando sua prática e utilizando técnicas de ensino centradas no estudante e não no professor. (MURARI, 2004).

> As atuais propostas pedagógicas, ao invés de transferência de conteúdos prontos, acentuam a interação do aluno com o objeto de estudo, a pesquisa, a construção do conhecimento para o acesso ao saber. As aulas são consideradas como situações de aprendizagem, de mediação; nestas são valorizados o trabalho dos alunos (pessoal e coletivo) na apropriação do conhecimento e a orientação do professor para o acesso ao saber. (MICOTTI, 1999, p. 158, grifo nosso).

Para Freudenthal (1973 *apud* ABRANTES, 1999) as descobertas geométricas, sendo feitas também com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes, o que significa possibilitar a ampliação do campo investigatório a ser desenvolvido na sala de aula. Particularmente, o ensino da geometria analítica pode apropriar-se da afirmação de Abrantes (1999) quando este assegura que a relação entre situações da realidade concreta e situações matemáticas encontra na geometria inúmeros exemplos e concretizações.

Vale salientar que, muitos livros didáticos de matemática para o ensino médio, na forma de volume único, como Youssef (2000), Bezerra (2001) e Santos (2003), omitem o conteúdo das secções cônicas. E, seguindo a sugestão desses livros, os quais, muitas vezes, contém erros históricos e conceituais (CAMPANARIO, 2002), professores também deixam de investigar as secções cônicas junto com seus alunos. Talvez por tratar-se de um conteúdo pouco explorado nos níveis de escolaridade desse professor. E, como o estudo desse conteúdo geralmente é feito no final do ano, há também os professores que, considerando a escassez do tempo e cumprindo apenas o que determina o currículo, apresentam-no de forma superficial.

Numa aprendizagem com significado, para conectar os recursos de ensino e aprendizagem a certas situações da vida e proporcionar a transferência e a mobilização das capacidades e dos conhecimentos é preciso tempo, etapas didáticas e situações apropriadas. A negligência destes itens gera alunos que “acumulam saberes, passam nos exames, mas não conseguem mobilizar o que aprenderam em situações reais” (PERRENOUD, 2000, online).

> [Até] reconhecem que esqueceram muito da informação que lhes foi apresentada antes *e* que sua aprendizagem anterior, agora esquecida, está interferindo com a aprendizagem de novas informações. São então forçados a rever e reestudar significativamente os materiais anteriores, estudar intensamente por horas a fio, na véspera do exame, a fim de aprender esses materiais [...] nos quais a aprendizagem foi de natureza mecânica. (NOVAK, 1981, p. 66).

Pelo que, parafraseando Descartes[4] (2005), tencionamos sistematizar uma metodologia para o ensino e a aprendizagem das secções cônicas que, sem prejuízo, venha contribuir com nossos colegas professores na sua atuação em sala de aula, sem esgotar o tema, sistematiza-lo para facilitar o acesso. Assim

[4] “Assim, não é meu propósito ensinar aqui o método que cada indivíduo deveria seguir para bem conduzir a sua razão, mas apenas mostrar de que maneira procurei guiar a minha. [...] espero que seja útil a alguém, sem que seja nocivo a ninguém [...]” (DECARTES, 2005. p. 22)

lhes será oportuno incitar o aprendiz a, ordenadamente, observar, investigar, analisar, questionar, concluir, anotar e expor, ou seja, realizar uma investigação em sala de aula. Tal investigação tem o objetivo de, envolvendo atividades com aspectos problematizadores da matemática, adentrar na história da matemática a fim de que o aprendiz internalize, de forma adequada, o conceito matemático desejado.

10.2. QUESTÕES DE ESTUDO

Prosseguindo nesse estudo, percebemos a necessidade de resposta a algumas questões que foram nos inquietando. Elas, listadas a seguir, determinaram o fio condutor do nosso trabalho.

- O que é aprendizagem significativa?
- O que difere uma aprendizagem significativa de uma aprendizagem mecânica?
- O que caracteriza uma investigação em sala de aula?
- O que podemos considerar como uma investigação em sala de aula no ensino médio?
- Como aconteceu a evolução das secções cônicas na história da matemática?
- Quais momentos históricos desse conhecimento podem trazer maior benefício ao ensino e à aprendizagem ao serem investigados?
- Que fatos históricos podem ser retomados para o desenvolvimento de atividades de caráter investigativo no ensino e na aprendizagem desse conteúdo?

- Como explorar os conceitos e regras das secções cônicas, de forma significativa para o ensino médio, numa atividade de investigação em sala de aula?

Entendemos que as respostas a tais questões nos tenham sido fornecidas pela pesquisa bibliográfica, pela produção de trabalhos apresentados em congressos e pelo desenrolar de toda a experiência em parceria com alunos. Para esse fim, foram estabelecidos os objetivos relacionados a seguir:

10.3. OBJETIVOS

10.3.1. Objetivo Geral

Analisar e gerar possibilidades de uso da investigação em sala de aula como uma metodologia de ensino e de aprendizagem com significado para as secções cônicas em conexão com a sua evolução histórica.

10.3.2. Objetivos Específicos

- Relacionar aprendizagem significativa às características de uma investigação em sala de aula;
- Discutir o desenvolvimento histórico das secções cônicas e suas implicações para uma aprendizagem com significado;
- Relacionar os conceitos próprios das secções cônicas na geometria analítica em conexão com a história da matemática;
- Elaborar e testar instrumentos próprios para uma investigação em sala de aula sobre as secções cônicas que despertem a curiosidade e o interesse do aprendiz.

11. CONFIGURAÇÕES TEÓRICAS QUE SUSTENTAM O ESTUDO

11.1. TENDÊNCIAS DE ENSINO DA MATEMÁTICA

Em meio a expressivas discussões sobre o ensino de matemática, a proposta de mudança curricular e metodológica no Colégio Pedro II (Rio de Janeiro) é tida como a primeira tentativa, no Brasil, a favor da renovação dos métodos de ensino da matemática no curso secundário. Tal proposta foi feita por Euclides de Medeiros Guimarães Roxo (1890-1950), que pode ser considerado o primeiro educador matemático brasileiro. Ultrapassando os muros do Colégio Pedro II, as idéias modernizadoras de Euclides Roxo, inseridas nas reformas de Francisco Campos (1931) e Gustavo Capanema (1942), foram combatidas por outros educadores. Roxo defendia, em oposição ao ensino tradicional, as tendências presentes na Europa e nos Estados Unidos (DASSIE, 2001; MIGUEL; MIORIM, 2004; VALENTE, 2004).

As idéias reformistas de Felix Klein (1849-1925), implantadas na Alemanha, e os movimentos internacionais de renovação no ensino de matemática, foram o impulso para Euclides.

Klein, que com vinte e três anos foi professor titular da Faculdade de Filosofia e membro do conselho da Universidade de Erlanger, sendo um dos principais matemáticos no início do século XX, teve um interesse profundo por questões pedagógicas (ALEKSANDROV, 1994; BOYER, 1994; EVES, 1992), pois “além de dar aulas entusiasmantes Klein se preocupava com o ensino da matemática em muitos níveis e exerceu forte influência em círculos pedagógicos” (BOYER, 1994, p. 401).

Hoje, é o modelo tradicional de ensino-aprendizagem, que consta de transmissão verbal e a recepção de conhecimentos já elaborados vinculado a um programa a ser cumprido, que predomina em muitas aulas de matemática (BIEMBENGUT, 2003). Nesse modelo, geralmente passivo, a causa do fracasso recai sobre as costas do aprendiz. Isso pode dificultar a aprendizagem com significado, pois as relações com o que o aluno já conhece são escassas. Na sua maioria, são aulas descontextualizadas onde o estudante apenas memoriza para reproduzir o que ouviu. É que as aulas expositivas favorecem a aprendizagem memorística. Mas, apesar do modelo tradicional ser unanimemente combatido por especialistas e investigadores da educação, Gil-Pérez (2001, p. 31) nos diz que

> é preciso não esquecer que o chamado ensino tradicional constitui um modelo coerente que engloba todos os aspectos da aprendizagem das Ciências, motivo pelo qual sua transformação exige tanto um conhecimento claro e preciso de suas deficiências como a elaboração de um modelo alternativo igualmente coerente e de maior eficácia geral.

Objetivando minorar as dificuldades *clássicas* (CAMPANARIO, 2002) que são identificadas nos processos de aprendizagem, contamos na atualidade com várias tendências pedagógicas que têm influenciado o ensino e a aprendizagem da matemática. Após refletirmos sobre algumas delas, pretendemos justificar a escolha das tendências desenvolvidas em nosso trabalho.

Tais tendências abrangem muito do que educadores já utilizam nas suas práticas, mesmo de forma não sistematizada. Mas, a experiência pedagógica e uma busca bibliográfica possibilitará a sistematização do seu cotidiano.

11.1.1. Resolução de Problemas

A década que teve início em 1970 foi palco do começo das investigações sistemáticas sobre resolução de problemas e sua expansão pelo mundo inteiro.

“[...] somente nessa década é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a idéia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção” (ONUCHIC, 2004, p. 215). O predomínio anterior era a configuração de um conjunto de fatos, o domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercícios mentais. Podemos considerar que se tratava de uma aprendizagem puramente memorística.

Muitos autores (GIL-PÉREZ, 2001; MENDES, 2005; PONTE et. al., 2003; POZO, 1998) referem-se a Polya ao tratarem sobre resolução de problemas. *How to Solve It*, que no Brasil foi denominado *A arte de resolver problemas: um novo enfoque do método matemático* (POLYA, 1994), é o mais citado.

A partir de 1980 o foco de interesse foi fazer da resolução de problemas um foco do currículo da matemática, o que não chegou a um bom termo, “ainda havia muitos estudantes que não sabiam Matemática apesar de haver bons resolvedores de problemas” (ONUCHIC, 2004, p. 216).

Segundo Pozo (1998, p. 9), “solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa e um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento”. E nos apresenta como definição clássica de *problema*, “uma situação que o indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução” (LESTER *apud* POZO, 1998, p. 15). Assim o educador precisa

> procurar e planejar situações suficientemente abertas para induzir nos alunos uma busca e apropriação de estratégias adequadas não somente para darem respostas a perguntas escolares como também às da realidade cotidiana. [...] Ensinar a resolver problemas não consiste somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também em criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta. (POZO, 1998, p. 14).

Quando, em sua metodologia, uma aula é planejada tencionando a resolução de problemas, é absolutamente necessário o entendimento sobre o significado de exercícios e sobre o significado de problemas. É certo que essa distinção

> [...] tem-se mostrado muito útil para analisar os diferentes tipos de tarefas matemáticas. Um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata, enquanto que um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido. [...] (PONTE at al., 2003, p. 22-23, grifo nosso).

Uma mesma tarefa pode ser vista como um problema por um aluno ou não por um outro. Até para um mesmo aluno, uma tarefa pode significar um problema em um momento ou um exercício em um outro momento, isto vai depender dos seus conhecimentos prévios relevantes à aquisição do conhecimento estudado e também da sua atitude diante da tarefa. No processo da aprendizagem, leva-se em conta a *funcionalidade*[5] dessa tarefa.

Aqui *conhecimentos prévios* se apresentam como "todos aqueles conhecimentos (corretos ou incorretos) que cada sujeito possui e que adquiriu ao longo de sua vida na interação com o mundo que o cerca e com a escola" (POZO, 1998, p. 87). Tais conhecimentos, estáveis e resistentes a mudanças, devem ser considerados e ativados na solução de um problema com significado para o estudante.

Alguns critérios poderão reduzir "a probabilidade de que os problemas propostos pelo professor sejam vistos pelos alunos somente como exercícios" (POZO, 1998, p. 159). Critérios para serem considerados tanto na formulação do

---

[5] A tarefa a ser realizada pelo aluno "deve ser colocada funcionalmente, ou seja, como tratamento de situações problemáticas de interesse; situações que se liguem ao fio condutor estabelecido para o conjunto das disciplinas que proporcionem sentido ao trabalho a ser feito" (GIL-PÉREZ, 2001, p. 43).

problema como também durante a sua resolução pelos alunos. São doze os critérios considerados por Pozo (1998, p. 161):

> <u>Na proposição do problema</u>
> 1. Propor tarefas abertas que admitam vários caminhos possíveis de resolução e, inclusive, várias soluções possíveis, evitando tarefas fechada.
> 2. Modificar o formato ou a definição dos problemas, evitando que o aluno identifique uma forma de apresentação com um tipo de problema.
> 3. Diversificar os contextos nos quais se propõe a aplicação de uma mesma estratégia, fazendo com que o aluno trabalhe os mesmos tipos de problemas em diferentes momentos do currículo, diante de conteúdos conceituais diferentes.
> 4. Propor as tarefas não só com um formato acadêmico mas também dentro de cenários cotidianos e significativos para o aluno, procurando fazer com que o aluno estabeleça conexões entre ambos os tipos de situações.
> 5. Adequar a definição do problema, as perguntas e a informação proporcionada aos objetivos da tarefa, usando, em diferentes momentos, formatos mais ou menos abertos, em função desses mesmos objetivos.
> 6. Usar os problemas com fins diversos durante o desenvolvimento ou seqüência didática de um tema, evitando que as tarefas práticas apareçam como ilustração, demonstração ou exemplificação de alguns conteúdos previamente apresentados ao aluno.
>
> <u>Durante a solução do problema</u>
> 7. Habilitar o aluno a adotar as suas próprias decisões sobre o processo de resolução, assim como refletir sobre esse processo, dando-lhe uma autonomia crescente nesse processo de tomada de decisões.
> 8. Fomentar a cooperação entre os alunos na realização das tarefas, mas também incentivar a discussão e os pontos de vista diversos, que obriguem a explorar o espaço do problema para comparar as soluções ou caminhos de resoluções alternativas.
> 9. Proporcionar aos alunos a informação que precisam durante o processo de resolução, realizando um trabalho de apoio, dirigindo mais a fazer perguntas ou fomentar nos alunos o hábito de perguntar-se do que dar a resposta às perguntas dos alunos.
>
> <u>Na avaliação do problema</u>
> 10. Avaliar mais os processos de resolução seguido pelo aluno do que a correção final da resposta obtida. Ou seja, avaliar mais do que corrigir.
> 11. Valorizar especialmente o grau em que esse processo de resolução envolve um planejamento prévio, uma reflexão durante a realização da tarefa e uma auto-avaliação pelo aluno do processo seguido.
> 12. Valorizar a reflexão e a profundidade das soluções alcançadas pelos alunos e não a rapidez com que são obtidas.

Polya (1994) considera a resolução de problema como uma habilitação prática e para isso distingue quatro fases de trabalho: *compreensão do problema*, *estabelecimento de um plano*, *execução do plano* e *retrospecto*. Para a solução de problemas nas áreas de matemática ou de ciências naturais, ou ainda problemas sociais, "os alunos precisam adquirir procedimentos específicos para cada uma dessas áreas para completar essas diferentes fases ou passos da solução de um problema" (POZO, 1998, p. 146). Portanto, Pozo (1998) diferencia cinco tipos de procedimentos: *aquisição da informação*; *interpretação da informação*; *análise da informação e realização de inferências*; *compreensão e organização conceitual da informação*; *comunicação da informação*. Na solução de um problema, tais procedimentos podem se apresentar em ordens diversas ou mesmo sem identificação tão específica.

11.1.2. Modelagem Matemática

Modelagem matemática, hoje um ramo próprio da matemática, tão antiga quanto a própria matemática, é a "arte de expressar por intermédio de linguagem matemática situações-problema de nosso meio" (BIEMBENGUT, 2003, p. 7). Como método de ensino-aprendizagem de matemática (modelação matemática – quando em cursos regulares, com programa) é mais recente e vem ganhando espaço em diversos países nas últimas três décadas do século XX, pois conduzindo o estudante à pesquisa de situações-problema, pode despertar o seu interesse por tópicos matemáticos ainda por ele desconhecidos.

> A condição necessária para o professor implementar modelagem no ensino – modelação – é ter audácia, grande desejo de modificar sua prática e disposição de conhecer e aprender, uma vez que essa prática abre caminho para descobertas significativas.
> Vale ressaltar que um curso, uma palestra ou um artigo contendo definições e/ou resultados positivos de trabalhos realizados não são suficientes para se pôr em prática, num primeiro momento, a modelação, com todas as turmas e alunos de que o professor dispõe. Habilidade e segurança só se ganham com a experiência. Uma experiência que deve ser feita de forma gradual, em consonância com o tempo disponível que se tem para planejar. (BIEMBENGUT, 2003, p. 29)

Na modelação matemática, seguindo uma lógica viva de descoberta, “o aluno se torna mais consciente da utilidade da matemática para analisar e resolver problemas do cotidiano” (MENDES, 2006, p. 51). Biembengut (2003), no entanto, nos expõe com detalhes as etapas e subetapas próprias dessa tendência que proporciona significação ao processo de ensino e de aprendizagem. Nesta oportunidade, cuidaremos apenas de citá-las. São elas:

a) Interação

- reconhecimento da situação-problema;
- familiarização com o assunto a ser modelado → referencial teórico.

b) Matematização

- formulação do problema → hipótese;
- resolução do problema em termos do modelo.

c) Modelo matemático

- Interpretação da solução;
- Validação do modelo → avaliação.

Num trabalho com modelação o conteúdo estudado fica completamente vinculado à realidade. Termos um aluno co-responsável pelo seu aprendizado, aprendendo o que está lhe interessando, é bem mais gratificante.

11.1.3. Etnomatemática

A etnomatemática, uma tendência da qual Ubiratan D’Ambrosio é um dos fundadores, é a matemática praticada por grupos – comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de certa faixa etária, sociedades indígenas – que se identificam por objetivos e tradições comuns aos grupos. Trata-se de “uma sub-área da História da Matemática e da

Educação Matemática, com uma relação muito natural com a Antropologia e as Ciências da Cognição” (D’AMBROSIO, 2002, p. 9), também, um indiscutível foco político.

O Programa Etnomatemática “procura entender o saber/fazer matemático ao longo da história da humanidade, contextualizado em diferentes grupos de interesse, comunidade, povos e nações” (D’AMBROSIO, 2002, p. 17). Assim é que artesãos, feirantes, borracheiros, cirurgiões, bicheiros, ritmo de instrumentos musicais, crianças em suas brincadeiras, culturas nativas, tem sido alvo de estudos onde estão presentes as idéias matemáticas (comparar, classificar, quantificar, medir, explicar, generalizar, inferir e, de algum modo, avaliar) nos seus mais diversos tópicos matemáticos (geometria, aritmética, topologia, probabilidade, razões, escalas). Assim, o desenvolvimento do Programa Etnomatemática pode e deve ser realizado no cotidiano de grupos específicos. Apropriadamente, tal afirmação é sintetizada por Mendes (2006) da seguinte forma:

> Para D’Ambrosio, etnomatemática significa reconhecer que todas as culturas, todos os povos, desenvolvem maneiras de explicar, de conhecer, de lidar com a sua realidade, e que isso está em permanente evolução. A idéia básica é a de não rejeitar modelos ligados à sua tradição e reconhecer como válidos todos os sistemas de explicação, de conhecimento, constituídos por outros povos. Esses sistemas, graças à dinâmica cultural, não são estáticos, mortos. [...] Em todas as culturas, porém, nessa busca de entendimento, acaba-se tendo necessidade de quantificar, comparar, classificar, medir, o que faz surgir a matemática espontaneamente. (MENDES, 2006, p. 29-30).

Ao lidar com situações reais no tempo e no espaço, a etnomatemática tem como proposta pedagógica fazer da matemática algo vivo. Torna-se essencial contextualizá-la num estudo para o dia-a-dia, para o aqui e o agora. Como exemplo, temos a possibilidade de, a partir da colorida geometria dos balões e das pipas (as primeiras e mais notáveis experiências geométricas), chegarmos à geometria teórica. Também, junto aos Xavantes, a substituição do sistema binário por um sistema mais eficiente, o decimal. "O cuidado com a passagem do concreto ao abstrato é uma das características metodológicas da etnomatemática" (D'AMBROSIO, 2002, p. 78).

Aprimorando práticas e reflexões, e instrumentos de críticas, não ignorando a etnomatemática dominante e não substituindo a etnomatemática da comunidade, opondo-se ao niilismo – que afeta principalmente as classes populares e indígenas –, questionando o aqui e o agora, a etnomatemática busca contribuir com a grande missão do educador: *preparação de um futuro feliz*.

11.1.4. Pesquisa Dirigida

Com a pretensão de organizar a aprendizagem como uma construção de conhecimentos por parte dos alunos, Gil-Pérez (2001) nos propõe quatro itens de *estratégias de ensino para uma aprendizagem como pesquisa* dirigida. Encontramos tais itens em Campos (1999, p. 30), resumido da seguinte forma:

- Propor situações-problema.
- Propor o estudo qualitativo das situações-problema e formulação das primeiras hipóteses explicativas.
- Tratar cientificamente o problema a ser investigado, pela:
  - validação e reformulação das primeiras hipóteses explicativas:
  - elaboração e realização de experimentos;
  - análise dos resultados experimentais à luz das hipóteses explicativas (o que se pode converter em situação de conflito cognitivo).
- Lidar com as informações obtidas, formulando novas hipóteses, sínteses e novos problemas a serem investigados.

Vale salientar a importância da emissão de hipóteses uma vez que, duvidando e buscando coerência, tais hipóteses possibilitarão a análise dos resultados e de todo o processo. Em seu grupo, numa exigida verbalização pela característica da própria atividade, o estudante avança e recua nas suas idéias e sugestões à medida que as analisam partindo das hipóteses pré-elaboradas.

11.1.5. Mudança Conceitual

Gil-Pérez (2001, p. 43) também se refere à estratégia de mudança conceitual da seguinte forma: “1) identificação das idéias dos alunos; 2) colocar em questão as referidas idéias mediante contra-exemplos; 3) invenção ou introdução de novos conceitos e 4) utilização das novas idéias em diversos contextos”. Como em outras tendências pedagógicas da atualidade, essa valoriza a participação ativa do aprendiz na aquisição do conhecimento e também valoriza o que ele já sabe a respeito do que será estudado (GEWANDSZNAJDER, 2005). Mas, para tal estratégia falta “atividades que proporcionem uma concepção e um interesse preliminar pela tarefa” (BURBULES; LINN, 1991 apud GIL-PÉREZ, 2001, p. 43), por isto, considerada insuficiente para o ensino das ciências da natureza (CAMPOS, 1999).

11.1.6. História da Matemática

A presença da história no ensino e na aprendizagem da matemática deve se dar a partir de atividades de ensino centradas na utilização de informações históricas relacionadas aos tópicos que se pretende investigar (MENDES, 2006). Essas atividades podem estar vinculadas a situações-problema.

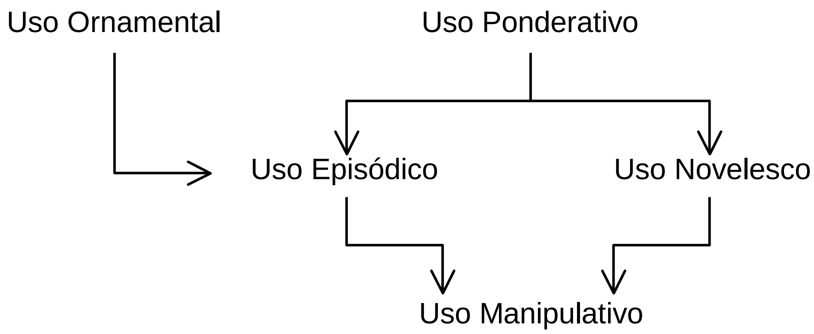
O cuidado de conduzir o ensino e a aprendizagem da matemática escolar brasileira dentro de um contexto histórico, não é algo recente, mas só veio constar na legislação a partir da década de 1930. Miguel e Miorim (2004, p. 28) nos afirmam que:

> Apesar de as preocupações com a introdução de elementos históricos na matemática escolar brasileira terem se manifestado de maneira explícita na legislação da década de 1930, segundo uma abordagem diretamente associada ao poder motivador dos conhecimentos históricos, o leitor não deve inferi que tais preocupações não estiveram presentes anteriormente.

Educadores tais como Henri Poincaré (1854-1912), Felix Klein (1849-1925), Euclides Roxo (1890-1950), dentre outros, advogavam em suas obras o uso da história no ensino da matemática (MIGUEL; MIORIM, 2004).

A história da matemática como um recurso pedagógico tem se apresentado nas formas de Uso Ornamental (forma não apropriada, porém a mais freqüente no ensino da matemática) ou de Uso Ponderativo (forma que apresenta o conteúdo matemático numa abordagem histórica envolvendo discussões temáticas não triviais, volvendo-se às aplicações matemáticas ou a práticos problemas). Ainda inclusos nessas formas de utilizar a história da matemática temos: o Uso Episódico, o Uso Novelesco e o Uso Manipulativo.

Numa alegoria, Fossa (2001) expõe tais formas e reúne-as no diagrama a seguir:



(FOSSA, 2001, p. 56)

Mendes (2001a) apresenta-nos dois exemplos relacionados ao diagrama anterior, são eles: biografias de matemáticos presentes nos livros de matemática de forma ornamental e o uso de textos matemáticos do passado utilizados num aspecto episódico ou novelesco que poderiam ser organizados de forma a ter uma abordagem manipulativa.

Além da *história-anedotário* (com uma função didática de *relax*), Miguel e Miorim (2004) referem-se à *história-problema* (uma história que parte de problemas que se manifestam em práticas pedagógicas e investigativas do presente) em contraposição à *história-crônica* ou à *história-narrativa* (com informações históricas apenas factuais, interessando saber apenas o que se passou, como meros acessórios ou ornamentos). E, sem provocar uma investigação por parte do aprendiz, esta última é a mais difundida nas aulas de matemática. Desconsideram o fio condutor pelo qual a história, como uma fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino e para a aprendizagem da matemática, nos guia. Perdem o recurso pedagógico, história da matemática, que pode se adequar perfeitamente à necessidade que temos de responder os porquês tão freqüentes na sala de aula.

É conveniente nos apropriarmos, também, dos problemas históricos no sentido de esclarecer conceitos, viabilizar informação cultural e sociológica nos diferentes momentos históricos, averiguar a habilidade matemática dos nossos antepassados e evidenciar a existência de uma analogia entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

Tendo a história como um campo de diálogo e, nela, buscando analisar problemas relacionados ao conteúdo que desejamos ensinar, problemas que nos favoreçam interrogar o passado,

> é de fundamental importância que a investigação do problema em estudo venha a constituir uma história que:
>
> - seja uma história contada a partir das diferentes práticas sociais, que participaram da constituição e transformação, no tempo, do problema sob investigação;
> - seja mais do que uma história estritamente técnica desse problema;
> - seja mais do que uma história das diferentes formas de conceber esse problema por parte de diferentes grupos sociais integrantes de diferentes práticas ao longo do tempo;
> - seja mais do que uma história das necessidades que se configuraram no exercício de diferentes práticas sociais de diferentes épocas e contextos culturais, que teriam motivado a constituição e transformação do problema sob investigação;
> - seja também uma história não apenas dos diferentes grupos sociais que consideraram ou valorizaram esse problema – que chegaram efetivamente a se envolver com ele –, mas também das razões que teriam estado na base do envolvimento;
> - seja também uma história das apropriações, ressignificações, repercussões e transmissões do tema ou problema em estudo no exercício de diferentes práticas sociais de diferentes épocas e contextos culturais, notadamente no exercício da prática social escolar;
> - seja também uma história dos instrumentos de dominação, resistência e libertação produzidos no exercício dessas diferentes prática sociais, que acabaram sendo produzidos e acionados no processo de constituição, apropriação, ressignificação e transmissão do problema sob investigação. (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 162-163).

Uma história assim caracterizada pode ser explorada em qualquer dos níveis de ensino.

11.1.7. Investigação em Sala de Aula

O referencial tomado para tal tendência foi João Pedro da Ponte et. al. (2003) na qual podemos ver a singularidade da investigação em relação a exercícios e a problemas.

> Os exercícios e os problemas têm uma coisa em comum. Em ambos os casos, o seu enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido. Não há margem para ambigüidades. A solução é sabida de antemão, pelo professor, e a resposta do aluno ou está certa ou está errada. Numa <u>investigação</u> as coisas são um pouco diferentes Trata-se de situações mais abertas – a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição. E uma vez que os pontos de partida podem não ser exatamente os mesmos, os pontos de chegada podem ser também diferentes. (PONTE et. al., 2003, p. 23, grifo nosso).

Nessa tendência de ensino, somos desafiados a programar uma articulação entre exercícios, problemas, projetos e investigações, ou seja, os diferentes tipos de tarefas, de modo a ”promover o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho” (PONTE et. al., 2003, p. 24).

Basicamente, as fases de uma investigação são: <u>introdução</u> da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito; <u>realização</u> da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda turma; <u>discussão</u> dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. Num conjunto de atividades assim planejadas, o aluno deve trabalhar de forma autônoma e o professor, com um papel determinante nessas aulas, atua na retaguarda ao regular as atividades desenvolvidas. É um desfio o confrontar-se com algumas dificuldades e dilemas, tais como: garantir que o aluno se sinta autor da investigação e que, do ponto de vista matemático, o trabalho seja significativo.

Da crítica fase arranque depende todo o resto do trabalho. São necessárias questões capazes de instigar a curiosidade. O aluno deve se sentir à vontade, motivado e desafiado. Ele deve entender o sentido da tarefa e o que dele se espera durante a atividade. Nessa fase o aluno inteira-se do significado de *investigar* e, desperta a latente ufania, procederão como cientistas. Terão tempo para colocar questões, pensar, explorarem as suas idéias e exprimi-las ao professor e aos colegas. No entanto, precisamos ser cuidadosos caso não seja comum aos estudantes trabalhar em grupo e/ou realizar investigações.

Numa investigação em grupo há diversidade de iniciativas nos diálogos entre os estudantes, mas essa investigação também pode ser realizada de forma individual. Em qualquer das maneiras, um obstáculo que se apresenta, é o de registrar as idéias, as etapas e os resultados surgidos durante a investigação. Mesmo com a intervenção do professor, muitas dessas idéias são expressas apenas numa linguagem oral ou gestual e algumas nem são expressas.

Ponte et. al. (2003, p. 21) considera quatro momentos na realização de uma investigação:

A. Exploração e formulação de questões
   - Reconhecer uma situação problemática
   - Explorar a situação problemática
   - Formular questões

B. Conjecturas
   - Organizar dados
   - Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)

C. Testes e reformulação
   - Realizar testes
   - Refinar uma conjectura

D. Justificação e avaliação
   - Justificar uma conjectura
   - Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Com o desenvolvimento da pesquisa bibliográfica, percebemos que características próprias de determinada tendência de ensino e aprendizagem da matemática estão presentes na estrutura de outras tendências que estão sendo aplicadas e/ou investigadas na atualidade. Essas tendências apresentam pontos comuns tais como: situações-problema, conexão com o dia-a-dia, despertar o interesse no estudante, emissão de hipótese, caráter investigativo, presença da história da matemática, registro no percurso da atividade e preocupação com o processo avaliativo. A apropriação de qualquer uma dessas tendências para nossa prática pedagógica faria de nossa sala de aula um lugar prazeroso para a aquisição do conhecimento com significado.

11.2. AVALIAÇÃO

É evidente que, em qualquer uma dessas tendências alternativas de ensino e de aprendizagem, a avaliação é um tema inquietante. Principalmente porque nossa cultura escolar costuma premiar ou punir o resultado final e ignorar o trajeto até esse resultado. Podemos considerar "que a avaliação seja um dos aspectos do processo ensino/aprendizagem, em que mais se faça necessária uma mudança didática" (GIL-PÉREZ, 2001, p. 43). Quanto a isso se refere Hoffmann (2004, p. 10):

> Percebo que é essencial e urgente o repensar do significado de ação avaliativa da educação infantil à universidade. Quaisquer práticas inovadoras desenvolver-se-ão em falso se não alicerçadas por uma reflexão profunda sobre concepções de avaliação/educação.

