UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADO AO CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE: contribuições da História da Matemática

JOSÉ ROBERTO COSTA JÚNIOR

NATAL – RN
2010

JOSÉ ROBERTO COSTA JÚNIOR

ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADO AO CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE: contribuições da História da Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática sob a orientação do Professor Dr. Paulo Cézar de Faria.

NATAL – RN

2010

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial Especializada do Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Costa Junior, José Roberto.
Atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade: contribuições da história da matemática. – Natal, 2010.
237 f. : il.

Orientador: Paulo Cézar de Faria.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

1. História da matemática – Dissertação. 2. Proporcionalidade – Atribuição de significado – Dissertação. 3. Educação matemática – Dissertação. I. Faria, Paulo Cezar de. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET CDU 51(091)

JOSÉ ROBERTO COSTA JÚNIOR

ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADO AO CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE: contribuições da História da Matemática

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. John Andrew Fossa (Presidente)

Profa. Dra. Rosa Lucia Sverzut Baroni - Externo

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes - UFRN

Profa. Dra. Giselle Costa de Souza (UFRN) - Suplente

Este trabalho é dedicado a minha avó Josefa e aos meus pais José Roberto e Sônia Maria.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter sempre iluminado meus passos.

A minha avó Josefa, por ter sempre me incentivado a trilhar por bons caminhos, sobretudo por me fazer acreditar que a educação é o caminho para nos tornarmos verdadeiros cidadãos.

A meu orientador Paulo Cézar com quem muito aprendi.

Aos meus pais, por terem me encaminhado até aqui.

A minha irmã Roseane e sua família, pelo apoio dado na primeira fase do mestrado.

Aos demais irmãos, pelo incentivo que sempre me deram.

A meu amigo José Roberto com quem posso contar sempre.

Aos amigos Sidney, Edigites e Maroni pelo companheirismo constante e aos demais amigos do mestrado.

Aos professores Vicente Garnica, Rosa Baroni e Bernadete Morey pelas contribuições no exame de qualificação.

Aos professores de matemática que fizeram parte desta pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática de Rio Claro – SP pela valiosa vivência oportunizada pelo PROCAD.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS..........8

LISTA DE FIGURAS..........9

LISTA DE SLIDES..........10

RESUMO..........12

ABSTRACT..........13

INTRODUÇÃO..........14

FOCALIZAÇÃO DO PROBLEMA..........16

PROBLEMA A SER INVESTIGADO..........35

QUESTÃO DE ESTUDO E OBJETIVOS..........35

JUSTIFICATIVA..........36

1 REFERENCIAL TEÓRICO..........39

1.1 A IMPORTÂNCIA DA COMPREENSÃO DO DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO MATEMÁTICO..........40

1.2 ASPECTOS HISTÓRICOS QUE ENVOLVEM O CONCEITO DE DE PROPORCIONALIDADE..........42

1.2.1 As proporções no contexto da matemática egípcia..........42
1.2.2 As proporções no contexto da matemática babilônica..........46
1.2.3 As proporções no contexto da matemática grega..........60
1.2.4 As proporções no contexto da matemática hindu..........74
1.2.5 As proporções no contexto da matemática árabe..........76
1.2.6 A proporcionalidade na Idade Média e no Renascimento..........78

1.3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDADE..........86

1.4 ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADO..........95

1.5 A IMPORTÂNCIA DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA..........98

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS..........106

2.1 O TIPO DE ESTUDO..........106

2.2 AS ETAPAS DO ESTUDO..........107

2.3 OS INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS..109
2.4 PROCEDIMENTOS...113
2.4.1 Para as notas de campo..115
2.4.2 Para o questionário..116
2.4.3 Para as atividades..120
2.4.4 Para a entrevista..131

2.5 OS SUJEITOS...133

3 RESULTADOS.. 134

3.1 PARA AS NOTAS DE CAMPO...134

3.2 PARA O QUESTIONÁRIO..138

3.3 PARA AS ATIVIDADES..155

3.4 PARA A ENTREVISTA..165

4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS...184

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS............................... 196

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS...200

ANEXOS

ANEXO 1...208
ANEXO 2...209
ANEXO 3...214
ANEXO 4...215
ANEXO 5...216
ANEXO 6...217
ANEXO 7...223

LISTA DE TABELAS

TABELA 1- Interpretação da tableta babilônica de multiplicação..48

TABELA 2 - Distribuição da freqüência dos sujeitos de acordo com o gênero.....................138

TABELA 3 - Distribuição da freqüência dos sujeitos de acordo com a idade.......................139

TABELA 4 - Distribuição da freqüência dos sujeitos de acordo com o tipo de instituição onde fizeram o ensino superior...139

TABELA 5 - Distribuição da freqüência dos sujeitos de acordo com o período em que fizeram o ensino superior...140

TABELA 6 - Distribuição da freqüência dos sujeitos de acordo com o tipo de curso no qual é graduado (ou está se graduando)..140

TABELA 7 - Distribuição da freqüência dos sujeitos de acordo com o tempo de docência..141

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1- Fragmento do Papiro de Rhind...43
FIGURA 2- Tableta babilônica de multiplicação..48
FIGURA 3- Tableta babilônica de recíprocos..49
FIGURA 4- Tableta babilônica Plimpton 322..51
FIGURA 5- Fragmento da tableta babilônica Plimpton 322..52
FIGURA 6- Tabela de interpretação da tableta babilônica Plimpton 322................................53
FIGURA 7- Face pentagonal do dodecaedro..62
FIGURA 8a - Semi-círculo sobre a diagonal de um quadrado...65
FIGURA 8b - Triângulo Isósceles..66
FIGURA 8c - Crescente ou lúnula de Hipócrates..66
FIGURA 9 – Segmentos comensuráveis...67
FIGURA 10- Construção de um segmento em média e extrema razão...................................74
FIGURA 11- Fragmento do livro Divina Proporção..81
FIGURA 12- Pintura da Monalisa..82
FIGURA 13- Triângulo Isósceles Áureo...83

LISTA DE SLIDES

ATIVIDADE 1

SLIDE 1 – Contexto Histórico sobre a Civilização Mesopotâmica.......................................121

SLIDE 2 - Mapa da antiga Civilização Mesopotâmica...122

SLIDE 3 – Texto sobre o sistema de numeração cuneiforme dos Babilônios........................122

SLIDE 4 – Texto sobre o sistema de numeração dos Babilônios..122

SLIDE 5 – Apresentação da escrita cuneiforme. Mostra os símbolos utilizados pelos Babilônios para o registro matemático, acompanhados de sua representação decimal, tal qual é utilizada atualmente...123

SLIDE 6 – Sistema de numeração cuneiforme..124

SLIDE 7 – Texto sobre o sistema de numeração Babilônica...124

SLIDE 8 – Representação numérica em notação sexagesimal...125

SLIDE 9 – Tableta Babilônica de multiplicação...125

SLIDE 10 – Questionamentos direcionados aos professores sobre a tableta de multiplicação Babilônica...126

ATIVIDADE 2

SLIDE 1 - Conteúdo do slide apresentado para abordar o contexto histórico sobre o Egito...126
SLIDE 2 – Mapa da antiga Civilização Egípcia...126
SLIDE 3 – Questionamentos direcionados aos professores sobre o sistema de numeração egípcio...127
SLIDE 4 – Apresentação dos sistemas de escrita egípcia..127
SLIDE 5 - Representação numérica egípcia..128
SLIDE 6 – Sistema de numeração egípcio..128
SLIDE 7 - Pontos destacados sobre o sistema de numeração egípcio..................................129
SLIDE 8 – Formas de representação numérica egípcia..129
SLIDE 9 – Texto sobre o conhecimento matemático egípcio...130
SLIDE 10 – Apresentação de uma equação egípcia...130
SLIDE 11 – Método de resolução da equação egípcia em notação moderna........................131

RESUMO

Este estudo é o resultado de um trabalho que aborda a História da Matemática como fonte de atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade. Adotamos a metodologia de pesquisa qualitativa e trabalhamos com um grupo de professores da rede pública de ensino dos níveis fundamental e médio da cidade de Pocinhos - PB. Para a coleta de dados utilizamos as notas de campo, o questionário, uma sequência de atividades e a entrevista semi-estruturada como instrumentos. O estudo teve como objetivo conhecer os significados atribuídos ao conceito de proporcionalidade por meio de atividades mediadas pela História da Matemática, bem como averiguar se uma abordagem desta natureza possibilita modificação nesse sentido. Os resultados obtidos através da análise dos dados indicaram que as atividades trouxeram contribuições no que se refere a alcançar objetivos. Por outro lado mostra, também, que existe um longo percurso a ser trilhado no sentido de tornar História da Matemática subsídio efetivo na prática desses professores, tendo em vista a falta de formação nesta área de conhecimento bem como a carência de uma abordagem adequada da História da Matemática nos livros didáticos de matemática.

Palavras-chave: Proporcionalidade, Atribuição de significados, História da Matemática e Educação Matemática.

ABSTRACT

This study is the result of a work which approaches the Mathematics History how source of the meaning's attribution in the proportionality concept. We adopt the methodology of the source qualitative and we work with a group of teachers from instruction's public system of the fundamental and medium level from Pocinhos City – Paraíba. For the data collection, we use the field notes, the questionnaire, a sequence of activities and the interview semi-structured like instruments. The study had how objective to know the significates attributeds to proportionality concept through of the activity mediate from Mathematics History, besides to investigate if a approach of the nature enables modification according to this sense. The results obtaineds though the data analysis indicate that the activities bring contributions which refer to achieve objectives. On the other hand they also showed that we have a long trajectory to be trailed in the meaning of to turn the Mathematics History a subsidy effective in the teachers' practice, in view of the formation absence in the knowledge area, besides the necessity of the approach adequated of the Mathematics History in the didatics books of Mathematic.

KEY WORDS: Proportionality, Significates attributeds, Mathematics History and Education Mathematics.

INTRODUÇÃO

A partir dos últimos semestres do curso de licenciatura em matemática, interessei-me por conhecer mais sobre Educação Matemática. Ao iniciar um curso de especialização em ensino de matemática, essa busca aos poucos foi se concretizando, pois neste curso a ênfase dada às questões do ensino de matemática era bem mais acentuada do que na graduação. Ainda neste curso desenvolvemos um estudo monográfico fundamentado em resolução de problemas, o que nos acrescentou conhecimento oriundo da área de Educação Matemática.

Na ocasião adquirimos o livro organizado por Bicudo (1999) e, desde então, passamos a nos dedicar mais aos assuntos relacionados à pesquisa acerca do ensino de matemática. A partir deste contato inicial com os estudos realizados na área de Educação Matemática, aos poucos nosso interesse se direcionou para a área da História da Matemática. Apesar de não conhecermos profundamente esse tema, acreditava que o mesmo era bastante fecundo e oferecia possibilidade de suporte teórico e prático ao professor de matemática.

O mestrado foi a grande oportunidade de por em prática um estudo mais focado na História da Matemática. Neste estudo buscamos uma correlação entre História da Matemática e a sua importância na prática pedagógica de professores de matemática. A História da Matemática como área de pesquisa apresenta uma variedade de caminhos a serem percorridos. Entre esses tantos caminhos escolhemos um deles, inclusive, apontado pelo Prof. Hans Wussing (1997 apud BARONI e NOBRE, 1999, p. 130) “como um dos mais investigados no panorama internacional: *A história de problemas e conceitos*”. Já que parte do nosso estudo traça um histórico sobre o conceito de proporcionalidade.

Em nossa pesquisa traçamos um breve histórico sobre o conceito de proporcionalidade com a finalidade de conhecer sua origem, verificar de que maneira esse conceito era empregado pelos povos antigos, bem como conhecer alguns dos problemas onde esse conceito estava presente, além de identificá-lo no procedimento de resolução de problemas; seja como um conceito inato da situação matemática em questão ou como um método de resolução.

Por outro lado, investigamos junto a um grupo de nove professores de matemática os significados que estes apresentariam acerca do conceito de proporcionalidade por ocasião da apresentação de atividades históricas que envolvem o referido conceito. Tais significados poderão surgir a partir da interpretação dos registros numéricos presentes em uma tableta matemática babilônica e num método de resolução de equação adotado pelos egípcios.

Assim, este estudo teve o intuito de estimular a reflexão sobre a maneira pela qual a História da Matemática pode subsidiar a prática pedagógica do professor de matemática, a partir de seu envolvimento com situações históricas que envolvem a formalização de um conceito.

No primeiro capítulo, uma consulta a determinadas obras que tratam do conceito de proporcionalidade permitiu focalizar o problema a ser investigado, bem como identificar a questão de estudo, os objetivos e a justificativa do presente trabalho.

No segundo capítulo, é apresentado um estudo histórico sobre o conceito de proporcionalidade. Expomos nesse capítulo alguns aspectos históricos relativos ao desenvolvimento do conceito de proporcionalidade presente em diferentes civilizações, em diferentes épocas. Esta abordagem nos forneceu a ideia do desenvolvimento do conceito em questão e, consequentemente, embasou o referencial teórico do presente estudo.

No terceiro capítulo, mostramos o método de investigação adotado neste estudo. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo. Neste capítulo descrevemos as etapas do estudo, os instrumentos de coleta de dados, os procedimentos e os sujeitos participantes do estudo.

No quarto capítulo, exibimos os resultados obtidos. No que se refere aos dados quantitativos, apresentamos a maneira que os dados foram analisados. Com relação aos dados qualitativos, descrevemos os resultados obtidos por meio da análise de conteúdo expresso pelos sujeitos, por meio de diferentes instrumentos de coleta de dados utilizados.

No quinto capítulo, discutimos os resultados obtidos à luz do referencial teórico para atender as questões desse estudo.

Por fim, tecemos algumas considerações sobre o estudo realizado, bem como certas implicações que os resultados obtidos poderão originar.

Focalização do problema

Muitos trabalhos em Educação Matemática, Educação em Ciências e Psicologia Cognitiva tratam de proporções ou proporcionalidade, a saber: Costa (2005), Pontes, (1996), Bernal (2004), Ávila (1985), Schliemann e Carraher (1997), Spinillo (1997, 2002), Aguiar (1980), Magalhães (1990), Oliveira (2000), entre outros.

Costa (2005) apresenta a análise e a comparação dos conteúdos razões e proporções entre três livros didáticos e de cada um deles com a proposta curricular correspondente à década de sua publicação, no intuito de verificar se os conteúdos razões e proporções nos três livros didáticos estão em sintonia com os documentos oficiais relativos às reformas do ensino.

Os três livros didáticos de matemática analisados pelo autor são referentes ao Ensino Básico, especificamente, livros do 7º ano do Ensino Fundamental. Dessa forma, o primeiro livro didático foi comparado com o projeto de um guia curricular do Estado de São Paulo de 1972, o segundo comparado com a proposta curricular do Estado de São Paulo de 1986, enquanto o terceiro foi comparado com os Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (1998).

As comparações realizadas entre esses livros e as comparações destes com os documentos oficiais visam conhecer se tais livros são adequados às sugestões contidas nos referidos documentos, que fundamentaram as três últimas reformas curriculares no Estado de São Paulo.

O interesse de Costa (2005) por esse assunto surge de sua própria prática docente, a qual permitiu a ele identificar duas importantes questões: o fato de os professores terem o livro didático como única fonte de pesquisa para a elaboração das aulas e por observar as dificuldades dos alunos em interpretar problemas, principalmente aqueles que envolviam grandezas inversamente proporcionais.

Em suas conclusões Costa (2005) afirma que os três livros didáticos analisados dão subsídios parciais aos professores, pois não estão plenamente elaborados de acordo com os documentos oficiais dos órgãos governamentais, a exemplo dos Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (1998), do Projeto de Guia Curricular de 1972 e da Proposta Curricular do Estado de São Paulo vigente no ano de 1986.

A partir do exposto por Costa (2005), podemos dizer que os referidos documentos se apresentam como ponto de apoio ao trabalho docente. Contudo, estes documentos (tanto os livros quanto as propostas curriculares) deixam clara a responsabilidade do professor no êxito do ensino da Matemática. Em geral os livros didáticos apresentam uma sequência lógica e quando o professor deseja fazer alguma modificação ou desconsiderar uma noção ou outra, cabe a ele fazer escolhas e adaptações nas ações de ensino para que ocorra mudança em sua prática docente.

Encontramos em Pontes (1996) um estudo sobre Medidas e Proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho. A autora apresenta uma análise da relação existente entre a matemática escolar e a que permeia as atividades cotidianas dos trabalhadores de diferentes profissões que não dependem de escolarização formal. A referida autora explora em seu trabalho os conceitos de Medida e Proporcionalidade por se tratarem daqueles que normalmente mais usamos no nosso dia-a-dia.

Para tal finalidade, Pontes (1996) elabora e analisa uma sequência didática aplicada em classes de 7º e 8º anos. Paralelamente a esta atividade e com o mesmo objetivo, foram observados uma costureira, um comerciante, uma cozinheira, um marceneiro, um mestre de obras e um oleiro em suas jornadas de trabalho, procurando perceber que itens eram abordados e como eram usados os conceitos de Medida e Proporcionalidade por estes profissionais.

O estudo realizado por Pontes (1996) confronta os dois tipos de abordagens (a matemática escolar e a matemática que permeia as atividades cotidianas dos trabalhadores) e constata que os itens e as estratégias mais utilizadas pelos trabalhadores não são levadas em consideração nas aulas de matemática, o que caracteriza, segundo a autora, um divórcio entre o "o quê" e "como" se ensina matemática na escola e "o quê" e "como" se usa essa disciplina na prática cotidiana do trabalhador comum.

Para finalizar, Pontes (1996) lança algumas sugestões para aqueles que fazem o ensino de matemática na perspectiva de abordagens cotidianas. As sugestões lançam mão de metodologias que valorizam a resolução de problemas e se inserem na Etnomatemática, na Modelagem Matemática, entre outras. Essas metodologias possibilitam o envolvimento do aluno como sujeito ativo no processo de ensino e aprendizagem.