Mesmo sendo a avaliação indissociável do ensino e da aprendizagem, a percebemos hoje como um fenômeno indefinido. O termo *avaliação* se refere a diferentes significados como: prova, nota, conceito, boletim, recuperação, reprovação, registro, análise de desempenho, julgamento de resultados e medida de capacidade na apreciação do *todo* do aluno. Avaliar não é tarefa simples, principalmente ao se lançar mão de uma prática inovadora para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo matemático. Faz-se necessário maior empenho ao se planejar os momentos avaliativos. Tais momentos devem entremear toda a atividade, deve contribuir para que o estudante continue avançando e alcance os resultados desejados (GIL-PÉREZ, 2001; HOFFMANN, 2004). Uma avaliação dessa forma deve ser inserida em qualquer uma das tendências de ensino e de aprendizagem da matemática. Assim, a avaliação apresenta-se como uma oportunidade de reorganização conceitual e de reflexão sobre os próprios conhecimentos (POZO, 1998).

12. METODOLOGIA ADOTADA NESTA PESQUISA

Ao propormos a realização de uma investigação em sala de aula para o estudo das secções cônicas, em conexão com a história das secções cônicas e conduzindo o aprendiz para uma aprendizagem significativa, foi necessário determinar as bases teóricas nas quais deveríamos apoiar as atividades desenvolvidas junto com os alunos.

Nossa inspiração inicial esteve ligada a João Pedro da Ponte et. al. (2003), exatamente pelo título de sua obra, *Investigações Matemáticas em Sala de Aula*. E sentimo-nos à vontade quando, ao buscar tal fundamentação teórica para a pesquisa que nos propúnhamos a realizar, percebemos que o nosso trabalho docente no cotidiano escolar assemelhava-se em alguns pontos, de forma não sistematizada, a uma investigação em sala de aula. A continuidade da pesquisa bibliográfica fez-nos saber detalhes das características de outras tendências de ensino da matemática. Isso despertou o nosso interesse por entremear a investigação em sala de aula proposta por Ponte et. al. (2003) com algumas dessas características.

Um aluno da 3ª série do ensino médio já dispõe de uma boa porção de elementos no seu estoque cognitivo. Dessa porção, aqueles aspectos considerados relevantes para uma boa aprendizagem por parte do aluno, precisam ser identificados e valorizados no processo ensino-aprendizagem. São eles os conhecimentos prévios. Caso, na estrutura cognitiva do aprendiz, não exista um aspecto relevante com o qual ele possa relacionar a nova informação compete ao professor mediador lançar mão de estratégias tencionando a criação de conhecimentos prévios que darão significado a aprendizagem do novo conhecimento. Os primeiros momentos investigativos devem favorecer o despertar desses conhecimentos prévios onde a nova informação possa ancorar. O almejado *querer saber* do aluno será muito bem-vindo.

Um aluno intrigado com a situação-problema, não convencido da regularidade de alguns dados; curioso e ansioso para chegar às conclusões finais, é um elemento de primordial importância numa investigação em sala de aula. A isto se propõe o segundo e terceiro momento da investigação, segundo Ponte et. al. (2003).

Na formulação das questões e organização dos dados obtidos, um fato pode ser destacado: a convivência diária e o estudo piloto confirmam que há resistência em escrever. Os estudantes limitam-se à linguagem oral e/ou gestual. Fazê-los perceber o quanto é imprescindível o registro das questões e dos resultados obtidos, não é tarefa fácil. É preciso evidenciar a falta que faz um dado não registrado no desenrolar da investigação para que quase se convençam de registrar. Quanto às conjecturas, querem apenas registrar a eleita por eles como verdadeira. Chegam a afirmar que “os acertos foram de primeira”. As falsas conjecturas ficam propensas a serem descartadas. Enquanto que, se a conjectura eleita por eles como verdadeira mostrar-se falsa, essa deverá ser reformulada e logo em seguida iniciar uma nova testagem para que, em consenso, o grupo justifique-a.

Cada grupo terá a oportunidade de expor aos outros grupos os resultados obtidos na experiência. Em seguida buscaremos o consenso com toda turma para redigirmos um resultado final. Tomando como base os quatro momentos idealizados por Ponte et. al. (2003), um resumo de nossos passos nessa investigação apresenta-se assim:

A. <u>Exploração e formulação de questões</u>

- Despertar no aprendiz conhecimentos prévios relevantes ao estudo investigado;
- Reconhecer a situação-problema;
- Familiarizar-se com a situação-problema;
- Formular questões referentes à situação problema (os alunos não fizeram de forma desejada);

B. <u>Organização de dados</u>

- Organizar os dados obtidos na atividade;
- Formular conjecturas com base nos dados obtidos (hipóteses);

C. <u>Testes e reformulação</u>

- Testar a conjectura mais provável;
- Eventualmente, reformular a conjectura para nova testagem;

D. <u>Justificação, exposição e conclusão</u>

- Justificar uma conjectura de consenso no grupo;
- Expor aos colegas de outros grupos o resultado obtido;
- Construir o resultado final em consenso com todos os grupos;

E. <u>Avaliação</u>

- Preenchimento das guias de atividades nº 1, nº 2 e nº 3;
- Exposição dos resultados do grupo, em cada etapa do trabalho, para toda classe;
- Procedimentos desenvolvidos durante as atividades em grupo;
- Análise de exercícios individuais.

Dessa maneira, mas nem sempre nessa ordem,

> o processo de criação matemática surge aqui fértil em acontecimentos inesperados, de movimentos para frente e para trás. Essa perspectiva contrasta fortemente com a imagem usual dessa ciência, como um corpo de conhecimento organizado de forma lógica e dedutiva, qual edifício sólido, paradigma do rigor e da certeza absolutas. (PONTE et. al., 2003, p. 15).

Para que o aluno tenha noção do quanto esse movimento oscilatório esteve presente também na remota origem do conteúdo pesquisado, contamos com a necessária contribuição da história da matemática. Investigando os fundamentos desse conteúdo é possível ampliarmos a compreensão dos conceitos. Faz parte do planejamento uma exposição em PowerPoint e um texto histórico sobre a origem das secções cônicas, ainda assim, cada vez que um aluno indaga pela origem de um tal conhecimento, aproveitamos a oportunidade para reviver alguns fatos históricos.

Não que a história da matemática exerça sobre o aprendiz “um poder quase mágico de modificar a atitude do aluno em relação à Matemática” (MIGUEL e MIORIM, 2004, p. 16), mas tanto Poincaré (1854-1912) como também Roxo (1890-1950) defenderam a idéia de ter a história da ciência como primeiro guia do educador (MIGUEL; MIORIM, 2004).

13. NOTAS HISTÓRICAS SOBRE AS SECÇÕES CÔNICAS

Transpondo a linha do tempo, podemos chegar ao ano 600 a.C. e encontrar ali a Grécia que, com seu alfabeto consolidado e tendo disponível o papiro, registrava e divulgava a sua história, as suas idéias, idéias que às vezes eram oriundas de outras civilizações, por exemplo, a egípcia e a babilônica, no entanto acrescidas de um galgar constante em busca da perfeição.

É também em torno dessa época, que ocorrem os registros matemáticos gregos, esses registros foram feitos em dois períodos: o clássico (600 a.C.-300 a.C.) e o alexandrino ou helenístico (300 a.C.-600 d.C.). O berço da própria palavra matemática é grego, *mathematiké* = *mathema* (ciência) + *iké* (conhecimento) que, no latim, passou a *mathematica*, mas o conceito mesmo de matemática tem experimentado mudanças significativas ao longo dos diferentes períodos históricos.

A matemática clássica grega se desenvolveu em diversos centros que, baseando-se cada um nas obras de seus antecessores, sucediam-se uns aos outros. Nesses centros, dirigidos por um ou mais sábios, um grupo informal realizava suas atividades. A continuidade da tradição era mantida por um forte elo, indo de mestre a discípulo (KLINE, 1992). Pode-se, assim, observar alguns nomes numa seqüência de mestres-discípulos ou discípulos-mestres: Anaximandro, Pitágoras, Anaxágoras e Jenófanes freqüentaram a escola jônica em Mileto, fundada por Tales; Zenão foi discípulo de Parménides, ambos pertenceram à escola de Jenófanes e levou-a para Eléia; Filolau, Teodoro de Cirene, Arquitas de Tarento e Hipócrates de Quio foram pitagóricos (uma irmandade do tipo religiosa, científica e filosófica); Arquitas, Teodoro e Teeteto foram mestres de Platão (este foi o primeiro a sistematizar as regras da demonstração rigorosa); Eudoxo passou a influência platônica para os irmãos Menaecmo e Dinostrato; saindo da academia de Platão (que com terrenos, edifícios, estudantes e cursos formalmente ministrados, ela tinha todas as características de um uma universidade atual), Aristóteles fundou a sua escola – o Liceu; Euclides, provavelmente, estudou com os discípulos de Platão e assim por diante.

> Uma das grandes contribuições gregas ao conceito mesmo da matemática foi o raciocínio consistente e a ênfase posta no fato de que os objetos matemáticos, números e figuras geométricas, são abstrações, idéias produzidas pela mente e claramente distintas dos objetos ou imagens físicas. (KLINE,1992, p. 54, tradução nossa)

Esta citação evidencia a sólida consciência do caráter abstrato dos gregos. Kline também destaca a contribuição dos gregos ao insistirem que, “todos os resultados matemáticos deveriam ser estabelecidos dedutivamente a partir de um sistema explícito de axiomas” (1992, p. 60, tradução nossa), ou seja, a ênfase no raciocínio dedutivo como único método de demonstração em matemática.

Mesmo considerando as limitações quanto ao uso de régua e compasso para as demonstrações, as construções com esses instrumentos tiveram um papel vital na geometria grega. Conhecidos como instrumentos de Euclides (c. 300 a.C.) “a régua sem escala e o compasso desmontável tornaram-se os únicos instrumentos permitidos para problemas de construção da geometria euclidiana” (EVES, 2004, p. 180).

O alexandrino Eratóstenes (275-194 a.C.), numa carta ao rei Energetes, atribui a Menaecmo (membro da Academia platônica, um dos mestres de Alexandre o Grande, geômetra e astrônomo), o descobrimento das secções cônicas (BOYER, 1974).

Na introdução das secções cônicas, Menaecmo (c. 380-320 a.C.) utilizou três tipos de cones (tendo, no vértice, ângulo reto, ângulo agudo ou ângulo obtuso). Sendo cada cone cortado por um plano perpendicular a um elemento do cone (uma geratriz).

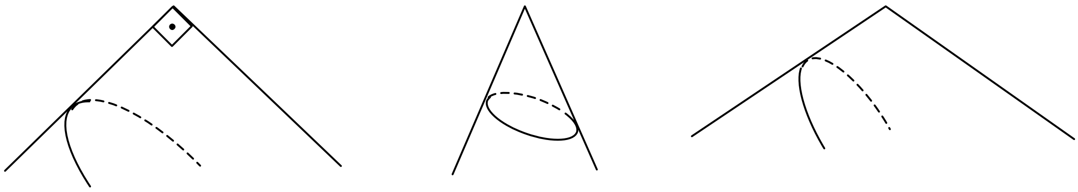


Figura 1: Secções cônicas de Menaecmo

Ter à disposição uma família de curvas adequadas (parábola, elipse e hipérbole), que podiam ser obtidas de uma mesma fonte, foi uma realização importante para Menaecmo.

Sem exatidão, crê-se que o estudo de famosos problemas de construções (*quadradura* do círculo, *duplicação* do cubo e *trissecção* do ângulo), levou a esse descobrimento. É o caso de Hipócrates de Quio (séc. V a.C.), ao demonstrar que o problema da *duplicação do cubo* pode reduzir-se a encontrar duas medidas proporcionais entre a aresta dada e o seu dobro.

Assim, numa linguagem matemática atual, sejam *x* e *y* tais que,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

então $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$ e $xy = 2a^2$,

portanto $\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax \end{cases}$ e $\begin{cases} x^2 = ay \\ xy = 2a^2 \end{cases}$.

Logo *x* e *y* são as coordenadas dos pontos de interseção de duas parábolas ou de uma parábola e de uma hipérbole.

Menaecmo trabalhou no problema e conseguiu solucionar ambos os *problemas da duplicação do cubo* utilizando geometria pura. Na solução que obteve, utilizou duas curvas de sua criação, parábola e hipérbole, e fez surgir uma terceira curva como subproduto de sua descoberta, a elipse. Deu os primeiros passos na direção da g*eometria analítica*. Mesmo que tenha sido estranho ao pensamento grego o conceito geral de *equação em quantidades incógnitas*, algumas vezes foi sustentado que ele já dispunha da geometria analítica. Ele apenas esbarrou nas cônicas, devido a uma busca bem sucedida por curvas com propriedades adequadas à duplicação do cubo e nem podia imaginar quantas belas propriedades o futuro revelaria (BOYER, 1992).

Os *Elementos* de Euclides e as *Secções Cônicas* de Apolônio relata, resume e prolonga a matemática produzida no período clássico, mesmo que os autores dessas obras tenham vivido no período helenístico (KLINE, 1992).

Euclides (viveu por volta de 300 a.C.), criador da famosa e duradoura escola de matemática de Alexandria, escreveu cerca de uma dúzia de tratados com tópicos variados (óptica, astronomia, música, mecânica e até um livro sobre secções cônicas). Desses escritos, mais da metade se perdeu, incluso o tratado das cônicas, que pode ter sido uma antiga aproximação da geometria analítica. Também é considerado sem possibilidades de recuperação um tratado ainda mais antigo sobre *lugares sólidos* (nome grego para secções cônicas) de Aristeu, o Velho (c. 320 a.C.) (BOYER, 1992; EVES, 2004; KLINE, 1992).

O *método* é uma obra de Arquimedes (c. 287 a.C.), que foi morto com setenta e cinco anos por um soldado durante o saque da cidade de Siracusa. Na guerra, foi o inventor de criativas e engenhosas máquinas (catapulta móvel de alcance ajustável, guindaste que levantava navios da superfície do mar, sistema de polias compostas que o possibilitava mover sozinho um navio pesadamente carregado, espelhos ustórios que utilizando as propriedades focais da parábola provocam ou facilita a combustão) para conservar o inimigo à distância dessa cidade. As histórias, uma ligada à descoberta do princípio da hidrostática, quando do banho, esqueceu-se de vestir-se e saiu correndo para casa gritando "Ëureka, eureka!", e outra quando se refere a sua teoria das alavancas "dê-me um ponto de apoio e eu moverei o mundo", são as mais mencionadas na literatura. O método do equilíbrio de *secções circulares* com um vértice como base foi aplicado por Arquimedes para descobrir os volumes dos segmentos de três sólidos de revolução – o parabolóide, o elipsóide e o hiperbolóide (BOYER, 1992; EVES, 2004; LINTZ, 1999).

Apolônio de Perga (c. 262-190 a.C.), conhecido ainda em vida como "O Grande Geômetra", mesmo tendo escrito sobre outros temas, teve como obra mestra o tratado sobre as cônicas. Tais curvas já eram conhecidas há cerca de um século e meio. Ele poliu o tema já antes estudado por outros (Menaecmo, Aristeu, Euclides e Arquimedes), despojou-o de irrelevâncias e o sistematizou.

Apolônio mostrou que de um único cone circular podem ser obtidas todas as espécies de secções cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano de secção. Provou também que o cone não precisa ser reto (cone cujo eixo é perpendicular à base circular) e fez a substituição do cone de uma só folha por um duplo. Os geômetras percebiam a duplicidade da curva da hipérbole, mas eles falavam de duas hipérboles, só a partir de Apolônio fala-se de dois ramos de uma hipérbole. Apolônio, adaptando de uso anterior, empregou os termos de *parábola*, *elipse* e *hipérbole*. Também deu a mesma definição de cone circular que é usada até hoje. Vejamos:

> Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo. (c. séc. III a.C *apud* BOYER, 1994, p. 107).

A figura a seguir mostra uma ilustração para a definição de Apolônio exposta anteriormente. Nela observa-se a reta móvel **r**, o ponto fixo **P** e a circuferência **c**, descrevendo a superfície do cone de duas folhas. Isso condiz exatamente com a definição que se usa na atualidade.

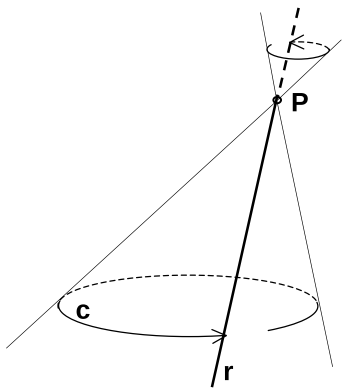


Figura 2: Definição de cone circular (Apolônio)

Das *Secções Cônicas* de Apolônio, composta de oito livros que contêm 487 proposições, Kline (1992) diz tratar-se de um material original, engenhoso, extremamente hábil e organizado de forma excelente. Este tratado numa organização tão monumental “derrotou todos os rivais no campo das secções cônicas” (BOYER, 1992, p. 107), e

> encerrou praticamente o tema para os pensadores posteriores, pelo menos no ponto de vista puramente geométrico. Pode considerar-se verdadeiramente como a culminação da geometria grega clássica (KLINE, 1992, p. 129, tradução nossa).

Os quatro primeiros desses livros, que tratam da teoria elementar genérica das cônicas, existem ainda em grego, o oitavo não foi encontrado e os outros três consta de uma tradução para o árabe de 1290 (BOYER, 1992; EVES, 2004; KLINE, 1992).

Devido às obras de Euclides, Arquimedes e Apolônio (os três gigantes da matemática do século III a.C.), embora estando em atraso com relação às artes e à literatura, o período de 300 a 200 a.C. foi denominado de “Idade Áurea” da matemática (BOYER, 1992).

No final do III século d.C. viveu o comentarista grego Papus de Alexandria, um grande geômetra empenhado em reacender o interesse por sua matéria, “mas não teve sucessor realmente capaz em geometria pura na Grécia” (BOYER, 1992, p. 214). *Coleção matemática* foi o maior de seus trabalhos com oito livros contendo algum material original. O livro VII dessa coleção descreve os trabalhos que constituem *O Tesouro da Análise*, nele estão incluídos as *Secções Cônicas* de Apolônio e os *Lugares Sólidos* de Aristeu.

Hipátia (370-415), filha de Têon de Alexandria (c. 335-405) – filósofo, matemático e autor – foi a primeira mulher matemática mencionada na história. Medicina e filosofia pertenciam também ao seu domínio intelectual. “Suas aulas, muito elogiadas, atraíam grandes freqüências” (EVES, 2004, p. 212) e, como solteira, dizia-se *casada com a verdade*. Tornou-se diretora da Academia e produziu textos específicos sobre Diofanto (aritmética), Ptolomeu e Apolônio (cônicas). Seu trabalho sobre as cônicas facilitou a compreensão dos conceitos próprios do assunto. Essa jovem foi mais lembrada por seu martírio do que por seus feitos intelectuais. Por dedicar-se ao estudo de várias religiões e ser ardente defensora da cultura pagã contra o cristianismo, em março de 415 sofreu uma morte cruel. Surpreendida por uma multidão de fanáticos cristãos seguidores de São Cirilo (Cirilo de Alexandria – c. 400), foi arrastada para fora de sua carruagem, teve o seu corpo dilacerado com conchas de ostra ou cacos de cerâmica e teve os seus membros exibidos nas ruas. O estúpido episódio de sua morte é considerado como marco do fim de Alexandria como centro de ciências.

Para o final do período helenístico, ainda foram escritas algumas obras sobre as cônicas. A construção de uma elipse com cordel foi descrita por Antemius de Trales que morreu em 534, este também escreveu uma obra *Sobre espelhos que queimam* descrevendo as propriedades focais da parábola. A Isodoro de Mileto, que viveu em 520, talvez devamos a construção da parábola com cordel e régua T. Já Eutócio (nascido por volta do ano 480), entre outras obras, escreveu comentários sobre *Secções Cônicas* de Apolônio. Divisamos assim a contemporaneidade desses matemáticos (BOYER, 1992).

No ano de 529, o imperador Justiniano fechou definitivamente as portas da escola ateniense. Ainda um pouco, a escola de Alexandria persistiu até o ano de 641 quando os árabes queimaram todo o resto. “A longa e gloriosa história da matemática grega chegava ao fim” (EVES, 2004, p. 213).

É considerável a importância do século XVII para a história da matemática. Foi na primeira metade desse século que, estabelecendo uma ponte entre as curvas do plano e as equações algébricas de duas incógnitas, nasceu a geometria analítica. Isso não foi acidental, avanços políticos, econômicos e sociais da época criaram uma atmosfera favorável para uma produção crescente de pesquisa matemática. “A transição na Europa para os novos métodos capitalistas de produção requereu o progresso de quase todas as ciências” (ALEKSANDROV, 1994, p. 225, tradução nossa). O desenvolvimento da navegação e a arte da guerra tinham necessidades urgentes de conhecimentos mais avançados de astronomia, de mecânica, de geometria. Os principais cientistas já admitiam os ensinos de Copérnico. Galileu e outros iniciavam a elaboração da mecânica contemporânea. No entanto, as descobertas das leis da natureza desafiavam muitas doutrinas religiosas.

Quando Galileu (1564-1642) descobriu que uma pedra ou uma bala de canhão lançada ao ar descreve uma parábola, Kepler (1571-1630), descobriu as trajetórias elípticas dos planetas ao redor do Sol e Pascal (1623-1662) descobriu a lei da pressão atmosférica, surgiram três ciências matemáticas importantes – a geometria analítica, o cálculo diferencial e o cálculo integral. A física e a astronomia necessitavam de argumentos referentes a coisas infinitamente grandes ou infinitamente pequenas (ALEKSANDROV, 1994; BOYER, 1992).

Kepler se envolveu com as secções cônicas desde 1604, ele necessitava de aplicações à astronomia. A ele se deve o uso da palavra *focus* (latim para lareira). A história relata muitos infortúnios que envolveram sua vida. Apesar desses transtornos, ele "continuou seu trabalho científico com perseverança, laboriosidade extraordinária e imaginação fértil" (KLINE, 1992, p. 362, tradução nossa).

O interesse por encontrar métodos universais para os problemas de curvas, motivou algumas investigações no século XVII. René Descartes (França, 1596-1650) e Pierre Fermat (França, 1601-1665) viram claramente, pelas necessidades expostas na ciência, a possibilidade de criar novos ramos da matemática.

Fermat, dedicando-se à restauração de obras perdidas da antigüidade e, baseando-se na *coleção matemática* de Pappus, se propôs a reconstruir o

Lugares planos de Apolônio. Assim descobriu o princípio fundamental da geometria analítica, escrito um ano antes da *Geometria* de Descartes: “Sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva” (BOYER, 1992, p. 253), ou seja, “sempre que numa equação se encontram duas variáveis, os pontos que satisfazem à equação formam uma curva”.

Foi nesse sentido que, em 1629, Fermat escreveu *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos*, que circulava em forma de manuscrito e, devido a sua modéstia, só foi publicado depois de sua morte, em 1679. Ele contentava-se em apenas escrever a Mersenne (1588-1648) expondo as suas idéias. Os trabalhos de Fermat eram muito mais sistemáticos e didáticos do que os de Descartes e sua geometria analítica aproxima-se da atual. Mesmo assim, persiste a crença de que a geometria analítica foi invenção apenas de Descartes. Laplace considera Fermat como descobridor do cálculo diferencial e co-descobridor da geometria analítica.

Considerado o Pai da Filosofia Moderna, Descartes desejava criar um método geral para a resolução de todos os problemas de geometria. Sua teoria se baseia em dois conceitos: “o das coordenadas e o de representar em forma de curva plana qualquer equação algébrica com duas incógnitas, valendo-se para isso do método das coordenadas” (ALEKSANDROV, 1994, p. 70, tradução nossa). Descartes lançou mão da potencialidade da álgebra e dos métodos geométricos gregos para a criação de uma metodologia mais ampla e a redução do trabalho na resolução de problemas. “O produto desta aplicação da álgebra para a geometria foi *A Geometria*” (KLINE, 1992, p. 409, tradução nossa). Este era um dos três apêndices do *Discurso sobre o método para raciocinar bem e* *procurar a verdade nas ciências* publicado em 1637. Nesse apêndice encontramos suas idéias sobre a geometria analítica e sobre a álgebra.

A *Geometria* levou a geometria analítica (geometria de coordenadas ou geometria cartesiana) ao conhecimento de seus contemporâneos. Nessa obra ele propõe “tomar o melhor da álgebra e da geometria e corrigir os defeitos de uma com a ajuda da outra” (KLINE, 1992, p. 408, tradução nossa). É o caso de

> representar uma dada equação de duas variáveis por uma curva no plano e deduzir, das propriedades algébricas da equação, as propriedades geométricas da curva correspondente; e reciprocamente, das propriedades geométricas de uma curva obter a equação, e então, das propriedades algébricas da equação deduzir as propriedade geométricas da curva (ALEKSANDROV, 1994, p. 70, tradução nossa).

> Assim, em grande escala, onde Descartes partia do lugar geométrico e então encontrava sua equação, Fermat partia de uma equação e então estudava o lugar correspondente. São esses os dois aspectos recíprocos do princípio fundamental da geometria analítica. (EVES, 2004, p. 389).

Na argumentação de “que uma curva é qualquer lugar geométrico que tem uma equação algébrica, Descartes abriu de um só golpe o domínio matemático” (KLINE, 1992, p. 425, tradução nossa). Na intenção de estabelecer um método para a geometria, conseguiu mais do que imaginara e trouxe benefícios à ciência com ferramentas matemáticas deveras necessárias.

A geometria analítica foi considerada na época, apenas uma ferramenta para resolver os problemas de construção aos quais se dedicou Descartes. Quanto ao simbolismo, o referido autor fez uso sistemático dos inteiros positivos como expoentes. No apêndice *A Geometria* ele tratou sobre as *secções cônicas* e, sem demonstrar, afirmou que as equações das *secções cônicas* são de segundo grau (KLINE, 1992).

O interesse dos gregos pelas secções cônicas foi puramente matemático enquanto que, nos séculos XVI e XVII, época de Descartes, já tinha uma importância prática para a astronomia, a mecânica e a tecnologia (ALEKSANDROV, 1994).

O arquiteto e engenheiro militar de Lyons, Girard Desargues (1591-1662) também se sentiu fortemente atraído pelas cônicas. Mesmo não sendo reconhecido em seu tempo, o *profeta da geometria projetiva* (como ficou conhecido) contribuiu significativamente para o desenvolvimento do estudo das secções cônicas, pois na projeção das sombras de círculos percebemos que as "formas e tamanhos mudam conforme o plano de incidência que corta o cone de raios visuais ou raio de luz; mas certas propriedades permanecem as mesmas em todas essas mudanças" (BOYER, 1992, p. 262). Seu trabalho, outrora negligenciado pelos outros matemáticos, hoje "é considerado um clássico do desenvolvimento inicial da geometria projetiva" (EVES, 2004, p. 359).

Aos quatorze anos Bleise Pascal (1623-1662) tomou conhecimento das idéias de Desargues e, aos dezesseis anos, publicou uma das mais fecundas páginas da história, um *Essay pour les coniques*. Descartes duvidou que a autoria do trabalho fosse de um adolescente. Aos trinta anos, em continuação ao pequeno *Essay,* trabalhou no projeto de uma *Obra completa sobre as cônicas* que não foi publicada. O seu interesse matemático variava como camaleão e abandonou a matemática pela teologia (BOYER, 1992; EVES, 2004).

Um fator que muito contribuiu para o avanço da investigação matemática nesse período foi a troca de correspondências entre os investigadores. Temendo a apropriação indevida de suas descobertas, eles codificavam os resultados que podiam ser decifrados caso fosse necessário. Mersenne, correspondendo-se com os maiores matemáticos de seus dias, dos quais era amigo, "funcionou [...] como uma espécie de câmara de compensação de idéias matemáticas" (EVES, 2004, p.

400). Nessa época, foi a intercomunicação entre os membros do *grupo de Mersenne* que impulsionou a divulgação dos resultados obtidos nas investigações matemáticas.

Mas, devido à difícil apresentação de Descartes, a demora da publicação da obra de Fermat, o descaso pelos trabalhos de Desargues, a inconstância de Pascal e também a objeção por parte de muitos matemáticos, a difusão da geometria analítica com a idéia fundamental do “emprego de equações algébricas para representar e estudar curvas” (KLINE, 1992, p. 419, tradução nossa), foi lenta. Mesmo assim, protagonizando esse contexto, a geometria e a álgebra fazem as pazes e, a equação associada a uma curva é a sua idéia principal. Assim, surge a geometria analítica como “aquela parte da matemática que, aplicando o método das coordenadas, estuda os objetos geométricos por meios algébricos” (ALEKSANDROV, 1994, p. 229, tradução nossa).

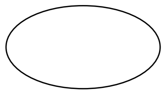
Encontramos em Aleksandrov (1994), em Boyer (1992), em Eves (2004), em Kline (1992) e em Lintz (1999), construções geométricas e expressões algébricas com características próprias da época em que tiveram início as investigações em direção à geometria analítica, que no século XVII também foi chamada de geometria de coordenadas. Neste trabalho nos limitaremos à introdução do estudo das secções cônicas, pois o universo da nossa pesquisa está restrita a estudantes do ensino médio.

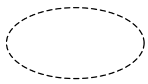
Fermat mostrou que $xy = k^2$ é uma hipérbole, que $a^2 \pm x^2 = by$ é uma parábola, que $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$ é um círculo, que $a^2 - x^2 = ky^2$ é uma elipse e que $a^2 + x^2 = ky^2$ é uma hipérbole.

Das suas investigações Descartes derivou que curvas do plano são representadas por equações de segundo grau assim expressa: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 +$

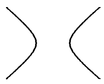
Dx + Ey + F = 0. Sem expressar as formas canônicas, “ele indicou condições sobre os coeficientes sob as quais a cônica é uma reta, uma parábola, uma elipse, ou uma hipérbole [...]” (BOYER, 1992, p. 251).

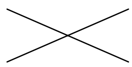
Elegendo-se um sistema conveniente de coordenadas cartesianas o Aleksandrov (1994) faz uma exposição das formas canônicas que podem ser derivadas da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Destacamos as equações 1, 4 e 6 como as respectivas equações canônicas da elipse, da hipérbole e da parábola, sendo *a*, *b* e *c* diferente de zero:

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$  Elipse

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$  Elipse imaginária

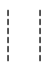
3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ Ponto (par de retas imaginárias que se cortam em um ponto real)

4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$  Hipérbole

5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$  Par de retas que se cortam

6. $y^2-2px=0$  Parábola

7. $x^2-a^2=0$  Par de retas paralelas

8. $x^2+a^2=0$  Par de retas paralelas imaginárias

9. $x^2=0$ Par de retas coincidentes

Euler (1707-1783) desenvolveu com detalhes o teorema sobre a possibilidade de reduzir toda equação de segundo grau a uma das nove formas canônicas (ALEKSANDROV, 1994).

Estas notas históricas nos fundamentam em favor da realização de atividades investigatórias na sala de aula com significado. Com elas evidenciamos que cada conhecimento elaborado percorre um longo caminho cheio de hesitações, mudanças de rumo, dúvidas e contradições. Elas podem conduzir os aprendizes a estudar as demonstrações realizadas por Menaecmo; a enxergar o júbilo de Apolônio com as suas descobertas, principalmente a hipérbole como curva de dois ramos; a chegar até Fermat quando descobriu o princípio fundamental da geometria analítica; a perceber a necessidade de Descartes de construir os eixos cartesianos para representar trajetórias de projéteis ou de corpos celestes; a analisar a projeção de sombras como Desargues; a direcionar a sua visão para a utilização das cônicas na arquitetura antiga ou moderna como também em outros fenômenos do cotidiano do estudante.