Em Bernal (2004) encontramos um estudo sobre como identificar a proporção no que diz respeito ao saber a ensinar e, ao saber ensinado em turmas de 7º ano do Ensino Fundamental. Para tanto, a autora busca evidenciar questões relativas ao surgimento do conceito de proporção e o seu tratamento como objeto matemático. Esta autora busca tais evidências por meio de um breve estudo histórico e de um estudo sobre as publicações produzidas por instituições de formação de professores. A autora realiza também um estudo em livros didáticos de matemática do 7º ano do Ensino Fundamental, além de uma observação em classe do mesmo ano deste nível de ensino.

Além destes livros, a autora analisou o livro didático de Quintella de 1958. Segundo Bernal (2004), a escolha deste último justifica-se pelo seu uso no Brasil durante décadas, o que pode ter influenciado escritores dos livros didáticos posteriores. O estudo realizado pela autora busca identificar o objeto proporção como saber a ensinar e quanto saber ensinado em turmas do 7º ano do Ensino Fundamental.

Para a primeira tarefa, ou seja, para identificar o objeto proporção como saber a ensinar, Bernal (2004) evidenciou questões relativas ao surgimento do saber proporção e ao seu tratamento como objeto matemático, por meio de um breve estudo histórico e em um estudo de publicações dirigidas à formação de professores. Estas publicações remetem a artigos produzidos por Ávila (1986) e Lima (1986, 1988, 1991, 1999) e ao livro *Aritmética Progressiva* de Antonio Trajano (1927); sendo este último considerado pela referida autora como um “tratado”.

Feito estes estudos a autora identificou duas abordagens das questões relativas à proporção. Na primeira, proporção é tratada como objeto matemático, enquanto que na segunda, há o estudo da noção de proporcionalidade e de grandezas proporcionais, e o objeto matemático proporção é explorado de maneira formal.

A primeira abordagem é identificada no estudo histórico e no “tratado” de Trajano, pois desde os tempos mais remotos a proporção já era tratada como objeto matemático, a exemplo da Teoria das Proporções de Eudoxo (408-355 a.C.), que é evidenciada no volume V da obra Elementos de Euclides (cerca de 300 a.C.). Tal teoria permitiu superar a crise causada pela descoberta dos incomensuráveis e tendo sido estudada ao longo do tempo, dá origem, no século XIX, o sistema de números reais.

A segunda abordagem identificada pela referida autora, tem origem mais recente e é encontrada nas publicações de Ávila (1986) e Lima (1986, 1988, 1991, 1999). Nestas publicações as questões relativas à proporção são tratadas no estudo de proporcionalidade e de grandezas ou variações proporcionais. Estas questões se inserem no contexto dos números reais, das igualdades e das equações. Este tipo de abordagem segundo Bernal (2004) permite identificar o objeto matemático proporção como saber a ensinar.

Para identificar o objeto matemático proporção como saber ensinado, Bernal (2004) utilizou como subsídio o estudo de livros didáticos e a observação em classe. Estes estudos revelaram semelhança com o primeiro tipo de abordagem descrita anteriormente, já que alguns livros didáticos analisados oferecem tratamento formal ao objeto matemático proporção, com a definição: proporção é a igualdade entre duas razões. Neste mesmo sentido, a observação em sala mostrou tratamento semelhante ao objeto matemáticos proporção, dado pelo professor da turma.

Uma das contribuições do estudo realizado por Bernal (2004) é que o estudo do objeto proporção permite a identificação de abordagens distintas sobre as questões relativas a este saber.

Ávila (1985) descreve sobre o modo como Eudoxo, já na antiguidade, descobriu um procedimento muito engenhoso para resolver a primeira crise de fundamentos a ocorrer na Matemática, ocasionada pela descoberta dos incomensuráveis. Para isso, Ávila inicia sua exposição apresentando a definição de igualdade de frações, em seguida define razão entre grandezas comensuráveis. A partir daí apresenta a teoria das proporções de Eudoxo, cujo foco principal era resolver o problema da incomensurabilidade.

Na Antiguidade havia uma classe de filósofos conhecida por pitagóricos que lidava com a matemática e acreditava que o universo era governado pelos números inteiros. Tudo o que existia podia ser expresso por uma medida numérica inteira, ou seja, todas as grandezas (comprimento, área, volume, etc.) podiam ser associadas a um número inteiro ou a uma razão entre dois números inteiros. A descoberta dos incomensuráveis, isto é, daquelas grandezas que não podem ser expressas por meio de números inteiros, acabou por gerar no seio da escola pitagórica uma séria crise.

Para Wussing (1998) a incomensurabilidade pode ser definida a partir da medida de segmentos. Os segmentos são chamados de incomensuráveis, quando a medida de cada um deles não é um múltiplo inteiro de um terceiro que se escolha como unidade.

A descoberta dos incomensuráveis causou uma grande crise na matemática da época porque os números inteiros se revelaram insuficientes para definir razões entre duas grandezas, além de destituir a generalidade da teoria das proporções dos pitagóricos, pois todas as demonstrações eram baseadas no número como coleção de unidades. O segmento já não podia mais ser considerado como indivisível, mas infinitamente divisível.

Os pitagóricos não levaram adiante o estudo dos incomensuráveis, pois caso o fizessem, teriam que negar suas próprias bases filosóficas. O teorema de Tales passou a ser visto como incompleto pelos pitagóricos, assim como muitos outros assuntos matemáticos conhecidos. Surgia, então, a necessidade de se criar uma teoria sobre razões, envolvendo grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

Decorridos mais de dois milênios, foi somente no século XIX que os números voltaram a exercer um papel mais confiável nos fundamentos da matemática, sobretudo quando Dedekind (1831-1916) elaborou uma teoria dos números reais, baseando-se na definição 5 de Eudoxo (cerca de 408-355a.C), revivendo a antiga crença pitagórica de que os números são o fundamento de tudo.

Segundo Boyer (1974), Dedekind se voltou para a questão do preenchimento dos "buracos" da reta quando dava aulas de cálculo. Após refletir sobre a questão, Dedekind passa a investigar sobre o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais? E foi buscar inspiração na teoria das proporções de Eudoxo.

De acordo com Boyer (1974), na definição de Eudoxo separa-se a fração $\frac{m}{n}$ em três casos: $na > mb$ ou $na = mb$ ou $na < mb$. Assim, Dedekind pensou em separar as frações em duas classes: aquelas com $na > mb$ e as com $na \leq mb$. A este par de classes ele deu o nome de corte. Ele afirmou que o princípio da completude ou da continuidade está no fato de que toda vez que “cortamos” a reta em dois segmentos A e B existe um ponto P que produz tal corte da reta e a separa em duas partes.

A construção dos números reais, feita por Dedekind, tomou como ponto de partida o domínio dos números racionais. Ao invés de identificar o número real como uma sequência convergente de racionais como era comum em alguns de seus antecessores, ele encarava o número real como se fosse gerado pelo poder da mente em classificar os números racionais.

Ainda segundo Boyer (1974) esse esquema de classificação, chamado de corte, partição, separação, ou seção de Dedekind se refere a que se todos os pontos de uma reta estão em duas classes tal que todo ponto da primeira classe encontra-se à esquerda de todo ponto da segunda classe, então existe um e somente um ponto que produz esta divisão. Dedekind chegou à conclusão que a essência da continuidade de um segmento de reta estava na separação dos números racionais em duas classes.

Ávila (1985) conclui apontando algumas implicações para o ensino da matemática, destacando que o ensino da geometria acompanhou essa evolução das ideias que restituiu aos números lugar de destaque nos fundamentos da matemática. Acrescenta ainda, que quando ensinamos geometria admitimos os números reais e a possibilidade de sempre atribuirmos um número à razão de dois segmentos, mesmo que ele seja irracional.

Mudando o foco para o âmbito da Psicologia Cognitiva, estudos sobre aprendizagem e desenvolvimento da noção de proporcionalidade oferecem contribuições para a Educação Matemática. No Brasil, encontramos estes estudos em Schliemann e Carraher (1997), Spinillo (1997, 2002), Aguiar (1980), Magalhães (1990), Oliveira (2000), entre outros.

Schliemann e Carraher (1997) desenvolveram um estudo que possibilitou a descrição de um corpo de conhecimentos sobre razão e proporção. As autoras procuraram caracterizar o que é razão e proporção, além de realizar uma resenha de pesquisas sobre a aprendizagem de razão e proporção fora da sala de aula. O trabalho desenvolvido por estas autoras objetiva comparar as estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade utilizadas por crianças que aprendem sobre este conceito tanto na escola quanto em situações cotidianas.

Em suas conclusões, Schliemann e Carraher (1997) afirmam que crianças e adultos com pouca ou nenhuma escolarização possuem a noção de proporcionalidade. Estes sujeitos resolvem problemas que envolvem este conceito utilizando estratégias outras, a exemplo da estratégia escalar. Esta estratégia consiste em encontrar a solução de um problema a partir da análise das relações numéricas no interior de uma mesma variável. Nesta abordagem, cada variável permanece independente da outra e transformações paralelas são realizadas em cada uma delas mantendo-se a relação proporcional.

A aplicação da estratégia escalar é exemplificada, pelas autoras, através do seguinte problema:

> “Se três laranjas custam 15 cruzeiros, qual o preço de 9 laranjas?”. Aplicando a estratégia escalar para a resolução do problema tem-se a seguinte solução: “9 laranjas são três vezes mais que 3 laranjas, então é preciso pagar três vezes mais, isto é, 15 vezes 3, o que dá 45”. Observamos que as transformações ocorrem em cada variável, porém mantendo-se a relação proporcional existente entre elas. (SCHLIEMANN e CARRAHER, 1997, p. 18)

Essas autoras afirmam também que este tipo de estratégia, apesar de apresentar limitações, deveria servir como ponto de partida para a aprendizagem formal do conceito de proporcionalidade.

Spinillo (2002) examina a possibilidade de crianças aprenderem proporções, usando o referencial de “metade”, que é uma estratégia tomada como referência, para auxiliar a criança a lidar com as quantidades e as relações em tarefas de proporção, de maneira sistemática, transferindo sua aplicação para outras tarefas de proporção consideradas difíceis. Para atingir tal objetivo, adota um planejamento experimental envolvendo as etapas pré-teste, pós-teste e uma intervenção.

A intervenção utilizada foi definida como de natureza tutorada, já que a autora mantinha diálogo com a criança, lançava desafios, fornecia e solicitava explicações no momento da resolução de tarefas de proporção. Esta parte do estudo foi apresentada em uma única sessão, com duração de 40 minutos e tinha por objetivo levar a criança a usar sistematicamente o referencial de metade, discriminar e explicitar as relações de primeira e de segunda ordem envolvidas na solução da tarefa.

A tarefa de proporção utilizada na intervenção foi uma versão da tarefa de Bruner & Kenney de 1966 que consta de retângulos de papel em variados tamanhos, sendo que cada um deles tem o seu interior com uma parte preta e outra branca. Alguns desses cartões apresentam a parte preta maior que a branca, outros a parte preta menor que a branca e por fim, uns possuem a parte preta igual à parte branca.

Nesta tarefa apresentavam-se aos alunos alguns retângulos que serviriam de modelos enquanto os outros seriam as alternativas. Para resolver esta tarefa, era necessário comparar as relações internas branco/preto em cada alternativa (relações de primeira ordem) e depois decidir qual delas tinha a mesma relação branco/preto que o modelo (relação de segunda ordem).

Para esclarecer mais sobre os estudos realizados acerca do conceito de proporcionalidade, a autora explica que as atividades utilizadas para a investigação da compreensão relativa a este conceito são, em geral, agrupadas em duas classes de problemas: tarefas de incógnita e tarefas de comparação.

As tarefas classificadas como tarefas de incógnita são aquelas em que três valores são dados, sendo necessário determinar o valor da incógnita, mantendo-se no segundo par de valores a mesma relação proporcional verificada no primeiro par (relação de primeira ordem). As tarefas de comparação são aquelas em que os quatro valores são dados e o sujeito precisa determinar se existe ou não uma equivalência (relação de segunda ordem) entre o primeiro e o segundo par de valores (relações de primeira ordem). As tarefas utilizadas variam de acordo com as dimensões envolvidas, que podem ser classificadas em: complementares e não-complementares. As dimensões complementares envolvidas em uma tarefa de proporção se referem às quantidades (contínuas ou discretas) que são partes que, juntas, formam um mesmo todo; enquanto que as dimensões não-complementares são quantidades que não constituem o mesmo todo.

A autora refere-se a outros trabalhos dessa mesma natureza nos quais já ressaltava a importância da distinção entre dimensões complementares e não complementares para se compreender a natureza das dificuldades experimentadas por crianças ao resolver tarefas de proporção. Conclui que crianças podem ser ensinadas a fazer julgamentos proporcionais, sendo a estratégia metade um referencial importante que auxilia a lidar com as quantidades e as relações cruciais ao raciocínio proporcional.

Aguiar (1980) estuda a formação do conceito de fração idêntica e de proporcionalidade bem como as operações concretas e formais. Esta autora toma como ponto de partida as conclusões de Piaget sobre o desenvolvimento dos conceitos de frações idênticas – uma aquisição do estágio das operações concretas – e de proporcionalidade – que só se completa na fase das operações formais. No que se refere ao conceito de proporcionalidade especificamente o estudo analisou o relacionamento entre a formação dos conceitos de fração e a formação do conceito de proporcionalidade na quantificação de probabilidades.

O estudo realizado pela autora buscou também analisar a natureza dos processos envolvidos na construção dos conceitos de frações equivalentes e de frações de frações, quando da medição ou avaliação de áreas de figuras geométricas; outro foco do estudo consistiu em analisar o relacionamento entre as evoluções desses conceitos e a formação do conceito de proporcionalidade na quantificação de probabilidades. A investigação da autora partiu das conclusões sobre a gênese do conceito de fração e de proporcionalidade.

O autor, em suas considerações finais, sugere, a partir dos resultados obtidos, que existe uma evolução sincrônica entre as conceituações de frações idênticas, frações equivalentes e frações de frações, até que se completam na fase das operações concretas; além disso, as relações parte-todo e parte-parte, indicadas por Piaget, entram no desenvolvimento do conceito de frações e também no de proporcionalidade.

Um estudo sobre a transferência de estratégias na resolução de problemas de proporcionalidade entre diferentes conteúdos é feito por Magalhães (1990). Em seu trabalho, ele apresenta as estratégias utilizadas na resolução de problemas de proporções simples, por sujeitos sem instrução formal sobre proporcionalidade.

Uma das conclusões deste estudo é que houve transferência do conhecimento entre problemas de conteúdos conhecidos para estes sujeitos, como por exemplo, os que envolvem receitas culinárias bem como entre problemas de conteúdo conhecido e desconhecido; entretanto, não houve generalização das estratégias e procedimentos utilizados, de forma espontânea.

Para investigar que tipos de estratégias são utilizados por alunos do 6º ao 9º anos Oliveira (2000) realiza uma pesquisa abordando a resolução de problemas envolvendo proporção simples, direta e inversa, com o objetivo de observar se essas estratégias se modificam ou não ao longo do ensino fundamental. Além disso, a autora busca perceber possíveis relações entre o contrato didático vigente em cada uma das escolas participantes de seu estudo e as estratégias utilizadas pelos alunos.

Na conclusão da sua pesquisa a autora afirma ter verificado que, quando os alunos não conhecem o algoritmo formal para resolver problemas de proporção, no caso a regra de três, eles buscam estratégias próprias para chegarem à resposta. Foi observado, também, que existe uma diferença quanto ao índice de apropriação do significado do problema em relação às series e as escolas participantes.

Além disso, a referida autora nos esclarece que o chamado índice de apropriação do significado do problema refere-se ao total de acertos dos alunos na resolução dos problemas de proporção, sendo constituído por uma medida numérica percentual, apresentado no capítulo referente aos resultados da pesquisa. Também é confirmado que a relação estabelecida entre o índice de apropriação do significado do problema e a escola está intimamente relacionada com o contrato didático estabelecido, em cada uma das escolas.

O estudo apontou que o fato dos alunos antes do 7º ano conseguirem se apropriar do significado dos problemas de proporção simples e construírem ferramentas, diferentes da regra de três, que possibilitam a resolução de tais problemas, leva a refletir sobre como a escola aborda o estudo da proporcionalidade muitas vezes explorado apenas como o estudo do algoritmo da regra de três.

Em alguns de seus estudos Schliemann e Carraher (1997) indicam que na escola uma característica relacionada ao ensino de proporções é a utilização da regra de três; embora não se utilize este conceito em outros contextos. Para estes autores o aluno não compreenderá proporção se não tiver muitas oportunidades para discutir relações proporcionais em diversos contextos.

Spinillo (1997), em um estudo sobre proporções, nas séries iniciais do Ensino Fundamental, afirma que os educadores precisam desenvolver uma compreensão conceitual da proporção para evitar a visão simplista e errônea de que o ensino do algoritmo, a exemplo da regra de três, é o cerne do processo de aprendizagem.

Como se pôde observar, os estudos realizados no âmbito da Psicologia Cognitiva, acerca do conceito de proporcionalidade, preocupam-se com a aquisição deste conceito e a forma como ele é tratado no contexto da sala de aula. Tal aquisição caracteriza a passagem do período das operações concretas para as operações formais. Além disso, estes estudos fornecem indícios sobre a aquisição do conceito de proporcionalidade como uma possibilidade para a resolução de diversos problemas matemáticos.

A literatura consultada nos permitiu observar que, no que diz respeito ao conceito de proporcionalidade, parece existir uma lacuna no que se refere ao seu desenvolvimento histórico. Observamos, também, evidências de que, na formação inicial de professores, a História da Matemática ainda não é abordada de maneira efetiva para a construção do conhecimento matemático. Tal aspecto pode contribuir para o não uso da História da Matemática na prática pedagógica destes professores.

Embora a História da Matemática, como campo de investigação científica, no Brasil tenha apresentado significativo crescimento, ela ainda é pouco explorada na formação inicial do professor de matemática, como afirmam Baroni e Nobre (1999):

> ainda há pouco empenho em se introduzir a disciplina História da Matemática nos cursos de graduação. Naqueles cursos nos quais há esta disciplina ela é, com raras e honrosas exceções, considerada de “segunda classe”. (BARONI e NOBRE, 1999, p. 130)

Em consonância com os autores citados, está a minha experiência vivenciada enquanto estudante de curso de graduação (licenciatura em Matemática), cuja grade curricular apresentava a disciplina História da Matemática acoplada à Lógica Matemática, ou seja, tínhamos a disciplina Lógica e História da Matemática. Além do mais, era dada maior ênfase em Lógica do que em História, tratando de maneira bastante superficial temas relativos à História da Matemática, atendo-se somente a referências de algumas civilizações que deram contribuições ao desenvolvimento da matemática, com destaque a cronologias e biografias.

A nossa experiencia enquanto profissional da Educação Matemática aliada aos estudos no campo da História da Matemática: MENDES (2001), FAUVEL e MAANEN (2000), MOREY e MENDES (2005) nos leva a pressupor que parte da dificuldade enfrentada por professores em inserir a História da Matemática em suas aulas, pode está aliada a dois fatores:

uma formação inicial deficiente neste campo e uma abordagem inadequada por parte dos livros didáticos de matemática.

Neste sentido, Fauvel e Maanen (2000) abriram uma discussão sobre a importância da presença da História da Matemática como ferramenta pedagógica e as dificuldades encontradas neste tipo de opção, os argumentos contra e a favor desta inclusão, as formas em que a História da Matemática aparece no material didático e sobre as fontes utilizadas. Fatores como estes mostram que há, na atualidade, um intenso debate em torno da utilização da História da Matemática como ferramenta pedagógica na prática docente.

Cabe também ressaltar a maneira pela qual a História da Matemática vem inserida nos livros didáticos atuais e cuja questão tem servido de base para estudos e pesquisas nos últimos anos no campo da Educação Matemática.

A Secretaria de Educação Básica (SEB) analisa os livros didáticos e o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) elabora o Guia de Livros Didáticos que contém as resenhas dos tais livros. Neste guia estão inseridos os critérios de avaliação propostos aos professores. No que se refere aos aspectos teórico-metodológicos, no item contextualização, o guia determina que os conhecimentos matemáticos terão que ser contextualizados de maneira significativa no que diz respeito à História da Matemática. Esta determinação nos induz a pensar que a História da Matemática deve se fazer presente nos livros didáticos de forma tal que os alunos possam construir um determinado conhecimento matemático de maneira significativa.

Alguns autores de livros didáticos, na tentativa de acatar as diretrizes traçadas pela Secretaria de Educação Fundamental, incluem “retalhos históricos” no desenvolvimento de seus textos, de maneira imprópria. Baseados em nossa experiência como educadores matemáticos, percebemos que muitas vezes esta inserção se resume na apresentação de biografias de alguns matemáticos, de datas ou curiosidades históricas, sem a devida compreensão ou adequação desta abordagem. Isto traz como consequência uma abordagem relacionada ao conceito a ser ministrado, utilizando-se de anedotas históricas para o entendimento do conteúdo.

Há razões para supor que a questão da inserção da História da Matemática nos livros didáticos ainda não é feita de forma adequada, tendo em vista que não se observa nestes livros a proposta de ensino de um conceito matemático que contemple aspectos históricos do seu desenvolvimento.

Nesse sentido, há um problema a ser resolvido no que se refere à utilização da História da Matemática como recurso pedagógico. Os autores de livros didáticos podem incorporar a História da Matemática em suas obras por saber que estas serão avaliadas pela Secretaria de Educação Básica (SEB) e não porque realmente desejam e sabem introduzi-la de forma adequada.

Ao lado disso, pode-se refletir também sobre a seguinte questão: os Parâmetros Curriculares Nacionais BRASIL (1998) indicam a História da Matemática como um dos possíveis caminhos para o ensino de matemática em turmas do ensino fundamental e médio. O conhecimento de diversas possibilidades para o trabalho em sala de aula auxiliará o docente na construção da sua prática.

A História da Matemática aparece nos Parâmetros Curriculares Nacionais BRASIL (1998) como uma indicação de um recurso didático alternativo à prática pedagógica do professor de matemática e ressalta que esta pode contribuir de maneira significativa para o ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento:

> ao revelar a matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 42)

Alguns estudos já apontam esta questão como um fator relevante e se contrapõem à ausência do tratamento da História da Matemática na sala de aula. Em um dos trabalhos de pesquisa realizados nesta perspectiva, Morey e Mendes (2005) perceberam que os professores de matemática atuantes, principalmente, no ensino fundamental e médio, evidenciam a necessidade de um aprofundamento acerca do desenvolvimento histórico de vários tópicos da matemática abordada nestes dois níveis de ensino.

A História da Matemática como recurso pedagógico pode revelar a matemática como um valioso instrumento da humanidade na busca do conhecimento. Esse anseio humano de conhecimento muitas vezes nos leva à história e, no caso da matemática, à História da Matemática. Para Mendes (2001) a Matemática, como qualquer outra área do conhecimento humano, tem seu desenrolar evolutivo capaz de caracterizá-la como uma ciência que também se desenvolve a partir da sua própria história.

Porém, tal pressuposto parece não ser levado em consideração na prática pedagógica desenvolvida em nossas salas de aula. Se tomarmos por base os resultados dos estudos realizados na área da Educação Matemática, observaremos que o ensino-aprendizagem da matemática encontra-se desvinculado do seu contexto histórico, além de não considerar também os aspectos sócio-culturais que permeiam essa área do conhecimento.

Tal fato pode ser um indicativo da pouca efetividade da História da Matemática como recurso pedagógico nas aulas de matemática. Segundo Mendes (2001), torna-se cada vez mais difícil para os professores buscarem a História da Matemática como recurso de ensino, principalmente porque a maneira como as referências históricas aparecem nos livros didáticos ou como são abordadas durante a formação acadêmica dos professores, não os leva a uma compreensão significativa do assunto para que possam utilizá-los em suas ações docentes.

A História da Matemática constitui um dos capítulos mais interessantes do conhecimento humano. Possibilita a compreensão da origem dos conceitos que constituem a matemática conhecida hoje e nos faz refletir sobre o quanto existe de humano no seu desenvolvimento, pois permite conhecer os homens que desenvolveram esses conceitos e as circunstâncias que os originaram.

A literatura consultada evidenciou que a necessidade da exploração da História da Matemática na formação de professores não é algo recente. Porém, a sua utilização na prática docente ainda é limitada e, às vezes, não chega a ser abordada. Esta questão conduz muitos estudiosos da Educação Matemática e da História da Matemática a realizarem suas pesquisas neste foco, a fim de dar subsídios teóricos e pedagógicos aos professores.

Essa mesma literatura também nos forneceu indícios de que o conceito de proporcionalidade geralmente não é abordado por meio de estratégias que priorizem a sua compreensão e, muito menos, que explorem o seu desenvolvimento histórico.

Por outro lado, a nossa experiência enquanto professor de Matemática na Educação Básica indica que no ensino dos conteúdos não é dada oportunidades para que os alunos conheçam os aspectos históricos relacionados a eles. Simplesmente, aplicam os procedimentos indicados pelo professor em sala de aula.

Nesta perspectiva, os alunos resolvem os problemas retirando os dados numéricos necessários à busca da solução. No entanto, dificilmente percebem as relações de proporcionalidade envolvidas nas grandezas que compõem o problema dado. Além do mais, trabalhando nesta perspectiva, não se abre espaço para explorar o conceito de proporcionalidade em outras áreas do conhecimento, bem como não se relaciona este conceito a outros conceitos matemáticos. Mais uma vez, a nossa experiência profissional permite afirmar que a maioria dos alunos não consegue estabelecer relações deste conceito com outros, tais como funções, geometria, porcentagens, entre outros.

No que se refere ao ensino do conceito de proporcionalidade, nossa experiência profissional permitiu observar níveis elevados de dificuldades dos alunos para perceber a presença deste conceito em outros conceitos matemáticos, bem como uma dificuldade ainda maior quando eles são submetidos à resolução de problemas que envolvam a proporcionalidade. Por exemplo, na geometria, existem dificuldades por parte dos alunos no estudo da semelhança de triângulos, do Teorema de Tales, etc., justamente por não apresentarem domínio com relação à proporcionalidade. Estas dificuldades se mostram ainda maiores quando se trata de proporcionalidade inversa.

Apesar dos diversos trabalhos realizados no âmbito da Educação Matemática e da Psicologia Cognitiva, indicar formas adequadas de tratar o tema proporcionalidade nas escolas, existem indícios que na prática que este conceito limita-se apenas ao emprego da regra de três, estudado de maneira pontual, geralmente no 7º ano do ensino fundamental, além de não ser abordado a partir de uma perspectiva histórica. Mendes (2006) considera que a perspectiva histórica da matemática como suporte pedagógico tem como um dos seus objetivos, promover um ensino-aprendizagem da matemática que possibilite uma ressignificação do conhecimento matemático elaborado ao longo dos séculos pela sociedade.

Dessa forma, a atribuição de significados relativos aos problemas matemáticos da Antiguidade apresentará a matemática como produto da sociedade, em termos de construção do conhecimento. Esse fato torna-se relevante para a Educação Matemática porque desmistifica a matemática como algo pronto e acabado.

Schliemann e Carraher (1997) esclarecem que a escola apenas utiliza a estratégia *regra de três* para o estudo da proporcionalidade, baseando-se nas propriedades de razões equivalentes, ou seja, dadas duas razões equivalentes $\frac{a}{b} e \frac{c}{x}$, as igualdades $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ e a.x = b.c são verdadeiras e, portanto, $x = \frac{b.c}{a}$.

Em síntese, a revisão da literatura apresentada no presente trabalho nos permite afirmar que há indícios de que o conceito de proporcionalidade não é explorado a partir do seu desenvolvimento histórico, sendo tratado de forma pontual, sem o estabelecimento de relações deste conceito com outros conceitos matemáticos. Assim, a História da Matemática como suporte para este tipo de abordagem se apresenta como um tema que merece ser estudado de forma mais minuciosa.

Problema a ser investigado

De acordo com a nossa experiência profissional e com os resultados indicados pela literatura consultada, é possível inferir que o conceito de proporcionalidade não é explorado de maneira compreensível e, tampouco, é explorado numa perspectiva histórica. Há razões para supor que este conceito é ensinado em momentos pontuais e sem a preocupação com o estabelecimento de relações com nenhum outro conceito matemático. Também é possível supor que a formação inicial não subsidia adequadamente o professor para o ensino do conceito de proporcionalidade numa perspectiva histórica. Diante disso, levantamos a seguinte indagação: que significado o professor de matemática atribui ao conceito de proporcionalidade? Consideramos este um problema que merece ser investigado.

Questão de estudos e objetivos

Em decorrência do problema apresentado, foi possível formular uma questão norteadora para esse estudo: *A utilização de atividades envolvendo o conceito de proporcionalidade mediadas pela História da Matemática, interfere na atribuição de significado desse conceito por parte de professores de Matemática?*

Tendo em vista a intenção de investigar tal questão, foram definidos os seguintes objetivos:

- identificar quais os significados que o professor de matemática atribui ao conceito de proporcionalidade, a partir do uso de atividades mediadas pela Historia da Matemática.
- verificar em que medida a exploração do conceito de proporcionalidade, via História da Matemática, pode interferir na atribuição de significado que os professores dão a este conceito.

Justificativa

Entre os vários conceitos matemáticos, selecionamos a proporcionalidade devido às várias aplicações deste conceito no cotidiano e à sua destacada importância tanto no ensino quanto na aprendizagem da matemática. Os estudos sobre Educação Matemática têm proporcionado embasamento teórico aos profissionais desta área trazendo-lhes indicações para um ensino de matemática de melhor qualidade. Consonante a isto realizam-se estudos, bem como seminários, congressos, simpósios, encontros onde são discutidos os resultados das pesquisas e são apresentadas novas propostas com finalidade de proporcionar um ensino de matemática de qualidade.

A Educação Matemática, como área de estudos e pesquisas, apresenta as seguintes finalidades, como explica Mendes (2006, p.15): “desenvolver, testar e divulgar métodos inovadores de ensino; elaborar e implementar mudanças curriculares, além de desenvolver e testar materiais de apoio para o ensino da matemática”.

Atualmente a Educação Matemática apresenta algumas tendências metodológicas para o ensino da Matemática tais como: a Resolução de Problemas, a Etnomatemática, a Modelagem Matemática, o uso de novas tecnologias, a utilização de jogos e materiais manipuláveis e a História da Matemática.

Cada uma dessas tendências apresenta estratégias e metodologias específicas para o ensino da matemática. No caso da História da Matemática a estratégia mais utilizada é a investigação da construção do conhecimento matemático. Este caráter investigatório, segundo Mendes (2006), pode levar os estudiosos dessa área de pesquisa à elaboração, testagem e avaliação de atividades de ensino centradas na utilização de informações históricas relacionadas aos tópicos que pretendem ensinar.

A História da Matemática é considerada por muitos estudiosos da área como uma poderosa ferramenta no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Mas, para que este fato possa vir a ser uma prática efetiva, assumida pelos docentes, é necessária a integração da mesma na formação de professores.

A literatura que trata de estudos relacionados à formação de professores é ampla. Encontramos alguns estudos que se preocupam em investigar a importância da História da Matemática na formação do professor, a exemplo de Mendes (2001), Fossa (2001), Ferreira (2005), Morey e Mendes (2005), entre outros.

A História da Matemática abrange um vasto campo de conhecimento, e se apresenta como fonte de informações para o professor. Contudo, vale destacar a necessidade de sua integração nos cursos de formação de professores.

Contudo, a literatura consultada indica a necessidade de encontrar meios adequados para abordar a História da Matemática na formação de professores. Como bem destacou Valente (2002), “que História da Matemática é importante para a formação do educador matemático?”.

Outro aspecto que merece destaque é que, em nossa experiência com turmas de 7º ano do Ensino Fundamental, observamos dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão de conceitos relativos a razões e proporções. Essa dificuldade estava relacionada com a interpretação de problemas que envolviam a proporcionalidade, sobretudo, quando se tratava de proporcionalidade inversa. Fato semelhante acontece também em outros níveis do ensino, a exemplo do 1º ano do Ensino Médio, no estudo das funções, onde não se faz relação deste conteúdo com o conceito de proporcionalidade.

Com a finalidade de apontar possíveis caminhos para superar tais dificuldades, procuramos nos balizar pela História da Matemática por ver nesta a possibilidade de explorar um determinado conteúdo matemático a partir de contextos diferenciados como o social, o cultural e o histórico.

Acreditamos que os aspectos expostos justificam a importância deste estudo, pois investigar o significado que os professores de matemática atribuem ao conceito de proporcionalidade é de suma importância para a Educação Matemática, tendo em vista que esta área do conhecimento busca, por meio de estudos e pesquisas, indicar possibilidades para um ensino de matemática com significado.

Além disso, a realização deste estudo poderá contribuir para a construção do conhecimento a respeito do tema em estudo e, consequentemente, poderá fornecer subsídios à prática docente no tratamento do conceito de proporcionalidade, quando se busca a aquisição deste por meio do seu desenvolvimento histórico.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

Apresentamos os principais elementos do quadro teórico adotados neste estudo, os quais nos conduzem a precisar o foco da presente pesquisa. Situamos nossa reflexão numa perspectiva histórica, na medida em que nos interessamos sobre a proporcionalidade na condição de um conceito amplo, tão antigo quanto à própria matemática e que, envolvendo relações entre grandezas, relaciona-se a outros conceitos matemáticos, além de estar presente em várias situações cotidianas.

A nossa concepção acerca do conceito de proporcionalidade se aproxima do que Spinillo (1997, p. 41) define como sendo pensamento proporcional: "o pensamento proporcional refere-se basicamente à habilidade de estabelecer relações", e ainda concordamos com Nunes (2003), quando afirma que o conceito de proporcionalidade, em sua origem bastante simples, nada mais é do que a relação entre duas variáveis.

Esta concepção do conceito de proporcionalidade como algo simples em suas origens nos remete a estudar os aspectos históricos que estão relacionados à matemática de povos da Antiguidade, a exemplo dos egípcios, babilônios, gregos, entre outros.

Neste estudo o conceito de proporcionalidade está fundamentado, basicamente, na perspectiva da História da Matemática, ou seja, por meio dela estudaremos a origem deste conceito, bem como o seu desenvolvimento. Esta escolha toma como base o fato de que a História da Matemática investiga a Matemática enquanto ciência em construção, levando em consideração aspectos sociais e culturais, os quais exercem forte influência na construção desse conhecimento.

Nessa perspectiva, Brolezzi (1991) enfatiza que a ordem lógica mais adequada para o ensino da matemática não é a do conhecimento matemático sistematizado, mas sim aquela que revela a matemática enquanto ciência em construção. Nesse sentido, identificar fatos históricos que envolveram a proporcionalidade poderá ser útil para a compreensão deste conceito e, consequentemente, para o seu ensino.

O conhecimento da História da Matemática é essencial não só na formação dos alunos, mas também na formação de professores, no sentido de desmistificar a matemática, mostrando que ela é uma obra humana, feita por homens em tempos historicamente datados, em constante evolução mesmo nos dias atuais e não como se supõe uma obra do espírito humano repleta de misticismo. Além do mais ter conhecimento da História da disciplina que ministra é importante para que o professor possa responder aos muitos porquês colocados pelos alunos nas aulas de matemática.

Abordaremos a seguir alguns pressupostos teóricos acerca da utilização da História da Matemática para a compreensão de conceitos matemáticos.

1.1 A importância da compreensão do desenvolvimento histórico do conceito matemático.

A História da Matemática possibilita caminhos para a pesquisa em Educação Matemática, sobretudo por aqueles que supomos ainda não claramente esclarecidos, ou melhor, investigados:

> [...] o estudo da história matemática se apresenta como uma oportunidade para entender tanto problemas que possam motivar a construção de novos conceitos matemáticos quanto a seqüência de esquemas desenvolvidos pelos indivíduos ao procurar uma solução significativa para um problema. (D'AMBROSIO, 2007, p. 402)

Ao fazer pesquisa na área da História da Matemática é necessário que o pesquisador se atenha com bastante cautela às fontes históricas de que irá fazer uso, já que nem sempre é possível o trabalho em fontes primárias e, mesmo nestas, corre-se o risco de obter uma informação distorcida da realidade, sobretudo, porque a veracidade dos fatos pode ser manipulada por questões de interesses próprios.