14. HISTÓRIA DA NOSSA PESQUISA

Foi no ano 2000, Ano Mundial da Matemática, enquanto buscávamos algo significativo que favorecesse a ampliação dos êxitos e a minimização dos fracassos no processo de construção do conhecimento em nossas aulas, que curiosamente encontramos, num “site” lusitano[6], uma exposição matemática. Encantaram-nos as mesas de bilhar[7] que lá estavam. Elas apresentam suas tabelas em forma de curvas cônicas (elipse, hipérbole e parábola), conforme podemos ver nas imagens a seguir.

Foto 1: Bilhar elíptico, bilhar hiperbólico e bilhar parabólico

Certamente, o idealizador dessas mesas inspirou-se nas observações de estudiosos das secções cônicas, realizadas num passado próximo e/ou distante. Dependendo do nosso envolvimento com a história referente a este assunto podemos encontrar Hipócrates de Chios, Menaecmo, Aristeu, Euclides, Arquimedes, Apolônio, Hipátia, Galileu, Kepler, Descartes, Fermat, Desargues e outros. Descartes (2005, p. 23) ratifica a forma que temos de imergir nesse passado:

> [...] a leitura de todos os bons livros é como uma conversação com a gente mais qualificada dos séculos passados – os seus autores, e também uma conversação estudada na qual estes nos revelam os seus melhores pensamentos [...]

---

[6] http://www.atractor.pt/index.html – O Atractor – Matemática Interativa, tem como objectivo principal ... atrair para a matemática!! (Acessado em 6/9/2005)

[7] **bi.lhar** – *sm* – (*fr billard*)
1 Nome de vários jogos em que tomam parte duas ou mais pessoas em uma mesa retangular, com a parte plana horizontal de mármore ou ardósia, forrada de feltro verde, e com bordas (tabelas) na qual se impelem pequenas bolas de marfim uma contra as outras ou para dentro de caçapas, por meio de uma vara chamada *taco.* **2** A mesa ou casa onde se realiza esse jogo. Disponível em: http://www2.uol.com.br/michaelis/. (Acessado em 6/9/2005).

Como nossa realidade escolar não possibilita a aquisição de tal material didático, e foi impossível deixar de lado essa idéia, substituímos mesas de bilhar por tabuleiros de bilhar. Anteriormente já havíamos orientado alunos a construir um tabuleiro de bilhar com uma tabela em forma de parábola para apresentá-lo numa feira de ciências, então concluímos que poderíamos fazer tabuleiros também para a elipse e para a hipérbole. Tal trabalho foi realizado por uma turma de 3ª série de 2001 no CEFET/PB. Os 30 alunos dessa turma compuseram três equipes. Um número elevado de alunos para uma atividade manipulativa.

As atividades de construção ocorreram em horário oposto ao estabelecido para a turma, pela instituição. Foram duas semanas de trabalho: conteúdos e resolução de exercícios no período da tarde (quatro aulas semanais) e atividades manipulativas no período da manhã (quatro aulas semanais).

O material utilizado por cada equipe foi: um tabuleiro de madeira, régua, compasso, calculadora, papel milimetrado, estilete, borracha de sapateiro (preta), cola de contato e uma lâmina de borracha colorida (EVA).

As figuras a seguir representam os gráficos dos tabuleiros cônicos junto com suas equações. Em cada uma delas está representado também o movimento idealizado para que, com uma bola de vidro (bolas de gude) o jogador acerte o alvo (outra bola de vidro).

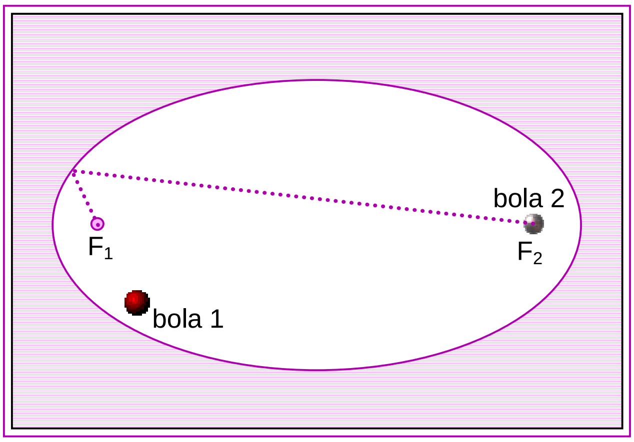


Figura 3: Tabuleiro cônico 1 $\left(\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{25}=1\right)$

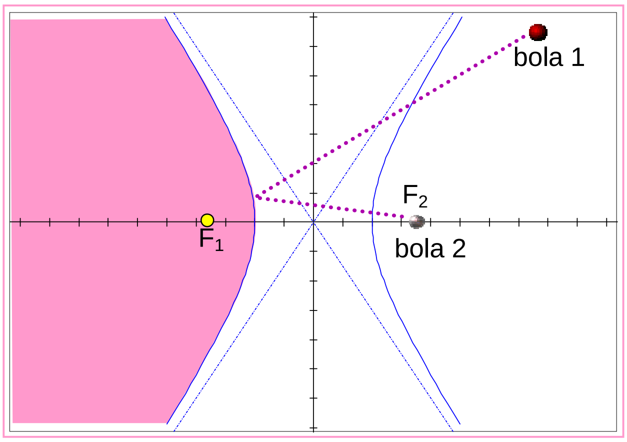


Figura 4: Tabuleiro cônico 2 $\left(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1\right)$

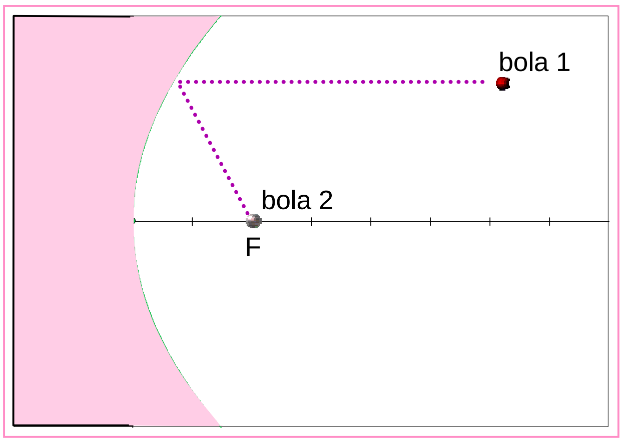


Figura 5: Tabuleiro cônico 3 $\left(y^2=8x\right)$

Para a construção dos tabuleiros cônicos 1, 2 e 3, procedemos da seguinte maneira:

- Foram construídos, na marcenaria do CEFET/PB, três tabuleiros retangulares com dimensões 0,9 m X 0,8 m contornado por uma moldura com 0,3 m largura por 0,3 m de altura.
- Os aprendizes, divididos em três equipes, deveriam planejar e executar a construção de uma das secções cônicas (a parte de cor rosa nas figuras anteriores) em uma borracha de sapateiro, com 0,2 m de espessura, para encaixá-la no tabuleiro de madeira. Depois cobrir a borracha preta com uma lâmina da borracha colorida (EVA) para embelezar.
- A atividade de cada grupo compreenderia: a escolha das dimensões da secção cônica a ser construída, a determinação da equação a ser trabalhada, a construção da tabela dos vários pontos do lugar geométrico, o traçado do gráfico em papel milimetrado, o corte da secção cônica na borracha e, por fim, verificarem se a construção era funcional.
- As linhas traçadas nas figuras anteriores não ficariam visíveis.
- Em cada figura representando os tabuleiros, a linha pontilhada de cor rosa trata-se da possível trajetória da bola 1 para atingir a bola 2.

<u>Tabuleiro cônico 1:</u>

- Deveriam destacar o foco F_1 e o foco F_2 com uma marca para fixar a bola 2 no foco F_2.

- A bola 1 localizada em qualquer parte do tabuleiro não ocupado pela borracha, ao ser impelida com um taco, deveria atingir, por tabela, a bola 2. O jogador lançaria a bola 1 em direção à curva da elipse limitada pela borracha com o objetivo de, ao bater no obstáculo, retornar e atingir a bola 2 na marca F_2.
- O objetivo seria alcançado se o jogador impelisse a bola 1 em direção a marca F_1.

<u>Tabuleiro cônico 2:</u>

- Deveriam destacar o foco F_1 (localizado na parte rosa) com um pino e o foco F_2 (localizado na outra parte do tabuleiro) com uma marca para fixar a bola 2 no foco F_2.
- A bola 1, localizada em qualquer parte do tabuleiro, não ocupado pela borracha, ao ser impelida com um taco, deveria atingir, por tabela, a bola 2. O jogador lançaria a bola 1 em direção ao ramo da hipérbole limitado pela borracha com o objetivo de, ao bater no obstáculo, retornar e atingir a bola 2 no foco F_2.
- O objetivo seria alcançado se o jogador impelisse a bola 1 em direção ao pino (F_1) localizado na parte emborrachada.

<u>Tabuleiro cônico 3:</u>

- Deveriam destacar o foco F para nele fixar a bola 2.
- A bola 1 localizada em qualquer parte do tabuleiro não ocupado pela borracha, ao ser impelida com um taco, deveria atingir, por tabela, a bola 2. O jogador lançaria a bola 1 em direção à curva da parábola limitada

pela borracha com o objetivo de, ao bater no obstáculo, retornar e atingir a bola 2.

- O objetivo seria alcançado se o jogador impelisse a bola 1 em direção paralela ao eixo da parábola.

Oportunamente, interferimos na escolha das dimensões em cada equipe para que a secção cônica cortada na borracha ficasse bem posicionada no tabuleiro de madeira. Por serem firmes nas suas decisões, numa demonstração de autonomia, as interferências não são facilmente aceitas. A construção da elipse foi a mais trabalhosa.

Iniciamos o nosso trabalho no laboratório de matemática, onde estivemos calculando, medindo, riscando, cortando, lixando e colando. Depois, para usufruirmos o ar refrigerado, passamos para o laboratório de biologia.

Acabadas as construções, usando o taco e as bolas na direção ideal, os aprendizes viram que os modelos realmente funcionavam de acordo com as definições. Todos ficaram encantados e expressaram a felicidade daquele momento com aplausos e gritos. Percebia-se o sentimento de dignidade por terem construído o tal modelo.

A equipe que primeiro concluiu foi a da parábola, que correu para ajudar a equipe da hipérbole e da elipse. Eles estavam apreensivos para ver se os tabuleiros das duas outras equipes também dariam certo. Deu certo. A partir daí eles passaram a explicar os porquês de algumas vezes falhar a jogada. Tratava-se da construção. Ao cortar a curva cônica na borracha, sempre ficam imperfeições que altera a direção da bola no momento em que essa atinge a tabela cônica.

Infelizmente, não pudemos considerar essa atividade manipulativa como uma investigação em sala de aula. Os roteiros foram proferidos oralmente e, no decorrer dessas construções, as muitas questões e hipóteses levantadas e analisadas espontaneamente pelas equipes foram perdidas, principalmente a hipótese testada e eleita pela equipe para execução da tarefa. Não solicitamos o indispensável registro que possibilitaria ao aprendiz reorganizar suas idéias e refletir sobre a atividade que estava realizando. Ao concluírem, as análises da atividade foram feitas não sistematicamente. A experiência deixou-nos como saldo três tabuleiros com as secções cônicas – elipse, hipérbole e parábola – e rostos felizes e cheios de um merecido orgulho.

Seguem-se as fotografias dos três tabuleiros cônicos produzidos por alunos dessa 3ª série do ano letivo 2001 no CEFET/PB.

Foto 2: Tabuleiro 1 (elíptico), tabuleiro 2 (hiperbólico) e tabuleiro 3 (parabólico)

Associado a um embasamento teórico, essa experiência em sala de aula foi útil como um dos referenciais para a organização do atual trabalho. Forneceu contribuições relevantes para a sistematização das atividades. Como também os tabuleiros de bilhar com tabelas cônicas, construídos por alunos do CEFET/PB em 2001 os quais foram inseridos na pesquisa no ano letivo de 2004 e de 2005.

No final do ano letivo de 2004 realizamos um estudo-piloto. Nesse estudo-piloto contamos com a colaboração dos alunos de três turmas de 3ªs séries do ensino médio no CEFET/PB. O tópico pesquisado fazia parte do currículo a ser cumprido pelos alunos. Estávamos presos à necessidade de emitir uma nota para registrar no diário de classe. No entanto, estávamos livres do vestibular, esse já havia passado. O fator tempo também foi um agravante nessa fase da investigação. O número de alunos foi maior do que o necessário para a pesquisa. Isso ocasionou certas dificuldades na observação prevista. As falhas percebidas nesse estudo-piloto puderam ser minoradas na pesquisa central no final do ano letivo de 2005.

A pesquisa central foi realizada com nove alunos de 3ª série do ensino médio no CEFET/PB. Tratava-se de alunos voluntários, sem o compromisso de notas para registro no diário de classe e sem a ânsia dos preparativos para o vestibular, apenas a espera dos resultados. Tais alunos se dispuseram a contribuir com a pesquisa no horário oposto ao que eles estavam cursando a 3ª série do ensino médio. Durante cinco semanas, nas terças-feiras e quintas-feiras, das 14h00 até as 16h00, ocupamos o laboratório de matemática. Por iniciativa dos alunos, algumas vezes esse horário se estendeu até as 17h00 ou 18h00. Eles eram meticulosos no desempenho das etapas de cada atividade. Mesmo assim a escassez de tempo nos trouxe transtornos, pois era término de ano letivo, com calendário especial por causa das greves, e os alunos já cuidavam do ingresso nas universidades. Fotos, gravações, relatórios e diário foram as formas de registrar para futura análise.

15. O PERCURSO METODOLÓGICO

Considerando o viver cotidiano e o estudo já realizado no ano letivo de 2004 – além de, numa sala de aula, termos diferentes motivações, interesses, capacidades e necessidades (sociais, culturais e profissionais) – identificamos algumas dificuldades inerentes a pesquisa no CEFET/PB:

- Nessa instituição, o tópico das secções cônicas é visto na segunda metade do quarto bimestre. Muitos alunos, já com média que garante a sua aprovação, mostram-se sem maiores interesses para qualquer estudo;
- Devido aos resíduos das greves nessa instituição, o calendário escolar apresenta-se diferenciado. Portanto, o quarto bimestre de um ano letivo, quase sempre, com muitos alunos já aprovados nos vestibulares, sucede o ano em curso;
- Na mesma instituição, outras turmas podem ser encaminhadas por um estudo com uma metodologia superficial (CAMPANÁRIO, 2002), apenas cumprindo o programa proposto, uma apresentação de fórmulas para serem empregadas na resolução de exercícios bem específicos;
- Com o carisma próprio de um líder, alguns alunos deixam o professor em sérios apuros. A indisciplina, o barulho e os gracejos – irreverência própria dessa faixa etária, de 16 até 19 anos aproximadamente –, pode desnortear uma aula com caráter investigativo, caso não tenham sido previstas tais situações e não tenham sido tomadas as providências para prováveis ocorrências;

- Turmas numerosas, que no CEFET/PB são de 30 até 45 alunos (por vezes chegando a 50), desfavorecem o desempenho das atividades;
- Os primeiros e os últimos momentos de uma atividade são terríveis. No início, cada um tem uma novidade, mais importante que a tarefa proposta, para contar ao companheiro. E, por concluírem a tarefa em tempos diferentes, estabelecem-se as brincadeiras, não bem-vindas, ao término da aula;
- As metodologias alternativas para o ensino e a aprendizagem desenvolvem-se dentro de um espaço de tempo maior que numa aula expositiva. As atividades manipulativas, a demora para as conclusões esperadas e o desvio da atenção para conversas e/ou brincadeiras que surgem no grupo, são as principais causas dessa dilatação do tempo;
- A pouca (ou nenhuma?) aplicabilidade imediata do conteúdo no dia-a-dia do aprendiz pode conduzir ao tédio e induzir a célebre pergunta “Para que serve?” (BROLEZZI, 2003).

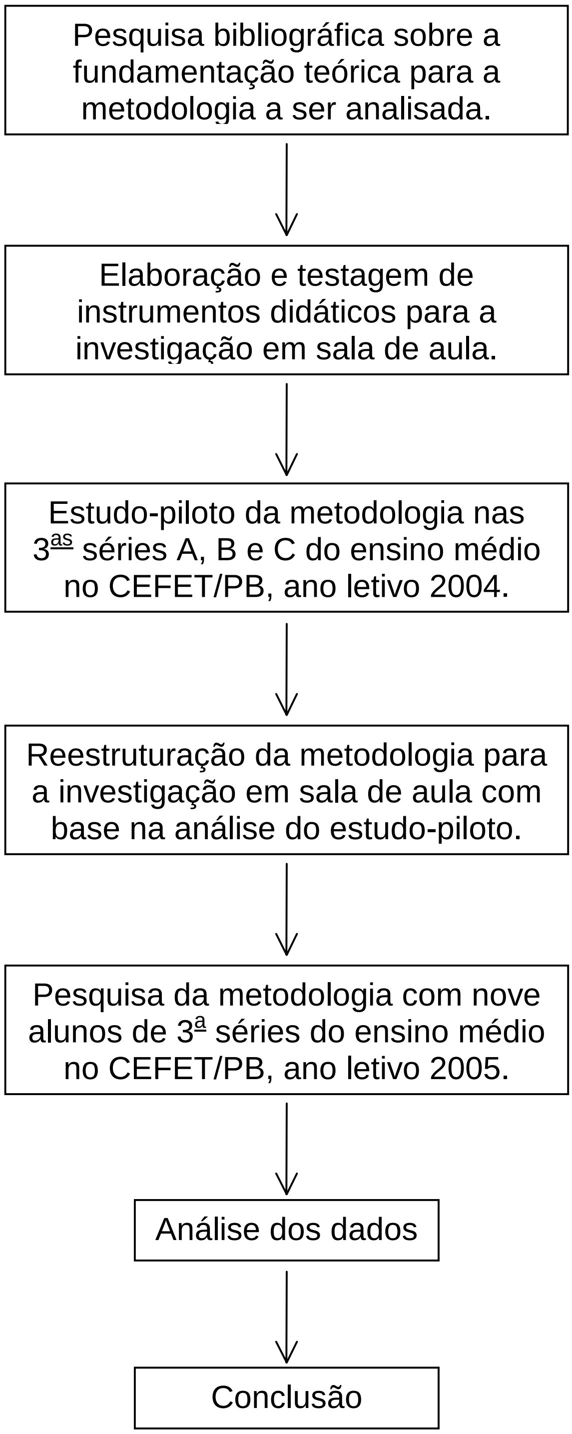
Podemos encarar tais dificuldades não como obstáculos, mas sim como desafios a serem vencidos na realização da pesquisa. Diante de uma organizada atividade investigativa, esses jovens franqueiam a sua curiosidade, o seu espírito de aventura e de conquista, a sua capacidade de criar e de inovar, o seu vigor. O que é possível fazer com todo esse tesouro em mãos? Melhor buscarmos uma metodologia alternativa que canalize o que for possível dessa preciosidade para uma aprendizagem com significado.

Julgando possível essa busca, atuamos de maneira que o aluno fosse conduzido ao berço das secções cônicas, que a sua curiosidade fosse aguçada para a presença dessas curvas na natureza e no seu cotidiano (formas, trajetória de astros, trajetória de cometas, lançamento de projétil, jatos de água, feixes de luz, arquiteturas, etc.), que pudéssemos tirar proveito da sua ludicidade com as secções cônicas em tabuleiros de bilhar e que ainda procurássemos anular o tédio quase certo nessa época do ano letivo.

A pesquisa bibliográfica nos fez enxergar que as secções cônicas é um assunto muito vasto. Mesmo na introdução desse conteúdo, a parte que é vista no ensino médio, há uma numerosa quantidade de atividades que podem ser desenvolvidas por aprendizes desse nível de conhecimento com o intuito de conduzi-los a uma aprendizagem com significado. Encontramos tais atividades na própria história e também em autores como Bolt (1992) e Wells (1998). Algumas dessas atividades necessitam de um maior empenho – espaço, tempo, recursos, estudo – para que seja possível aplicá-las numa sala de aula. Numa equipe de professores os obstáculos para a execução de tal tarefa seriam minorados.

Determinamos, elaboramos e testamos os instrumentos que seriam favoráveis ao desenvolvimento da nossa pesquisa em sala de aula. Do estudo-piloto até a pesquisa central houve certas modificações em tais instrumentos. Ao final, tivemos resultados gratificantes, mesmo que ainda insatisfatórios. Impossível é esgotar o tema e há intenção de nos aprofundarmos na exploração desse assunto.

O esquema a seguir nos favorece uma melhor percepção das etapas desenvolvidas nesta pesquisa.


Pesquisa bibliográfica sobre a fundamentação teórica para a metodologia a ser analisada.
Elaboração e testagem de instrumentos didáticos para a investigação em sala de aula.
Estudo-piloto da metodologia nas $3^{\underline{as}}$ séries A, B e C do ensino médio no CEFET/PB, ano letivo 2004.
Reestruturação da metodologia para a investigação em sala de aula com base na análise do estudo-piloto.
Pesquisa da metodologia com nove alunos de $3^{\underline{a}}$ séries do ensino médio no CEFET/PB, ano letivo 2005.
Análise dos dados
Conclusão

16. EXPERIÊNCIAS EM SALA DE AULA: UM ESTUDO-PILOTO

Para as 3ª͟s séries do ensino médio no CEFET/PB, o conteúdo das secções cônicas é ministrado na segunda metade do quarto bimestre. É certa a presença de alunos indispostos e apreensivos quanto aos diversos concursos de vestibulares pelos quais tenham passado em diversas instituições de ensino superior. Foi nesse contexto que realizamos, a título de pesquisa, uma investigação em sala de aula numa abordagem metodológica para o ensino e a aprendizagem da geometria analítica.

Nesse primeiro momento realizamos um estudo-piloto. Foram duas turmas no período da manhã e uma no período da tarde que compuseram o grupo a ser pesquisado. No CEFET/PB as 3ª͟s séries têm quatro aulas semanais com duração de 50 minutos. Geralmente, conjugadas duas a duas.

Na primeira metade do quarto bimestre escolar de 2004 as 3ª͟s séries A, B e C estudaram ponto, reta e circunferência. Esse estudo, que culminou com uma revisão e uma avaliação da aprendizagem, foi ministrado pela professora da turma. Em seguida as turmas nos foram entregues para darmos continuidade ao conteúdo da geometria analítica – elipse, hipérbole e parábola. Essa fase da pesquisa só pode ter início em fevereiro de 2005 porque as 3ª͟s séries ainda cumpriam um calendário especial devido as sucessivas greves de anos anteriores.

Como o referido período letivo coincidiu com as festividades de final de ano e início das férias escolares e do planejamento para o novo ano escolar nessa instituição, tivemos uma série de dificuldades para implementar uma proposta de ensino envolvendo a investigação em sala de aula aliada ao uso da história da matemática. Mesmo assim, conseguimos alcançar o previsto em nosso planejamento.

A divulgação do calendário da Universidade Federal da Paraíba – UFPB para o ano de 2005 levou o CEFET/PB a antecipar a conclusão de suas atividades nessas turmas até a primeira quinzena de março de 2005.

As atividades para esse primeiro momento procuravam conduzir o aprendiz a explorar, questionar, supor (ou criar hipóteses), testar, reformular, justificar e avaliar, isto é, investigar. Supusemos que no seu caminho investigativo ocorressem dúvidas, hesitações, contradições e mudanças de rumo. Que eles criariam meios para resolver problemas, que verificariam a validade de suas hipóteses e que, as atividades manipulativas (apenas a manipulação de um material didático não garante a construção de um conhecimento com significado) contribuiriam para a reestruturação dos conhecimentos prévios e a apropriação de novos conhecimentos.

Como essa pesquisa intenciona analisar a possibilidade de propor uma abordagem metodológica diversificada para o ensino e a aprendizagem das secções cônicas, a amostra selecionada é todo o universo de pesquisa, três turmas de 3$^{\underline{as}}$ séries do CEFET/PB. Os dados para a atual pesquisa foram fornecidos por testes avaliativos de conteúdos, questionários com respostas abertas e, basicamente, pela observação participativa da professora-pesquisadora, que mediando, cuidou para que o aluno fosse o protagonista dessa ação. A partir das atividades desenvolvidas, é provável que os alunos venham a ter uma visão diversificada das origens dos conhecimentos matemáticos – que não mais os vejam rígidos, prontos, acabados e surgidos como mágica e sim recheado de intensas mudanças próprias de cada época – e que também lhes sejam possível investigar sobre qualquer outro conhecimento desejado. Portanto, afirmamos que se trata de uma pesquisa-ação com observação participante (RICHARDSON, 1999).

Registramos, de forma sistemática, o máximo de ocorrências relevantes. Fotografias, gravações de voz em fitas magnéticas e anotações em um diário foram os meios utilizados na coleta de dados.

De início as aulas foram planejadas para ocorrerem em 10 encontros de 100 minutos cada, conforme o quadro a seguir.

1º encontro	Leitura, comentários e questionamentos do texto histórico.
2º encontro	Comentários dos aportes históricos adquiridos em outras fontes. Aplicação, em dupla, de questionário referente ao texto.
3º encontro	Atividades com elipse.
4º encontro	Atividades com parábola.
5º encontro	Atividades com hipérbole.
6º encontro	Jogo na mesa de bilhar cônica.
7º encontro	Exercícios de fixação.
8º encontro	Exercícios de fixação.
9º encontro	Avaliação da aprendizagem em duplas.
10º encontro (3 turmas juntas no auditório)	Em PowerPoint, fotos da turma em atividades com as cônicas. Questionário avaliando as aulas ministradas. Distribuição de chocolates em forma de cone.

Quadro 1: Previsão para 10 encontros em 2004

Mas, fugindo a nossa expectativa, ocorreu segundo o seguinte quadro, sendo dois desses encontros com uma duração de 200 minutos. Pouco favorável, pois, mesmo com o dinamismo instalado devido às atividades desenvolvidas, há reclamações por parte dos alunos por estarem estudando por muito tempo uma mesma disciplina.

1º encontro (100 minutos)	Leitura, comentários e questionamentos do texto histórico.
2º encontro (100 minutos)	Comentários dos aportes históricos adquiridos em outras fontes. Aplicação, em dupla, de questionário referente ao texto.
3º encontro (200 minutos)	Atividades com elipse. Atividades com parábola.
4º encontro (200 minutos)	Atividades com hipérbole. Jogo na mesa de bilhar cônica. Exercícios de fixação. Avaliação da aprendizagem em duplas.
5º encontro (3 turmas juntas no auditório) (100 minutos)	Em PowerPoint, fotos da turma em atividades com as cônicas. Questionário avaliando as aulas ministradas. Distribuição de chocolates em forma de cone.

Quadro 2: Cinco encontros ocorridos em 2004

O primeiro encontro realizado para abordar as cônicas ocorreu em pleno verão. Os estudantes estavam eufóricos, inquietos e com uma vontade enorme de iniciarem o ano letivo em cursos superiores para os quais tinham sido aprovados, no entanto ainda estavam concluindo o ensino médio. No laboratório de matemática misturavam-se meninas com um curativo colorido cobrindo uma sobrancelha retirada e meninos carecas, o que identificava os aprovados no concurso de vestibular. Tivemos a oportunidade de conduzir uma aula sem objetivar as exigências próprias do vestibular que “tem se constituído um grande paradigma para a organização do ensino básico [...] [livre assim] de transformar todo o curso num ‘macetão’ em nome do exame” (VASCONCELLOS, 2006, p. 215).

Neste encontro, explicamos o motivo da nossa presença naquelas turmas, que foi em virtude da realização do nosso estudo de mestrado, e entregamos a cada um deles um texto intitulado *Notas históricas sobre as secções cônicas* (MACENA; MENDES, 2005). Imediatamente ouvimos os primeiros murmúrios:

> O que é isto professora? Um texto? A aula não é de matemática? Isso vai ajudar em alguma coisa? Quando é que começa a aula de matemática? Agora pronto! É aula de história! Eu gosto é de números, de cálculo! (Informação verbal[8])

Após as críticas preocupadas dos alunos ao receberem o texto histórico para ser lido e interpretado oralmente, fizemos um comentário sutil: Vocês têm razão, é aula de história; história das secções cônicas.

Alguns alunos escolhidos fortuitamente fizeram a leitura. Outros teciam seus comentários e nós acrescentávamos algumas observações sobre a matemática babilônica e egípcia: nomes; lugares; uso da régua e compasso; entraves nas idas e vindas durante o processo de construção da Geometria Analítica; perdas de documentos; júbilo e orgulho de Apolônio pela descoberta dos dois ramos da hipérbole; maiores detalhes sobre o martírio de Hipátia, descobertas dos séculos XVI e XVII; ensinamentos de Copérnico e teorias planetárias de Ptolomeu; condenação da mãe de Kepler; pessoas de menor importância atuando por trás dos cientistas em destaque; vida e morte de Descartes e tantas outras observações à medida que as oportunidades iam surgindo. Essas observações sofreram variações de acordo com a característica de cada turma, levamos em conta o interesse e a curiosidade específica em cada grupo de alunos.

Na leitura do texto surgiram expressões de estranhamento, tais como:

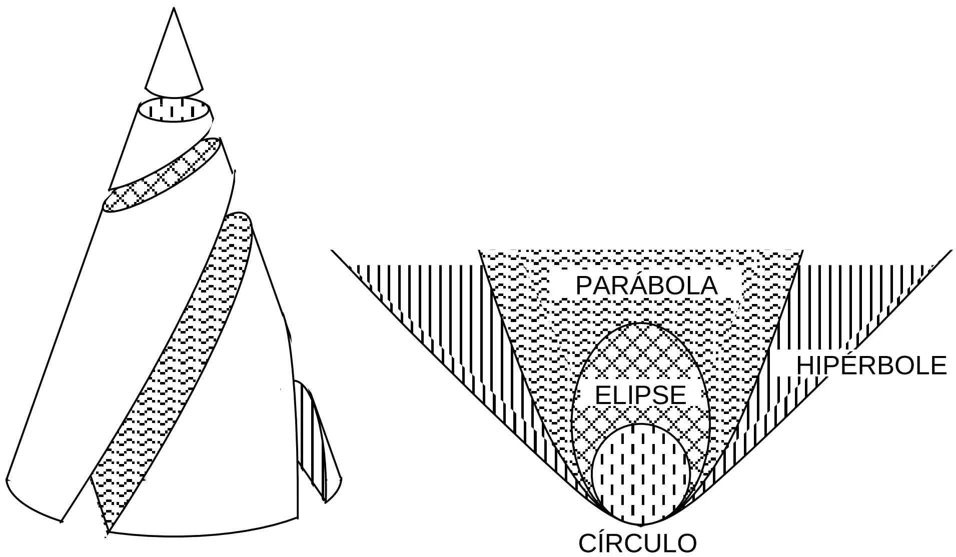
> Quantos nomes estranhos! [...] Vou colocar um destes nomes em meu filho. [...] A senhora fez uma volta muito grande para chegar nas secções cônicas. É mesmo necessário tudo isso? [...] Eu não gosto disso. Eu quero é cálculo. [...] Pra que isso? Já estamos aprovados no vestibular e já temos uma nota para este bimestre. Eu quero é ficar em casa. (Informação verbal[9])

---

[8] Comentários dos alunos, conforme gravação realizada durante a aula.
[9] Comentários dos alunos, conforme gravação realizada durante a aula.

Notável foi o esforço requerido para atrair a atenção dos alunos para o texto. Essa atenção nos pareceu mais considerável quando detalhes sobre a vida das personagens eram relatados em detrimento das suas descobertas. Gostam de saber que pessoas comuns, apenas de outra época, despertaram o interesse por assuntos que hoje compõem o seu currículo escolar.