Conforme Nobre (2004), existem muitos casos relatados na história, que envolvem a nomeação de determinados conceitos matemáticos por parte de alguns estudiosos da matemática, mas, na verdade, tais conceitos já existiam, a exemplo do Triângulo de Pascal que não é de Pascal, do Teorema de L`Hospital que não pertence ao Marquês de L`Hospital, o que conhecemos por Binômio de Newton não pode ser atribuído a Isaac Newton, o Princípio de Cauchy não é de Cauchy, as coordenadas Cartesianas não foram introduzidas por René Descartes, entres outras histórias.

A História da Matemática nos possibilita o conhecimento de grande parte do que foi produzido, desenvolvido e disseminado no campo da matemática em diversas civilizações. São vários os estudiosos que se dedicam a esta área do conhecimento no sentido de descobrir e explorar fatos da matemática no passado, esclarecer questões duvidosas e também promover a História da Matemática como uma proposta pedagógica inovadora para os currículos escolares, inclusive na formação de professores de matemática.

No contexto internacional podemos citar pesquisadores como Heath (1993), Wussing (1998), Damerow (2007), Furinghetti (2007), Gerdes (2007), Radford & Empey (2007), entre outros. Em nosso país se destacam no estudo da História da Matemática pesquisadores tais como D'Ambrosio (1996), Nobre (2004), Fossa (2001), Mendes (2006), Bicudo (2007), Valente (2007), Abdounur (2007), Sad (2007), entre outros.

Nesse panorama de investigação, tendo a História da Matemática como suporte, diversos trabalhos são desenvolvidos no Brasil e no exterior, muitos deles envolvendo conteúdos matemáticos específicos. A nossa intenção reside justamente neste contexto investigativo, já que procuraremos conhecer como se deu o desenvolvimento histórico do conceito de proporcionalidade.

Com esse intuito faremos menção a algumas manifestações desse conceito, em algumas civilizações, em períodos distintos.

1.2 Aspectos históricos que envolvem o conceito de proporcionalidade

1.2.1 As proporções no contexto da matemática egípcia

A civilização egípcia se forma por volta do ano 4000 a.C. Ela se estabeleceu às margens do Rio Nilo e possuía características de uma sociedade mais evoluída, quando comparada com as comunidades neolíticas. Esta nova forma de sociedade se caracterizou pelo uso da agricultura, do comércio e também por questões ligadas à posse de terra, irrigação, construção de monumentos, entre outros fatores.

O Rio Nilo contribuía para o desenvolvimento dessa sociedade através das denominadas "Dádivas do Nilo", favorecendo a agricultura, a pesca e a irrigação. Por outro lado, traziam-lhes alguns problemas em virtude das enchentes que ocorriam durante um determinado período do ano.

Todos estes fatores aliados ao objetivo de facilitar o cálculo do calendário, da organização e administração da colheita, das obras públicas e da cobrança de impostos, fizeram surgir as matemáticas orientais como uma ciência prática.

O conhecimento matemático advindo da civilização egípcia deve-se aos papiros que eram usados para registrar a matemática por eles utilizada. Estes documentos resistiram ao tempo, graças ao clima seco daquela região. O mais conhecido e talvez mais importante seja o Papiro de Rhind, descoberto por H. Rhind em 1858 e que foi compilado pelo escriba Ahmes, por volta do ano 1650 a.C. É composto por uma série de tabelas e apresenta 85 problemas, entre os quais, problemas de quantidades, envolvendo equações, atualmente denominadas de equação do 1º grau, resolvidas pelo método da falsa posição. Segundo Boyer (1974) alguns destes problemas podem ser descritos como aritméticos e outros como algébricos.

FIGURA 1
FRAGMENTO DO PAPIRO DE RHIND

O problema 72 do papiro de Rhind, conforme Boyer (1974, p. 12), é um exemplo de problema aritmético e é descrito da seguinte forma: "qual o número de pães de força 45 que são equivalentes a 100 de força 10". Já o problema de número 63 pede que sejam repartidos 700 pães entre quatro pessoas, em partes proporcionais a $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} e \frac{1}{4}$. Para Boyer (1974) muitos dos problemas compilados por Ahmes mostram conhecimento de manipulações equivalentes à regra de três. Por exemplo, para o problema 72 é apresentada a seguinte solução: $\frac{100}{10} \times 45$ ou 450 pães.

Conforme Boyer (1974), com relação ao problema de número de 63, a solução é obtida calculando o quociente de 700 pela soma das frações na proporção, que resulta em 400, e calculando $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} e \frac{1}{4}$ deste valor. Dessa forma, a soma das frações na proporção, $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8+6+4+3}{12} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$ corresponde a $\frac{700}{\frac{7}{4}} = 700 \times \frac{4}{7} = 100 \times 4 = 400$, então, um inteiro corresponde a 400.

Assim, $\frac{2}{3}$ de 400 = $\frac{2 \times 400}{3} = \frac{800}{3} = 266\frac{2}{3} = 266 + \frac{2}{3} = 266{,}66...$

$\frac{1}{2}$ de 400 = 200

$\frac{1}{3}$ de 400 = $\frac{400}{3} = 133\frac{1}{3} = 133 + \frac{1}{3} = 133{,}33...$

$\frac{1}{4}$ de 400 = 100

Temos que $266\frac{2}{3} + 200 + 133\frac{1}{3} = 100 \cong 700$

Os antigos egípcios já utilizavam, embora de forma implícita, o conceito de proporcionalidade na resolução de problemas práticos, dos quais, alguns aparecem registrados no papiro de Rhind. Este conceito aparece no chamado método da falsa posição, que se caracteriza como uma abordagem algébrica de resolução de problemas. Neste tipo de problema não se faz referência a objetos concretos e também não exige operações entre números conhecidos. O que percebemos é que os problemas foram elaborados de forma que as suas soluções correspondem a equações lineares do tipo x + ax = b ou x + ax + bx = c, onde a, b e c são conhecidos e x é desconhecido.

O método da falsa posição, em sua essência, consiste em um procedimento de tentativas e erros. Como exemplo vamos nos ater ao problema de número 24 do Papiro de Rhind, que possui o seguinte enunciado: Sabendo que *aha* (nome dado ao valor desconhecido) mais um sétimo de *aha* dá 24, encontre o valor *aha*.

Obviamente, a solução dada por Ahmes não é aquela presente nos atuais livros utilizados nos meios escolares, mas é característica do processo do método da falsa posição. Um valor específico, provavelmente falso, era assumido para *aha*, e as operações indicadas eram efetuadas sobre esse número suposto. O resultado era então comparado com o resultado que se pretendia obter, e usando proporções eles chegavam à resposta correta.

A solução do problema apresentado anteriormente é descrita por Eves (2004, p.73), da seguinte maneira: “o escriba egípcio escolhia um valor para a quantidade desconhecida *(aha)* que evitasse a fração $\frac{1}{7}$. Uma boa escolha seria o próprio número 7”. Aqui é importante observar que este valor 7 atribuído inicialmente à quantidade desconhecida não tinha a pretensão de ser um palpite verdadeiro; era, realmente, uma tentativa que logo em seguida seria apropriadamente corrigida.

Aplicando a esta posição inicial as condições do enunciado do problema, o escriba raciocinava da seguinte forma: se a resposta fosse 7, então 7 + $\frac{1}{7}$ de 7 = 8. Como o resultado esperado era igual a 24, a posição inicial assumida para incógnita (7) era claramente falsa.

Entretanto, tendo em vista que o resultado obtido (8) precisava ser multiplicado por (3) para se chegar ao valor da soma correta (24), na mesma proporção deveria ser multiplicada a falsa posição inicial (7) para se obter o valor correto da incógnita. Assim, o método da falsa posição apontava para um valor de “aha” igual a 7 x 3 = 21.

Para esclarecer um pouco mais o método da falsa posição, decidimos representar os procedimentos utilizados por meio de uma linguagem simbólica atual e da retórica utilizada pelos egípcios. Atribuindo a letra “d” ao valor desconhecido, teremos:

$d+\frac{d}{7}=24$	“*aha*” mais um sétimo de “*aha*” é igual a 24
Supondo d = 7	Eles supunham que esse valor fosse 7, com o intuito de evitar a fração
$7+\frac{7}{7}=8$	Utilizavam o seguinte raciocínio: $7+\frac{1}{7}de7$ é igual a 8
$8\times 3=24$	Como o resultado esperado era 24 eles multiplicavam o resultado por 3
$7\times 3=21$	Multiplicavam na mesma proporção a posição inicial 7, obtendo assim o valor correto de “*aha*”

Como se pode observar, o raciocínio proporcional já era usado naquele tempo. Contudo, nossa experiência profissional indica que a regra da falsa posição não é explorada nos meios escolares. À esse respeito D'Ambrosio (2007) explica que alunos que utilizam de técnicas mais modernas para a solução de problemas, apresentam dificuldades em utilizarem ideias mais simples. Dessa forma, ao analisarem a solução egípcia para equações lineares os alunos têm dificuldade em identificarem o uso de proporções no método da falsa posição.

A solução deste problema em termos algébricos modernos, presentes nos meios escolares nos quais se enfatiza a simbologia matemática na resolução de equações costuma ser apresentada de maneira formal, simples e direta. Isso pode ser ilustrado da seguinte maneira: dada a equação d + $\frac{d}{7}$ =24, calcule o valor de "d".

$$d+\frac{d}{7}=24\rightarrow\frac{7d+d}{7}=\frac{168}{7}\rightarrow 8d=168\rightarrow d=\frac{168}{8}=21$$

1.2.2 As proporções no contexto da matemática dos Babilônios

Por volta do ano 3000 a.C. outra civilização floresce às margens dos rios Tigres e Eufrates. Nessa região, conhecida como Mesopotâmia, tem origem a civilização babilônica.

Segundo Eves (2004), em algum momento entre 3000 e 2000 a.C os babilônios desenvolveram um sistema sexagesimal que utilizava o princípio posicional. Tal sistema apresentava característica dupla, ou seja, podia ser considerado um sistema misto, tendo em vista que os 60 primeiros números, isto é, os números do grupo básico eram escritos nos moldes de um sistema de agrupamento simples decimal, enquanto que os números superiores a 60 eram escritos de acordo com o princípio posicional.

Todo o conhecimento matemático babilônico provém das tabletas de barro, que eram cozidas ao forno ou secadas sob o sol e, assim, tornavam-se quase indestrutíveis. Segundo Struik (1989), o nosso conhecimento sobre a matemática babilônica foi muito alargado pelas notáveis descobertas de O. Neugebaeur e F. Thureau-Dangin, que decifraram um grande número de placas de argila.

O conhecimento da matemática babilônica deu-se graças a esses achados e sua consequente decifração. O sistema numérico babilônio ficou conhecido em virtude da decifração dessas tabletas; grande parte delas está guardada em museus e coleções de vários países. A escrita é chamada cuneiforme, isto é, em forma de cunha, estes símbolos eram marcados por estilete quando a tableta ainda encontrava-se úmida.

O sistema numérico babilônio era de base sexagesimal e, de acordo com Aaboe (2002), este sistema teve uma influência generalizada sobre a natureza da matemática babilônica. Com relação às representações simbólicas utilizadas, há indícios de que,

> quando os acadianos adotaram a escrita suméria, léxicos foram compilados dando equivalentes nas duas línguas, e as formas das palavras e numerais se tornaram menos variadas. [...] O sistema decimal, comum à maioria das civilizações tanto antigas quanto modernas, tinha sido submerso da Mesopotâmia sob uma notação que dava a base sessenta como fundamental. (BOYER, 1974 p. 19)

A descoberta deste sistema somente foi possível a partir das descobertas e das decifrações das tabletas de argilas que continham conteúdo matemático. Em uma destas tabletas encontra-se uma tábua de multiplicação, constituída de duas colunas, onde aparecem os símbolos em forma de cunhas verticais () e cunhas angulares ().

Como podemos observar na figura 2 abaixo, na primeira linha da primeira coluna há uma cunha vertical, na segunda duas, na terceira três; naturalmente interpretada como sendo 1, 2, 3; e assim por diante até a 9ª linha. Na décima linha aparece um símbolo novo, uma cunha angular, em posição horizontal. Esta cunha é interpretada como sendo 10, na linha seguinte vê-se uma cunha angular e uma vertical, na décima segunda linha, uma cunha angular e duas verticais e assim por diante, podendo, sem dificuldade, ser interpretado por 11, 12 e assim sucessivamente.

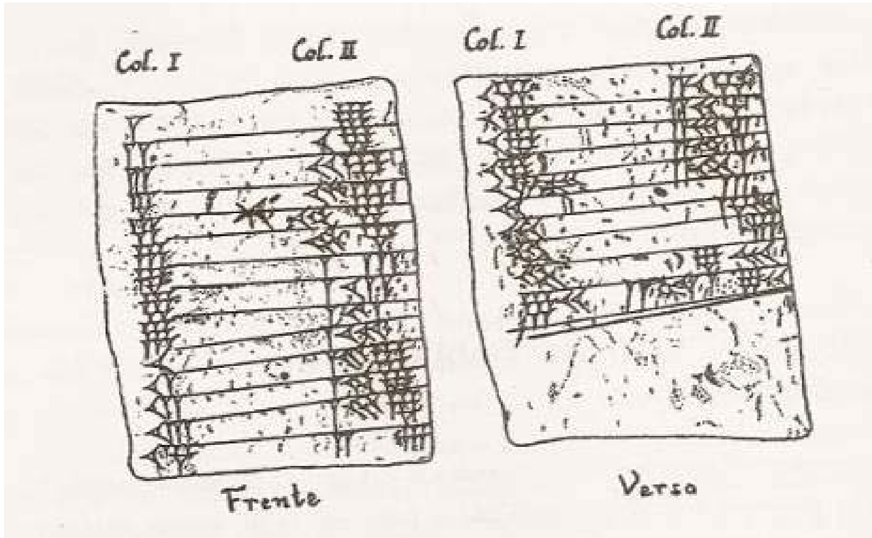


FIGURA 2
TABLETA BABILÔNICA DE MULTIPLICAÇÃO

Na segunda coluna desta mesma tableta encontram-se na primeira linha nove cunhas verticais; na segunda, uma cunha angular e oito cunhas verticais; na terceira, duas cunhas angulares e sete verticais, constituindo-se numa tábua de multiplicação por nove. Com isto vê-se que os babilônios utilizavam o raciocínio multiplicativo que é um tipo de raciocínio proporcional e este fato evidencia que esta civilização já usava o conceito de proporcionalidade a aproximadamente 4000 anos atrás. A relação entre a primeira e a segunda coluna evidencia indícios de conhecimento do conceito de proporcionalidade contidos no raciocínio multiplicativo exposto no parágrafo acima, o que, em representação moderna, temos:

COL I	1	2	3	4	5	6	...
COL II	9	18	27	36	45	54	...

TABELA 1
INTERPRETAÇÃO DA TABLETA BABILÔNICA DE MULTIPLICAÇÃO

Ao calcularmos as razões entre a segunda e a primeira coluna, verificamos que:

$$\frac{9}{1} = \frac{18}{2} = \frac{27}{3} = \frac{36}{4} = \frac{45}{5} = \frac{54}{6} = \ldots = 9$$

Na sétima linha da segunda coluna vêem-se uma cunha vertical, um espaço e três cunhas verticais, enquanto que na oitava linha vê-se uma cunha vertical, seguida de uma angular e mais duas verticais. Certamente não podemos interpretar essa primeira cunha como sendo 1 (uma unidade) e, neste contexto, o que faz sentido é supor que representa 60. Portanto, estas linhas foram transcritas como sendo **1,3** e **1,12**, supondo que o primeiro 1 é equivalente a 60. Assim:

$$1{,}3 = 1\times 60 \ \ + 3\times 60^{0} = 63 \ \text{(7ª linha)}$$

$$1{,}12 = 1\times 60 \ \ + 12\times 60^{0} = 72 \ \text{(8ª linha)}$$

Em Aaboe (2002) encontramos um estudo bastante pormenorizado da chamada tableta de recíprocos. Segundo ele, os números da segunda coluna são os recíprocos da primeira, isto é, são seus respectivos inversos.

Col. I	Col. II
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7,30
9	6,40
10	6
12	5
15	4

Col. I	Col. II
16	3,45
18	3,20
20	3
24	2,30
25	2,24
27	2,13,20
30	2
32	1,52,30
36	1,40
40	1,30

Col. I	Col. II
45	1,20
48	1,15
50	1,12
54	1, 6 ,40
1	1
1,4	56,15
1,12	50
1,15	48
1,20	45
1,21	44,26,40

FIGURA 3
TABLETA BABILÔNICA DE RECÍPROCOS

Dessa forma, os cálculos implícitos na tábua de recíprocos envolvendo o 2 e o 3 são da seguinte forma:

30 *corresponde* a 0; 30 = $0+\dfrac{30}{60}=\dfrac{1}{2}$ (que no caso é o recíproco de 2)

20 *corresponde a* $0;20 = 0+\dfrac{20}{60}=\dfrac{1}{3}$ (que no caso é o recíproco de 3).

O mesmo cálculo é aplicado para as linhas seguintes de cada coluna. Além disso, observa-se que o produto dos números que aparecem nas duas colunas é uma potência de 60.

Na 6ª linha desta tableta o número 7,30 não será interpretado como na tableta de multiplicação, isto é, $7 \times 60 + 30$, mas sim como $\frac{7}{60} + \frac{30}{60^2}$ que representa $\frac{1}{8}$ e corresponde ao recíproco de 8.

Cabe ressaltar que o uso de vírgulas ou de ponto e vírgula não existiam na notação babilônica original. Na notação atual, normalmente usada para representar os números na notação sexagesimal dos babilônios, é que se faz uso da vírgula para separar as posições, enquanto o ponto e vírgula separam a parte inteira da fracionária. Segundo Aaboe (2002), os pontos e vírgulas foram introduzidos na tradução do conteúdo das tabletas; mas, como se pode ver, não há nenhuma dúvida quanto a suas posições.

Nos demais cálculos dos números da tábua de recíprocos constatamos que a relação existente entre uma coluna e outra expressa (através do raciocínio multiplicativo) o conceito de proporcionalidade na sua construção, evidenciando-se, mais uma vez, o quanto este conceito é antigo, isto é, apresentando-se como algo inerente a determinados tópicos matemáticos.

Outro fato que merece destaque é que no sistema de numeração babilônico não existia um símbolo que representasse o zero. Em alguns momentos o que definia o valor de um determinado número era o contexto. Muitas vezes a falta de uma representação para o zero acabava por gerar confusão em determinadas interpretações. Por este motivo foi introduzido, embora tardiamente, um símbolo, constituído por duas cunhas pequenas, inclinadas, algo parecido com . Mas esse símbolo só era usado para indicar uma *potência ausente* de 60 no interior de um número.

Um exemplo de *potência ausente* de 60 pode ser representado pela escrita dos números 122 e 7202, neste caso, a representação sexagesimal era muito parecida, pois  podia significar $2 \times (60) + 2$ *ou* $2 \times (60)^2 + 2$.

O fato de o sistema numérico sexagesimal ser um sistema posicional é mais uma característica da utilização do conceito de proporcionalidade pelos babilônios, que, por mais implícito que esteja, é este conceito que permite ao sistema o acréscimo ou decréscimo de valores para cada posição. Os números representados após ponto e vírgula estão divididos por potências de 60. Esta representação por ponto e vírgula indica separação entre a parte inteira e a fracionária, assim:

$$1,25;30 = 1 \times 60 \quad + 25 \times 60^0 + \frac{30}{60} \text{ e}$$

$$1;25,30 = 1 \times 60^0 + \frac{25}{60} + \frac{30}{60^2}$$

A tableta Plimpton 322 (figura 4) é umas das mais conhecidas e nela também encontram-se indícios da proporcionalidade. Segundo Eves (2004, p. 61), “os babilônios tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais [...]”.

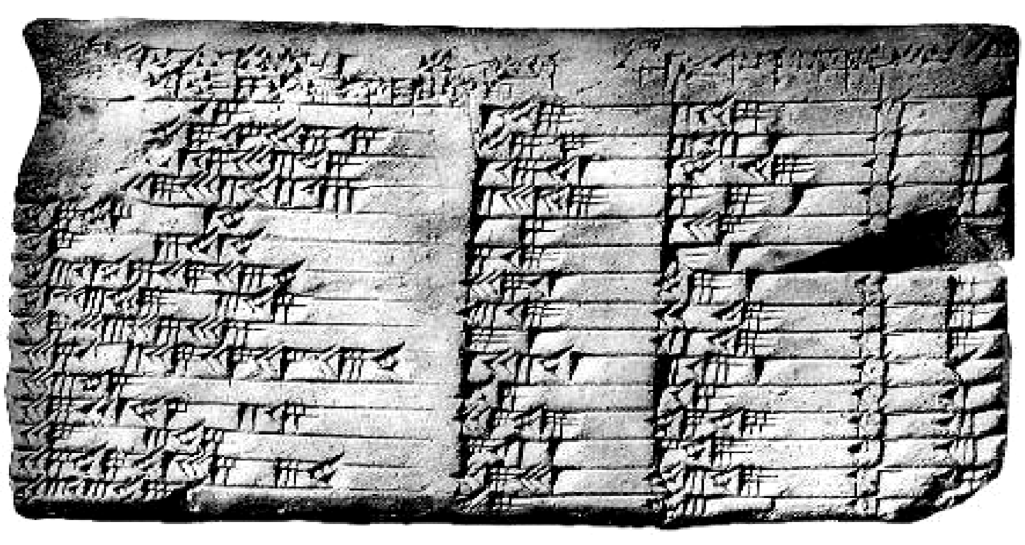


FIGURA 4
TABLETA BABILÔNICA PLIMPTON 322

A tableta Plimpton 322 consta de quatro colunas de números, representados na escrita cuneiforme e data de aproximadamente 1900 a 1600 a.C. Segundo Boyer (1974), as tabelas contidas na tableta podiam ser facilmente tomadas por um registro de negócios. No entanto, uma análise minuciosa mostra que há profundo significado matemático na teoria dos números. Tal análise também evidencia que é provável que esse aspecto fosse apenas um auxiliar para o problema de medir áreas de quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo.

A figura 5 apresenta os valores em notação moderna da tableta Plimpton 322 que representam medidas de lados de triângulos. Segundo Eves (2004, p. 64), "os números correspondentes destas colunas, com quatro infelizes exceções, constituem a hipotenusa e um cateto de triângulos retângulos de lados inteiros". As quatro exceções estão anotadas entre parênteses na figura abaixo:

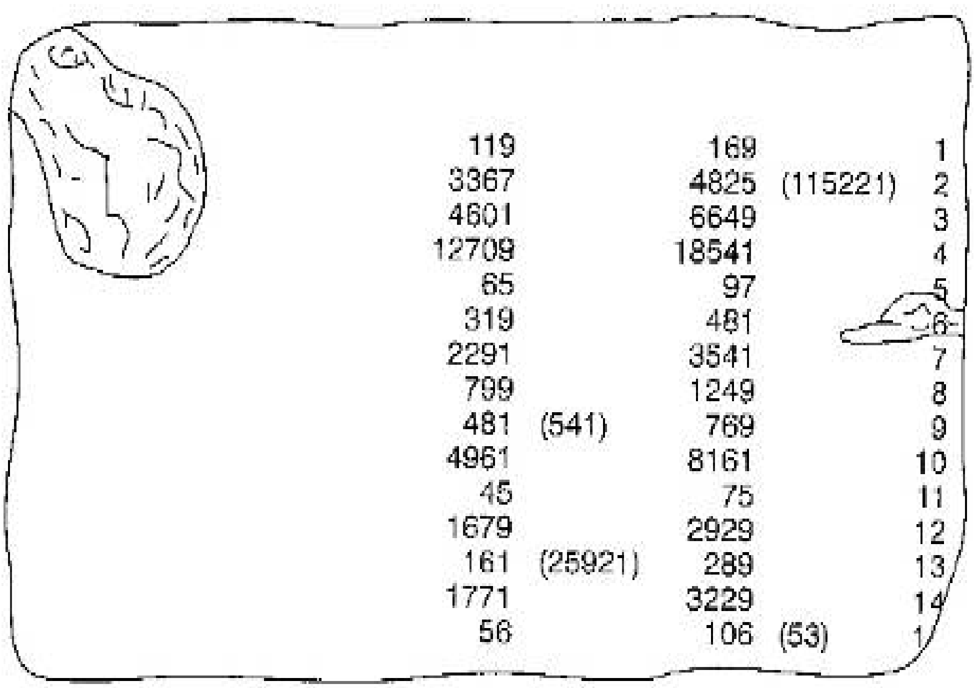


FIGURA 5
FRAGMENTO DA TABLETA BABILÔNICA PLIMPTON 322

Faremos, em alguns desses triângulos, uma análise com o intuito de observar se existe proporcionalidade entre as medidas de seus lados.

Os valores apresentados na 2ª coluna (b) da tabela que aparece na figura 6 se referem às medidas de um dos catetos de triângulos retângulos registrados na Plimpton 322. Os valores do segundo cateto, apresentados na 1ª coluna (a), foram calculados a partir da medida da hipotenusa, 3ª coluna (c), e do outro cateto 2ª coluna (b).

Os cálculos assim efetuados determinam, de acordo com Eves (2004), seguintes ternos pitagóricos:

a	b	c	u	v
120	119	169	12	5
3456	3367	4825	64	27
4800	4601	6649	75	32
13500	12709	18541	125	54
72	65	97	9	4
360	319	481	20	9
2700	2291	3541	54	25
960	799	1249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4961	8161	81	40
60	45	75	2	1
2400	1679	2929	48	25
240	161	289	15	8
2700	1771	3229	50	27
90	56	106	9	5

FIGURA 6
TABELA DE INTERPRETAÇÃO DA TABLETA BABILÔNICA PLIMPTON 322

Para fins de exame, Eves (2004) incluiu duas colunas que representaram os parâmetros u e v que levam aos termos pitagóricos. Segundo este autor,

> "um dos grandes feitos matemáticos dos gregos, posterior muito séculos à tábua Plimpton 322, foi mostrar que todos os termos pitagóricos primitivos (a,b,c) são dados parametricamente por $a = 2uv, b = u^2 - v^2$ e $c = u^2 + v^2$." (EVES, 2004, p. 64)

Os cálculos efetuados com os valores da tabela acima mostram que entre as medidas dos lados dos triângulos existe uma considerável aproximação, o que indica uma possibilidade de que os seus lados são semelhantes. Vejamos essa consideração, através de alguns cálculos:

i) $120^2 + 119^2 = 169^2 \quad \left(1^a \ linha\right)$

$3456^2 + 3367^2 = 4825^2 \quad (2^a \ linha)$

Cálculo das razões para as medidas indicadas nas linhas acima:

$\frac{120}{3456} \cong 0{,}035 \qquad \frac{119}{3367} \cong 0{,}035 \qquad \frac{169}{4825} \cong 0{,}035$

ii) $4800^2 + 4601^2 = 6649^2 \quad (3^a \ linha)$

$13500^2 + 12709^2 = 18541^a \ (4^a \ linha)$

Cálculo das razões para as medidas indicadas na 3ª e 4ª linhas:

$\frac{4800}{13500} \cong 0{,}35 \qquad \frac{4601}{12709} \cong 0{,}36 \qquad \frac{6649}{18541} \cong 0{,}36$

iii) $72^2 + 65^2 = 97^2 \ (5^a linha)$

$360^2 + 319^2 = 481^2 \ (6^a linha)$

Cálculo das razões para as medidas indicadas na 5ª e 6ª linhas:

$\frac{72}{360} \cong 0{,}20 \qquad \frac{65}{319} \cong 0{,}20 \qquad \frac{97}{481} \cong 0{,}20$

iv) $2700^2 + 2291^2 = 3541^2 \ (7^a linha)$

$960^2 + 799^2 = 1249^2 \ (8^a linha)$

Cálculo das razões para as medidas indicadas na 7ª e 8ª linhas:

$\frac{960}{2700} \cong 0{,}35 \qquad \frac{799}{2291} \cong 0{,}35 \qquad \frac{1249}{3541} \cong 0{,}35$

v) $600^2 + 481^2 = 769^2 \ (9^a linha)$

$6480^2 + 4961^2 = 8161^2 \ (10^a linha)$

Cálculo das razões para as medidas indicadas na 9ª e 10ª linhas:

$$\frac{600}{6480} \cong 0,093 \qquad \frac{481}{4961} \cong 0,096 \qquad \frac{769}{8161} \cong 0,094$$

vi) $\begin{array}{l} 60^2 + 45^2 = 75^2 \ (11^a \, linha) \\ 2400^2 + 1679^2 = 2929^2 \ (12^a \, linha) \end{array}$

Calculo das razões para as medidas indicadas na 11ª e 12ª linhas:

$$\frac{60}{2400} \cong 0,025 \qquad \frac{45}{1679} \cong 0,026 \qquad \frac{75}{2929} \cong 0,025$$

vii) $\begin{array}{l} 240^2 + 161^2 = 289^2 \ (13^a \, linha) \\ 2700^2 + 1771^2 = 3229 \ (14^a \, linha) \end{array}$

Cálculo das razões para as medidas indicadas na 13ª e 14ª linhas:

$$\frac{240}{2700} \cong 0,088 \qquad \frac{161}{1771} \cong 0,090 \qquad \frac{289}{3229} \cong 0,089$$

viii) $\begin{array}{l} 2700^2 + 1771^2 = 3229^2 \ (14^a \, linha) \\ 90^2 + 56^2 = 106^2 \ (15^a \, linha) \end{array}$

Cálculo das razões para as medidas indicadas na 14ª e 15ª linhas:

$$\frac{90}{2700} \cong 0,033 \qquad \frac{56}{1771} \cong 0,031 \qquad \frac{106}{3229} \cong 0,032$$

> Um terno de números inteiros, como (3, 4,5), cujos termos são lados de um triângulo retângulo, é chamado *terno pitagórico*. Se o único fator inteiro positivo comum aos elementos de um termo pitagórico é a unidade, então esse termo se diz *primitivo*. Assim (3,4,5) é um termo pitagórico primitivo , ao passo que (6,8,10) não é. Isso significa que um termo pitagórico é primitivo quando os três números são primos entre si. (EVES, 2004, p. 64)

Considerando que um termo pitagórico é um primitivo quando os três números que o compõem são primos entre si, na tableta Plimpton 322 verifica-se que, com exceção das linhas 11ª e 15ª, as demais representam triângulos primitivos. Quando comparamos esses triângulos, verificamos que as razões entre as medidas dos lados destes triângulos primitivos apresentam aproximações consideráveis. Isso é confirmado por Eves (2004), quando afirma que os babilônios tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais.

Por outro lado, ao compararmos os triângulos primitivos com aqueles que não são primitivos, através do cálculo de suas razões, percebemos uma sensível diferença nos resultados:

i) Cálculo da razão entre a 11ª e 1ª linhas:

$$\frac{60}{120} \cong 0,5 \qquad \frac{45}{119} \cong 0,37 \qquad \frac{75}{169} \cong 0,44$$

ii) Cálculo da razão entre a 11ª e 5ª linhas:

$$\frac{60}{72} \cong 0,83 \qquad \frac{45}{65} \cong 0,69 \qquad \frac{75}{97} \cong 0,77$$

iii) Cálculo da razão entre 15ª e 3ª linhas:

$$\frac{90}{4800} \cong 0,018 \qquad \frac{56}{4601} \cong 0,012 \qquad \frac{106}{6649} \cong 0,016$$

iv) Cálculo da razão entre a 15ª e 8ª linhas:

$$\frac{90}{160} \cong 0,09 \qquad \frac{56}{799} \cong 0,07 \qquad \frac{106}{1249} \cong 0,08$$

De acordo com os resultados obtidos, é possível perceber que existe uma aproximação bastante razoável entre as medidas dos lados dos triângulos, o que nos leva a supor que estes a existência certa proporcionalidade nas medidas de seus lados. Este fato reforça a idéia que os babilônios apresentavam indícios de raciocínio proporcional.

Outro aspecto que merece destaque é que os antigos babilônios foram superiores na matemática quando comparados com os Egípcios, os quais possuíam uma forma de matemática mais elementar. Por volta de 2000 a.C, os babilônios já resolviam determinadas equações.

Segundo Eves (2004), no período mencionado anteriormente, a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de uma substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas equações cúbicas e algumas biquadradas.

Na resolução das equações quadráticas, pelos Babilônios, é possível observar a aplicação do conceito de proporcionalidade, quando faziam o que conhecemos hoje por transformação algébrica.

Os casos de equações quadráticas que se encontram mais frequentemente nos registros deixados pelos babilônios, segundo Boyer (1974), foram classificados em três tipos:

1) $x^2 + px = q$
2) $x^2 = px + q$
3) $x^2 + q = px$

Ao que tudo indica, esses tipos de equações foram explorados tanto na antiguidade como na Idade Média e também no inicio do período moderno.

Em Boyer (1974), encontramos alguns exemplos de resolução destas equações. Um deles é o seguinte: “A área de um quadrado menos o seu lado é 14,30. Qual o lado do quadrado?”. É importante ressaltar novamente que 14,30 é um número expresso por meio da notação sexagesimal. A solução deste problema é equivalente à resolução da equação algébrica $x^2 - x = 870$. Contudo, a solução apresentada pelos babilônios, utilizando-se a representação sexagesimal, é expressa da seguinte maneira:

> “Tome a metade de 1, que é 0; 30, e multiplique 0,30 por 0; 30 o que dá 0; 15; some isto a 14,30, o que dá 14,30;15. Isto é o quadrado de 29;30. Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado”. (BOYER, 1974, p. 23)

A respeito destes problemas e a forma como os babilônios resolviam as equações, Struik (1989) considera que eles formulavam esses problemas apenas com valores numéricos específicos para os coeficientes, mas os seus métodos não deixam dúvidas de que conheciam uma regra geral para obter a solução de equações quadráticas.

Atualmente, se utilizarmos a fórmula $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$, que é o equivalente da resolução anteriormente apresentada, chega-se ao resultado obtido pelos Babilônios. Tal fórmula, ao ser desenvolvida, passará a ter certa semelhança com a que atualmente utilizamos para resolver equações do 2º grau, ou seja:

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

Na resolução da equação $x^2 - x = 870$ não se verifica a aplicação da proporcionalidade. Porém, a apresentação desta equação e do seu respectivo método de resolução neste estudo tem o objetivo de introduzir outro tipo de equação em cuja resolução se utiliza o conceito de proporcionalidade.

Os babilônios resolviam equações quadráticas em que o coeficiente de x^2 era diferente de 1. Tendo uma equação do tipo $ax^2 + px = q$, logo eles a reduziam ao tipo já conhecido e a resolviam da seguinte maneira:

> Adicionei sete vezes o lado de meu quadrado a onze vezes sua área, e o resultado é 6;15. Qual é o lado do quadrado? Tome 7 e 11. Multiplique 11 por 6; 15 e [o resultado] é 1,8; 45. Divida 7 por 2 [e obtenha 3;30] Multiplique 3;30 por 3;30. Adicione [o resultado] 12; 25 a 1,8;45 e [o resultado] 1,21 tem raiz quadrada 9. Subtraia 3;30, que você multiplicou por ele próprio, de 9, e você obtém 5;30. O recíproco de 11 não divide. O que devo multiplicar por 11 para que o resultado seja 5;30? 0;30 é o seu fator. 0;30 é [o lado do] quadrado. (AABOE, 2002, p. 25)

O que temos aqui é a solução da equação $11x^2 + 7x = 6; 15$ (o número 6;15 está escrito na forma sexagesimal). Notemos que a multiplicação por 11 tem o objetivo de reduzir a equação ao tipo $x^2 + px = q$, onde o coeficiente do termo quadrático resultante da redução será 1. Na equação $11x^2 + 7x = 6;15$ multiplicam-se ambos os membros por 11, resultando em $(11x)^2 + 7. (11x) = 1,8;45$. Daí, adota-se $11x = u$ e por transformação algébrica, chega-se a u^2

+ 7u = 1,8;45. Desse ponto em diante os babilônios resolviam a equação pelo mesmo processo utilizado para as equações do tipo $x^2 + px = q$.