Sem registro, infelizmente não solicitamos, os estudantes analisaram a definição de cônicas de Apolônio em Boyer (1994, p. 107), os desenhos impressos no final do texto histórico (Figura 6), os expostos modelos de cones de Menaecmo[10] e modelos de cones seccionados disponíveis no laboratório de matemática (Foto 3). Teceram comentários sobre a contribuição de Apolônio ao mostrar que de um único cone circular (Figura 2) podem ser obtidas todas as espécies de secções cônicas.



Figuras 6: Secções cônicas (final do texto histórico)

[10] Modelo de uma família de curvas obtidas de uma mesma fonte, cortando o cone circular reto por um plano perpendicular a um elemento do cone (BOYER, 1994, p. 69).

Foto 3: Modelos de cones seccionados e modelos de cones de Menaecmo

Na aula seguinte responderiam, em duplas, um questionário com perguntas abertas (Apêndice A) referente ao texto estudado, e deveriam trazer objetos, figuras ou *home pages* onde se encontrasse algo que lembrasse as cônicas ou que se relacionasse com seus questionamentos.

O segundo encontro ocorreu uma semana depois e poucos atenderam a solicitação de trazer algo que lembrasse as cônicas. Esta foi por eles considerada sem importância. Em duplas e consultando o texto, responderam, com alguma dificuldade, ao questionário. Tais dificuldades foram centradas nas questões referentes à hipérbole. Ao final, orientamos que na aula seguinte, deveriam trazer régua e compasso.

O objetivo dessa atividade foi conduzir o aprendiz à percepção de que o conhecimento a ser adquirido por ele não surgiu de forma mágica, ele é o resultado de muitas idas e vindas, de superação de obstáculos. Como também, situá-lo historicamente nas várias etapas e contextos em que se deu o surgimento desse conhecimento.

No terceiro encontro, durante 200 minutos, apresentamos um guia das atividades investigatórias (Apêndice B) em que constavam os elementos de uma investigação e seus objetivos, bem como a idéia central de Descartes e Fermat acerca da geometria analítica. Estavam ali também mencionados alguns exemplos de aplicações das cônicas. A investigação que se desenvolveu, em parte, esteve baseada nas atividades de Brito (2003).

Atentos às explicações acrescidas, todos iniciaram as atividades em equipes, gerando assim uma confusão construtiva em sala de aula. Concordamos com Fossa (2001) quando, esse respeito, descreve que em uma sala de aula intuicionista

> [...] vemos que o aluno é quem é a estrela. Trabalhando em pequenos grupos com colegas, o aluno está ativamente engajado no desenvolvimento de alguma tarefa. Com tantos alunos conversando e com muito mais movimento na sala de aula [...], parece que a aula virou bagunça! Mas, é só na aparência. (FOSSA, 2001, p. 13).

Foto 4: Aparência de bagunça e alunos em pequenos grupos

Após a orientação dos trabalhos, foram feitas algumas perguntas com uma certa freqüência, em claro e bom som:

> O que é que vamos fazer? Como vamos fazer isto? Como é que começa? Tem que passar pelos vértices dos quadradinhos? Como marcar a mesma distância? Está parecendo uma circunferência. (Informação verbal[11])

Aguardamos até que, em suas equipes composta de quatro ou cinco alunos, sentissem a necessidade de utilizar régua e compasso para que executassem a tarefa: *Traçar lugares geométricos[12] em papel quadriculado*. Em poucos instantes todos calaram e ficaram absortos em suas atividades.

Foto 5: Traçando lugares geométricos

Após algum tempo ouvimos as primeiras falas. Em uma equipe comentavam:

– Se a gente tivesse um cordão e dois pregos seria mais fácil de realizar esta atividade.

---

[11] Comentários dos alunos, conforme gravação realizada durante a aula.

[12] **Lugar geométrico** dos pontos que têm uma determinada propriedade é o conjunto que contém todos esses pontos exclusivamente. (Dicionário de matemática – S. Paulo: Hemus Livraria Editora Ltda., 1979Dicionário de matemática – HEMUS, 1979)

Imediatamente procuramos solucionar o problema, pois já imaginávamos essa situação. Nesse momento então dissemos:

– Aqui está o que vocês pedem e mais ainda, uma tábua com superfície sistematicamente perfurada.

Logo, eles realizaram todo o restante da atividade na tábua com superfície perfurada. Um dos alunos lembrou-se do que vira em um livro quando estudava para o vestibular. Como na folha de atividades estavam todas as orientações necessárias, essa equipe se antecipou numa atividade em relação às outras equipes.

Foto 6: Traçando uma elipse em quadro perfurado (1)

Quando todos já haviam traçado a elipse no papel quadriculado, um aluno foi convidado para que, usando um pedaço de cordão preso a dois pregos, traçasse uma elipse no quadro maior, que dispomos no laboratório de matemática, com a superfície sistematicamente perfurada. Essa forma de traçar uma elipse é conhecida como “método do jardineiro” já descrita por Antemius de Trales no século VI.

Foto 7: Traçando uma elipse em quadro perfurado (2)

Cada equipe construiu uma definição para elipse. Essas definições foram analisadas e, com a nossa mediação, chegou-se a um consenso entre as equipes de que expressão matemática para a curva trabalhada é $\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = 2a$. De posse da definição e do traçado no quadro, foram destacados os elementos da elipse e as relações entre esses elementos.

Outro aluno foi convidado a traçar várias elipses com o mesmo instrumento variando apenas a distância entre os focos. Foi nessa ocasião que se distinguiu o significado da excentricidade.

O seguinte exercício foi proposto para ser resolvido pela turma:

Usando a definição construída de elipse $\left(\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = 2a\right)$*, determine a equação da elipse cujos dados são:* F_1*(-1,0);* F_2*(1, 0); eixo maior = 4*

Alguns quiseram resolver sem usar a definição e sim utilizando os métodos já estudados para o vestibular. Insistimos que se deveria fazer uso da definição. Surgiram algumas dificuldades ao resolverem a equação irracional, mas ao fim chegaram à forma canônica.

Juntamente com os alunos generalizamos essa equação encontrada e escrevemos a equação geral de uma elipse centrada no (0,0), tanto com seu eixo maior na horizontal como com seu eixo maior na vertical.

A realização do segundo item, uma tarefa similar, foi mais simples e os alunos até se anteciparam. Traçaram uma parábola no papel quadriculado, e em seguida, assistidos pela professora, traçaram uma parábola no quadro com superfície perfurada, usando um pedaço de cordão com uma extremidade presa a um prego localizado no foco e a outra extremidade presa a um esquadro que deslizava sobre uma régua (método utilizado por Kepler[13] e por Isodoro de Mileto, que viveu em 520).

---

[13] Kepler desenhava parábolas usando uma mesa, um pedaço de cordel, e uma espécie de esquadro em T (Colégio de Gaia: Grupo de Matemática).

Foto 8: Traçando uma parábola em quadro perfurado

Cada equipe construiu uma definição para parábola. Tal definição foi melhorada entre as equipes, chegando-se a expressão matemática $\overline{FP} = \overline{Pd}$. De posse da definição e do traçado no quadro, cada elemento da parábola e as relações entre esses elementos foram destacados.

Agora um exercício, não mais específico como o que foi proposto para a elipse e sim generalizado:

Usando a definição construída para parábola $\left(\overline{FP} = \overline{Pd}\right)$*, determine a equação geral de uma parábola com vértice na origem dos eixos ortogonais e concavidade voltada para cima.*

Alguns demoraram perceber o ponto Q(x, -d) que se desloca ao longo da diretriz (y = -d) enquanto o ponto P(x, y) traça a parábola. Tirando esse entrave, tudo ficou mais fácil. Ao final, foi entregue aos alunos uma apostila (Anexo A) com todo assunto. Essa apostila foi elaborada por três professoras[14] da instituição.

Ficou acordado, também, que no encontro seguinte seria estudada a hipérbole, a resolução de mais alguns exercícios e uma avaliação da aprendizagem em duplas. Opuseram-se a proposta da avaliação, mas foram persuadidos a arriscar e ver o aconteceria.

No quarto encontro, com o tempo minguado, a hipérbole foi vista apenas de forma expositiva. Na maior parte da transmissão o aluno ficou na posição de ouvinte. Ainda assim fizemos o traçado da hipérbole no quadro com superfície perfurada para destacar cada um dos elementos que a compõe juntamente com a

[14] Kalina Lígia C. Farias, Marta M. Maurício Macena e Rejane de Fatima O. Brito

sua equação. Uma aluna foi ao quadro e também traçou uma hipérbole usando uma régua fixa a um dos focos e tendo um cordão preso a uma extremidade da régua e a um prego fixo no outro foco. A diferença entre o comprimento da régua e o comprimento do barbante deve ser menor que a distância focal.

Foto 9: Traçando uma hipérbole em quadro perfurado

Desconhecemos a origem dessa maneira de traçar a hipérbole, no entanto podemos encontrar, com detalhes, em Paiva (1995) cada traçado das cônicas com cordão régua e pregos.

Nos momentos seguintes, foram resgatadas as atividades já realizadas por outros alunos. Num minguado espaço de tempo, alguns conceitos das secções cônicas foram analisados pelos alunos nos tabuleiros de bilhar cônicos construídos em 2001. Foram desafiados a determinar regra para jogar adequadamente em cada tabuleiro.

A urgência não permitiu esperar pela elaboração de questões, pelas suas deduções ou pelas escolhas de conjecturas válidas. Destacamos os elementos de cada tabuleiro de acordo com as secções cônicas estudadas, dissemos-lhes a regra única de jogo para todos os tabuleiros e esperamos por poucas tentativas de acertos (sem sucesso) por parte dos alunos. Sem demora, detalhamos como deveriam proceder para que jogassem acertando o alvo. Curiosos, jogaram apenas por 30 min para comprovar o que havíamos dito. Verificaram se suas jogadas ocorriam de acordo com o esperado e passaram a explicar aos colegas que ainda não haviam se inteirado da situação. Houve algumas falhas devido à construção do material didático. Não foi fácil desgrudá-los dos tabuleiros.

Regra única de jogo para todos os tabuleiros das secções cônicas: *"Por tabela, retirar a bola fixa no ponto determinado"*.

No *bilhar elíptico* toda tabela compreende uma curva elíptica e seus focos ficam bem marcados. Uma bola atirada na direção de um dos focos, ou colocada em um dos focos e atirada em qualquer direção, deverá atingir, por tabela, a outra bola que se encontra no outro foco da elipse.

O *bilhar hiperbólico* tem uma tabela com a forma de um ramo de hipérbole com o foco marcado na parte superior por um pino, do outro ramo apenas fica destacado o seu foco com uma marca na madeira. Uma bola atirada em direção ao foco (o pino) localizado em cima da borracha deverá atingir, por tabela, a bola que se encontra no outro foco.

O *bilhar parabólico* tem uma das tabelas formada por um arco de parábola e tem uma marca no foco da parábola. Uma bola atirada na direção do eixo da parábola deverá atingir, por tabela, a bola que se encontra no seu foco.

Foto 10: Verificando a veracidade da regra para cada jogo.

Em seguida foram resolvidos dois exercícios de cada cônica. A principal pergunta nesse momento foi:

– Como não confundir uma parábola com um ramo de hipérbole?

Foi a ocasião para falarmos da existência de outras curvas que não são secções cônicas, mas que se assemelham a elas como: catenárias; senóides e cossenóides (dentro de um certo intervalo).

Dos exemplos que foram vistos no decorrer das aulas e até mesmo constando na lista de exercícios, podemos citar: as órbitas de planetas e cometas (destacando a excentricidade da órbita da Terra em volta do Sol), os arcos formados por jatos de água, o feixe de luz de uma lanterna refletido em uma parede, as antenas parabólicas e algumas construções com arquiteturas cônicas ou semelhantes a elas (o Coliseu de Roma, as obras residenciais do arquiteto Rodrigo Lefèvre, o Maracanã, a catedral e a ponte JK em Brasília).

A avaliação da aprendizagem dos alunos, entretanto, distanciou-se da metodologia da aula, considerando que,

> [...] a prova é um instrumento de pouca precisão que não reflete adequadamente o pensamento do aluno. [...] o professor tem que tentar descobrir o pensamento do aluno através de um processo complexo de hipóteses e teses; isto é, o professor tem de manter um diálogo intensivo com o aluno sobre a matéria em questão e estar sempre atento às várias divergências que possam aparecer. [...] deve ser um pesquisador [...] dentro da sala de aula. É, de fato, necessário montar um projeto de pesquisa para cada aluno na aula para tentar determinar seu pensamento. [...] <u>a avaliação não é algo que acontece depois do ato de conhecer, mas é parte integral do processo de conhecer</u>. [...] a avaliação é contínua e diária (FOSSA, 2001, p. 16 e 17, grifo nosso).

Segundo Hoffmann (2004), mesmo que a ação avaliativa seja própria da educação, isso não é uma tarefa simples e deve ser exercida em benefício da educação, não improvisada e nem arbitrária e sim, como diagnóstico, com acompanhamento e intervenção.

O momento avaliativo, para registro de notas, ocorreu ao final do processo. Optamos pela avaliação em duplas para oportunizar tanto a expressão do conhecimento construído individualmente como o conhecimento que poderia desabrochar na interação com o colega (desenvolvimento potencial). Esse momento ocorreu num ambiente de considerável descontração (VASCONCELLOS, 2006). As questões foram simples e desafiadoras (Apêndice

C). Entregamos-lhe um resumo do assunto estudado (Apêndice D) para consulta durante os primeiros 10 minutos da avaliação.

A seguinte seqüência de quatro fotos mostram os alunos realizando uma verificação da aprendizagem.

Foto 11: Uma verificação da aprendizagem

O quinto encontro (as três turmas juntas no Auditório 1) não transcorreu como havíamos planejado, pois não foi possível abrirmos um CD com as imagens da aula, registrados no PowerPoint. Não foi possível vermos a expressão de cada aluno ao se ver na tela em atividade. Restou-nos a aplicação do questionário (Apêndice E) que recolheria o testemunho dos participantes das atividades realizadas durante o processo.

Foto 12: Respondendo a um questionário no auditório

O estudo das secções cônicas que foi feito com turmas de 3$^{\underline{as}}$ séries do ensino médio no CEFET/PB apontou alguns pontos favoráveis e outros desfavoráveis.

Dentre os obstáculos podemos citar:

- Escassez de tempo.
- A maioria já aprovada no vestibular.
- A falta de controle sobre as atividades por parte da pesquisadora.

- Perda de importantes registros de ocorrências durante as gravações e fotografias.

Embora tenham ocorrido alguns imprevistos, é possível concluirmos, mesmo parcialmente, que a experiência serviu de norteador importantíssimo para percebermos a necessidade de um planejamento mais rigoroso, de um domínio sobre cada ocorrência, de uma previsão dos imprevistos.

Outrossim, ficou plenamente evidente que as atividades investigatórias envolvendo aspectos problematizadores extraídos da história da matemática são fatores decisivos na formulação e concretização de uma ação docente significativa no ensino de matemática.

17. EXPERIÊNCIAS EM SALA DE AULA: PESQUISA CENTRAL

Atentando aos detalhes vivenciados no estudo-piloto para esta pesquisa ao final do ano letivo de 2004, procuramos reestruturar as atividades investigatórias a fim de executá-las na pesquisa central no ano letivo de 2005. Nessa nova etapa foi-nos sugerido trabalhar com um grupo composto de no mínimo seis alunos e no máximo dez alunos. Isto com a intenção de favorecer a aplicação, a observação, a análise e a conclusão do trabalho desenvolvido.

No dia 17 de janeiro de 2006, período no qual se dava continuidade ao 4º bimestre do ano letivo de 2005, nos dirigimos às turmas de ensino médio, 3ºA e 3ºB do CEFET/PB, com o propósito de convidar alunos voluntários a comporem uma equipe que contribuiria conosco na pesquisa para nossa dissertação de mestrado. Não especificamos o número de alunos necessários, mas deixamos claro que:

- os alunos voluntários não seriam recompensados com notas ou nada semelhante;
- as atividades propostas para a pesquisa seriam desenvolvidas no período da tarde, oposto ao horário de estudo normal;
- os alunos voluntários deveriam dispor seu tempo até o final da experiência;
- o compromisso com a experiência seria indispensável;
- a equipe de alunos voluntários estaria reunida conosco dois dias por semana durante duas horas (terça-feira e quinta-feira das 14h às 16h).

Foram dezoito alunos da turma A e quinze alunos da turma B que se comprometeram a vir na terça-feira seguinte. Estes assinaram uma lista por eles denominada de *Ratinhos de Laboratório*.

No dia 24 de janeiro de 2006 contamos com a presença de treze alunos da turma A e quatro alunos da turma B. Já mais próximo do número sugerido para compor a equipe em pesquisa. Nesse momento comunicamos que a equipe ainda poderia ser menor e que os demais alunos que assinaram a lista estavam livres do compromisso com a pesquisa, não precisavam vir mais. Naquele primeiro encontro, os alunos presentes iriam tomar conhecimento do desenrolar das atividades a serem realizadas.

Foto 13: Estudantes dispostos a contribuir com a pesquisa (1)

Explicamos aos estudantes que por nos encontrarmos inseridos numa *crise de paradigma na educação* (BRANDÃO, 2002), intencionávamos contribuir com a busca de caminhos para mudanças e que, a partir daquele momento, em parceria conosco, eles desempenhariam um importante e indispensável papel nessa busca. Também deixamos claro que a contribuição do nosso trabalho visa sistematizar uma metodologia para o ensino e a aprendizagem das secções cônicas. Nessa sistematização, a pesquisa fundamenta-se em três pontos pedagógicos importantes – investigação em sala de aula, aprendizagem com significado e história da matemática – aplicado ao estudo das secções cônicas. Três pontos que nos conduzem à pesquisa e à prática, ligados também à resolução de problemas.

Levamos para sala de aula alguns livros que descrevem pesquisas realizadas nas quais nos fundamentamos. São eles: Polya (1994), Pozo (1998), Nigro (1999), Bicudo (1999, 2004), Gil Pérez (2001), Mendes (2002, 2005, 2006), Ponte et. al (2003) e Carvalho (2004). Deixamos que os livros mencionados fossem folheados pelos alunos.

Mesmo que tenhamos sido cuidadosos em documentar as imagens e as falas durante todo o desenvolvimento da pesquisa, percebemos que houve algumas falhas, principalmente quando os alunos estavam atuando em equipes, a maior parte do tempo. Contávamos apenas com um gravador de voz e este era deslocado de uma equipe para outra onde permanecia por um certo intervalo de tempo. Quando percebíamos uma discussão acirrada em alguma das equipes, imediatamente procurávamos gravar, mas por vezes não foi possível. Ainda teve o agravante de falarem todos de uma só vez, impedindo a distinção das palavras, e nossa fala distinguindo-se acima das outras quando intervindo nas diversas ocasiões.

Todo grupo foi divido em três equipes da seguinte maneira: da turma A, seis alunos que estudaram um pouco as cônicas para o vestibular e sete alunos que desconheciam o assunto, enquanto que a outra equipe foi formada por quatro alunos da turma B (sugestão deles, para que a comunicação entre eles fosse facilitada).

Equipe **X**: Anne Coralina, Berlândio, Fernanda, Gerlane, Maiara, Maxuel e Renan.

Equipe **Y**: Alzira, Jofferson, Laio e Delfino.

Equipe **Z**: Antônio, Danton; Everaldo, Patrícia, Wtevânia e Thaíse.

Por iniciativa própria, alguns desistiriam, mas naquela ocasião, fizemos algumas solicitações a cada equipe.Vejamos o retorno dessas:

A. Escrever definições para *problema*:

Equipe **X**: *Um conjunto de proposições que carecem de uma conclusão. Situação que necessita de intervenção*.

Equipe **Y**: *É um questionamento investigativo para se chegar a uma solução.*

Equipe **Z**: *É uma pergunta cuja resposta não é visível no primeiro momento*.

As definições foram comparadas entre as equipes e em seguidas também comparamos com algumas definições dadas por teóricos da educação:

> [...] uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução (LESTER apud POZO, 1998, p. 15).
>
> Existe, porém, um acordo geral, entre aqueles que de fato abordam a questão, em caracterizar como problemas aquela situações que apresentam dificuldades para as quais não há soluções prontas (GIL-PERÉZ, 2001, p. 93).
>
> Um problema é uma situação, quantitativa ou não, que pede uma solução a qual os indivíduos implicados não conhecem meios ou caminhos evidentes para obtê-la (KRULIK e RUDNIK apud GIL-PERÉZ, 2001, p. 93).
>
> Um problema é aquele cuja solução, em vez de simplesmente conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos (IAN STEWART apud PONTE, 2003, p. 16).
>
> Algo que nos inquire, cuja resposta não sabemos mas temos intenção de investigar (BROLEZZI, 2003, p. 14).

Foram consideradas as semelhanças e diferenças nas definições dos alunos em relação às definições de teóricos da educação. Essas considerações deixaram os alunos muito entusiasmados com os seus feitos, perceberam que a idéia de *problema* estava subentendida por eles. A partir de então os alunos voluntários já se consideravam os próprios investigadores científicos.

B. <u>Escrever definições para *exercício*:</u>

Equipe **X**: *Treinamento que necessita de conhecimento prévio, cujo objetivo é fixar uma idéia.*

Equipe **Y**: *É o ato de resolver o problema, um treinamento técnico onde o método já foi elaborado faltando apenas a assimilação dessa técnica.*

Equipe **Z**: *Exercício é uma aplicação prática de uma teoria previamente elaborada.*

A necessidade de exercitar, praticar ou treinar está implícita em suas definições. Tais definições também foram comparadas entre as equipes.

C. Escrever a diferença entre *problema e exercício*:

Equipe **X**: *Problema exige o desenvolvimento de métodos, enquanto no exercício é exigido apenas a aplicação de um método já estabelecido.*

Equipe **Y**: *Exercício é o método de praticar o conhecimento enquanto o problema é a tentativa de resolver o desconhecido, ou seja, formular um método para resolvê-lo.*

Equipe **Z**: *Para a resolução do problema, é necessário desenvolver o método de resolução, enquanto no exercício é utilizado um método já estabelecido.*

Após comparar as diferenças escritas pelas equipes vimos duas diferenças elaboradas por teóricos da educação:

> [...] um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de

> forma imediata, à solução [...] a distinção entre exercícios e problemas como algo relacionado com o contexto da tarefa e com o aluno que a enfrenta [...] (POZO, 1998, p. 16).
>
> Um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata, enquanto que um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido. [...] (PONTE et. al., 2003, 22).

Para alunos, em qualquer fase, é motivo de satisfação o perceber que, sem orientação prévia, encontram-se no caminho certo. Nesse momento não foi diferente, orgulharam-se porque muitos vocábulos por eles usados são os mesmos usados por teóricos da educação. Também foi nesse primeiro encontro que procuramos esclarecer aos alunos o que vem a ser uma investigação em sala de aula para uma aprendizagem com significado. Para isso procuramos analisar algumas citações como:

> Investigar é procurar conhecer o que não se sabe [...] temos em português os termos 'pesquisar' e 'inquirir'. Em inglês [...] *research, investigate, inquiry, enquiry* (PONTE, 2003, 13).
>
> Numa investigação [...] Trata-se de situações mais abertas – a questão não está bem definida no início, [...] quem investiga tem papel fundamental na sua definição. [...] os pontos de partida [e] [...] os pontos de chegada podem ser [...] diferentes (PONTE, 2003, 23).
>
> Ausubel afirma: "O Mais importante fator isolado que influencia a aprendizagem [com significado] é o que o aprendiz já sabe. Determine isto e ensine-o de acordo". [...] Determinar o que o aluno já sabe significa identificar os elementos existentes no estoque de conhecimento do aprendiz que são relevantes ao que esperamos ensinar (NOVAK, 1981, p. 9).

Finalizando esse primeiro encontro, informamos que o trabalho que juntos desenvolveríamos constaria das seguintes etapas: exploração e formulação de questões; organização de dados; testes, reformulação e justificação; exposição e conclusão; avaliação (no decorrer da investigação).

O segundo encontro foi dedicado à aula expositiva sobre *ponto* e *reta*, um conhecimento necessário e indispensável ao estudo das secções cônicas, mas ainda não estudado por esse grupo de alunos, já que no horário oposto eles estavam iniciando o estudo da geometria analítica.

Até então, ainda não lhes tínhamos revelado o número de alunos que desejávamos para desenvolver a nossa pesquisa e, nesse dia, houve um revezamento com relação à presença, enquanto uns faltaram outros vieram pela primeira vez. Sendo assim, continuamos com dezessete alunos.

Foto 14: Estudantes dispostos a contribuir com a pesquisa (2)

Com uma pontinha de tristeza, solicitamos que saíssem do grupo aqueles alunos que não dispunham de tempo suficiente para permanecer conosco até o término do estudo.

No terceiro encontro, ao perceber que contávamos apenas com nove aprendizes, nos assustamos. O nosso temor era de que outros mais viessem a desistir, mas esses foram fiéis e perseveraram em colaborar com a investigação de forma marcante.

Agora, entre os nove estudantes, achavam-se ainda dois alunos que haviam estudado as secções cônicas para o vestibular. Preferimos deixá-los numa mesma equipe. As equipes continuaram sendo identificadas com as letras **X** (Berlândio, Gerlane, Maiara), **Y** (Alzira, Laio e Delfino) e **Z** (Antônio, Everaldo Renan). Com exceção do Delfino os demais tinha estudado comigo, já tinham participado de alguma investigação não sistematizada durante o período que foram meus alunos.

As fotografias a seguir nos mostram as equipes, já em atividade nos tabuleiros cônicos.

Foto 15: Nove alunos procurando regras para o jogo

Para o terceiro encontro, confeccionamos mais três tabuleiros cônicos, dois tabuleiros para cada cônica. Era nossa intenção fazê-los realizar as atividades em grupos menores.

Nesse encontro, separados em equipes e cientes do conteúdo a ser estudado – as secções cônicas –, os alunos deram início a execução das atividades.

Os tabuleiros cônicos foram denominados de **A** (parábola) **B** (elipse) e **C** (hipérbole). O aprendiz não dispunha do nome das curvas.

Posicionadas ao lado de um tipo de tabuleiro de bilhar com tabelas em forma de secção cônica (A, B ou C), cada equipe esteve livre para, usando o taco e as bolas, jogar no tabuleiro de maneira autônoma durante 10 minutos. Nesse primeiro momento esperava-se aguçar a curiosidade de cada um com relação às atividades a serem desenvolvidas. Podemos considerar que os aprendizes estavam iniciando uma atividade heurística[15] já que, esperávamos conduzi-los à descoberta de características próprias das secções cônicas.

Gravando durante esses dez minutos livres, entre um burburinho, foi possível identificar as seguintes fala que se relacionam com o conhecimento estudado:

---

[15] **heurística** [Do lat. cient. heuristica (< gr. heuristiké [téchne], 'arte de encontrar', 'descobrir').]
S. f.
1. Conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas.[Cf. heureca.]
2. Procedimento pedagógico pelo qual se leva o aluno a descobrir por si mesmo a verdade que lhe querem inculcar.
3. Ciência auxiliar da História, que trata da pesquisa das fontes.
4. Inform. Metodologia, ou algoritmo, us. para resolver problemas por métodos que, embora não rigorosos, ger. refletem o conhecimento humano e permitem obter uma solução satisfatória.
(Dicionário Aurélio Eletrônico Século XXI, versão 3.0, novembro de 1999).

> (Berlândio) Eu sou tão bom que bato aqui e a bola saiu.
> (Delfino) Olhe o que estão fazendo ali. O negócio passa assim, parece um macaco na área. [...] Ah! Ali é uma parábola.
> (Everaldo) Oh! Ainda bem. (era um ramo hipérbole)
> (Alzira) Eita! Aquele negócio que a gente viu lá no Espaço Cultural[16] lembra? Que toda vez que batia a bola tinha que bater. Foi interessante aquele negócio. Foi massa. Tu lembras Gerlane?
> (Gerlane) Lembro.
> (Delfino) Se você prestar atenção, se essa bola estiver aqui e eu jogar essa daqui pra qualquer lugar vai bater na outra. Logo, preste atenção, se os focos estão marcados e a gente analisar bem, essa distância daqui vai ser igual a essa distância batendo em qualquer lugar da elipse indo em direção aos seus focos. ... Ah! Tem que saber jogar! (Informação verbal[17])

Em equipes, eles socializavam seus conhecimentos prévios.

Decorrido os dez minutos, as equipes receberam o guia de atividades número 1 (Apêndice F). Cinco minutos foram dados para lerem as instruções e se organizarem para o início das atividades.

Revezando as equipes, aproximadamente, jogaram por vinte e cinco minutos em cada tipo de tabuleiro (A, B ou C). Não foi fácil o controle desse tempo, pois enquanto não concluíam as suas considerações resistiam à mudança do tipo de tabuleiro. Informamos que seriam imprescindíveis os registros no guia de atividades, pois isso contribuiria para o diagnóstico da aprendizagem durante o processo. Nossa intenção era suscitar, de uma atividade lúdica, questionamentos que dariam suporte aos esperados conceitos sobre as secções cônicas.

Em suas equipes, eles se depararam com o desafio de retirar a bola do foco por tabela, de fazer anotações do que estaria ocorrendo no decorrer das jogadas, de formular hipóteses, de testar hipóteses e ainda de construir uma regra de jogo para cada tipo de tabuleiro (A, B ou C). Agitados, mas absortos em suas atividades, em cada equipe surgiu um líder que delegava entre eles as tarefas

---

[16] No Espaço Cultural do Estado da Paraíba tem um modelo de parábola construído de forma precisa.
[17] Comentários dos alunos, conforme gravação realizada durante a aula.

indicadas. Foi inevitável um pouco de algazarra a cada vez que, de uma certa maneira, jogavam e acertavam o alvo.

Foi entregue um guia de atividades para cada aluno dos quais seriam devolvidos apenas um por equipe. No decorrer das atividades percebemos que faziam anotações apenas dos resultados tidos como de sucesso, mas no guia de atividades havia espaço para registrar os acertos e os erros. Insistimos para que anotassem, com detalhes, todo o ocorrido. Quase conseguimos, mas alguns fugiram da escrita e codificaram o registro dos resultados obtidos, em parte uma boa prática. Mas como o conceito de aprendizagem[18] está ligado à mudança de comportamento, aguardamos na expectativa de que, nas conclusões, sentissem a falta por não terem feito cada anotação da forma solicitada.

A atividade para cada tabuleiro (A, B ou C) tem o mesmo enunciado: *Por tabela, retirar a bola fixa no ponto determinado*. Mesmo identificando a nossa voz sem moderação, relataremos aqui parte do que foi pronunciado pelos estudantes.

Registros foram feitos para cada tabuleiro, por cada uma das equipes, dentro dos seguintes critérios: estratégias possíveis, questões, jogadas e regras.

<u>Estratégias possíveis para o tabuleiro **A**</u>:

Equipe **X**: Esse foi o primeiro tabuleiro analisado pela equipe. Eles apenas registraram um desenho[19].

---

[18] **a.prendiza.gem** *sf* (*aprendiz+agem*).
1 Ação de aprender qualquer ofício, arte ou ciência. **2** O tempo gasto para aprender uma arte ou ofício. **3** *Psicol* Denominação geral dada a mudanças permanentes de comportamento como resultado de treino ou experiência anterior; processo pelo qual se adquirem essas mudanças. http://www2.uol.com.br/michaelis/ (13/9/2005)

[19] Nessa etapa da investigação, pesquisa central, faremos uma reprodução de cada desenho esboçado pelos alunos.