Para esclarecer um pouco mais o método utilizado pelos babilônios, decidimos representar os procedimentos utilizados por meio de uma linguagem simbólica atual. Para a equação acima podemos expressar a resolução usando a notação decimal da seguinte forma:

1º multiplicavam ambos os membros por $a = 11$:

$$11x^2 + 7x = 6{,}25 \leftrightarrow (11x)^2 + 7.\ (11x) = 68{,}75$$

2º substituíam ax por outra quantidade desconhecida, ou seja, faziam a mudança de variável: u = ax:

$(11x)^2 + 7.\ (11x) = 68{,}75$ e fazendo $11x = u$, tinha-se $u^2 + 7u = 68{,}75$.

3º consideravam a metade de ***b*** (coeficiente da incógnita x):

$$\frac{b}{2} \quad \to \quad \frac{7}{2} = 3{,}5$$

4º calculavam o seu quadrado:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \to \frac{49}{4} = 12{,}25$$

5º adicionavam o resultado obtido a ***c*** (termo independente):

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \quad \to \quad 12{,}25 + 68{,}75 = 81$$

6º calculavam a raiz quadrada do resultado anterior:

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \quad \to \quad \sqrt{81} = 9$$

7º subtraíam metade de b e obtinham uma solução para a equação:

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2} = 9 - \frac{7}{2} = 5{,}5$$

E assim obtinham u = 5,5 e daí 11x = 5,5. Como o recíproco de 11 não divide o número 5,5, os babilônios buscavam um número que, multiplicado por 11, resultasse em 5,5. Tal número evidentemente era $\frac{1}{2}$ e correspondia ao lado do quadrado.

Fica claro que na resolução da equação os babilônios utilizavam o conceito de proporcionalidade fundamentado no princípio multiplicativo, que é um raciocínio proporcional. Na multiplicação de ambos os membros de uma equação por um mesmo número, eles obtinham uma equação proporcional à primeira. Assim tornavam possível a aplicação dos seus métodos para a resolução.

1.2.3 As proporções no contexto da matemática grega

A civilização grega desempenhou um papel importante no desenvolvimento da matemática e deu significativas contribuições para o processo de modernização dessa ciência, principalmente no que tange ao desenvolvimento do conceito de proporção, pois como poderemos ver, este conceito foi objeto de estudo pelos gregos durante vários séculos.

Um fato que sugere o uso de proporções por parte dos gregos diz respeito a Tales de Mileto. Historiadores da Matemática consideram que pouco se sabe sobre a vida e os feitos de Tales, porém vale salientar que ele é considerado um dos sete sábios da Antiguidade. Conforme Lintz (1999), Tales viveu aproximadamente de 630 a.C a 550 a.C, porém quando se trata de Tales de Mileto a única data precisa que conhecemos, refere-se a previsão do eclipse total do Sol de 28 de maio de 585 a.C.

Não é do nosso conhecimento que os escritos originais de Tales tenham chegado à atualidade, o que dificulta determinar suas concepções e suas descobertas matemáticas. Segundo Eves (2004), a principal fonte de informações a respeito das suas realizações matemáticas é o chamado Sumário Eudemiano de Proclus Diadocus, que consiste nas primeiras páginas de abertura de seu livro *Comentário sobre o primeiro livro de Os Elementos de Euclides*.

Conta-nos a tradição que Tales teria trazido a Geometria do Egito para a Grécia. Há relatos de que Tales mediu a altura das pirâmides do Egito, observando os comprimentos das sombras no momento em que a sombra de um bastão vertical era igual à sua altura. Em Eves (2004) encontramos duas versões que relatam a medição da altura da pirâmide por Tales:

> Há duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos. Ambas as versões pecam ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, o comprimento da sombra da pirâmide - isto é, a distância da extremidade da sombra ao centro da base da pirâmide. (EVES, 2004, p. 115)

Conforme Nobre (2004) não é certo que isto realmente tenha ocorrido, tendo em vista que os períodos do ano em que o Sol encontra-se em posição de oferecer uma sombra privilegiada para se efetuar as medições, de maneira exata da altura da pirâmide, são muito raros.

A questão da proporcionalidade era de grande importância para os gregos, principalmente na arquitetura e agrimensura. Por isso, há indícios que a primeira sistematização da geometria pode ter sido em torno da proporcionalidade de segmentos determinados por um feixe de retas paralelas e outro de retas transversais. Esse assunto durante muitos séculos foi denominado por teorema dos segmentos proporcionais.

Na literatura disponível sobre o assunto encontramos trabalhos que dão um enfoque específico sobre o teorema de Tales. Pereira (2005) mostra, por exemplo, a aplicação do conceito de proporcionalidade na demonstração deste teorema. A autora apresenta a demonstração do teorema na fase pré-eudoxiana fundamentada no conceito de número da época de Tales, em que número é uma coleção de unidades e, por sua vez, unidade é um ponto sem posição (LINTZ, 1999 apud PEREIRA, 2005, p. 38).

A referida autora apresenta também outra tentativa de demonstração baseada na noção de número da época, feita pelos pitagóricos para o problema da proporcionalidade. Além disso, ela apresenta a demonstração do mesmo teorema após a descoberta da teoria das proporções.

A demonstração do teorema de Tales, pelos gregos, era voltada para a utilização de grandezas comensuráveis, mantendo a crença de que tudo era medido por números. Este tipo de demonstração, ainda hoje encontrado nos livros didáticos de matemática, tornou-se incompleta com a descoberta dos incomensuráveis. Em todo caso, são poucos os livros didáticos que abordam este tema incluindo a demonstração completa.

Alguma evidência do emprego de proporção por parte dos gregos encontra-se na construção da estrela de cinco pontas: figura obtida ao traçar as cinco diagonais de uma face do dodecaedro regular. Tal figura constituía-se em um símbolo especial para os pitagóricos. A construção da estrela de cinco pontas revela algo curioso: os pontos de intersecção das diagonais formam outro pentágono regular. Esses pontos dividem as diagonais de uma forma notável, isto é, cada um destes pontos de intersecção divide uma diagonal em dois segmentos desiguais, de tal forma que a razão da diagonal toda para o maior segmento é igual à deste para o menor.

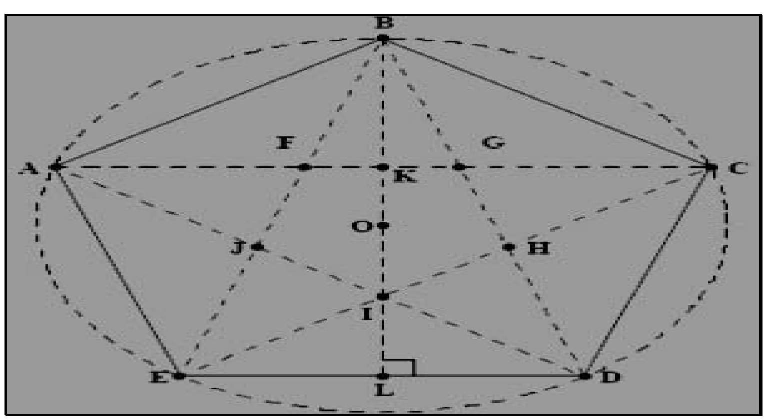
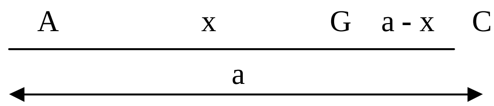


FIGURA 7
FACE PENTAGONAL DO DODECAEDRO REGULAR

A demonstração da divisão de um segmento em média e extrema razão é equivalente à resolução de uma equação quadrática. Para isso, tomemos como referência o segmento AC (Figura 8) que representa uma das diagonais da face do pentágono.



Seja AC = a e AG = x, então pela propriedade da secção áurea $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$.

Multiplicando meios e extremos, teremos a equação $x^2 = a^2 - ax$; esse tipo de equação já era conhecido pelos babilônios e conta-se que Pitágoras pode ter aprendido com eles

a resolvê-la algebricamente, o que não é certo, pois se *a* é um número racional, não haverá um número racional *x* que satisfaça esta equação. Segundo Boyer (1974), parece improvável que Pitágoras tenha percebido isso, sendo mais sensato supor que, ao invés de usar o método algébrico de resolução dos babilônios, ele tenha utilizado um método geométrico semelhante ao que se encontra em *Os Elementos* II.11 e VI.30, cuja demonstração apresentaremos mais adiante.

Podemos afirmar, com base em estudos realizados por historiadores da matemática, que as subdivisões das diagonais correspondem a "secção áurea", de um segmento, porém esta não era a denominação usada pelos gregos. Deste fato podemos supor que os gregos desenvolveram a noção de "secção áurea" a partir da construção do pentagrama ou pentágono estrelado, o que sugere o uso de proporções.

Na antiga civilização grega o uso das proporções está relacionado aos pitagóricos, apesar de não termos claras evidências sobre isto. Conforme Heath (1993), não se conhece a forma como era exposta a teoria das proporções dos pitagóricos, mas há indícios de que tinham uma teoria de proporções para números, ou seja, para grandezas comensuráveis e números inteiros. Ainda segundo este autor, os pitagóricos descobriram a dependência de intervalos musicais em relações numéricas e daí desenvolveu a teoria das médias com referência para a teoria da música e da aritmética.

O desenvolvimento da teoria das médias levou à descoberta da relação existente entre intervalos musicais e razões numéricas. Segundo Boyer (1974), conta-se que Pitágoras soube, na Mesopotâmia, das três médias: aritmética, geométrica e a subcontrária (mais tarde chamada harmônica), sendo a média geométrica considerada como a proporção por excelência. Os pitagóricos também usavam a proporção áurea, ou também chamada proporção musical, costumeiramente denominada por antigos historiadores como a mais perfeita proporção. Esta relacionava duas das anteriores: o primeiro de dois números está para a sua média aritmética como a média harmônica está para o segundo número. Em Heath (1993, p. 87) encontramos a apresentação dessas médias, supondo a>b>c, com a, b e c naturais:

Média Aritmética: $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}=\frac{b}{b}=\frac{c}{c}$, equivalente a $a+c=2b$

Média Geométrica: $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}=\left[\frac{b}{c}\right]$, equivalente a $ac=b^2$

Média Harmônica: $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$, equivalente a $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ $ou\ b=\frac{2ac}{a+c}$

Proporção áurea: $a:\frac{a+c}{2}=\frac{2ac}{a+c}:c$

Para Boyer (1974), um exemplo da aplicação da teoria das proporções relacionado à geometria que demonstra certa influência dos pitagóricos é o teorema sobre as quadraturas de lúnulas, atribuído a Hipócrates de Chios (430 a.C): *segmentos de círculos estão na mesma razão que os quadrados de suas bases.*

> O relato de Eudemo (335 d.C) diz que Hipócrates provou isso, mostrando primeiro que as áreas dos círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros. Aqui Hipócrates usa a linguagem e o conceito de proporção que desempenhou papel tão grande no pensamento pitagórico. (BOYER, 1974, p.49)

As chamadas lúnulas (isto é, crescentes) de Hipócrates são obtidas a partir da quadratura de um triângulo. De maneira geral, efetuar a quadratura de uma figura plana significa achar um quadrado cuja área seja igual à da figura dada.

Para demonstrar a igualdade de áreas através das quadraturas, Hipócrates utiliza o conceito de proporção e procede da seguinte maneira: partindo de um quadrado ABCD, traça-se um semicírculo sobre a diagonal AC (figura 9a, abaixo) e, com centro em D e raio AD, traça-se um arco circular de A até C. Os segmentos AB e BC (I) são arcos de 90 graus, da mesma forma que o segmento AC (II). Os segmentos AB, BC e AC são segmentos circulares, ou seja, o segmento circular é uma região limitada por uma corda e um arco de círculo.

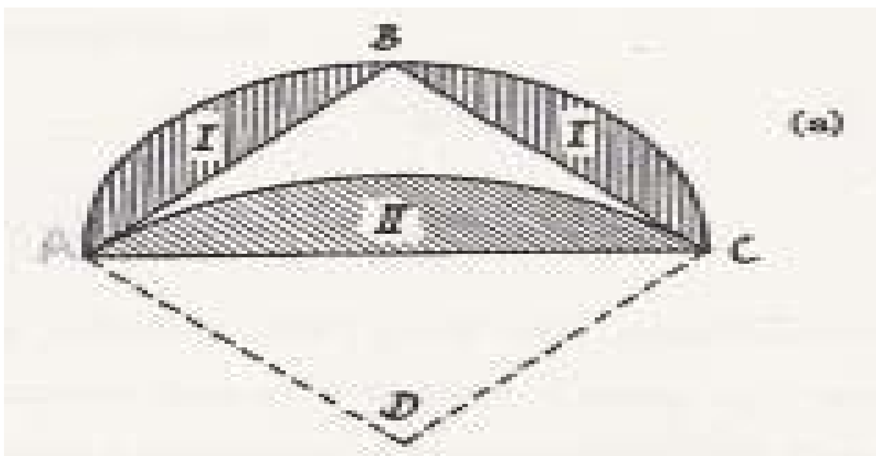


FIGURA 8a
SEMICÍRCULO SOBRE A DIAGONAL DE UM QUADRADO

Como os dois arcos possuem a mesma medida, então eles são semelhantes e figuras semelhantes, por sua vez, possuem áreas cuja razão é quadrado de seus segmentos circulares, ou seja:

$$\frac{segmento\,I}{segmento\,II} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Sendo o triângulo retângulo ABC com AB = BC e, pela aplicação do teorema de Pitágoras, resulta que $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1}{2}$; esta razão significa que o arco II mede duas vezes o arco I, ou expressando essa relação de outra maneira, podemos dizer que a medida do arco II corresponde a duas vezes a medida do arco I.

A igualdade $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1}{2}$ é válida porque se trata de um polígono, nesse caso, o triângulo retângulo isósceles inscrito numa circunferência, cujas relações métricas demonstram que: *o lado de um triângulo retângulo isósceles inscrito numa circunferência é igual a medida do raio da circunferência multiplicado pela raiz de 2.*

Na figura anterior, ao retirarmos os segmentos circulares (I) ou o segmento circular (II) do semicírculo, deveremos obter a mesma área, já que, fazendo assim, retiramos a mesma medida. Porém, cabe ressaltar que, no primeiro caso, obtemos o triângulo ABC (figura 9b), e no segundo caso, obtemos o crescente ou lúnula ABC (figura 9c). Assim o triângulo e a lúnula devem ter a mesma medida de área.

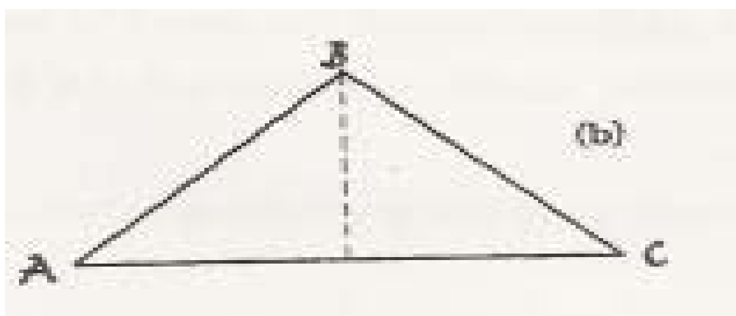


FIGURA 8b
TRIÂNGULO ISÓSCELES

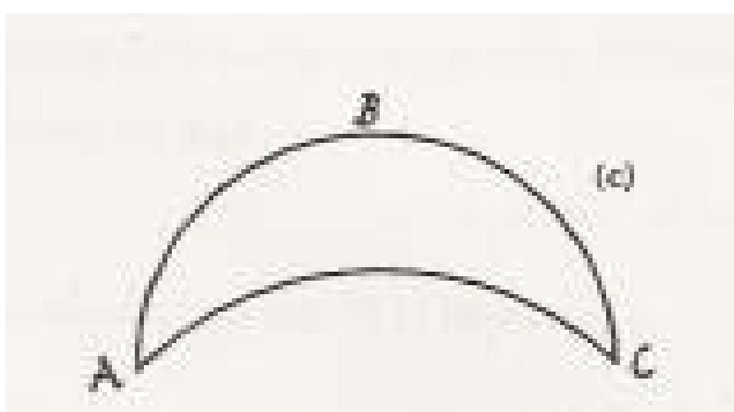


FIGURA 8c
CRESCENTE OU LÚNULA DE HIPÓCRATES

Esta é a forma que se utiliza para fazer a quadratura da lúnula, e como podemos observar nesta demonstração o grego Hipócrates aplica o conceito de proporção e, através do cálculo da razão, chega à conclusão sobre as medidas das áreas.

Ainda num contexto geométrico os matemáticos gregos compreendiam que quatro quantidades estão em proporção quando: dados dois segmentos, existe sempre um segmento que cabe um número inteiro de vezes num deles e um número inteiro de vezes no outro. Essa era a definição para segmentos comensuráveis.

Atualmente dizer que dois segmentos são comensuráveis corresponde a que sejam múltiplos de um outro segmento. Em outros termos, sejam AB e CD dois segmentos. Se existir um segmento EF e se existirem inteiros positivos u e v tais que AB = u EF e CD = v EF, então AB e CD são múltiplos do segmento comum EF, e assim se dizem comensuráveis. Os segmentos comensuráveis podem ser visualizados na figura abaixo:

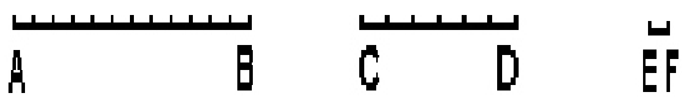


FIGURA 9
SEGMENTOS COMENSURÁVEIS

Em algum momento da história os números inteiros e suas razões demonstraram-se insuficientes para descrever propriedades geométricas, como a razão da diagonal de um quadrado (ou de um pentágono) com seu lado. Esta descoberta abalou com a escola pitagórica porque

> a definição pitagórica de proporção, assumindo como comensuráveis duas grandezas quaisquer similares, fazia com que todas as proposições da teoria pitagórica das proporções se limitassem a grandezas comensuráveis, invalidando sua teoria geral das figuras semelhantes. (EVES, 2004, p.107)

Os pitagóricos tinham a tendência de expressar tudo através dos números. Segundo Heath (1993), a teoria das proporções dos pitagóricos era uma teoria numérica, aplicável somente às magnitudes comensuráveis, algo semelhante ao que é apresentado no livro VII dos Elementos de Euclides, que versa sobre a teoria dos números. Conforme Bicudo (2009), no livro VII dos Elementos, a definição 2 diz que “número é a quantidade composta de unidades” e mais adiante encontra-se a definição 21 que diz o seguinte: “Números estão em proporção, quando sejam o primeiro do segundo e o terceiro do quarto o mesmo múltiplo ou a mesma parte ou as mesmas partes”.

Boyer (1974) explica que existe uma possibilidade de que até então os gregos usavam a idéia que quatro quantidades estão em proporção, a:b = c:d, têm a mesma subtração mútua, isto é, se em cada razão, a quantidade menor cabe um número inteiro de vezes na maior e o resto em cada caso cabe um número inteiro de vezes na menor e o novo resto no precedente o mesmo número inteiro de vezes e assim por diante.

Como sabemos, isto é uma aplicação do algoritmo euclidiano, processo para encontrar o máximo divisor comum de dois números inteiros, isto é, dividir o maior dos dois números inteiros positivos pelo menor e então dividir o divisor pelo resto. Continuar este processo de dividir o último divisor pelo ultimo resto, até que a divisão seja exata. O divisor final é o máximo divisor comum procurado.

Em *Os Elementos* livro VII, nas proposições de 1 a 3, o algoritmo euclidiano é apresentado como um tipo de subtração recíproca, levando-nos a supor que os Pitagóricos utilizavam à técnica aqui representada para verificar proporções.

Conforme Bicudo (2009, p. 270), a proposição 1 do livro VII é enunciada da seguinte maneira: “sendo expostos dois números desiguais, e sendo sempre subtraído de novo o menor do maior, caso o que restou nunca exatamente o antes dele mesmo, até que reste uma unidade, os números do principio serão primos entre si”

Para exemplificar tal técnica vamos utilizar as razões $\frac{32}{42}$ e $\frac{48}{63}$ e em cada uma delas, ao aplicar o algoritmo euclidiano poderemos verificar que:

$$\begin{array}{ll} 42-1\times 32=10 & 63-1\times 48=15 \\ 32-3\times 10=2 & 48-3\times 15=3 \\ 10-5\times 2=0 & 15-5\times 3=0 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{ll} 42=1\times 32+10 & 63=1\times 48+15 \\ 32=3\times 10+2 & 48=3\times 15+3 \\ 10=5\times 2 & 15=5\times 3 \end{array}$$

Ao aplicarmos o algoritmo euclidiano para as razões acima, verificamos a proporção entre elas, pois os quocientes 1, 3 e 5, que representam o número inteiro de vezes que as quantidades menores, ou restos, cabem nos maiores, é o mesmo para as duas razões. Deste modo é possível afirmar que $\frac{32}{42}=\frac{48}{63}$.

Desta forma, as proporções tendiam a serem relações numéricas. Porém, quando se tentou exprimir duas grandezas de forma numérica, descobriram a impossibilidade para certos casos.

Alguns historiadores da matemática atribuem a descoberta da incomensurabilidade aos pitagóricos, quando estes tentavam comparar a medida da diagonal do quadrado com seu lado ou mesmo da diagonal de um pentágono com seu lado. Há ainda outros que supõem que a percepção da incomensurabilidade veio em conexão com a aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo isósceles. Segundo Boyer (1974), as circunstâncias que rodearam a primeira percepção da incomensurabilidade são tão incertas quanto à época da descoberta.

Há suposições de que, para os gregos antigos, a incomensurabilidade existia a partir do momento que, ao se comparar duas grandezas, não se obtinha uma unidade comum às duas; no caso da diagonal do quadrado e seu lado, verificaram que a medida do comprimento da diagonal do quadrado não cabia um número inteiro de vezes na medida do comprimento do lado do quadrado, ou seja, não existia um número inteiro que representasse aquela medida.

A descoberta das grandezas incomensuráveis abalou a filosofia pitagórica porque acabava com a crença na qual estava alicerçada. Tal crença girava em torno de que todas as grandezas (comprimento, área, volume,...) podiam ser associadas a um número inteiro ou a uma razão entre dois números inteiros.

> A crise dos incomensuráveis solapou as bases da teoria das proporções baseada em grandezas comensuráveis e de outras mais, precipitando uma crise de fundamentos, a primeira da História da Matemática. Essa crise é superada com sucesso através da teoria das proporções de Eudoxo. (ÁVILA, 1985, p. 8)

O filósofo Eudoxo (aprox. 408-355 a.C) pertenceu à escola de Platão e desenvolveu uma teoria das proporções que permitiu superar a dificuldade dos incomensuráveis sem a necessidade dos números irracionais.

Parece existir um problema em relação à definição de razão entre os gregos, pois a definição apresentada por Euclides, como uma espécie de relação de tamanho entre duas grandezas de mesmo tipo, é inteiramente inadequada. Já para Eudoxo o conceito de razão exclui o zero e expressa o que ele entende por grandezas da mesma espécie da seguinte forma: a medida do comprimento de um segmento de reta, por exemplo, não pode ser comparado, em termos de razão, com a medida da área de uma figura. Do mesmo modo não se pode comparar a medida da área com a medida do volume.

Na Grécia antiga a perturbação causada pela descoberta da incomensurabilidade foi tamanha e

> levou a se evitar razões, o quanto possível, na matemática elementar. A equação linear $ax = bc$, por exemplo, era considerada como uma igualdade entre as áreas ax e bc e não como uma proporção ou igualdade entre as razões $a:b$ e $c:x$. [...] Só no Livro V de Os Elementos é que Euclides atacou a difícil questão da proporcionalidade. (BOYER, 1974, p. 57)

Após essas primeiras questões apontadas como problema sobre razões, aparece no livro V de Euclides a definição de Eudoxo:

> diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando eqüimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e eqüimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros eqüimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos eqüimúltiplos considerados em ordem correspondente. Isto é, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se, e somente se, dados inteiros m e n sempre que ma < nb, então mc < nd; ou ma = nb, então mc = nd; ou se ma > nb, então mc > nd. (BOYER, 1974, p. 66)

A definição dada por Eudoxo para a igualdade de razões se assemelha ao processo que utilizamos para equivalência de frações. Por outro lado, os resultados dessa teoria têm implicações posteriores bastante significativas para a matemática, pois ela serviu, no século XIX, de base para a elaboração da teoria dos números reais. Segundo Boyer (1974), a teoria das proporções de Eudoxo divide a coleção dos números racionais $\frac{m}{n}$ em duas classes, conforme $ma \leq nb$ ou $ma > nb$.

O conhecimento que chegou até nós da matemática de Euclides provém de sua importante obra *Os Elementos*. Segundo Boyer (1974, p. 76), “Os Elementos não eram, como se pensam às vezes, um compêndio de todo conhecimento geométrico; ao contrário, trata-se de um texto introduzido cobrindo toda matemática.”

Euclides apresenta no livro V a teoria das proporções de Eudoxo, como já foi visto, sem atribuir valores às grandezas geométricas. Esta teoria reaparece no livro VI aplicada à geometria plana, com teoremas fundamentais de semelhança de triângulos e a construção de terceiras, quartas e médias proporcionais.

A teoria dos números é tratada no livro VII, sob a forma de números inteiros e positivos, sendo representados por segmentos, aos quais aplica a teoria das proporções. Neste livro Euclides apresenta a definição de números proporcionais (def. 21) e cabe ressaltar a proposição 19, que é apresentada atualmente como a propriedade fundamental das proporções:

> Caso quatro números estejam em proporção, o número produzido do primeiro e quarto será igual ao número produzido do segundo e terceiro; e caso o número produzido do primeiro e quarto seja igual ao do segundo e terceiro, os quatro números estarão em proporção”. (EUCLIDES, 2009, p. 283)

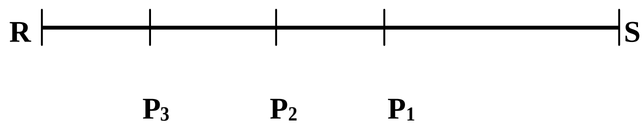
Atualmente representamos tal propriedade da seguinte forma: se a:b = c:d então a.d = b.c; e se a.d = b.c então a:b = c:d.

Outra aplicação de proporção encontrada em *Os Elementos* diz respeito a uma construção equivalente a secção áurea baseada na proposição 11 do livro II, introduzindo esta noção com a definição 3 do livro VI. A definição da secção áurea é introduzida por Euclides VI-3 dos elementos, conforme Bicudo (2009, p. 231): “uma reta é dita estar cortada em extrema e média razão, quando como a toda esteja para o maior segmento, assim o maior para o menor”.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{AB}$$

Esta subdivisão de um segmento era tão familiar para os gregos que não sentiram a necessidade de dar um nome concreto para designá-la, simplesmente chamavam de divisão de um segmento em média e extrema razão ou, de forma mais resumida, a secção áurea.

Uma das propriedades mais curiosas da secção áurea é que, pode-se dizer, ela se auto-propaga. Seja um segmento RS e um ponto P_1 que o divide de forma áurea, sendo RP_1 o segmento maior. Agora se sobre RP_1 tomamos um ponto P_2 de forma que $RP_2 = P_1S$, então o segmento RP_1 será subdividido de forma áurea pelo ponto P_2. Se tomarmos um novo ponto P_3 sobre RP_2, de forma que $RP_3 = P_1P_2$, então o segmento RP_2 será dividido por P_3 de forma áurea. Segundo BOYER (1974), esse processo é iterativo e pode ser repetido tantas vezes quanto se queira, obtendo-se segmentos RP_n cada vez menores, divididos em média e extrema razão por P_{n+1}.



R, P_1, S em proporção áurea.

Estando R, P_1, S em proporção áurea, então:

$\frac{RS}{RP_1} = \frac{RP_1}{P_1S} = \frac{RP_1}{RP_2}$ considerando a proposição 19 do livro V, podemos escrever:

$$\frac{RS - RP_1}{RP_1 - RP_2} = \frac{P_1S}{P_2P_1} = \frac{RP_2}{P_2P_1}$$

Dessa forma, $\frac{RP_1}{RP_2} = \frac{RP_2}{P_2P_1}$, isto é, R, P, S, estão em proporção áurea.

Esse processo de dividir um segmento em média e extrema razão como tema da geometria pitagórica aparece de forma notável em *Os Elementos* de Euclides. Segundo Boyer (1974), não se pode afirmar que os pitagóricos de 500 a.C. sabiam realmente dividir um segmento em média e extrema razão, embora seja provável que sim. A construção da secção áurea corresponde à resolução de uma equação quadrática e Pitágoras pode ter aprendido dos babilônios como resolvê-la algebricamente.

Agora apresentaremos aqui a utilização do conceito de proporcionalidade usado pelos pitagóricos na construção da secção áurea tal como ela aparece em *Os Elementos*. Seja o segmento AB = a, dividido pelo ponto H de forma áurea, sendo AH = x o segmento maior da divisão, HB = a – x o segmento menor da divisão. Pela propriedade áurea segue-se que: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ de onde se obtém a equação: $x^2 = a^2 - ax$. O procedimento de resolução é análogo ao que encontramos em *Os Elementos* de Euclides: Livro II proposição 11 e livro VI proposição 30:

Euclides II.11: *Dividir uma reta em duas partes de modo que o retângulo compreendido pela reta e por uma de suas partes seja equivalente ao quadrado da outra parte.*

Euclides VI.30: Dividir um segmento em média e extrema razão.

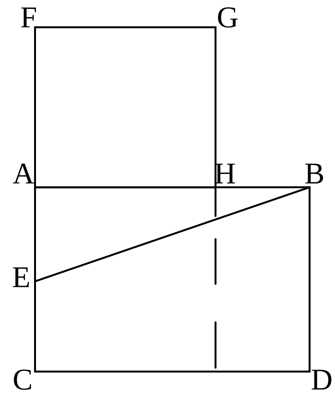


FIGURA 10
CONSTRUÇÃO DE UM SEGMENTO EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO

Para dividir um segmento AB em média e extrema razão, Euclides constrói, de acordo com a proposição 11 do livro II, o quadrado ABCD de lado AB, divide o segmento AC em duas partes iguais pelo ponto E. Traça o segmento EB e estende o segmento CEA até F de modo que EB = EF. Por último obtém o ponto H completando o quadrado AFGH. Comprova que H resolve o problema demonstrando que $\frac{AB}{AH} = \frac{AH}{HB}$.

A História da Matemática da antiga Grécia nos mostra que a teoria das proporções era aplicada na aritmética ou teoria dos números, valendo ressaltar que tal aplicação se refere aos números naturais; por outro lado, a teoria também era aplicada à geometria, podendo aí ser incluídos os segmentos incomensuráveis.

1.2.4 As proporções no contexto da matemática indiana

Na Índia encontram-se indícios do uso da regra de três, porém com algum diferencial de outros povos, pois, como afirma Smith (1958), a regra de três foi dada por Brahmagupta e Bhaskára já com esta denominação e enunciada por eles quase da mesma forma, como uma regra arbitrária sem nenhuma justificação e sem fazer nenhuma relação com proporção.

A forma como eles caracterizavam a regra de três é semelhante ao que fazemos hoje, porém a forma de enunciar é bastante diferente do que conhecemos. A regra de três por Brahmagupta era enunciada da seguinte maneira:

> na regra de três, os nomes dos termos são Argumento, Fruto e Requisito. O primeiro e o último termos devem ser semelhantes. Requisito multiplicado por Fruto e dividido por Argumento é o produto. (EVES, 2004, p. 263)

Um exemplo da aplicação da regra de três é dado por Bhaskara, conforme Smith (1958): "Se duas palas e meio de açafrão custam três sétimos de niskas, quantas palas se comprarão com nove niskas?" A solução é apresentada da seguinte forma:

3	5	9
7	2	1

Nesta representação os termos $\frac{3}{7}$ e 9 são Argumento e Requisito respectivamente; $\frac{5}{2}$ é o fruto. O produto é dado pela regra: Requisito multiplicado por fruto, 9 x $\frac{5}{2}$, e dividido pelo Argumento $\frac{3}{7}$, resulta em 52 $\frac{1}{2}$.

Em representa atual teríamos $\frac{5}{2}$ ou $2\frac{1}{2}$, ou ainda 2,5 palas de açafrão; $\frac{3}{7}$ de niskas e 9 niskas.

O procedimento utilizado pelos hindus é familiar a regra de três que diz que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, então $x = \frac{bc}{a}$, onde a é o "argumento", b é o "requisito" e c é o "fruto". Atualmente resolveríamos simplesmente a proporção $\frac{x}{9} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{7}}$. Segundo Eves (2004, p. 263), "as aritméticas européias antigas dedicaram muito espaço à explicação da regra de três; muitas vezes usavam [...] diagramas esquemáticos para tornar perceptível sua natureza mecânica".

1.2.5 As proporções no contexto da matemática árabe

Os árabes também deram algumas contribuições para o desenvolvimento da matemática. Particularmente ao que se refere ao conceito de proporcionalidade, os matemáticos árabes não foram além do que já existia produzido por outros povos, como os gregos, por exemplo. Os árabes usavam a regra da falsa posição para resolver problemas algébricos de maneira não algébrica.

Segundo Smith (1958), os árabes usavam as formas abaixo para indicar uma proporção, mas não nomeavam os números, isto é, eles não se preocupavam em atribuir nomes aos números, como os hindus faziam; ou como fazemos atualmente, cujos termos da proporção denominamos de antecedentes e consequentes.

$$\begin{array}{c|c} 1 & 5 \\ 3 & 15 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline \end{array}$$

Por outro lado, observamos um considerável avanço no estudo das proporções realizado pelo cientista e poeta árabe Khayyan que viveu entre os séculos XI e XII. Ele é autor da obra *Álgebra* e reformulou a teoria das proporções. Segundo Boyer (1974), ele substituiu a teoria das proporções de Euclides por um método numérico, chegando perto da definição de números irracionais, além de lidar com o conceito de número real em geral.

Os autores Dalmedico e Peiffer (1986 apud BERNAL, 2004, p. 33), afirmam que Khayyan expôs uma teoria elaborada de proporções, pois, para ele, a teoria apresentada por Euclides, no Livro V, não exprimia a essência de uma razão que é a medida de uma grandeza por outra. No entanto, Khayyan comparava razões, decompondo-as em frações contínuas e verificava se elas eram (ou não) comensuráveis.