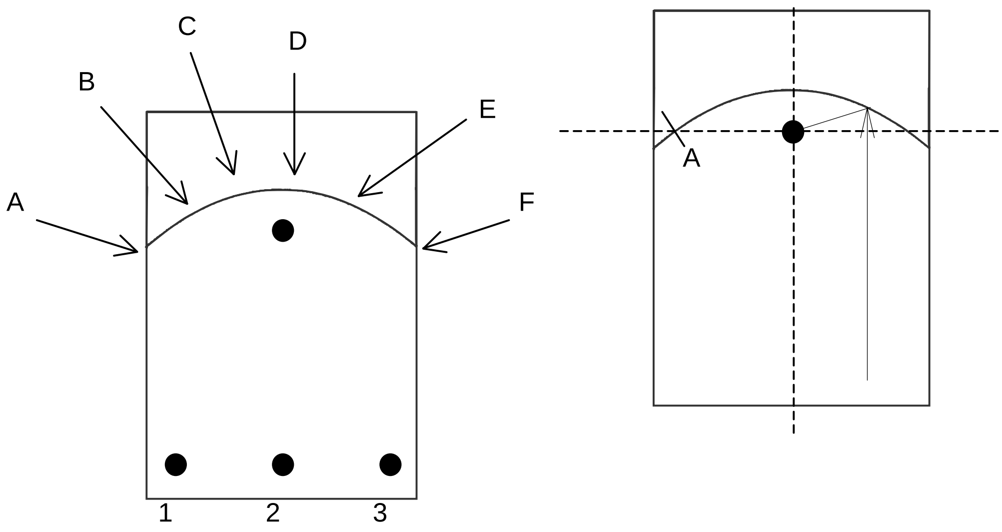


Figura 7: Possíveis estratégias da equipe X para o tabuleiro A

Equipe **Y**: Este foi o segundo tabuleiro analisado pela equipe e eles dizem: ”Colocando uma bola no foco e a outra com a distância duas vezes maior do que a distância do foco para o vértice, sempre que deslocada atingirá a bola que está no foco e vice-versa”*.*

Equipe **Z**: No terceiro tabuleiro analisado pela equipe eles dizem: “Bola ser lançada paralelamente ao eixo do foco (lateral maior da mesa)”.

<u>Questões referentes ao tabuleiro **A**:</u>

Equipe **X**: “Por que ao bater a bola faz um ângulo de 90º na sua trajetória?”

Equipe **Y**: “Por o tabuleiro não ter sido feito com material adequado, interfere um pouco no resultado”.

Equipe **Z**: Não apresentou questões referentes ao tabuleiro A.

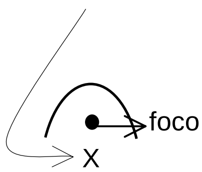
Enquanto realizavam as jogadas no tabuleiro **A**, preencheram um quadro da seguinte forma (nem todas as jogadas foram registradas):

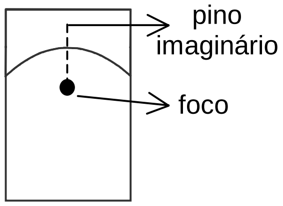
Quem jogou?	Trajetória da bola	Resultado	Justificativa do resultado (tentativa ou já testando as tentativas acertadas)
1 Berlândio	*3-B*	(X) A ( ) E	–
2 Gerlane	*2-B*	(X) A ( ) E	*Ela sente dificuldade pois a bola é grande.*
3 Berlândio	*1-B*	(X) A ( ) E	–
4 Gerlane	*2-C*	( ) A (X) E	*Do meio do tabuleiro é mais difícil de acertar.*
5 Maiara	*2- F*	( ) A (X) E	*Ao bater a bola, ela percorre toda a parábola.*
6 Gerlane	*1-A*	( ) A (X) E	*Devido a borracha (espessura ser fina), a bola grande sai da trajetória.*
7 Maiara	*2-B*	(X) A ( ) E	–

Quadro 3: Registro das jogadas da Equipe X com o tabuleiro A

Quem jogou?	Trajetória da bola	Resultado	Justificativa do resultado (tentativa ou já testando as tentativas acertadas)
1 Delfino	*Bateu na parede da parábola acertando a bola que estava no foco.*	(X) A ( ) E	*Só acerta a bola que está no foco se formar um ângulo de 90º com um ponto da parábola.*
2 Alzira	*Jogando a bola paralela ao eixo das coordenadas sempre atinge o foco.*	(X) A ( ) E	–
3 Alzira	*Jogando sobre o eixo das coordenadas sempre acertará o foco.*	(X) A ( ) E	–

Quadro 4: Registro das jogadas da Equipe Y com o tabuleiro A

Quem jogou?	Trajetória da bola	Resultado	Justificativa do resultado (tentativa ou já testando as tentativas acertadas)
1 Everaldo	*A bola parte em direção paralela a lateral maior da mesa e é rebatida em direção, aparentemente, perpendicular à inicial.*	(X) A ( ) E	–
2 Renan	*A bola parte em direção ao centro da curvatura.* 	( ) A (X) E	–
3 Rean	*A bola parte em direção à um "pino imaginário"*	( ) A ( ) E	–

Quadro 5: Registro das jogadas da Equipe Z com o tabuleiro A

Até o momento dessas atividades tivemos o cuidado de não mencionar nenhum elemento ou nome das curvas, mas percebemos, com a linguagem matemática utilizada pelos alunos, que eles já detinham alguns conhecimentos prévios sobre as secções cônicas. A equipe Z menciona um pino imaginário para a curva do tabuleiro cônico A (parábola) porque o tabuleiro cônico C (hipérbole) foi o primeiro investigado por essa equipe e nesse encontrávamos um pino num dos focos.

Os registros da regra de jogo determinada para cada tabuleiro, foram feitos no guia de atividades e só depois, na aula seguinte, numa folha de papel (tamanho ofício duplo) para expor a todos no momento da discussão por todo o grupo. As regras que aqui apresentamos foram escritas nas folhas com letras bem visíveis.

<u>Os registros da regra de jogo para o tabuleiro **A**:</u>

Equipe **X**: “Para acertar o ponto A, deveremos jogar no ponto B ou C, partindo de qualquer ponto paralelo a esses dois últimos”.

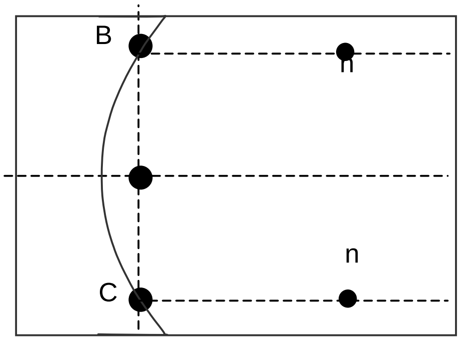


Figura 8: Regras de jogo da equipe X para o tabuleiro A

Equipe **Y**: “Colocando uma bola no foco e a outra com a distância duas vezes maior do que a distância do foco para o vértice, sempre que deslocada atingirá a bola que está no foco e vicie-versa”.

“Jogando a bola paralela ao eixo das coordenadas passará sempre pelo foco”.

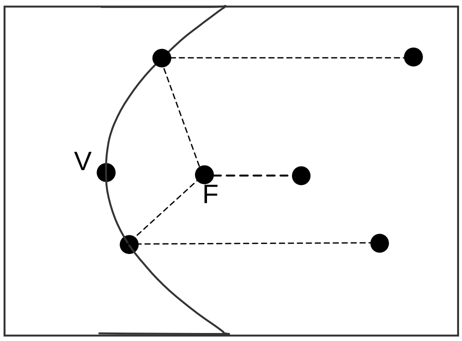


Figura 9: Regras de jogo da equipe Y para o tabuleiro A

Equipe **Z**: “A bola deverá partir em direção ao “pino imaginário” para que seja rebatida sobre a outra bola”.

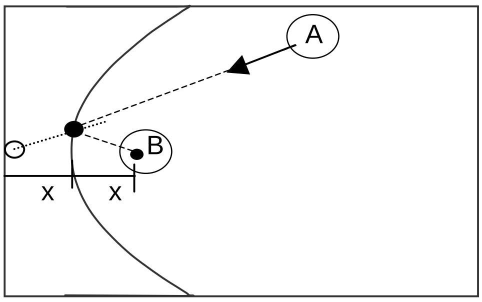


Figura 10: Regras de jogo da equipe Z para o tabuleiro A (1)

“Também é possível arremessá-la em direção paralela à lateral maior”.

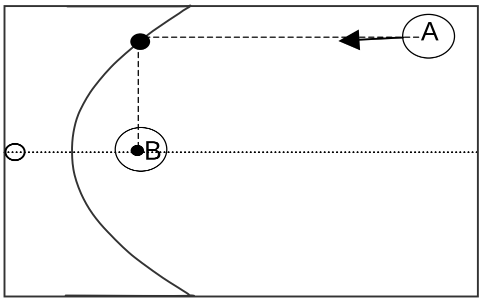


Figura 11: Regras de jogo da equipe Z para o tabuleiro A (1)

Ao final, cada uma dessas anotações foi discutida junto com todas as equipes para depois se chegar ao consenso de uma regra válida para todo o grupo.

Estratégias possíveis para o tabuleiro **B**:

Equipe **X**: Esse foi o terceiro tabuleiro analisado pela equipe. Eles apenas registraram o desenho a seguir.

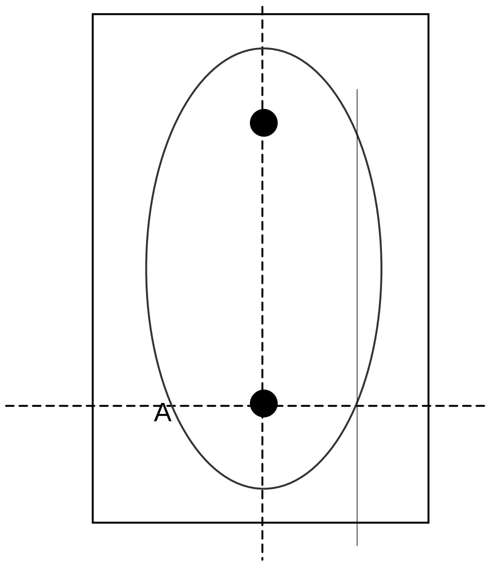


Figura 12: Possíveis estratégias da equipe X para o tabuleiro B

Equipe **Y**: Esse foi o primeiro tabuleiro analisado pela equipe e eles dizem: “Colocando-se uma bola em um dos focos da elipse e deslocando em qualquer direção atinge o outro foco”.

“Com o lançamento de uma bola em qualquer lugar da elipse, estando apenas uma bola no foco não atingirá a bola que está no foco” (Alzira não concorda com essa definição).

Equipe **Z**: Esse foi o segundo tabuleiro analisado pela equipe e eles dizem: “Posicionar ambas as bolas nos focos e lançar uma delas em uma direção qualquer”.

“Lançar uma das bolas em uma trajetória que passe pelo foco”.

<u>Questões referentes ao tabuleiro **B**:</u>

Equipe **X**: “A e B são pontos prováveis ao acerto, pois estão paralelas ao foco da elipse”.

PS: “Gerlane reclama de imperfeições na elipse, o que compromete a comprovação da sua teoria”.

Equipe **Y**: (reclamação) “A parede da elipse deveria ser áspera e as bolas de borracha para contribuir com o destino da bola”.

Equipe **Z**: (sugestão) “Um melhor polimento da superfície de trajetória, produziria melhores resultados”.

Enquanto realizavam as jogadas no tabuleiro **B**, preencheram um quadro da seguinte forma (nem todas as jogadas foram registradas):

Quem jogou?	**Trajetória da bola**	**Resultado**	**Justificativa do resultado (tentativa ou já testando as tentativas acertadas)**
1 Maiara	*Jogando de um ponto paralelo ao ponto B.*	(X) A ( ) E	*Bate no ponto B e vai para o foco.*
2 Berlândio	*Jogando do eixo do foco.*	(X) A ( ) E	*Na maioria das vezes o acerto acontece..*
4 Gerlane	*Qualquer ponto da elipse.*	( ) A ( ) E	*Quando a bola passa pelo foco ela bate no outro foco.*

Quadro 6: Registro das jogadas da Equipe X com o tabuleiro B

A equipe Y não fez registro das jogadas no tabuleiro B

Quem jogou?	**Trajetória da bola**	**Resultado**	**Justificativa do resultado (tentativa ou já testando as tentativas acertadas)**
1 Antônio	*Com as bolas nos focos, uma delas é arremessada em direção qualquer.*	(X) A ( ) E	–
2 Renan	*Lança-se a bola em uma direção qualquer. Dessa vez a bola lançada estava fora do foco.*	( ) A (X) E	–
3 Everaldo	*O foco, a bola a ser arremessada e o taco estão na mesma reta. A bola, ao ser lançada passa pelo foco.*	(X) A ( ) E	–

Quadro 7: Registro das jogadas da Equipe Z com o tabuleiro B

É perceptível a dificuldade que os alunos têm de se expressarem pela escrita.

<u>Os registros da regra de jogo para o tabuleiro **B**</u>:

Equipe **X**: “Jogando de um dos focos (ou de qualquer lugar que passe por ele), a bola passará pelo outro foco”.

Equipe **Y**: “Colocando uma bola em um doa focos da elipse e deslocando em qualquer direção atinge o outro foco.

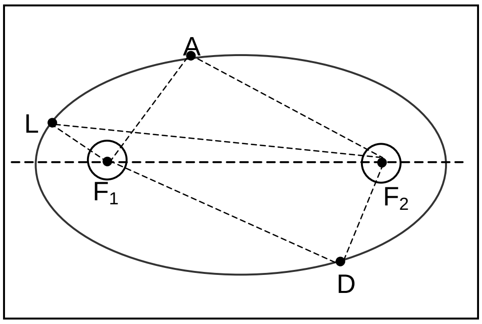


Figura 13: Regras de jogo da equipe Y para o tabuleiro B

Equipe **Z**: “Se ambas as bolas estiverem posicionadas nos focos, independente da direção que uma das bolas seja lançada, ela incidirá sobre o outro foco”.

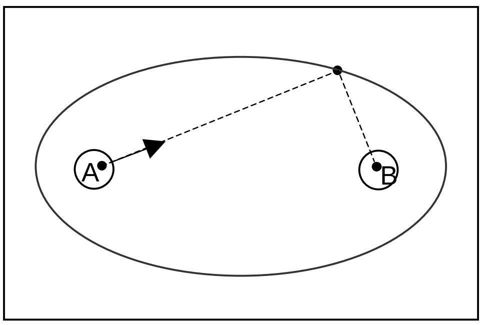


Figura 14: Regras de jogo da equipe Z para o tabuleiro B (1)

“Caso a bola que será arremessada, esteja posicionada fora foco, devemos lançá-la em uma trajetória que passe pelo foco que contém a bola a ser atingida”.

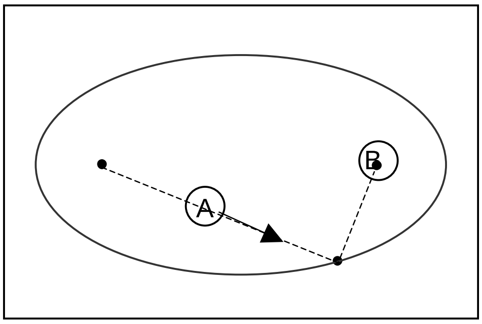


Figura 15: Regras de jogo da equipe Z para o tabuleiro B (2)

Criticamente, cada uma das equipes atribuiu falhas aos modelos didáticos utilizados. Falhas relativas ao material empregado na construção do modelo (bolas não totalmente esféricas, borracha inadequada, tabelas pouco espessa) e/ou falhas relativas à própria construção do modelo (principalmente referente ao corte da borracha).

<u>Estratégias possíveis para o tabuleiro **C**</u>:

Equipe **X**: Esse foi o segundo tabuleiro analisado pela equipe e, como nos outros tabuleiros, o grupo também esboça um desenho:

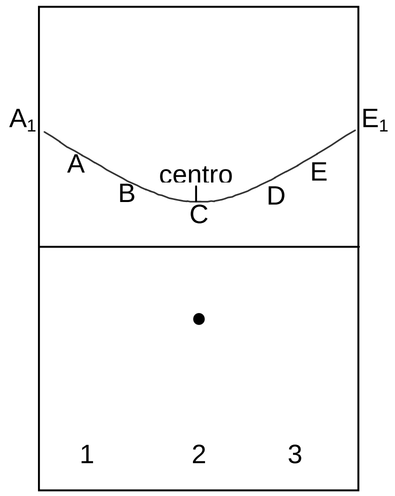


Figura 16: Possíveis estratégias da equipe X para o tabuleiro C

Equipe **Y**: Esse foi o terceiro tabuleiro analisado pela equipe e eles dizem: “A bola só vai atingir o foco quando lançada sobre a mesma reta formada entre o foco e o eixo”.

Equipe **Z**: Esse foi o primeiro tabuleiro analisado pela equipe e eles dizem: “Se a bola parte de um ponto no mesmo eixo da bola fixa, em direção ao centro da curva, ela é rebatida sobre sua trajetória inicial”.

“Arremessar a bola, partindo de um ponto qualquer, em direção ao centro da curva”.

“Arremessando a bola, fazendo com que seja descrita uma trajetória perpendicular à reta que passa pelo foco e pelo meio da curva”.

<u>Questões referentes ao tabuleiro **C**:</u>

Equipe **X**: “Por que o foco tem quer ser o ponto determinado?”

“Por que no intervalo de A_1-A, e E_1-E, a bola bate na hipérbole e forma um ângulo de 90?”

“Por que a bola ao bater no centro, não bate no foco?”

Equipe **Y**: “As mesmas dos outros tabuleiros”.

Equipe **Z**: “O fato de o material ser emborrachado (elástico), não irá influir na trajetória das bolas lançadas?”

Enquanto realizavam as jogadas no tabuleiro **C**, preencheram um quadro da seguinte forma (nem todas as jogadas foram registradas):

Quem jogou?	**Trajetória da bola**	**Resultado**	**Justificativa do resultado (tentativa ou já testando as tentativas acertadas)**
1 Berlândio	*1-A*	( ) A (X) E	*Pois bate no pino, saindo da borracha.*
2 Gerlane	*3-(C,D)*	(X) A ( ) E	*Pois a bola bate e acerta o foco.*
3 Gerlane	*3-C*	( ) A (X) E	*Ao bater no centro a bola passa longe do foco.*
4 Maiara	*Jogando no eixo do pino (no centro)*	( ) A (X) E	*É praticamente impossível jogar, ao menos que joguemos antes do foco, paralelamente ao pino.*

Quadro 8: Registro das jogadas da Equipe X com o tabuleiro C

Quem jogou?	**Trajetória da bola**	**Resultado**	**Justificativa do resultado (tentativa ou já testando as tentativas acertadas)**
1 Delfino	*Jogando a bola antes do foco atingirá a hipérbole não acertará o foco.*	( ) A (X) E	–
2 Laio	*Arremessando a bola de qualquer lugar em direção ao pino acertará o foco.*	(X) A ( ) E	–

Quadro 9: Registro das jogadas da Equipe Y com o tabuleiro C

Quem jogou?	**Trajetória da bola**	**Resultado**	**Justificativa do resultado (tentativa ou já testando as tentativas acertadas)**
1 Everaldo	*Aparentemente voltou pela mesma trajetória.*	( ) A (X) E	–
2 Everaldo	*Saiu de uma posição à esquerda da bola fixa, atingiu o material a alguns centímetros do centro e atingiu a bola.*	(X) A ( ) E	–

3 Renan	*A bola partiu de uma posição à frente da bola fixa. Atinge o material exatamente no centro e volta pela mesma trajetória, atingindo a bola fixa*	(X) A ( ) E	–
4 Renan	*Se a bola partir de uma posição em que a trajetória seja perpendicular a reta que passa na bola e no pino.*	( ) A (X) E	–
5 Antônio	*A bola partiu de um ponto que pertencia a mesma reta que liga o pino e a bola que foi arremessada.*	(X) A ( ) E	–

Quadro 10: Registro das jogadas da Equipe Z com o tabuleiro C

Em cada etapa dessa atividade, estivemos apenas observando, atuando no controle do tempo e aguardando o momento de nossa mediação. Solicitaram nossa ajuda, mas percebendo que não a teriam, concluíram entre seus pares.

<u>Os registros da regra de jogo para o tabuleiro **C**:</u>

Equipe **X**: “Conseguiremos acertar o ponto A se jogarmos de uma posição de onde seja possível traçar uma reta que passe pelo ponto P”.

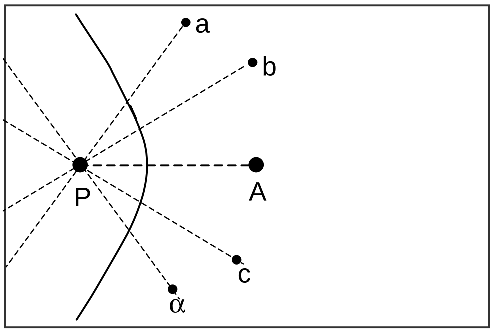


Figura 17: Regras de jogo da equipe X para o tabuleiro C

Equipe **Y**: “Jogando a bola em direção ao foco atingirá a parede da hipérbole a bola passará pelo foco”.

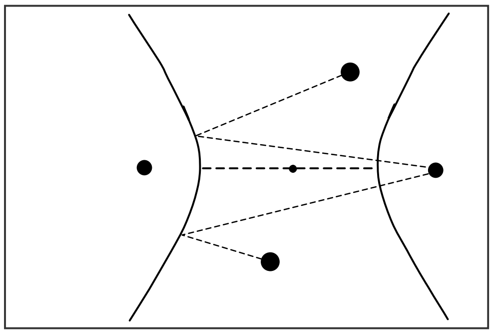


Figura 18: Regras de jogo da equipe Y para o tabuleiro C

Equipe **Z**: “A bola deve ser lançada numa trajetória que coincida com a reta que passa pela bola e pelo pino, ou seja, em direção ao pino”.

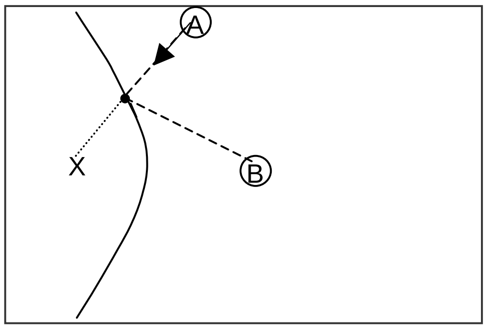


Figura 19: Regras de jogo da equipe Z para o tabuleiro C

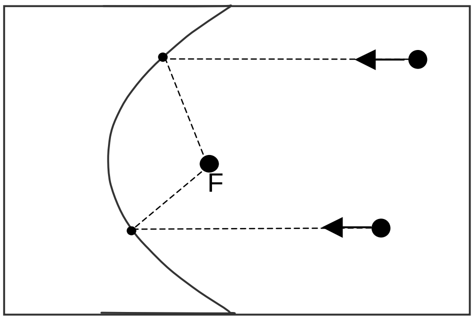
Só na aula seguinte pudemos concluir a atividades dos tabuleiros cônicos. Cada equipe escreveu sua regra em papel tamanho duplo ofício e essas anotações foram expostas. Assim, todos tiveram a oportunidade de conhecer a produção dos seus companheiros. Visualizando tais anotações eles defenderam as suas idéias, exigiram a explicação de algumas idéias de outras equipes e concordaram com outras idéias. Ficamos apenas a observar, pois chegaria o momento no qual poderíamos intervir conduzindo-os, no que fosse necessário, a uma mudança conceitual.

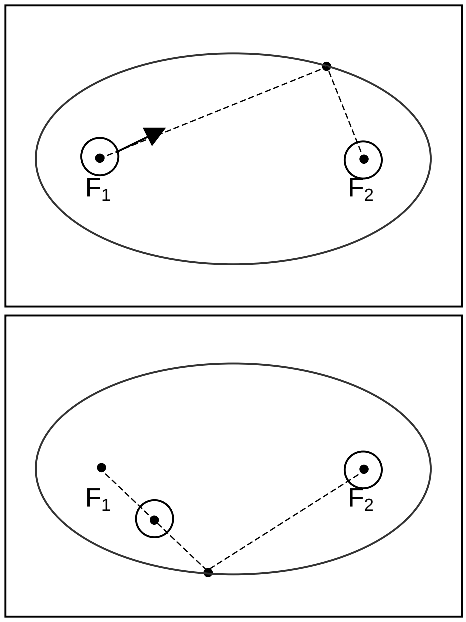
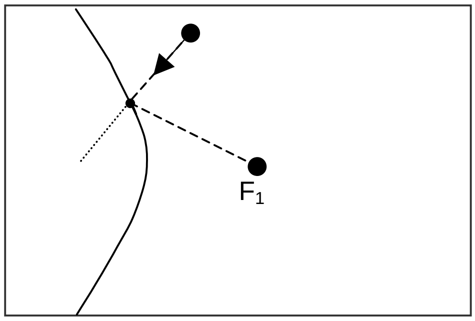
Foto 16: Exposição e discussão das regras construídas

Na discussão fizeram uma análise das regras de jogo construídas por cada equipe, viram as semelhanças de termos de equipe para equipe e, em consenso, eles determinaram qual seria a regra válida para cada tipo de tabuleiro.

Por sugestão do Everaldo, no que todos concordaram, voltaram a cada um dos tabuleiros cônicos e verificaram se as regras estabelecidas pelo grupo eram realmente válidas. Essas regras, de comum acordo por todas as equipes, ficaram expostas durante toda a investigação e a elas eles recorriam sempre que necessário.

Procuramos reproduzir o feito dos alunos no quadro a seguir

TABULEIRO A (parábola) Jogando a bola paralelamente à lateral maior do tabuleiro, ela passará pelo foco.	

TABULEIRO B (elipse) Se ambas as bolas estiverem posicionada nos focos, independentemente da direção em que uma das bolas seja lançada, ela incidirá sobre o outro foco. Caso a bola que será arremessada, esteja posicionada fora do foco, devemos lançá-la em uma trajetória que passe pelo foco oposto ao foco que contém a bola a ser atingida.	
TABULEIRO C (hipérbole) A bola deve ser lançada numa trajetória que coincida com a reta que passa pela bola e pelo pino, ou seja, em direção ao pino.	

Quadro 11: Regra geral estabelecida pelas equipes

O controle do tempo para essas atividades foge do nosso domínio e o cronograma previsto para o cumprimento de cada tarefa, sempre é extrapolado. Dois dias foram necessários para a conclusão dessa primeira atividade.

Na atividade seguinte cada aluno em sua equipe recebeu o guia número 2 (Apêndice G) que foi embasadas nos escritos de Brito (2003).

Seguindo as instruções desse guia de atividades, como no estudo-piloto, os alunos teriam a incumbência de discutir entre si a melhor maneira de esboçar o lugar geométrico solicitado, de registrar as questões e hipóteses que fossem surgindo nessa discussão e de traçar lugares geométricos cônicos num papel quadriculado. Revendo os caminhos usados nesse traçado, deveriam também nomear e idear uma definição para cada um desses lugares. Esperamos até que, sem orientação nesse sentido, eles sentissem a necessidade de usar a régua e o compasso solicitados na aula anterior.

Foto 17: Lugares geométricos em papel quadriculado

As primeiras instruções foram para esboçar o lugar geométrico que representa uma elipse.

Apenas a equipe **X** registrou no guia de atividades a estratégia para traçar esse primeiro lugar geométrico: “Para encontrar cada ponto $\Rightarrow$ Utilizando o compasso para medir a distância desejada, para que a soma seja constante. Ao encontrar um ponto, usando a simetria encontramos mais quatro pontos”.

Mesmo que os alunos já estivessem cientes (pela atividade número 1) de quais seriam as curvas que estariam investigando, à medida que os pontos iam surgindo com os traçados, não divisavam a cônica de imediato. Por vezes esse lugar geométrico foi traçado numa ondulação muito distante da curva desejada. Alguns chegaram a surpreender-se com o surgimento da elipse, da parábola ou da hipérbole.

Foto 18: Lugares geométricos em papel quadriculado (2)

Escrita em papel tamanho ofício duplo, as definições construídas pelas equipes para elipse, parábola e hipérbole foram as seguintes:

Equipe **X** (elipse): “Elipse é um lugar geométrico cujos pontos estão dispostos levando-se em consideração a soma das distâncias desses pontos aos dois focos (ela deve ser igual)”.

Equipe **X** (parábola): “Lugar geométrico dos pontos que estão dispostos com a mesma medida tanto em relação ao foco como em relação a uma reta (que não passa pelo ponto)”.

Equipe **X** (hipérbole): “Lugar geométrico em que a diferença das distâncias em módulo, de um ponto aos focos, permanece constante”.

Equipe **Y** (elipse): “A distância entre um foco e a parede as elipse mais a distância entre o mesmo ponto da parede da elipse ao outro foco vai ser igual a distância entre extremidade maior da elipse”.

Equipe **Y** (parábola): “A distância do foco para a parede[20] da parábola é igual a distância da parede da parábola para a reta”.

Equipe **Y** (hipérbole): “É uma figura geométrica cuja diferença entre as distâncias de um ponto da curva aos focos é sempre igual a diferença das distâncias de qualquer outro ponto da curva aos focos”.

Equipe **Z** (elipse): “Elipse é o segmento traçado unido-se todos os pontos formados na intersecção de duas retas, que partem cada uma, de pontos diferentes, e cujas somas das distâncias entre o ponto de intersecção e o de origem, dos dois segmentos de retas são iguais”.

Equipe **Z** (parábola): “É lugar geométrico estabelecido pela união dos pontos compreendidos a uma mesma distância de uma reta inicial e um ponto predeterminado”.

[20] Esta nomenclatura foi usada devido ao jogo nos tabuleiros cônicos cujas tabelas também receberam o nome de paredes.

Equipe **Z** (hipérbole): “Hipérbole é o espaço geométrico constituído por pontos, tais que a diferença entre as medidas dos segmentos delimitados por esses pontos e outros pontos distintos seja sempre constante”.

Depois de analisada por todo grupo a definição construída por cada equipe, alterações foram feitas até chegarmos às definições desejadas. Tivemos a oportunidade de comparar com definições dispostas em livros didáticos.

Como no estudo-piloto, traçamos as cônicas no quadro perfurado e novamente nos foi oportuno evidenciarmos cada elemento de cada curva bem como a excentricidade da elipse.

O método do jardineiro já é bem conhecido pelos alunos pois logo se apressam em traça-lo.

Foto 19: Lugares geométricos no quadro perfurado

Através de exercícios os alunos deduziram a fórmula canônica (centrada no ponto (0, 0) e com seus eixos paralelos os eixos ortogonais) de cada curva, depois generalizaram para curvas não centradas no ponto (0, 0).

Foto 20: Juntos deduzindo fórmulas

A equação desenvolvida por Descartes para curvas de segundo grau foi verificada e alguns exercícios de fixação foram feitos em sala de aula.

Com uma câmera digital os alunos investigadores saíram pelo CEFET/PB registrando o que estivesse relacionado com as cônicas. Eis algumas das fotos feitas.

Foto 21: Alunos fotografando cônicas

Mesmo que esses alunos não estivessem presos à necessidade de notas, foi indispensável uma avaliação escrita. E esta foi feita em duas etapas (Apêndices H e I). Os resultados das mesmas foram satisfatórios. Dos nove alunos investigadores, apenas um não acompanhou o desenvolvimento desejado e esse esteve presente e atuante em todas as aulas. Surpreendente foi quando os alunos resolverem os exercícios propostos na segunda avaliação, na qual as cônicas se apresentavam com seus eixos não paralelos aos eixos coordenados. Um dos alunos obteve 100% de acerto.

Foto 21: Avaliação escrita em dois momentos

Depois de aplicarmos essa metodologia para o ensino e para a aprendizagem das secções cônicas – a elipse, a hipérbole e a parábola – com significado, investigando um conteúdo próprio para alunos da terceira série do ensino médio, evidenciaremos os resultados que foram obtidos durante todo o processo.

O pressuposto de que aluno da 3ª série do ensino médio já dispõe de uma boa porção de elementos no seu estoque de conhecimento nos favoreceu a idealização de atividades que provocassem o uso desses conhecimentos prévios. Tais atividades objetivaram determinar o que o aluno sabe a respeito do conteúdo a ser estudado.

O que foi expresso inicialmente pelos alunos, deixou claro que eles fazem a distinção entre *exercício* e *problema*. A utilidade de tal conhecimento está ligada às atividades de investigação desenvolvidas durante todo o processo.

Dentre os nove alunos investigadores, um e/ou outro, já tinham um pouco de conhecimento de termos matemáticos referente às cônicas, de uma ou de outra propriedade cônica e de suas equações canônicas.

Estes conhecimentos se tornaram evidentes quando o Delfino e o Everaldo pensaram que o modelo do ramo de uma hipérbole no tabuleiro cônico fosse uma parábola, quando Alzira lembrou do modelo de parábola exposto no Espaço Cultural em João Pessoa – PB, quando o grupo construiu regras do jogo usando a palavra *foco* se no guia de atividades usava-se apenas a palavra *ponto.*

Foram cuidadosos no uso do vocabulário. Paralelo, posicionar, direção, incidir, arremessar, trajetória, focos, coincidir, foram palavras utilizadas adequadamente no contexto considerado.

A atividade investigativa desenvolvida com os tabuleiros cônicos levou o aprendiz a despertar a curiosidade e a instaurar conflitos cognitivos que potencializaram a busca de conhecimentos. Instigou o estudante a desenvolver suas habilidades investigatórias, seu espírito colaborativo e também a habilidade para levantar hipóteses e buscar conclusões.

É admirável a forma como eles se desdobram no sentido de socializar o conhecimento que já começam a tomar posse. Entre eles desenvolve-se uma autonomia e uma confiança tal que chegam a preterir a intervenção do professor em prol das explicações dada por seus pares.

Foi nos tabuleiros cônicos que começaram a perceber as características de cada curva em particular. Nesse momento limitamo-nos apenas a observar que eles chegavam a conclusões repetindo as jogadas mais prováveis. Quando as discussões foram levadas ao grupo maior, eles argumentaram as suas conclusões e foram coerentes quanto à composição de cada regra para toda a turma. Numa folha de papel ofício duplo, usaram desenhos para melhor expressar essas regras. Podemos considerar que as regras foram bem construídas.

Quanto ao tempo, o qual deveria ser duas horas por aula, sempre ultrapassávamos. Mas, a ânsia de conhecer os resultados fazia-os permanecer um pouco mais na sala de aula.

18. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como já mencionamos ao longo deste estudo, a investigação em sala de aula se constituiu na alternativa que escolhemos para investigar a possibilidade de criação de um ambiente de aprendizagem significativa a ser estabelecido para o ensino-aprendizagem das cônicas, tendo em vista apostar nas suas vantagens didáticas.

Nesse sentido, nosso estudo apontou a necessidade de buscar respostas à algumas questões do tipo: o que caracteriza uma investigação em sala de aula e de que modo essa prática pode conduzir o estudante a uma aprendizagem significativa? É possível implementar tal experiência com a investigação em sala de aula no ensino médio? De que modo o desenvolvimento histórico-epistemológico das secções cônicas pode se inserir nesse processo de investigação em sala de aula e trazer benefícios ao ensino desse tópico matemático? Que fatos históricos podem ser retomados para o desenvolvimento de atividades de caráter investigativo no ensino e na aprendizagem desse conteúdo? Como explorar os conceitos e regras das secções cônicas, de forma significativa para o ensino médio, numa atividade de investigação em sala de aula?

Para responder as questões norteadoras da pesquisa, que geraram os objetivos propostos nos apoiamos na perspectiva de uso da investigação em sala de aula como estratégia de construção do conhecimento e, simultaneamente, como método de pesquisa para avaliação do processo de implementação dessa alternativa de ensino-aprendizagem. Apoiamo-nos para tanto na investigação histórica, defendida por Mendes (2006b), como um elemento que aliado à investigação em sala de aula poderia dar uma forte conotação epistemológica ao conhecimento construído pelos alunos durante a investigação. Nesse sentido investigamos a história das cônicas e produzimos um texto didático sobre seu desenvolvimento histórico, o que se constituiu em um dos eixos norteadores do nosso trabalho docente durante a pesquisa em sala de aula.

Para alcançarmos tal objetivo relacionamos as concepções acerca da aprendizagem significativa às características propostas por Ponte et al (2003) para o uso da investigação em sala de aula. Aliando a essas idéias, conectamos os aspectos históricos relacionados ao desenvolvimento das secções cônicas de modo a produzir uma aprendizagem com significado na sala de aula. Tais relações foram alcançadas à medida que elaboramos e testamos alguns instrumentos próprios para uma investigação em sala de aula sobre as secções cônicas que despertaram a curiosidade e o interesse dos estudantes e que certamente poderão ser utilizados posteriormente por professores de toda a rede de ensino médio.

Após realizar um estudo histórico-epistemológico sobre o tema, vivenciamos algumas experiências docentes com a investigação em sala de aula, apoiadas pela história da matemática. Acreditamos que as respostas a tais questões foram sendo obtidas na medida em que a pesquisa bibliográfica, a produção de atividades e o trabalho docente com os estudantes foi desenvolvido e reorganizado após cada experiência e a cada momento em que a parceria com os alunos foi se ampliando e enriquecendo a aprendizagem de todos os envolvidos no processo.

Com base nesses momentos de ensino-aprendizagem coletivos, foi possível admitirmos que nossos objetivos foram alcançados e que, portanto, apontava-se uma grande possibilidade de uso da investigação em sala de aula como uma metodologia de ensino-aprendizagem com significado para as secções cônicas, apoiando-se no seu desenvolvimento histórico-epistemológico tal como propõem Mendes et al (2006) quando argumentam favoravelmente acerca da história da matemática como agente de cognição na Educação Matemática.

É importante ressaltarmos que a ênfase principal da experiência não foi o desenvolvimento histórico em si, mas o processo investigatório instalado em sala de aula, como um caminho de busca que tornou significativo o aprendizado dos estudante, durante a construção coletiva do seu conhecimento. Todavia, salientamos que a dimensão histórica envolvida no processo de investigação em sala de aula exerceu uma função de complementaridade, garantindo ampliação ao processo de aprendizagem do assunto abordado.

A partir do referencial teórico adotado para este estudo, a investigação em sala de aula foi considerada por nós, sem dúvida, como uma tendência metodológica propícia a obtenção de resultados satisfatórios no ensino-aprendizagem da matemática, podendo ser admitida como um princípio básico para a construção do conhecimento matemático em todos os níveis de ensino, principalmente nos níveis médio e superior.

Após refletir sobre todos os resultados obtidos na experiência e suas implicações para futuras experiências, podemos apontar como sugestões para implementação dessa perspectiva didática para a sala de aula as seguintes recomendações aos professores:

a) quanto aos níveis de ensino

É importante que os professores reflitam acerca dos níveis de desenvolvimento cognitivo de seus alunos para que possam dosar e reorientar o processo de investigação a ser introduzido nas suas ações docentes. Isso porque acreditamos que os alunos devem ser envolvidos nesse processo através de uma inclusão lenta e gradual para que possam adaptar-se ao princípio científico e educativo presente nessa forma de ensinar e aprender.

Mesmo que os alunos estejam em níveis considerados mais avançados como o ensino médio ou superior, é necessários que os professores avaliem o nível de habilidade, disciplina, compromisso e adequação a essa alternativa de aprendizagem que se pretende instalar na sala de aula, pois, muitas vezes os estudantes que aparentam termais maturidade devido a sua idade, acabam por manifestar mais dificuldade ou resistência com relação ao exercício da investigação em sala de aula.

b) quanto ao conhecimento histórico do professor

Em nossa experiência verificamos que para esse processo didático de investigação em sala de aula se efetivar de forma significativa, é necessário um bom conhecimento histórico sobre o tema a ser abordado. Assim, cabe ao professor, desenvolver uma análise histórico-epistemológica (investigação temática) do tópico a ser abordado na sala de aula, pois assim ampliará seu conhecimento acerca do referido assunto, bem como suas diversas conexões com os conteúdos da matemática em geral. (MENDES, 2007).

Para que o professor amplie seu conhecimento acerca do desenvolvimento histórico-epistemológico dos tópicos a serem abordados na sala de aula, será necessário que o mesmo se disponha a aventurar-se na investigação bibliográfica e na elaboração didática de textos que possam constituir-se em agentes de aprendizagem dos alunos, quando usados na sala de aula.

Em nosso estudo, muitas vezes, foi necessários adotarmos esse comportamento para que pudéssemos dar aos alunos, as informações necessárias a sua compreensão matemática das cônicas.

c) quanto aos tipos de atividades investigatórias a serem realizadas

É fundamental que os professores compreendam que há diversos modos de encaminhar a investigação em sala de aula e isso depende de inúmeros fatores como alguns já mencionados ao longo deste trabalho. Todavia, o mais importante, neste momento, é esclarecermos que para cada nível de alunos, para cada tópico matemático a ser abordado e de acordo com os objetivos estabelecidos no planejamento do professor, deve-se elaborar e propor determinadas atividades investigatórias.

Nesse sentido vale ressaltar que as indicações presentes nos PCNs, nos livros didáticos ou paradidáticos podem e devem ser usadas em sala de aula, mas procurando adaptá-las ao espírito investigatório que se pretende instituir no aluno. É com esse princípio que as atividades vão se constituindo, cada uma, em sua singularidade, pois assim, poderão, certamente atender aos interesses e necessidades dos alunos.

d) quanto aos obstáculos encontrados durante a implementação dessa alternativa metodológica de ensino

Os obstáculos encontrados em qualquer reorientação didática, no trabalho do professor, pressupõem a superação de obstáculos e dificuldades que, certamente surgem. Em nosso caso não foi diferente. Os obstáculos foram muitos. O que fizermos para superá-los foi apostar no espírito inovador dos alunos e na sua curiosidade. Além disso, nos apoiamos no argumento de Mendes (2001a, p. 69-70) quando afirma que

> Dependendo da experiência do professor, da sua formação pedagógica e do seu domínio teórico da proposta que estamos implementando, é possível a ele adaptar os próprios exercícios dos livros didáticos, resgatar situações-problema da realidade dos alunos, utilizar os desafios previstos nos livros de história da matemática, aproveitar as sugestões encontradas em alguns paradidáticos, pois assim poderá conduzir suas atividades de fixação do conteúdo programático, sem se afastar do eixo norteador desse trabalho, que é representado pelas atividades de redescoberta e pelo conteúdo histórico, [Além disso], caso o professor não tenha condições de recorrer a essas alternativas, ele poderá utilizar os exercícios e problemas do livro didático desde que imprima a eles uma nova abordagem na resolução dos exercícios ou problemas, procurando valorizar os erros dos alunos, as diferentes maneiras de resolvê-los, de forma que estimule a discussão em classe e a organização mental das idéias surgidas durante essas discussões. Caso contrário, não estará modificando em nada a sua prática.

É claro que outros obstáculos surgirão, mas caberá a cada um buscar a melhor alternativa para superá-los, pois o exercício da investigação em sala de aula baseia-se no princípio de que o conhecimento é construído na busca de respostas para as questões que surgem na sala de aula. Logo, os professores devem exercitar esse princípio continuamente.

e) quanto às contribuições para uma visão ampliada da matemática pelos alunos e pelos professores

Não resta dúvida de que a investigação em sala de aula tem a característica de oferecer possibilidade, tanto aos professores como aos alunos, de se depararem com uma nova maneira de olhar para a matemática. Assim as atividades investigatórias conduzem todos os envolvidos nesse processo, a olhar de forma mais globalizante para as origens os métodos utilizados para desenvolver e as várias representações apresentadas pela matemática, o que, certamente conduz, principalmente os alunos, a uma aprendizagem significativa.

Referências

ABRANTES, P. (1999). *Investigações em geometria na sala de aula*. In: P. Abrantes; J. P. Ponte; H. Fonseca; L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153-167). Lisboa: Projecto MPT e APM. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/p_153-167.PDF>. Acesso em: 31 jul. 2005.

ABRANTES, P.; FERREIRA, C.; OLIVEIRA, H. (1996). Matemática para todos: Investigações na sala de aula. In: P. Abrantes, L. C. Leal, J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 165-172). Lisboa: Projecto MPT e APM. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/11Livro-Paulo.PDF>. Acesso em: 31 jul. 2005.

ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N.; LAURENTIEV et al. *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Madrid: Alianza Editorial S.A., 1994.

ASTOLFI, Jean-Pierre; DEVELAY, Michel. *A didáctica das ciências*. 3. ed. Tradução Magda S. S. Fonseca. Campinas: Papirus, 1994.

BALDINO, Roberto Ribeiro. *Balanço da assimilação solidária no 3º Grau*. In: Anais do II ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Natal: Editora Universitária da UFRN, 1993.

BERTONI, Nilza Eigenheer. *Reflexões sobre algumas linhas básicas para Licenciatura em Matemática*. In Anais do II ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Natal: Editora Universitária da UFRN, 1993.

BEZERRA, Manoel Jairo. *Matemática para o ensino médio: volume único*. São Paulo: Scipione, 2001.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). *Educação matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004.

BIEMBENGUT, Maria Salett. *Modelagem matemática no ensino*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BOLT, Brain. *Mais actividades matemáticas*. Tradução Luísa Carreira e Suzana Carreira. Lisboa: Gradiva, 1992.

BORBA, M. C (Orgs.). *Educação Matemática*: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 198-212.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática.* Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1994.

BRANDÃO, Zaia (Org.). *A crise dos paradigmas e a educação*. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2002. (Questões da Nossa Época, 35).

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. PCNEM, 3. Brasília: Ministério da Educação; Secretaria da Educação Média e Tecnológica, 1999.

BRITO, Arlete de Jesus. *Atividades para o ensino de cônicas a partir da história da matemática*. Natal: UFRN, 2003. Impresso.

BROLEZZI, Antônio Carlos. *Conexões: História da Matemática através de projetos de pesquisa*. Rio Claro: SBHMat, 2003.

CAMPANARIO, Juan Miguel. *La enseñanza de las ciencias en preguntas y respostas.* Madrid: Universidad de Alcalá de Henares, 2002. 1 CD-ROM.

CAMPOS, Maria Cristina da Cunha; NIGRO, Rogério Gonçalves. *Didática de ciências*: o ensino-aprendizagem como investigação. São Paulo: FTD, 1999.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. *Magistério de segundo grau*. In: Anais do II ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Natal: Editora Universitária da UFRN, 1993, p. 121 - 123.

CHIAVENATO, Idalberto. *Introdução à teoria geral da administração*. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983.

Colégio de Gaia: Grupo de Matemática. *The Geometer's Sketchpad*. Disponível em: <http://www.cl-gaia.rcts.pt/matematica/geometer%20parte%2011. htm>. Acesso em: 9 ago. 2005.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

DASSIE, Bruno Alves. *Euclides Roxo e o ensino de Matemática no Brasil*. 2001. Disponível em: <http://www.matematicahoje.com.br/telas/cultura/historia/educadores.asp?aux=C>. Acesso em: 11 abr. 2006.

DELIZOICOV, Demétrio; ANGOTTI, José André; PERNAMBUCO, Marta Maria. *Ensino de ciências*: fundamentos e métodos. São Paulo: Cortez, 2002. (Coleção: Docência em Formação)

DESCARTES, René. *Discurso do Método / Regras para a Direção do Espírito.* Tradução: Pietro Nassatti. São Paulo: Editora Marin Claret, 2005.

EVES, Howard. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*: geometria. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

FERREIRA, Eduardo Sebastiani. *Laboratório de História da Matemática*. Natal: SBHMat, 2001.

FERREIRA, Eduardo Sebastiani. O uso da história da Matemática: uma abordagem transdisciplinar. In: NOGUEIRA, Adriano (Org.). *Contribuições da interdisciplinaridade: para a ciência, para a educação, para o trabalho sindical*. Petrópolis: Vozes, 1994.

FOSSA, John A. *Ensaios sobre a Educação Matemática.* Belém: EDUEPA, 2001. (Série Educação, 2).

GEWANDSZNAJDER, Fernando. *O ensino de ciências e a aprendizagem por mudança conceitual*. Disponível em: <http://www.aticaeducacional.com.br/htdocs/secoes/atual_cie_list.aspx>. Acesso em: 1 set. 2005.

GIL-PÉREZ, Daniel; CARVALHO, Anna Maria Pessoa de. *Formação de professores de ciências*: tendências e inovações. 5. ed. Tradução Sandra Valenzuela. São Paulo: Cortez, 2001.

GONÇALVES, Carlos Henrique Barbosa. *Usos da História da Matemática no Ensino Fundamental de 5ª a 8ª séries*. Brasília: SBHMat, 2005.

HOFFMANN, Jussara Maria Lerch. *Avaliação: mito e desafio* – uma perspectiva construtivista. 34. ed. Porto Alegre: Mediação, 2004.

KAMII, Constance. *Aritmética: novas perspectivas*: Implicações da teoria de Piaget. 3. ed. Tradução Marcelo Cestari T. Lellis, Marta Rabioglio e Jorge José de Oliveira. Campinas, SP: Papirus, 1994.

KAMII, Constance; DECLARK, Georgia. *Reinventando a aritmética: Implicações da teoria de Piaget.* 9. ed. Tradução Elenisa Curt, Marina Célia M. Dias e Maria do Carmo D. Mendonça. Campinas, SP: Papirus, 1994.

KLINE, Morris. *El pensamiento matemático de la Antigüidade a nuestros días.* Madrid: Alianza Editorial S.A., 1992.

LINTZ, Rubens G. *História da Matemática*. Blumenau: Editora da FURB, 1999.

MACENA, Marta Maria Maurício; MENDES, Iran Abreu. *Notas históricas sobre as secções cônicas na investigação de sala de aula*. In: VI SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. Brasília: SBHMat, 2005.

MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. *A história como um agente de cognição na Educação Matemática*. Porto Alegre: Sulina, 2006.

MENDES, Iran Abreu. *A investigação como eixo da formação docente em Educação Matemática*. Natal: 2007. (no prelo).

MENDES, Iran Abreu. A investigação histórica como agente de cognição na sala de aula. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. *A história um como agente de cognição na Educação Matemática*. Porto Alegre: Sulina, 2006b.

MENDES, Iran Abreu. Atividades históricas para o Ensino da Trigonometria. In: BRITO, Arlete de Jesus (Org.). *História da matemática em atividades didáticas*. Natal: EDUFRN, 2005.

MENDES, Iran Abreu. *Ensino da Matemática por atividades: uma aliança entre o construtivismo e a história da matemática*. 283 p. Tese (Doutorado em Educação). Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2001b.

MENDES, Iran Abreu. História no ensino da Matemática: um enfoque transdisciplinar. In: CUNHA, Emmanuel Ribeiro; SÁ, Pedro Franco de (Orgs.). *Ensino e Formação Docente*: propostas, reflexões e práticas. Belém: [s.n.], 2002.

MENDES, Iran Abreu. *Matemática e Investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. Natal: Flecha do Tempo, 2006a.

MENDES, Iran Abreu. *O uso da história no ensino da matemática*: reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA, 2001a. (Série Educação, 1).

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. *O ensino e as propostas pedagógicas*. In Bicudo, M. A. V. (Orgs.). *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p.153-167.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. *História na Educação Matemática*: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

MOREIRA, Marco Antônio; MASINI, Elcie F. Salzano. *Aprendizagem significativa*: a teoria da David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

MURARI, Claudemir. Espelhos, caleidoscópios, simetrias, jogos e softwares educacionais no ensino e aprendizagem de Geometria. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). *Educação matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004. p. 198-212.

NEVES, Maria Apparecida C. Mamede. A crise dos paradigmas em Educação na óptica da Psicologia. In: BRANDÃO, Zaia (Org.). *A crise dos paradigmas e a educação*. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2002. (Questões da Nossa Época, 35).

NOVAK, Joseph Donald. *Uma teoria de educação*. Tradução Marco Antônio Moreira. São Paulo: Pioneira, 1981.

ONTORIA PEÑA, Antonio; GÓMEZ, Juan Pedro; RUBIO, Ana Molina. *Potencializar a capacidade de aprender e pensar: o que mudar para aprender e como aprender para mudar*. Tradução Fuvio Lulsisco. São Paulo: Madras, 2004.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). *Educação matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática, vol. 3*. São Paulo: Moderna, 1995.

PERRENOUD, P. Construindo competências. Entrevista com Philippe Perrenoud, Paola Gentile e Roberta Bencini. *Nova Escola*, set. 2000, pp.19-31. Disponível em:<http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_2000/2000_31.html>. Acesso em: 1 ago. 2005.

POLYA, G. *A arte de resolver problema*: um novo enfoque do método matemático. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência,1994.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

POZO, Juan Ignácio (Org.). *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. Tradução Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

RICHARDSON, Roberto Jarry et. al. *Pesquisa social*: métodos e técnicas. São Paulo: Atlas, 1999.

SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio Emílio. *Matemática. vol. único. série novo ensino médio*. São Paulo: Editora Ática, 2003.

SILVA, Josias Alves de Melo. *Educação matemática e exclusão social*: tratamento diferenciado para realidade desiguais. Brasília: Plano Editora, 2002.

VALENTE, Wagner Rodrigues (Org.). *Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2004.

VASCONCELLOS, Celso dos Santos. *Avaliação da aprendizagem: práticas de mudanças* – por uma práxis transformadora. 8. ed. São Paulo: Libertad, 2006.

WELLS, David. *Dicionário de geometria curiosa*. Tradução Paulo Almeida. Lisboa: Gradiva, 1998.

WHITE, Ellen. G. *Educação.* 7. ed. Santo André: Casa Publicadora Brasileira, 1997.

YOUSSEF, Antônio Nicolau; FERNANDEZ, Vicente Paz; SOARES, Elizabeth. *Matemática: vol. único: ensino médio*. São Paulo: Scipione, 2000.

Apêndice A: Questionário histórico (2004)

CEFET-PB
Disciplina: Matemática
Professora: Marta Maria Maurício Macena
Assunto: Secções Cônicas
Turma 3º C (11/2/2005)
Aluno(a): ____________________ Idade: ____
Aluno(a): ____________________ Idade: ____

1. Na Antiguidade, como o conhecimento científico era preservado e transmitido?

____
____
____

2. Comentem os benefícios gregos para a Matemática.

____
____
____

3. Citar algumas obras e autores que contribuíram para o desenvolvimento da Matemática.

____
____
____

4. De que forma foi iniciado o estudo sobre as secções cônicas?

____
____
____

5. Qual a definição de cone usada na atualidade? Quem a construiu e quando?

____
____
____

6. Que ocorrências contribuíram para o surgimento da Geometria Analítica?

____
____
____

7. Quais cientistas formalizaram a junção da geometria com a álgebra?

____
____
____

8. O que você entende por Geometria Analítica?

____
____
____

9. O que você entende por Secções Cônicas?

____
____
____

10. Dê exemplos do cotidiano sobre elipse, hipérbole ou parábola.

____
____
____

11. Comentem sobre usar um texto histórico na explanação de um conteúdo matemático.

____
____
____

Apêndice B: Atividades (2004)

CEFET-PB

Matemática (Marta Maria Maurício Macena)

3ª série (A, B e C)

Cônicas (24/2/2005)

Momentos na realização de uma investigação:[21]	
Exploração e formulação de questões.	▪ Reconhecer uma situação problemática ▪ Explorar a situação problema ▪ Formular questões
Conjecturas[22]	▪ Organizar dados ▪ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	▪ Realizar testes ▪ Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	▪ Justificar uma conjectura ▪ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Espera-se que ao final dessa investigação se saiba:

- as definições das secções cônicas - parábola, elipse e hipérbole
- identificar as características geométricas
- determinar as equações
- identificar e desenhar o gráfico, dada a respectiva equação
- distinguir uma secção cônica centrada de uma não centrada

René Descartes (França, 1596 – 1650) e Pierre Fermat (França, 1601 – 1665), são os dois principais responsáveis pela grande criação matemática, a geometria das coordenadas ou geometria analítica cuja idéia central é associar equações algébricas às curvas e superfícies. Segundo Descartes essa geometria tem por objetivo a explicação dos fenômenos da natureza.

Fermat partiu da obra dos geômetras gregos, principalmente Apolônio de Perga.

Descartes um dos fundadores da biologia moderna, físico de primeira e, só incidentalmente, matemático, chegou à matemática por três vias: a filosofia o estudo da natureza e o interesse pelos usos das ciências.

Exemplo de Cônicas

O Homem teve sempre necessidade de explicar os fenômenos que observava na natureza. Ao longo do tempo foi encontrando modelos para explicar o funcionamento do Sistema solar.

Os primeiros modelos de que há registro consideravam que as órbitas planetárias eram circulares. Assim mesmo começou por considerar Johannes Kepler, chegando à discordância entre os resultados teóricos e as observações do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, em que se apoiou.

Essa discordância veio a ser resolvida quando deduziu que as órbitas planetárias eram elípticas e publica em 1609 a sua descoberta de que a órbita de Marte em torno do Sol é uma elipse.

A partir daí as cônicas, objetos até então exclusivamente matemáticos, revelaram a sua estreita ligação com a natureza, em particular com as trajetória dos planetas no Sistema Solar.

Esta descoberta, associada aos estudos de Galileu, levou posteriormente (c. 1680) Isaac Newton a formular a sua lei da gravitação universal.

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/elipses.htm#Astronomia

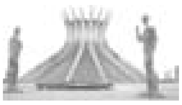
A lei de Boyle-Mariotte (estudada nos compêndios de Física e Química), estabelece que sob temperatura constante, o volume ocupado por uma certa massa de gás, é inversamente proporcional a sua pressão.

Seja V o volume de um gás submetido a uma pressão P, a uma temperatura constante. A lei de Boyle-Mariotte, estabelece que P.V = constante = k. A representação gráfica da equação P.V = K (ou X.Y = K), do volume V em função da pressão P, de um gás submetido a uma temperatura constante, será uma hipérbole eqüilátera.

[21] João Pedro da Ponte, p. 21

[22] **Conjectura** → juízo ou opinião sem fundamento preciso; suposição, hipótese.

Oscar Niemeyer (1907 - ?)



A Catedral Metropolitana, ou Catedral de Brasília, um dos edifícios públicos desenhados pelo arquiteto Niemeyer nos anos 60 para a capital brasileira. Esta catedral foi construída entre os anos 1959 e 1980 e, tem na sua arquitetura técnicas e materiais modernistas misturados com as linhas curvas e a liberdade da forma, próprias do período barroco brasileiro.

A base do edifício é circular e tem cerca de 60 m de diâmetro, e o seu piso principal situa-se a 3 m do chão. O seu telhado de vidro fosco, que tem início ao nível do chão é suportado por 16 colunas (arcos de hipérbole) curvas, colunas estas, que vistas de fora do edifício, terminam no topo de forma pontiaguda, lembrando a imagem de uma coroa de espinhos. A parte mais estreita do edifício está a cerca de 31 m do chão, é circular e tem cerca de 12 m de diâmetro. Perto da entrada do edifício estão quatro enormes estátuas conhecidas pelos *Quatro Evangelhos*.

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/Niemeyer.htm

O Coliseu construído no ano 70 da nossa Era, inaugurado no ano 80 e, inicialmente, poderia sustentar no seu interior cerca de quarenta e cinco mil espectadores.

Foi construído em mármore, pedra travertina, ladrilho e tufo (pedra calcária com grandes poros). A sua planta elíptica mede dois eixos que se estendem aproximadamente de 190 m por 155 m.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Coliseu_de_Roma

Residência Melanie Farkas, arquiteto Rodrigo Lefèvre, 1971.

Esta residência se insere na produção do arquiteto Rodrigo Lefèvre, e é fruto de longa pesquisa sobre o uso de abóbadas parabólicas em concreto e blocos de barro, que durante os anos 60 foi muito utilizada por ele em programas residenciais.

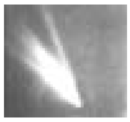
Corte da Residência Melanie Farkas, No corte observam-se as possibilidades de arranjo espacial proporcionado pela abóbada.

Desenho: Maurício Azenha Dias

Fonte: Revista Casa & Jardim, nº 284, 1978, p. 90

http://www.vitruvius.com.br/arquitextos/arq038/arq038_01.asp

Na astronomia, a descoberta do cometa Halley é paradigmática. Em 1704 Edmund Halley



estudou as órbitas de vários cometas, para as quais existiam dados. Concluiu que os cometas de 1682, 1607, 1531 e 1456 eram afinal um único cometa que descrevia uma órbita elíptica à volta do sol com um período de cerca de 76 anos. Fez a previsão correcta do seu retorno em 1758, o que fez com que o cometa ficasse conhecido pelo seu nome. Investigações recentes sugerem que os chineses tivessem registado este cometa em cerca de 240 a.C.

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/plano.htm#Elipses

Atividade 1:

1) Marque dois pontos no papel quadriculado e determine um conjunto de pontos que eqüidistam dos dois pontos. Como este lugar geométrico[23] é denominado?

2) Dados o ponto F e a reta r, no papel quadriculado, determinem o conjunto de pontos eqüidistantes da reta r e do ponto F. Que curva vocês obtiveram?

3) No exercício anterior, coloquem os eixos Ox e Oy de modo que o eixo Ox seja paralelo a reta r e passe pelo vértice; e o eixo Oy coincida com o eixo principal da curva. Considerem a equação da reta r como sendo $y = -d$. Dado um ponto P (x,y) pertencente a curva:

   a) Determinem a expressão algébrica da distância entre P e F.

   b) Determinem a expressão algébrica da distância entre P e r.

   c) Qual a propriedade do lugar geométrico do exercício dois desta atividade?

   d) Usando a propriedade, deduzir uma expressão algébrica.

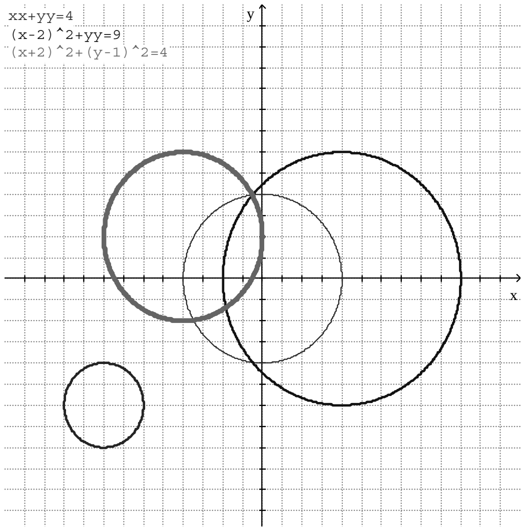
4) No papel quadriculado, determinem o conjunto de pontos P de modo que $d_{PF} = 2d_{Pr}$. Que curva vocês obtiveram?

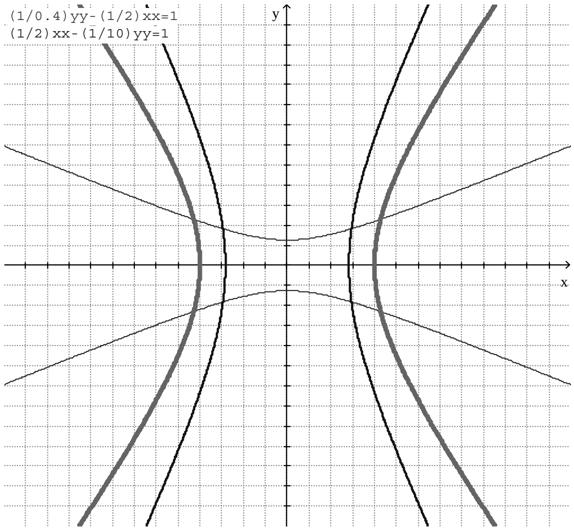
[23] Lugar geométrico dos pontos que têm uma determinada propriedade é o conjunto que contém todos esses pontos exclusivamente. (Dicionário de matemática – HEMUS)
Lugar geométrico de pontos é a figura cujos os pontos, e só eles, satisfazem a uma certa condição.
http://cinderella.lmc.fc.ul.pt/forum/msg/195/

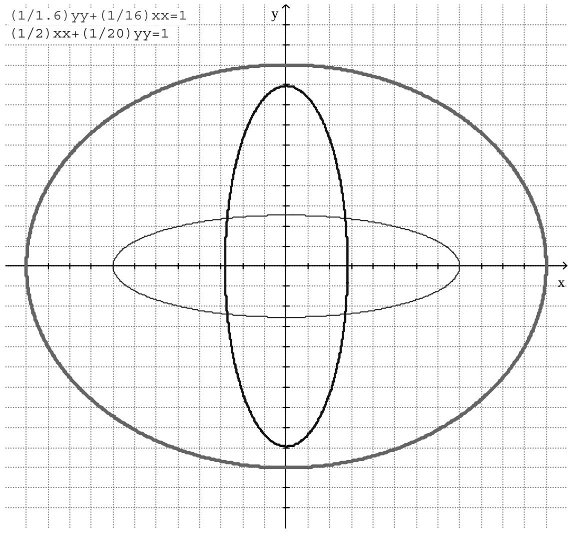
Apêndice C: Avaliação da turma A, turma B e turma C (2004)

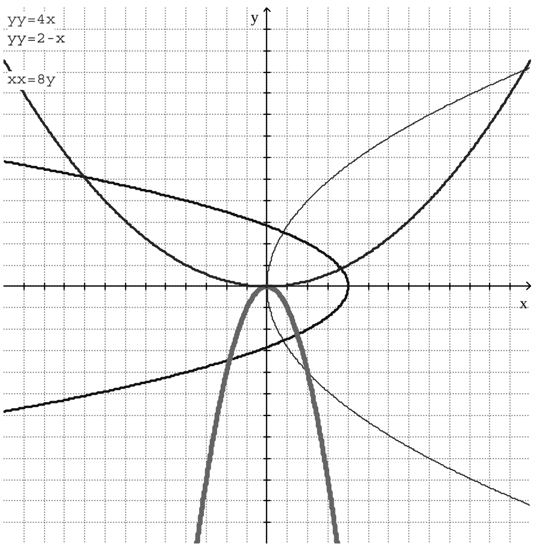
CEFET-PB (3ºA) – 10/3/2005
Dupla: ______________________________

Em cada grupo de gráficos escreva a equação que está faltando e destaque cada elemento do mesmo.





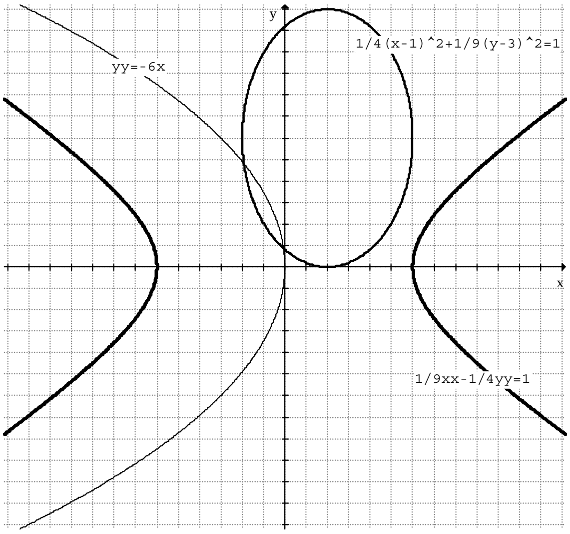




CEFET-PB (3ºB) – 11/3/2005
Matemática: Secções Cônicas

Dupla:______________________________________
____

Observe o conjunto de cônicas abaixo e determine o que se pede:

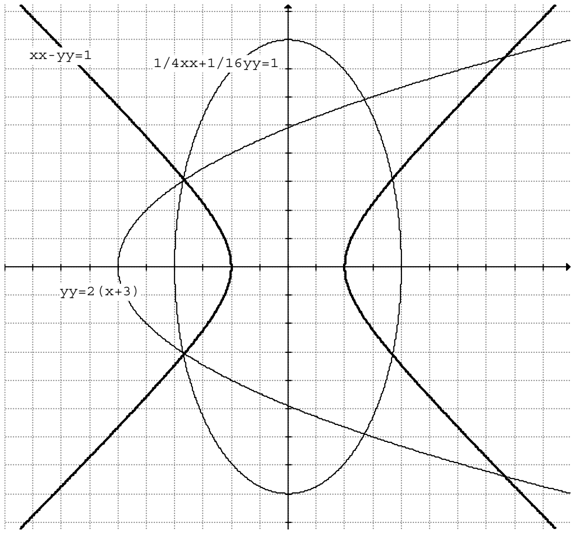


ELEMENTOS	Cônica:	Cônica:	Cônica: ....
Eq. reduzida			
Focos			
Vértices			
Dist.. Focal			
Eixos maior e menor			
Excentricidade			
Parâmetro			
Centro			
Diretriz			
Eixo real ou transverso			
Eixo imaginário			
Assíntotas			

CEFET-PB (3ºC) – 14/3/2005
Matemática: Secções Cônicas

Dupla:______________________________________
____

Observe o conjunto de cônicas abaixo e determine o que se pede:

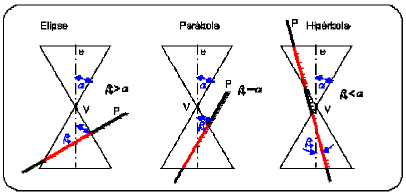


ELEMENTOS	Cônica:	Cônica:	Cônica: ....
Eq. reduzida			
Focos			
Vértices			
Dist. Focal			
Eixos maior e menor			
Excentricidade			
Parâmetro			
Centro			
Diretriz			
Eixo real ou transverso			
Eixo imaginário			
Assíntotas			

Apêndice D: Resumo cônicas (2004)

CEFET-PB – 11/3/2005

Nome:



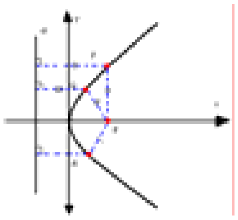
René Descartes (1596-1650) generalizou a utilização das cônicas e identificou-as como equações do 2º grau. Mas nem todas as equações do 2º grau representam cônicas.

As curvas definidas por equações do 2ºgrau em *x* e *y* do tipo:

a) $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ chamam-se cônicas.

b) $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ também pode definir uma reta, um ponto ou um cojunto vazio.

c) $ax^2+cy^2+dx+ey-f=0$ ($b=0$), definem cônicas com os eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados.



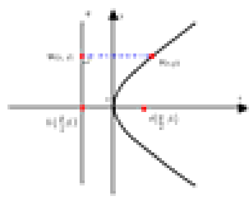
- *foco*: o ponto **F**
- *diretriz*: a reta **d**
- *vértice*: o ponto **V**
- *parâmetro*: **p**
- o vértice **V** e o foco **F** ficam numa mesma reta, o eixo de simetria.
- **V** é o ponto médio de $\overline{dF}$ = p, isto é, $\overline{dV} = \overline{VF} = \frac{p}{2}$
- *Equação*: parábola com vértice na origem, concavidade para a direita e eixo de simetria horizontal, a reta **d** tem equação $x = \frac{-p}{2}$ e na parábola temos:

  → $F\left(\frac{p}{2},0\right)$

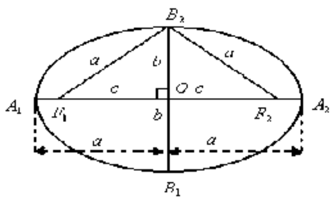
  → P(x, y)

  →obtemos então, a equação da parábola: $\boxed{y^2 = 2px}$

  → se considerarmos $\overline{dF}$ = 2p então, a equação da parábola fica $\boxed{y^2 = 4px}$

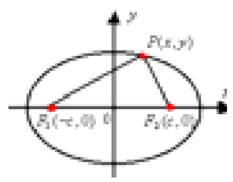


- *Definição:* $\overline{FP} = \overline{Pd}$

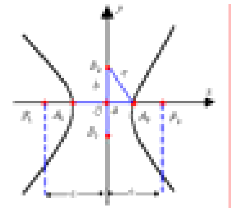


- *focos :* os pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$
- *centro*: o ponto **O**, que é o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$
- *vértices*: os pontos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$
- *eixo maior*: $\overline{A_1A_2}=2a$
- *eixo menor*: $\overline{B_1B_2} = 2b$
- *distância focal*: $\overline{F_1F_2} = 2c$
- *relação fundamental*: $a^2 = b^2 + c^2$
- *exentricidade*: $\boxed{e = \frac{c}{a}}$, como 2c < 2a então, c < a e 0 < e < 1.
- *Equação*: elipse com centro na origem e eixo maior horizontal

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1}$$



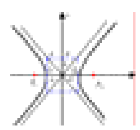
- *Definição:* $\overline{F_1P}+\overline{PF_2}=2a$



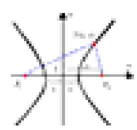
- *focos*: os pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$
- *vértices*: os pontos $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$
- *centro* da hipérbole: o ponto **O**, que é o ponto médio de $\overline{A_1A_2}$
- *distância focal*: $\overline{F_1F_2} = 2c$
- *eixo real*: $\overline{A_1A_2}=2a$ (na mesma direção dos focos)
- *eixo imaginário*: $\overline{B_1B_2} = 2b$ (b>0 tal que $a^2 + b^2 = c^2$)
- *Equação*: hipérbole com centro na origem e focos no eixo Oy

  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b} = 1$

- *Assíntotas:* $y = \pm \frac{b}{a}x$ (retas que contêm as diagonais do retângulo de lados 2a e 2b)



- *Definição:* $\left|\overline{F_1P}-\overline{PF_2}\right|=2a$



- Uma hipérbole é chamada eqüilátera quando as medidas dos semi-eixos real e imaginário são iguais:

Apêndice E: Questionário conclusivo (2004)

CEFET-PB

Marta Maria Maurício Macena (**15/3/2005)**

Turma: _______ Idade: ________

Nome (opcional): _________________________

Questionário após a avaliação da aprendizagem sobre as Secções Cônicas

Estimado(a) aluno(a) da 3ª série do CEFET-PB no ano letivo 2004, conto com a sua colaboração que é necessária para a realização dessa pesquisa.
Sou-lhe grata.

NA SUA OPINIÃO:

1. Qual a importância da história no estudo das Secções Cônicas?

____
____
____
____
____

2. Que contribuições trouxeram as atividades práticas de ensino para a aprendizagem das Secções Cônicas?

____
____
____
____
____

3. Como você relaciona a matemática aprendida sobre as Secções Cônicas com a realidade conhecida?

____
____
____
____
____

4. A matemática aprendida no estudo das Secções Cônicas contribuiu para desenvolver o espírito de curiosidade em relação a matemática do dia a dia? De que forma?

____
____
____
____
____

5. Quais os pontos mais negativos das aulas ministradas sobre as Secções Cônicas?

____
____
____
____
____

6. Quais os pontos mais positivos das aulas ministradas sobre as Secções Cônicas?

____
____
____
____
____

7. Quais as dificuldades enfrentadas durante as aulas sobre as Secções Cônicas?

____
____
____
____
____

8. Que modificações precisam ser feitas nessa metodologia de ensino para melhorar a aprendizagem sobre as Secções Cônicas?

____
____
____
____
____

Apêndice F: Atividade 1 (2005)

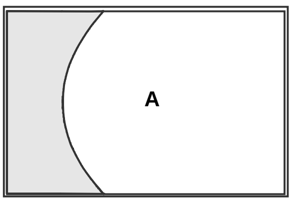
CEFET-PB
Professora: Marta Maria Maurício Macena
Matemática (secções cônicas) – Data: _____/_____/2006
Componentes da equipe: ____

Guia de atividades nº1 (com fotografias e gravações para registro).

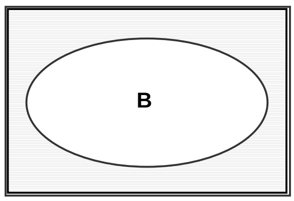
1. No decorrer desta aula, cada equipe,
   a) jogará em 3 tipos de tabuleiros de bilhar (A, B ou C) – 25 minutos para cada tipo;
   b) elaborará e explicitará as possíveis estratégias de resolução (evitando a simples tentativa e erro);
   c) registrará as questões que surgirem relativas à atividade;
   d) testará as prováveis estratégias de jogar acertando o alvo;
   e) fará anotações de acordo com os resultados obtidos em cada jogada;
   f) construirá a regra para jogar acertando o alvo (escrevendo com destaque);

2. Numerem ordenadamente os tabuleiros a medida que a equipe for desenvolvendo as atividade.

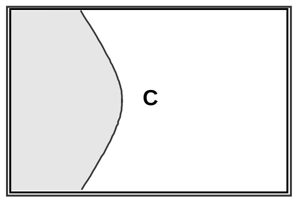
(....)



(....)



(....)



3. A atividade para cada tabuleiro (A, B ou C) tem o mesmo enunciado:
   "Por tabela[24], retirar a bola fixa no ponto determinado".

4. Esperem o início da cronometragem.

5. Estratégias possíveis para o tabuleiro nº 1:

6. Questões referentes ao tabuleiro nº 1:

[24] Tabela → bordo interno da mesa de bilhar (Pequeno Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. R. Janeiro: Ed. Civilização Brasileira)

7. Preencham o quadro abaixo e, se necessário, usem folhas a mais.

Tabuleiro nº 1			
Quem jogou?	**Trajetória da bola**	**Resultado**	**Justificativa do resultado (tentativa ou já testando as tentativas acertadas)**
1 (..............)		( ) A ( ) E	
2 (..............)		( ) A ( ) E	
3 (..............)		( ) A ( ) E	

8. Registrar a regra determinada para o tabuleiro nº 1 (se já encontrou):

9. Estratégias possíveis para o tabuleiro nº 2:

10. Questões referentes ao tabuleiro nº 2:

11. Preencham o quadro abaixo e, se necessário, usem folhas a mais.

Tabuleiro nº 2			
Quem jogou?	**Trajetória da bola**	**Resultado**	**Justificativa do resultado (tentativa ou já testando as tentativas acertadas)**
1 (..............)		( ) A ( ) E	
2 (..............)		( ) A ( ) E	
2 (..............)		( ) A ( ) E	

12. Registrar a regra determinada para o tabuleiro nº 2 (se já encontrou):

13. Estratégias possíveis para o tabuleiro nº 3:

14. Questões referentes ao tabuleiro nº 3:

15. Preencham o quadro abaixo e, se necessário, <u>usem folhas a mais</u>.

Tabuleiro nº 3			
Quem jogou?	**Trajetória da bola**	**Resultado**	**Justificativa do resultado (tentativa ou já testando as tentativas acertadas)**
1 (..............)		( ) A ( ) E	
2 (..............)		( ) A ( ) E	
3 (..............)		( ) A ( ) E	

16. Registrar a regra determinada para o tabuleiro nº 3 (se já encontrou):

Apêndice G: Atividade 2 (2005)

CEFET-PB
Professora: Marta Maria Maurício Macena
Matemática (secções cônicas) – Data: _____/_____/2006
Componentes da equipe: ____

Guia de atividades nº2 (com fotografias e gravações para registro).

I No decorrer desta aula,
- g) cada aluno, na sua equipe, discutirá a melhor maneira de traçar o **lugar geométrico**[25] desejado.
- h) cada aluno, na sua equipe, traçará lugares geométricos em papel quadriculado.
- i) cada equipe registrará as questões que surgirem relativas a atividade;
- j) cada equipe construirá uma definição para os lugares geométricos encontrados.

II Traçando o **primeiro lugar geométrico**.
- a) No papel quadriculado, marque dois pontos.
- b) Fora da reta determinada por esses dois pontos, marque outro ponto.
- c) Encontre a soma (S) das distâncias a partir desse último ponto marcado até os dois pontos iniciais.
- d) Marque outros pontos tais que a soma das distâncias a partir de cada um desses até os dois pontos iniciais seja sempre S.
- e) Verifique o lugar geométrico que começa a surgir.
- f) Como pode ser denominado esse lugar geométrico?
- g) Construa uma definição matemática para esse lugar geométrico.

Questões sobre o lugar geométrico 1	
Definição 1	

[25]**Lugar geométrico** dos pontos que têm uma determinada propriedade é o conjunto que contém todos esses pontos exclusivamente. (Dicionário de matemática – HEMUS)
Lugar geométrico de pontos é a figura cujos os pontos, e só eles, satisfazem a uma certa condição.http://cinderella.lmc.fc.ul.pt/forum/msg/195/
Um lugar geométrico é o trilho percorrido por um ponto [...]
http://wwmat.ptmat.fc.ul.pt/~jnsilva/Mestradinho3/Portugues/SpecialModes.html

III Traçando o **segundo lugar geométrico**.

a) No papel quadriculado, trace uma reta e marque um ponto fora dela.
b) Encontre o conjunto de pontos eqüidistantes da reta traçada e do ponto marcado.
c) Verifique o lugar geométrico que começa a surgir.
d) Como pode ser denominado esse lugar geométrico?
e) Construa uma definição matemática para esse lugar geométrico.

Questões sobre o lugar geométrico 2

Definição 2

IV Traçando o **terceiro lugar geométrico**.

a) No papel quadriculado, marque dois pontos.
b) Fora da reta determinada por esses dois pontos, marque outro ponto.
c) Encontre a diferença (D) das distâncias a partir desse último ponto marcado até os dois pontos iniciais.
d) Marque outros pontos tais que a diferença das distâncias a partir de cada um desses até os dois pontos iniciais seja sempre D.
e) Verifique o lugar geométrico que começa a surgir.
f) Como pode ser denominado esse lugar geométrico?
g) Construa uma definição matemática para esse lugar geométrico.

Questões sobre o lugar geométrico 3

Definição 3

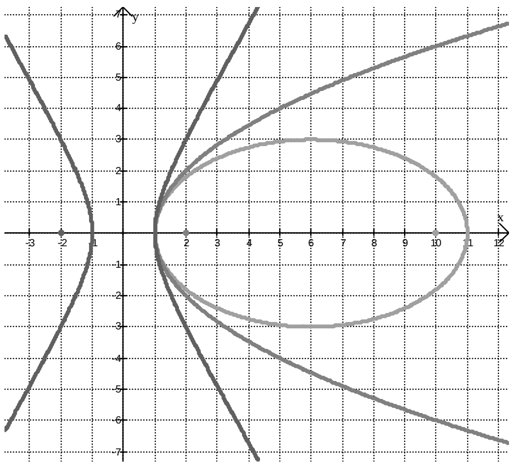
Apêndice H: Avaliação 1 (2005)

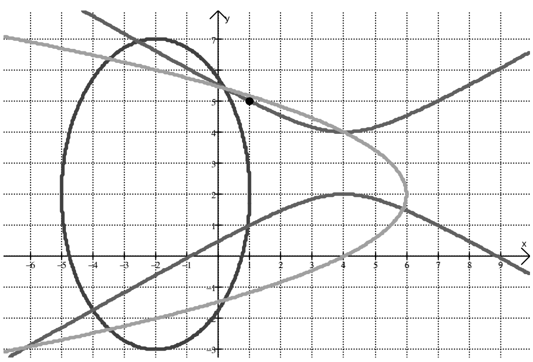
CEFET-PB
Professora: Marta Maria Maurício Macena
Matemática (secções cônicas) – ___/___/2006

Concordo que meu nome e/ou minha imagem, adquiridas nesse trabalho de pesquisa, possam ser expostos em trabalhos científicos.

Aluno(a)____________________ Turma: ____

1. Para cada uma das cônicas representadas abaixo, determine os seus elementos principais e escreva a sua equação reduzida:





2. O que pode ter originado o estudo da geometria?

3. O que pode ter originado o estudo das *Secções Cônicas*?

4. Por que a denominação *Secções Cônicas* para o estudo que estamos fazendo no momento?

5. Onde estão as *Secções Cônicas* no cotidiano (passeio pelo CEFET/PB fotografando)?

6. Que personagens históricas estão ligadas ao estudo das *Secções Cônicas*?

7. Comente sobre as atividades práticas de ensino para a aprendizagem das *Secções Cônicas*.

Apêndice I: Avaliação 2 (2005)

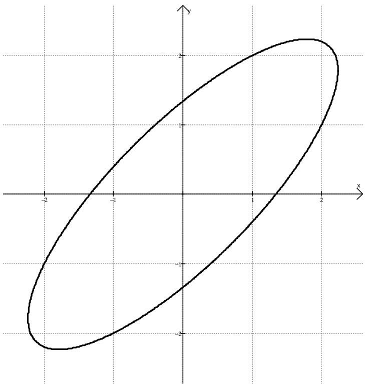
CEFET-PB

Matemática (secções cônicas) – Data: ____/____/2006

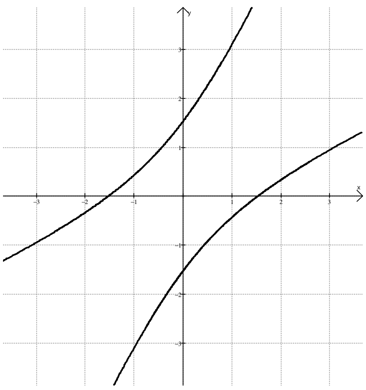
Nome completo: ________________________________ Matrícula: ___________ Turma: ________

Considerando um ponto genérico G(x, y) para cada curva abaixo representada, como também a definição de cada curva (Manoel Paiva, Ática: 1995, p 174, 199 e 227):

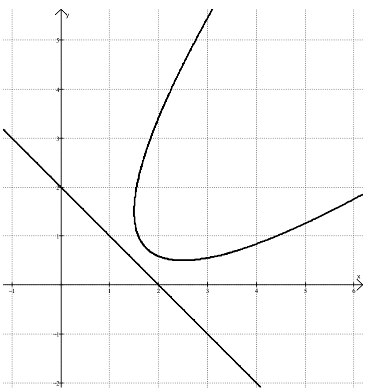
a) Obter uma equação da elipse de focos $F_1(-2, -2)$ e F_2 (2, 2), cujo eixo menor mede 2 unidades.



b) Obter uma equação da hipérbole de focos $F_1(-2, 2)$ e F_2 (2, -2), cujo eixo menor mede $2\sqrt{7}$ unidades.



c) Encontrar uma equação da parábola de focos F(2, 1), cuja diretriz é *r:* $x + y - 2 = 0$.

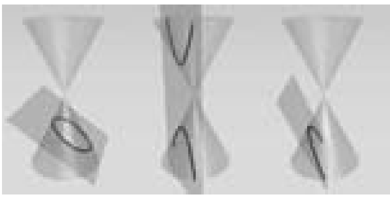


Anexo A: Apostila sobre cônicas

CEFET/PB
Coordenação de Ciências
Disciplina: Matemática
Prof[as]: Kalina, Rejane e Marta

Geometria Analítica: Cônicas

As cônicas (circunferência, elipse, parábola e hipérbole) possuem todas elas um aspecto singular, poder ser obtidas pela intersecção de um plano com uma superfície cônica. O plano secante deve ter uma inclinação escolhida convenientemente. Vejamos a figura a seguir.



As propriedades de reflexo geradas por cônicas (parabolóides, hiperbolóides e elipsóides) são usadas nos espelhos e antenas ou para criara condições acústicas especiais em auditórios, teatros, catedrais.

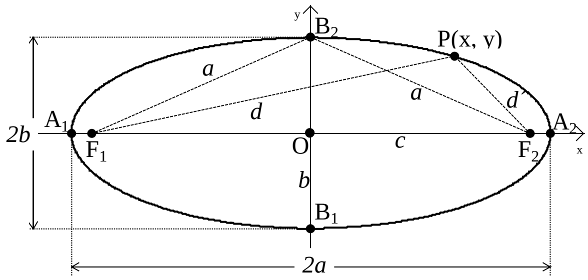
Devido as suas propriedades físicas e até estéticas, os arcos cônicos surgem em Engenharia e Arquitetura (pontes, cúpulas, torres e arcos).

Hoje em dia é muito comum vermos pequenas antenas parabólicas nos telhados e terraços, a fim de captar programas de televisão. A construção dessas antenas requer conhecimentos de geometria e análise.

Estudaremos a seguir as propriedades dessas cônicas.

Elipse

Elipse é o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante e maior que a distância entre os focos.



- Os pontos fixos F_1 e F_2 são os **focos** da elipse.
- O ponto ***O*** (ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$) é o **centro** da elipse.
- Os segmentos $\overline{PF_1} = d$ e $\overline{PF_2} = d'$ são chamados **raios vetores** do ponto P e sua soma é igual a $2a$, isto é, $d = d' = 2a$.
- A distância de F_1 a F_2 ($\overline{F_1F_2} = 2c$) chama-se **distância focal**.
- Os pontos A_1 e A_2 são chamados **vértices** da elipse.
- O segmento $\overline{A_1A_2} = 2a$ é o **eixo maior** da elipse.
- O segmento $\overline{B_1B_2} = 2a$ é o **eixo menor** da elipse.
- A razão $e = \frac{c}{a}$, em que $0<e<1$, é denominada **excentricidade** da elipse, que mede o seu maior ou menor achatamento. Quanto maior o valor de "**e**" mais achatada é a elipse.
- Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo F_2OB_2, temos que

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

<u>Equação reduzida da elipse</u>

<u>1º caso</u>: Para $\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = 2a$, sendo $P(x, y)$ um ponto da elipse e $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ os seus focos, temos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado e dividindo-os por 4, obtemos:

$$a.\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

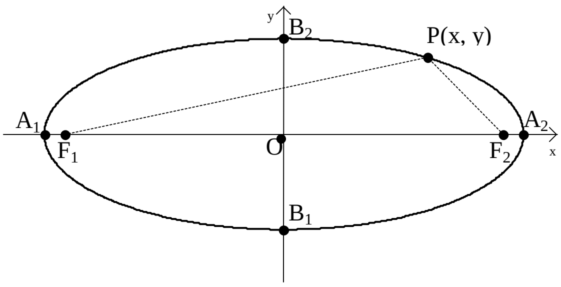
Elevando novamente os dois membros ao quadrado, mais alguns cálculos, encontramos:

$$x^2\,(a^2 - c^2) + a^2\,y^2 = a^2\,(a^2 - c^2)$$

Sendo $a^2 - c^2 = b^2$, temos $x^2\,b^2 + a^2\,y^2 = a^2\,b^2$. Dividindo esta equação por $a^2\,b^2$ obtemos:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Equação reduzida da elipse, centrada no (0, 0) e eixo maior contido no eixo das abscissas.



<u>2º caso</u>: Para $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, sendo $P(x, y)$ um ponto da elipse e $F_1\ (0, -c)$ e $F_2(0, c)$ os seus focos, temos:

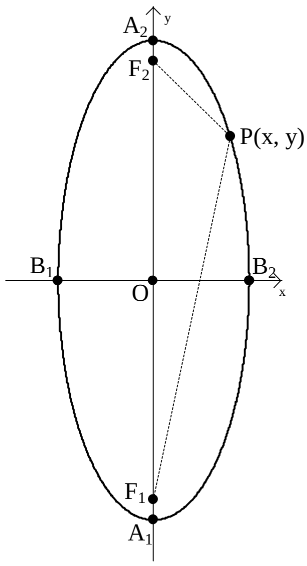
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a - \sqrt{y^x + (y-c)^2}$$

Efetuando os cálculos de forma análoga ao 1º caso, obtemos:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Equação reduzida da elipse, centrada no (0, 0) e eixo maior contido no eixo das ordenadas.



<u>Exercícios de fixação</u>

1) Numa elipse, o eixo maior está contido no eixo x e seu comprimento é 16. Sabendo que a distância entre os focos é 10, determinar a equação da elipse.

Resp. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$

2) Determinar a equação da elipse de focos $F_1(0, 3)$ e $F_2(0, -3)$, sabendo que o comprimento do eixo menor é 2.

Resp. $x^2 + \frac{y^2}{10} = 1$

3) Determinar as coordenadas dos focos e dos vértices da elipse de equação $4x^2 + 25y^2 = 100$.

Resp. $F_1(\sqrt{21}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{21}, 0)$; $V_1(5, 0)$ e $V_2(-5, 0)$

4) Determinar a equação da elipse de vértices $V_1(0, 6)$ e $V_2(0, -6)$ e que passa pelo ponto P(3, 2).

Resp. $\frac{8x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

5) Determinar a equação da elipse de focos $F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0)$, sabendo que o comprimento do eixo menor é 8.

Resp. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

6) Determine as medidas do eixo maior e do eixo menor da elipse de equação $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1$.

Resp. 24 e 18

7) O eixo maior de uma elipse de centro na origem está contido no eixo x. Sabendo que o comprimento do eixo menor é 6 e

a distância focal é 10, determine a equação da elipse.

Resp. $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{9}=1$

8) Determine a equação da elipse cujos focos são $F_1(1, 0)$ e $F_2(-1, 0)$ e que passa pelo ponto $P(2, 0)$.

Resp. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

9) Determine as coordenados dos vértices e as coordenadas dos focos da elipse de equação $16x^2 + 25y^2 = 400$.

Resp. $V_1(5, 0)$ e $V_2(-5, 0)$; $F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0)$

10) Determine a distância focal da elipse $2x^2 + y^2 = 2$.

Resp. 2

11) Determine o comprimento do eixo maior de uma elipse de focos $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$ e de excentricidade $e = \sqrt{3}/3$.

Resp. $8\sqrt{3}$

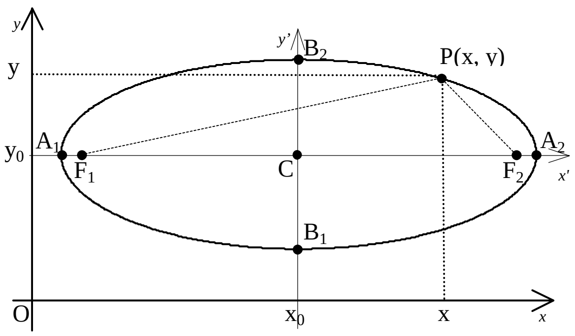
12) Determine a equação da elipse de excentricidade $e = 2/3$, sendo $a = 9$.

Resp. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{45}=1$

Eixos da elipse paralelos a x e y

Seja uma elipse de centro no ponto $C(x_0, y_0)$ e eixos paralelos aos eixos coordenados.

1º caso: eixo maior no eixo x' e eixo menor no eixo y':



Em relação ao sistema x'Cy', a equação da elipse é

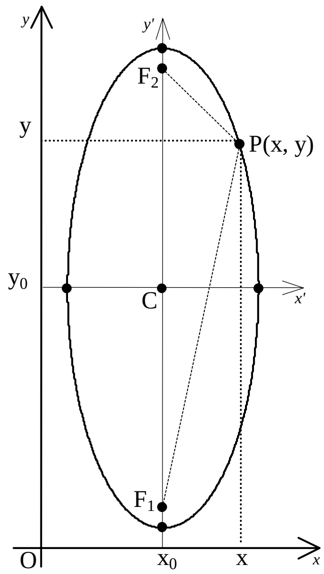
$$\boxed{\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1}$$

Em relação ao sistema xOy, a equação da elipse é

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

Neste caso, os focos são $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$ e os vértices são $V_1(x_0 - a, y_0)$ e $V_2(x_0 + a, y_0)$

2º caso: eixo maior no eixo y' e eixo menor no eixo x':



Em relação ao sistema x'Cy', temos

$$\boxed{\frac{(x')^2}{b^2}+\frac{(y')^2}{a^2}=1}$$

Em relação ao sistema xOy, temos

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1}$$

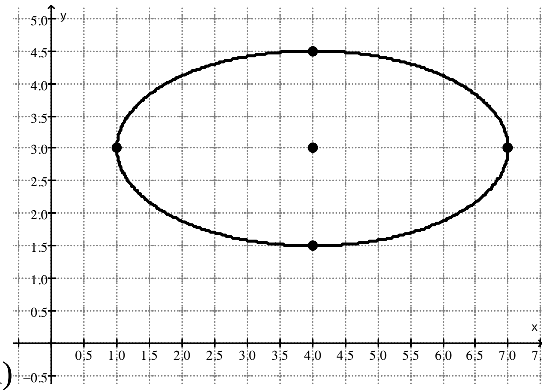
Neste caso, os focos são $F_1(x_0, y_0 - c)$ e $F_2(x_0, y_0 + c)$ e os vértices são $V_1(x_0, y_0 - a)$ e $V_2(x_0, y_0 + a)$

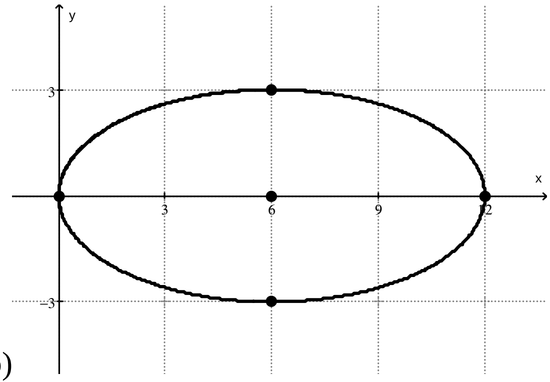
Exercícios de fixação

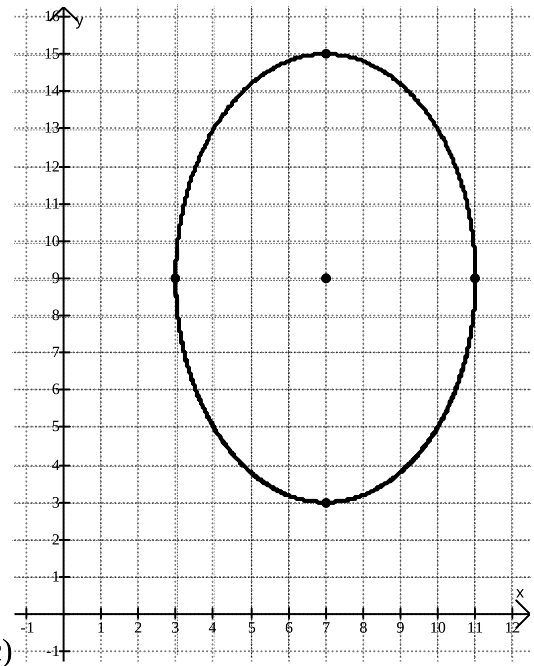
13) Determine o centro, os focos e as medidas dos semi-eixos da elipse $\frac{(x+2)^2}{100}+\frac{(y+1)^2}{36}=1$.

Resp. O(-2, -1) , $F_1(6, -1)$, $F_2(-10, -1)$ a=10 e b=6

14) Ache a equação reduzida das seguintes elipses:

a)


b)


c)


Resp. a) $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{2{,}25}=1$ b) $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ c) $\frac{(x-7)^2}{16}+\frac{(y-9)^2}{36}=1$

15) Qual a equação da reta que passa pelos focos da elipse $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{6}=1$?

Resp. y – 1 = 0

16) Determinar a equação da elipse de eixo maior vertical, sabendo que as coordenadas do centro são (2, -7) e os semi-eixos valem a = 8 e b = 1.

Resp. $\frac{(x-2)^2}{1}+\frac{(y+7)^2}{64}=1$

17) A distância mínima do planeta Mercúrio ao Sol é de aproximadamente 28 milhões de milhas e a excentricidade da órbita é de 1/5. Calcule a distância máxima do planeta Mercúrio ao Sol.

Resp. 42 milhões de milhas

18) O eixo da elipse descrita pela Terra em sua órbita mede 186 milhões de milhas e sua excentricidade é de 1/62. Calcule as distâncias máximas e mínimas da Terra ao Sol.

Resp. $d_{máx}$= 94,5 e $d_{mín}$=91,5

19) (PUC-SP) Um ponto P da elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ dista 2 de um dos focos. Qual a distância de P ao outro foco da elipse?

Resp. 4

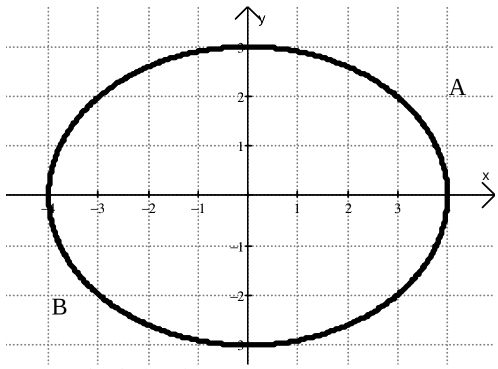
20) A equação de uma elipse é $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1$. Sabendo que a elipse passa pelos pontos A(2, 1) e B($\sqrt{2}$, 2) determine *p* e *q*.

Resp. $p=\frac{\sqrt{42}}{3}$ e $q=\sqrt{7}$

21) (UFPB-2000) Na figura abaixo está representada a elipse de equação $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ com focos F_1 e F_2 e os pontos A e B. Se d_{PQ} denota a distância entre os pontos P e Q, calcule $d_{AB}+d_{BF_2}+d_{F_2A}$.

Resp. 20

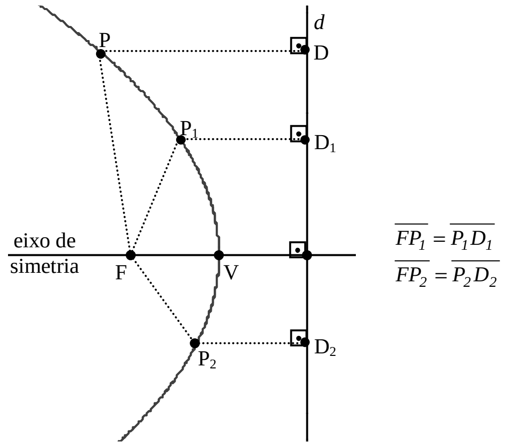
22) (UFPB-2002) A prefeitura de João Pessoa, pensando na urbanização da área em frente ao Shopping Sul, planeja construir uma praça em forma de elipse, conforme mostra a figura abaixo, além de duas lanchonetes localizadas nos pontos A e B das retas tangentes à elipse, paralelas à reta y = -x. Determine as coordenadas dos pontos onde ficarão as lanchonetes.



Resp. $A\left(\frac{16}{5},\frac{9}{5}\right)$, $B\left(\frac{-16}{5},\frac{9}{5}\right)$

Parábola

Parábola é o conjunto dos pontos de um plano, eqüidistantes de um ponto fixo F (foco) e de uma reta *d* (diretriz), F $\notin$ *d*, isto é, $\overline{PF}=\overline{Pd}$.



Na figura, destacamos:

- *foco da parábola:* o ponto F
- *reta diretriz:* a reta *d*
- *eixo de simetria:* a reta que passa pelo foco F e é perpendicular a diretriz
- *vértice da parábola:* o ponto V, ponto médio do segmento $\overline{FD}$, isto é, $\overline{FV}=\overline{VD}$

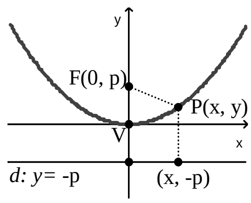
Equação reduzida da parábola

1º caso: Para vértice na origem e eixo de simetria sobre o eixo y, temos:

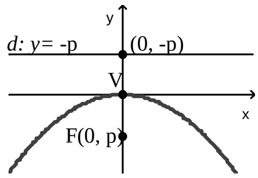
$$\overline{PF}=\overline{Pd}\Rightarrow\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$

Efetuando os cálculos, encontramos: $\boxed{x^2=4py}$ ou $\boxed{y=\frac{x^2}{4p}}$, que são equações reduzidas da parábola de foco *F(0, p)* e diretriz *y = -p*.

- se p>0, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

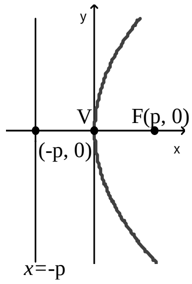


- se p<0, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

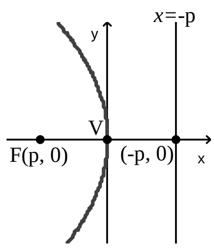


2º caso: Para vértice na origem e eixo de simetria sobre o eixo x, trocando *x* por *y* nas equações anteriores, temos: $\boxed{y^2=4px}$ ou $\boxed{x=\frac{y^2}{4p}}$, que são equações reduzidas da parábola de foco *F(p, 0)* e diretriz x = *-p*.

- se p>0, a parábola tem a concavidade voltada para a direita.



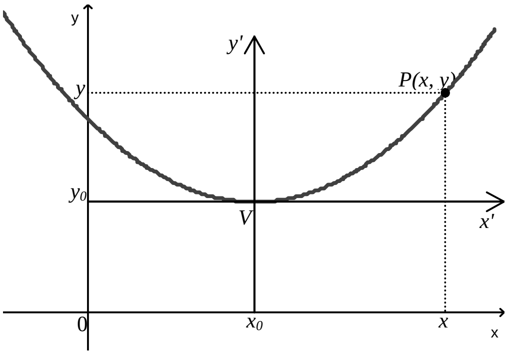
- se p<0, a parábola tem a concavidade voltada para a esquerda.



Equação da parábola com eixo de simetria paralelo a um dos eixos coordenados

Seja uma parábola de vértice V(x_0, y_0).

1º caso: o eixo da parábola paralelo ao eixo *y*.

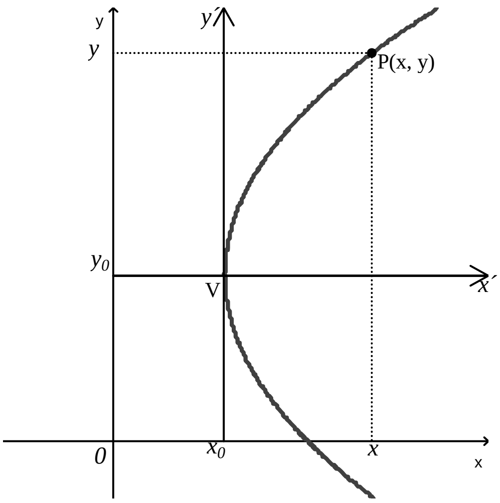


A equação dessa parábola é dada por

$$\boxed{(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)}$$

A equação da diretriz é dada por $y = y_0 - p$ e o foco tem coordenadas *$F(x_0, y_0 + p)$*.

<u>2º caso</u>: o eixo da parábola paralelo ao eixo x.



A equação dessa parábola é dada por

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)}$$

A equação da diretriz é dada por $x = yx_0 - p$ e o foco têm coordenadas *$F(x_0 + p, y_0)$*.

<u>Exercícios de fixação</u>

23) Uma parábola tem o foco F na intersecção das retas y = 0 e x = 8 e o vértice na origem dos eixos coordenados. Determine:

a) a equação da diretriz e

b) a equação dessa parábola.

Resp. $x = -8$ e $y^2 - 32x = 0$

24) Determinar a equação da parábola cujo vértice é a origem dos eixos coordenados, o eixo de simetria é o eixo *y* e passa pelo ponto P(-3, 7)

Resp. $x^2 = \frac{9y}{y}$

25) Dada a parábola de equação $y^2 = -20x$, pede-se:

a) as coordenadas do foco;

b) a equação da diretriz

c) o esboço do gráfico

Resp. a)F(-5, 0) b) x = 5

26) Determinar as coordenadas do vértice, as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola de equação $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$

Resp. V(3, 2), F(5, 2) e x = 1

27) Uma parábola tem foco F(2, 3) e diretriz dada pela reta x = - 4. Determine:

a) as coordenadas do vértice

b) a distância *p* do vértice ao foco

c) a equação dessa parábola.

Resp. a) V(-1, 3) b) p = 3 c) $(y - 3)^2 = 12(x + 1)$

28) Determinar as coordenadas do vértice $V(x_0, y_0)$, a distância p do vértice ao foco F(1, 4) cuja diretriz é a reta y + 2 = 0.

Resp. V(1, 1), p = 3 e $(x - 1)^2 = 12(y - 1)$

29) Determinar as coordenadas do vértice, as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola $x^2 + 2x + 4y - 15 = 0$.

Resp. V(-1, 4), F(-1, 3) e y = 5

30) Determinar a equação da parábola cujo eixo de simetria é vertical e que passa pelos pontos A(-3, 5), B(0, 4) e C(2, 0).

Resp. $x^2 - y - 4 = 0$

31) Uma parábola tem foco F(-1, 8) e diretriz dada pela equação y = 5. Determinar as coordenadas do vértice e a equação dessa parábola.

Resp. V(-1, 13/2) e $(x + 1)^2 = 6(y - 13/2)$

32) (Merck-SP) Determinar a equação da parábola de foco F(0, 1) e diretriz y + 1 = 0.

Resp. $x^2 = 4y$

33) (FGV-SP) Num sistema cartesiano ortogonal, determinar a equação do lugar geométrico dos pontos que eqüidistam do eixo OY e do ponto (4, 0).

Resp. $y^2 = 8(X - 2)$

34) Determinar a distância do vértice da parábola y = (x – 2)(x – 6) à reta $y = \frac{4}{3}x + 5$.

Resp. $\frac{43}{5}$

35) (Fatec-SP) As retas por x = 4 e y + x = 3 se interceptam no ponto A. Calcular a distância do ponto A ao vértice da parábola definida por $y = x^2 - 2x - 3$.

Resp. $3\sqrt{2}$

36) Determinar a equação da reta que passa pela origem e pelo vértice da parábola de equação $y = -x^2 + 4x - 3$

Resp. $y = \frac{x}{2}$

37) (PUC-SP) Determinar as coordenadas do vértice da parábola $2x^2 + 4x + 3y - 4 = 0$.

Resp. V(-1, 2)

38) Calcular os valores de *b* para os quais a parábola $y = x^2 + bx$ tem um único ponto em comum com a reta y = x – 1.

Resp. $b_1 = 3$ e $b_2 = -1$

39) (São Carlos-SP) Determinar as declividades das retas tangentes à parábola $y = x^2$ e que passam pelo ponto P(0, -2).

Resp. $m = \pm 2\sqrt{2}$

40) Determine as equações das parábolas que verificam as seguintes condições:

a) Foco (6, 0) e diretriz x = -6

b) Foco (0,-4) e diretriz x = 4

Resp. $y^2 = 24x$ e $x^2 = -16y$

41) Uma parábola tem como foco o ponto F(4, 2) e para diretriz, a reta de equação x = -6. Determine:

a) O vértice dessa parábola

b) A sua equação

Resp. V(-1, 2)

42) Considere a parábola de equação $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.

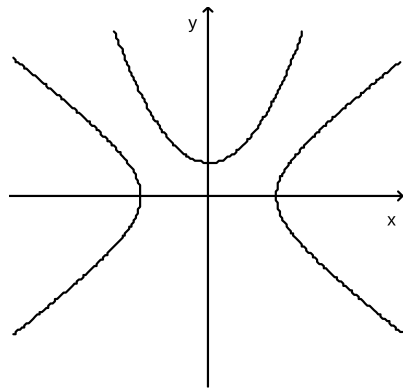
a) Calcule as coordenadas do vértice e do foco.

b) Faça um esboço do gráfico dessa parábola.

Resp. V(1, -4) e F(3, -4)

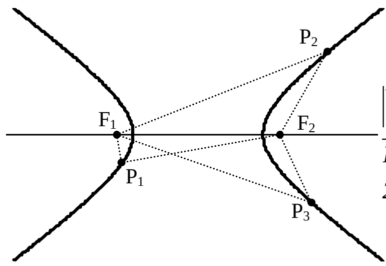
43) (UFPB-20032) Maria, empolgada com suas realizações, resolveu construir na praça principal (esboço abaixo) uma cobertura de forma triangular, com vértices em colunas verticais, erguidas exatamente nos focos das cônicas $4y - x^2 - 8 = 0$ e $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$. Sabendo que a região a ser coberta é plano e horizontal, calcule a área dessa região.

Resp. 15



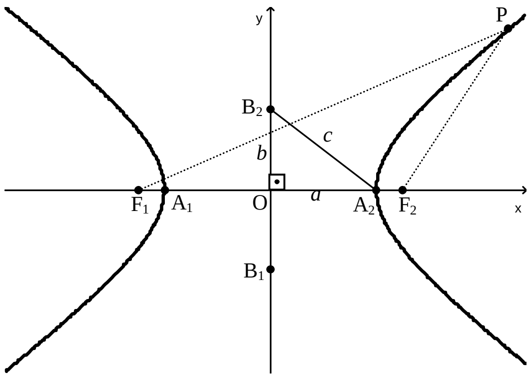
Hipérbole

Hipérbole é o conjunto dos pontos de um plano, cuja diferença a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) desse plano é uma constante positiva e menor que a distância entre os focos.



$$\left|\overline{P_1F_1} - \overline{P_1F_2}\right| = 2a$$
$$\overline{F_1F_2} = 2c$$
$$2a < 2c$$

Na hipérbole abaixo destacamos:



- Os pontos fixos F_1 e F_2 são os **focos** da hipérbole.

- O ponto O, ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, é o **centro** da hipérbole.

- A distância de F_1 a F_2 ($\overline{F_1F_2}$ = 2c) chama-se **distância focal**.

- Os pontos A_1 e A_2 são chamados vértices da hipérbole.

- O segmento $\overline{A_1A_2}$ = 2a é o **eixo real** ou **transverso** da hipérbole.

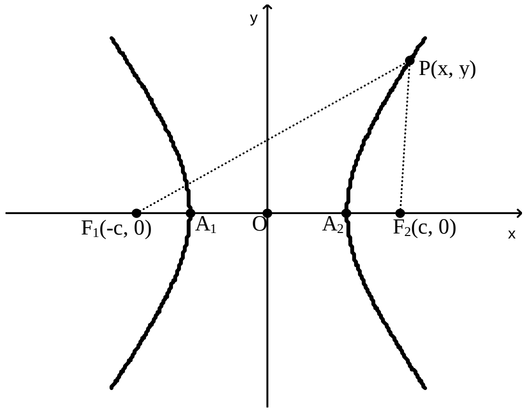
- O segmento $\overline{B_1B_2}$ = 2b é o **eixo imaginário** ou **conjugado** da hipérbole.

- A razão $e = \frac{c}{a}$, em que e>1, pois a<c é denominada **excentricidade** da hipérbole.

- Usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo B_1OA_2, temos $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$.

Equações da hipérbole

1º caso: Centro na origem e eixo real sobre o eixo x, temos:



Para um ponto P(x, y) da hipérbole, temos:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$$

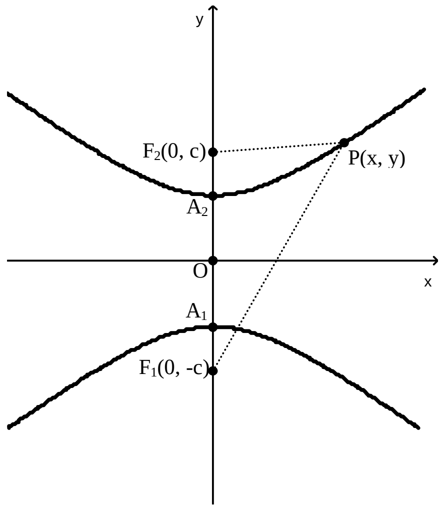
$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado e efetuando todos os cálculos necessários, temos:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

2º caso: Centro na origem e eixo real sobre o eixo y, temos:

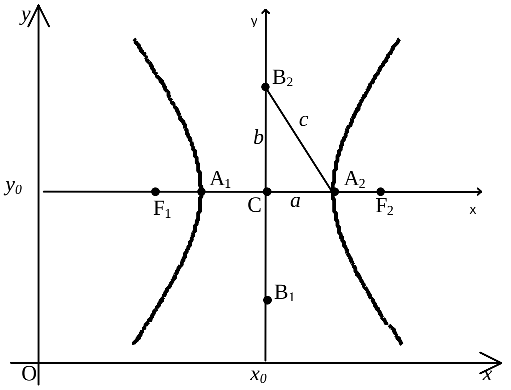


Procedendo do mesmo modo, obtemos a equação:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Equações da hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados

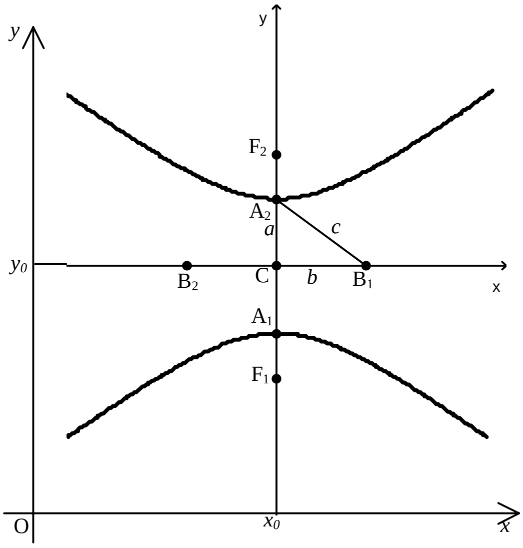
1º caso: Centro no ponto $C(x_0, y_0)$ e eixo real paralelo ao eixo x, temos:



Neste caso, a equação da hipérbole é dada por:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

2º caso: Centro no ponto $C(x_0, y_0)$ e eixo real paralelo ao eixo y, temos:



Neste caso, a equação da hipérbole é dada por:

$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1}$$

<u>Exercícios de fixação</u>

44) Determinar a equação da hipérbole de focos $F_1(5, 0)$ e $F_2(-5, 0)$ e de vértices $V_1(3, 0)$ e $V_2(-3, 0)$

Resp. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

45) Determinar a equação da hipérbole de focos $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$, sabendo que o eixo real mede 6 unidades.

Resp. $\frac{y}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

46) Determinar a medida do eixo real, do eixo imaginário e a distância focal da hipérbole de equação $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Resp. 2a = 8, 2b = 6 e 2c =10

47) Achar a equação da hipérbole de centro (4, -2) e eixo real paralelo ao eixo x, sabendo que 2a = 10 e 2b = 4.

Resp. $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

48) Achar as coordenadas do centro, do vértice e do foco da hipérbole $y^2 - x^2 + 2y - 2x - 1 = 0$.

Resp. $F_1(-1,\ -1+\sqrt{2})$ e $F_2(-1,\ -1-\sqrt{2})$; $V_1(-1, 0)$ e $V_2(-1, -2)$

49) Determinar a equação da hipérbole de focos $F_1(0, 6)$ e $F_2(0, -6)$, sabendo que o eixo imaginário tem 8 unidade de comprimento.

Resp. $\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1$

50) Numa hipérbole a distância focal é 16 e o comprimento do eixo real é 12. Determine a equação da hipérbole, sabendo que os focos pertencem ao eixo das abscissas.

Resp. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1$

51) Determinar a equação da hipérbole de focos $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$, e vértices $V_1(0, 1)$ e $V_2(0, -1)$

Resp. $y^2-\frac{x^2}{15}=1$

52) Os focos de uma hipérbole são $F_1(4, 0)$ e $F_2(-4, 0)$ e o eixo conjugado tem $2\sqrt{3}$ de comprimento. Determine a equação da hipérbole.

Resp. $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{3}=1$

53) Os focos de uma hipérbole são $F_1(\sqrt{13}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{13}, 0)$ e passa pelo ponto P(1, 0). Determine a equação da hipérbole.

Resp. $x^2 - \frac{y^2}{12} = 1$

54) Determine as coordenadas dos focos, dos vértices e a excentricidade da hipérbole de equação $4x^2 - 25y^2 = 100$.

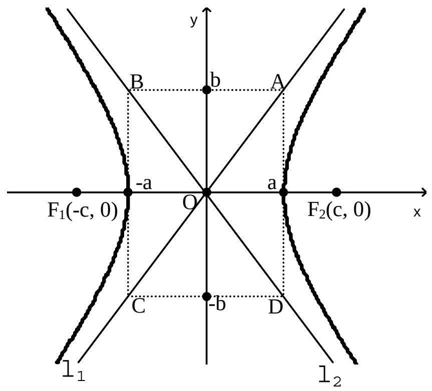
Resp. $F_1(\sqrt{29}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{29}, 0)$; $V_1(5, 0)$ e $V_2(-5, 0)$; $e = \frac{\sqrt{29}}{5}$

55) Determine a equação da hipérbole de focos $F_1(5, 0)$ e $F_2(-5, 0)$ e de excentricidade $e = 5/3$.

Resp. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Assíntotas da hipérbole

Na hipérbole da figura a seguir temos um retângulo ABCD cujos lados medem 2a e 2b.



As retas e l_2, que contém as diagonais desse triângulo de lados 2a e 2b, são chamadas de *assíntotas da hipérbole*.

As equações das assíntotas são:

- Eixo real horizontal e centro O(0, 0): assíntotas passam pela origem e têm equações

$$(l_1)\ y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad (l_2)\ y = \frac{-b}{a}x$$

- Eixo real vertical e centro O(0, 0): assíntotas passam pela origem e têm equações

$$(l_1)\ y = \frac{a}{b}x \quad \text{e} \quad (l_2)\ y = \frac{-a}{b}x$$

- Eixo real horizontal e centro $C(x_0, y_0)$: assíntotas têm equações

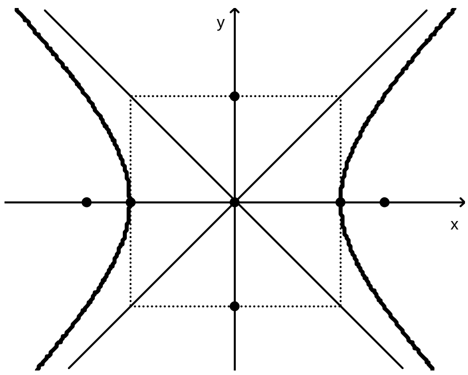
(l_1) $(y - y_0) = \frac{b}{a}(x - x_0)$ e (l_2) $(y - y_0) = \frac{-b}{a}(x - x_0)$

- Eixo real vertical e centro $C(x_0, y_0)$: assíntotas têm equações

(l_1) $(y - y_0) = \frac{a}{b}(x - x_0)$ e (l_2) $(y - y_0) = \frac{-a}{b}(x - x_0)$

Hipérbole eqüilátera

Uma hipérbole é chamada eqüilátera quando os semi-eixos, real e imaginários são iguais. Ou seja, quando a = b, conforme figura a seguir.



Exercícios de fixação

56) Determine a excentricidade e a equação das assíntotas da hipérbole $4x^2 - y^2 = 16$

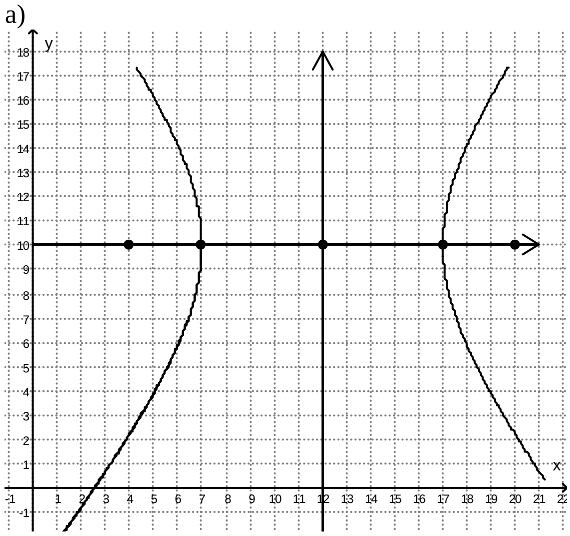
Resp. $e = \sqrt{5}$ e $y = \pm 2x$

57) Determinar a excentricidade, as assíntotas e a equação da hipérbole de eixo real horizontal medindo 10, centro na origem e foco $F_1(-7, 0)$

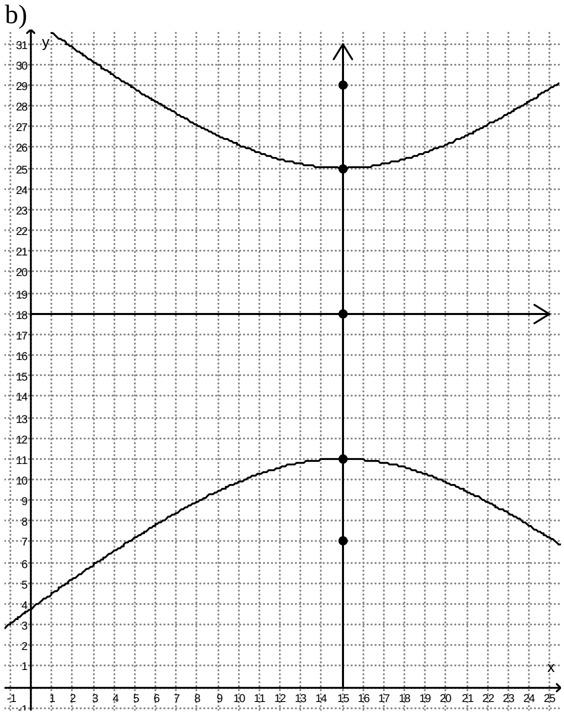
Resp. $e = \frac{7}{5}$; $y = \pm \frac{2\sqrt{6}}{5}x$; $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$

58) Determine a equação de cada hipérbole representa a seguir.

a)



b)



Resp. a) $\frac{(x-12)^2}{25}-\frac{(y-10)^2}{39}=1$ b) $\frac{(y-18)^2}{49}-\frac{(x-15)^2}{72}=1$

59) Dada a hipérbole $5x^2 - 4y^2 - 20x - 8y - 108 = 0$, determinar:

a) o centro

b) o eixo real

c) os vértices

d) o eixo imaginário

e) os focos

f) o gráfico da hipérbole

Resp. a)(2, -10) b)4 c) $V_1(0, -1)$ e $V_2(4, -1)$ d) $2\sqrt{5}$ e) $F_1(-1, -1)$ e $F_2(5, -1)$

60) Determine as equações das assíntotas das seguintes hipérboles.

a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{64}=1$

c) $4x^2-8y^2=1$

Resp. a) $y=\pm\frac{3x}{4}$ b) $y=\pm\frac{8x}{7}$ c) $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

61) Seja a hipérbole de equação $4y^2 - x^2 = 16$. Determine a equação da circunferência cujo centro coincide com o centro da hipérbole e que passa pelos focos da hipérbole.

Resp. $x^2 + y^2 = 20$

62) (UFPB) Qual a distância focal na hipérbole $18x^2 - 7y^2 - 36x - 108 = 0$?

Resp. 10

63) Ache a equação da hipérbole de centro (-3, 4) e eixo real paralelo ao eixo y, nos seguintes casos:

a) $2a = 20$ e $2b = 26$

b) $2b = 6$ e $2c = 12$

Resp. a) $\frac{(x-12)^2}{25}-\frac{(y-10)^2}{39}=1$ b) $\frac{(y-18)^2}{49}-\frac{(x-15)^2}{72}=1$

64) Calcule a área do triângulo cujos vértices são a origem e as intersecções da hipérbole $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{2}=1$ com a parábola $y = x^2$.

Resp. $x^2 + y^2 = 20$

BIBLIOGRAFIA:

GIOBVANNI, José Ruy e BONJORNO, José Roberto. Matemática: uma nova abordagem, vol. 3, ed. 2. FTD, São Paulo, 2001.

KIYUKAWA, Rokusaburo e SMOLE, Kátia Cristina Stocco. Matemática, vol. 3. Saraiva, São Paulo, 1999.

GENTIL, Marcondes e GRECO, Sérgio. Matemática para o 2º grau, vol. 3: geometria analítica, números complexos, polinômios, limites, derivadas e integrais. Ática, São Paulo, 1996.