Conforme D'Ambrosio (1986), o algoritmo das frações contínuas é apenas o algoritmo euclidiano. Para a razão $\frac{a}{b}$, temos o algoritmo euclidiano $a = qb + r$, que pode ser escrito como $\frac{a}{b} = q + \frac{1}{\frac{b}{r}}$, o que é aplicado novamente à razão $\frac{b}{r}$ e assim por diante. Verificamos como se expressa, por frações contínuas, o algoritmo euclidiano para as razões $\frac{32}{42}$ e $\frac{48}{63}$ que já foi apresentado, anteriormente, neste estudo:

Razão $\frac{32}{42}$: $42 = 1 \times 32 + 10$; $32 = 3 \times 10 + 2$; $10 = 5 \times 2 + 0$

$$\frac{32}{42} = 1 + \frac{1}{\frac{32}{10}}; \qquad \frac{32}{10} = 3 + \frac{1}{\frac{10}{2}}; \qquad 10 = 5 \times 2 + 0 \quad (1)$$

Podemos escrever por substituição das frações: $\frac{32}{42} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}}$ (2)

Para a razão $\frac{48}{63}$, aplicando o mesmo processo, encontraremos o resultado que em (2):

$$\frac{48}{63} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}}$$

A técnica de aplicar o algoritmo euclidiano nos permite verificar quando duas razões são comensuráveis. No caso das razões acima, verificamos que as duas são comensuráveis e, portanto, existe um número finito de quocientes q_n, isto é, os números 1, 3 e 5. Desse modo, Khayyan decompunha razões por meio de frações continuas e analisava sua comensurabilidade.

1.2.6 A proporcionalidade na Idade Média e no Renascimento

Na Idade Média (séc. V ao séc. XV aproximadamente) uma obra destacou-se por sua riqueza de conhecimentos matemáticos. Trata-se do livro *Liber abaci* de Leonardo Fibonacci, que aparece na Europa no século treze, apresentando o conhecimento matemático que Leonardo adquiriu através de seus estudos e viagens pelo mundo mediterrâneo. Ele tomou conhecimento, através de cientistas árabes, do sistema de numeração posicional dos hindus, além dos algoritmos para as operações aritméticas. Segundo Sigler (2003), Leonardo aprendeu o método algébrico baseado principalmente no trabalho de Al- Khwarizmi.

Sigler (2003) explica que apesar do título da obra de Leonardo Fibonacci ter sido derivado da palavra ábaco, este não pode ser traduzido por “livro do ábaco”, tendo em vista que ábaco era um dispositivo mecânico usado para cálculo. Os hindus e os árabes utilizaram uma escrita numérica com um sistema posicional e métodos para as operações básicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão, que não requeriam o uso do ábaco. No seu livro *Liber abaci*, Leonardo ensina como realizar estes procedimentos de cálculo.

A intenção de Fibonacci ao escrever o seu livro foi trazer para o povo italiano a melhor matemática do mundo de maneira que eles a utilizassem. Assim, boa parte do seu conteúdo passou a ser utilizada não só por aprendizes em idade escolar, como também por negociantes e mercadores do século treze.

Sigler (2003) explica que grande parte dos problemas matemáticos do *Liber abaci* que foi utilizado por mercadores e negociantes envolvia proporção. Um exemplo da aplicação de proporção pode ser visto no seguinte problema: Se dois quilos de cevada custam cinco montantes, então quanto custará sete quilos? Problemas deste tipo revelam a utilização da regra de três.

Como procedimento de solução de problemas aparece, no *Liber abaci*, o método da falsa posição e da falsa posição dupla. O método da falsa posição funciona pela introdução de argumentos significando aproximações, e que posteriormente eram corrigidos para se chegar à solução correta. O método da falsa posição é muito antigo e retorna ao tempo dos antigos egípcios.

Segundo Sigler (2003, p. 8, tradução nossa), “o método da falsa posição resolve problemas que equivalem a equações lineares simples do tipo Ax = B, e o da falsa posição dupla é usado em problemas que conduzem a equações do tipo Ax + B = C.”

Sigler (2003) aponta que o problema das árvores que aparece no *Liber abaci* exige a solução da equação Ax = B e é resolvido pelo método da falsa posição. Este mesmo problema é apresentado por Eves (2004) da seguinte maneira:

> certo rei envia 30 homens a seu pomar para plantar árvores. Se eles podem plantar 1000 árvores em 9 dias, em quantos dias 36 homens plantariam 4400 árvores? Para Eves (2004) este tipo de problema foi elaborado para ilustrar a regra de três. (EVES, 2004, p. 315)

No período do Renascimento (séc. XV ao séc. XVI aproximadamente) muitos estudiosos dedicaram-se a escrever sobre questões matemáticas, sendo comum encontrar, nas suas obras, comentários e emprego das proporções. Em 1487, Luca Pacioli (1445-1514), italiano, escreveu a obra *Summa de Aritmetica Geometrica Proportioni et Proportionalitá*, cuja tradução do título aparece em Capra (2008, p. 113) como *Sumário de Aritmética, Geometria de proporção e proporcionalidade*. De acordo Boyer (1974) era uma compilação de aritmética, álgebra, geometria euclidiana e contabilidade. Pacioli trata da regra de três e da falsa posição.

Segundo Eves (2004), matemáticos como Chuquet (1445-1498), Stifel (1486-1567) e Tartaglia (1499-1557) estudaram cálculos com números racionais e irracionais, abordam a teoria das equações, proporções e discutem a regra de três.

O emprego de proporções durante o período do Renascimento foi de grande relevância para as artes. Neste contexto, destaca-se o uso de proporções através da razão áurea, cujas medidas encantavam os artistas daquela época.

A proporção áurea possui origem bastante remota. Segundo Arteaga (2001), foram os gregos que estabeleceram as bases desta proporção e a mantiveram na dimensão exclusivamente geométrica. Tal proporção possui uma dimensão estética e filosófica, de orientação Platônico-Pitagórica, desde a sua primeira formulação.

Parece existir na literatura sobre o tema uma ligeira confusão quanto ao nome a utilizar ao referir-se a citada proporção. Talvez este fato decorra da aparente disparidade entre as dimensões geométricas e aritméticas da própria proporção.

Os termos utilizados para a proporção estão em consonância com o espírito de cada época; sendo assim, na antiguidade, era conhecida por proporção áurea. Já no período mais recente, o Renascimento, a mesma passa a ser chamada por divina proporção, designação dada por Leonardo da Vinci.

Uma obra considerada importante da época do Renascimento é o livro *Divina Proportione* de Luca Pacioli. A obra de Pacioli, segundo Sá (2005), foi inspirada nas obras *O Timeu* de Platão e *Os Elementos* de Euclides, sendo concluída em 1498 e dedicada ao seu protetor, o duque Ludovico Sforza.

O *Divina Proportione* tem sua versão impressa na cidade de Veneza, 1509. A primeira página da obra é uma belíssima ilustração de Leonardo da Vinci. Apesar do titulo está relacionado à proporção, o conteúdo da obra refere-se, a um exaustivo trabalho sobre poliedros.

Com relação a esse aspecto, Cruz (2001) esclarece que Pacioli justifica o título dado à obra e à proporção que trata, (estabelecendo numerosas correspondências) da semelhança entre a proporção e Deus.

A próxima figura ilustra uma das páginas do exemplar original da obra *Divina Proportione* que se encontra digitalizada e acessível em um endereço na internet.

Del condecente titulo del presente tractato. Cap. V.

Arme del nostro tractato excelso. D. el suo condecente titulo douer essere dela diuina proportione. E questo per molte simili conuenientie quali trouo in la nostra pportione delaquale in questo nostro vtilissimo discorso intẽdemo a epso dio spectanti. Dele quali fra laltre quatro ne prendaremo a sufficientia del nostro proposito. La pma e che lei sia vna sola e non piu. e nõ e possibile di lei asegnare altre spe

PRIMA 4

cie ne differentie. Laquale vnita sia el supremo epiteto de epso idio secondo tutta la scola theologica e anche philosophica. La seconda conueniẽtia e dela sancta trinita. Cioe si commo in diuinis vna medesima substãtia sia fra tre persone padre figlio e spirito sancto. Cosi vna medesima proportione de questa sorte sempre conuen se troui fra tre termini. e mai ne in piu ne in manco se po retrouare. cõmo se dira. La terça conueniẽtia e che si commo idio propriamente non se po diffinire ne per parolle a noi intẽdere. cosi questa nostra proportione non se po mai per numero intendibile asegnare ne per quantita alcuna rationale exprimere: ma sempre sia occulta e secreta e dali Mathematici chiamata irrationale. La quarta conuenientia e che si commo idio mai non se po mutare. e sia tutto in tutto e tutto in ogni parte. cosi la presente nostra proportione semp in ogni quantita continua e discreta o sienno grandi: o sienno picole sia vna medesima e sempre inuariabile e per verun modo se po mutare ne anco per intellecto altramẽte apprendere. commo el nostro processo demostrara. La quinta conuenientia se po non immeritamente ale predicte arogere cioe. Si commo idio lessere confereci ala virtu celeste per altro nome detta quinta essentia e mediante quella ali altri quatro corpi semplici. cioe ali quatro elementi. Terra. Aqua. Aire. E fuoco. E per questi lessere a cadauna altra cosa in natura. Cosi questa nostra sancta porportione lesser formale da (secondo lantico Platone in suo Timeo) a epso cielo atribuendoli la figura del corpo detto Duodecedron. altramẽte corpo de. 12. pentagoni. El quale commo desotto se mostrara sença la nostra proportione non e possibile poterse formare. E similmẽte a ciascuno de li altri elementi sua propria forma asegna fra loro per niun modo coincidenti. cioe al fuoco la figura pyramidale detta Tetracedron. A latera la figura cubica detta exacedrõ. Al aire la figura detta octocedrõ. E ala q̃ quella detta ycocedrõ. E q̃ste tal forme e figure dali sapiẽti tutti corpi regulari sõ nonũcupate. Cõmo separatamẽte disotto de cadauo se dira. E poi mediãti q̃sti a infiniti altri corpi detti dependenti. Li q̃li. 5. regulari nõ e possibile fra loro poterse proportionare ne dala spera poterse intendere circõscriptibili sença la nostra detta proportione. El che desotto tutto apparera. Le quali conuenientie. benche altre assai se ne potesse adure. queste ala condecente denominatione del presente compendio sienno p sufficiẽtia assegnate.

Dela sua degna commendatione. Cap. VI.

FIGURA 11
FRAGMENTO DO LIVRO DIVINA PROPORÇÃO

Segundo Cruz (2001), o capítulo V da referida obra traz as cinco correspondências feitas por Pacioli para justificar o título atribuído ao seu trabalho:

> A primeira correspondência é que ela é uma só e não mais, e não é possível atribuir outras espécies nem diferenças. Somente existe uma forma de dividir o segmento em média e extrema razão. A segunda correspondência refere-se à Santíssima Trindade, assim como no divino existe uma mesma substancia entre três pessoas, Pai, Filho e Espírito Santo, do mesmo modo uma mesma proporção se encontrará sempre entre termos, e nunca mais ou menos. A terceira correspondência é que, assim como Deus não se pode propriamente definir, nem dar-se a nos entender mediante palavras, nossa proporção não pode nunca determinar-se como um número inteligível nem expressar-se mediante alguma quantidade racional,... e é chamada de irracional pelos matemáticos. A quarta correspondência é que [...] Deus nunca pode mudar e está em tudo, assim também é a Divina Proporção. A quinta correspondência assinala como afeta a proporção na construção do pentágono e, conseqüentemente, ao corpo sólido do dodecaedro, que é atribuído ao céu, quintessência, segundo O Timeu de Platão (CRUZ, 2001, p.14)

Luca Pacioli e Leonardo da Vinci eram conterrâneos, fato que pode ter facilitado o inicio de uma amizade. Leonardo mantinha um profundo interesse pela matemática e, juntamente com Pacioli, passou a aprofundar seus estudos. Ambos resolveram colaborar no livro *Divina Proportione*, escrito por Pacioli e ilustrado por Leonardo da Vinci.

A obra *Divina Proportione* de Pacioli foi considerada como uma das obras mais importantes do final do período renascentista, tanto no âmbito cientifico quanto artístico, servindo de ponto de partida para vários estudos sobre as proporções no corpo humano e nas produções artísticas que foram produzidas ao longo do Renascimento.

Em seus estudos matemáticos Leonardo da Vinci dedicou-se ao estudo das proporções e logo passou a utilizá-las em algumas de suas obras de artes, a exemplo do quadro da Mona Lisa, que, de acordo com muitos estudos realizados, têm suas medidas em proporção áurea.

Segundo Atalay (2007), o busto da Mona Lisa (ligeiramente virado, com o ombro direito e a face esquerda recuada em relação ao ombro esquerdo e à face direita) pode ser inserido num triangulo áureo (de ângulos internos iguais a $72^o – 36^o – 72^o$).

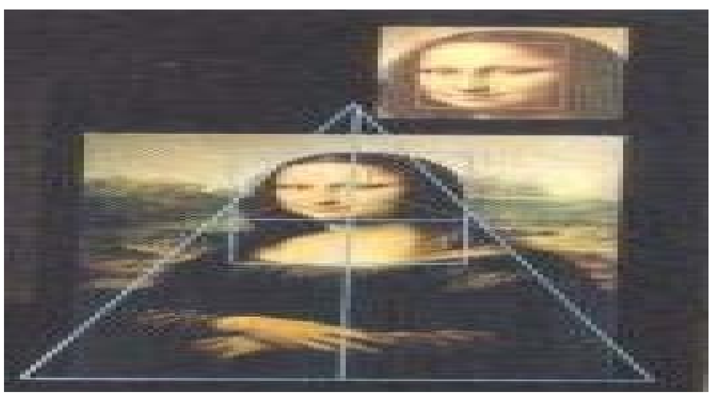


FIGURA 12
PINTURA DA MONALISA

O triângulo áureo é um triângulo isósceles onde os ângulos da base representam o dobro do ângulo do ápice e, traçando uma bissetriz de um dos ângulos da base ao lado oposto, obteremos um novo triângulo que possui os mesmos ângulos do anterior, como mostra a figura abaixo:

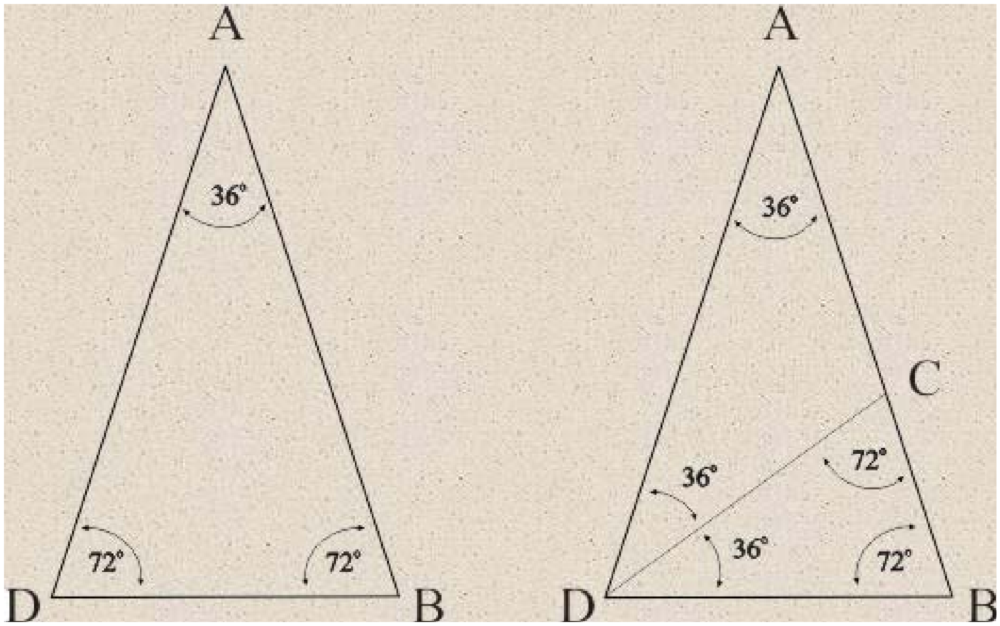


FIGURA 13
TRIÂNGULO ISÓSCELES ÁUREO

Ao traçarmos a bissetriz DC, obtemos um novo triângulo, também áureo, por ter os ângulos iguais ao anterior, sendo, portanto, semelhantes. O fato desse triângulo ser considerado áureo decorre justamente dessa propriedade de semelhança, que resultará na razão áurea.

No triângulo da figura 13, os ângulos ADC e DAC possuem a mesma medida, assim como os lados AC e CD também possuem a mesma medida de comprimento. Denominemos a medida AD de y e a medida de DB=DC=AC=x. Pela semelhança de triângulos, temos que $\frac{y}{x} = \frac{x}{y-x}$. Desenvolvendo, chegamos à equação: $y^2 - xy - x^2 = 0$. Resolvendo a equação quadrática na variável y:

$$y = \frac{x \pm \sqrt{(-x)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-x^2)}}{2}$$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 4x^2}}{2}$$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{5x^2}}{2}$$

$$y = \frac{x \pm x\sqrt{5}}{2}$$

Desconsideramos o valor negativo de y, tendo em vista que este representa uma medida de comprimento. Dessa forma, obtemos:

$$y = \frac{x + x\sqrt{5}}{2}$$

$y = \frac{x\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$ e a razão $\frac{y}{x} = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{2} \cong 1{,}618$ que é a razão áurea.

Logo, o triângulo em questão é áureo. Portanto, o uso das proporções na obra Monalisa foi demonstrado pela semelhança de triângulos, que, neste caso especifico, denomina-se triangulo áureo. Segundo Atalay (2007), é nestes padrões de medidas que o quadro da Monalisa está inserido, conforme mostra a figura 12. A análise realizada por ele teve o objetivo de confirmar algumas hipóteses levantadas ao longo dos séculos, ou seja, a presença da razão áurea em obras consideradas extremamente perfeitas.

O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade prolongou-se por muitos séculos e não foi tarefa fácil estabelecê-lo como o conhecemos hoje. Ainda na Idade Média a compreensão acerca de razão e proporção apresentava significados ainda não muito precisos:

> A palavra razão é uma palavra latina e foi costumeiramente usada na aritmética da Idade Média para significar cálculo. Para expressar a idéia a: b, os escritores medievais latinos geralmente usavam a palavra proportion, não a ratio; enquanto para a idéia de igualdade de razões, a: b = c: d, eles usavam a palavra proporcionalitas. (SMITH, 1958, p. 478, tradução nossa)

Os trabalhos de Campanus (1260), Jordanus Nemorarius (1225), Leonardo de Cremona (1425), Chuquet (1484), Rudolf (1526), Barrow (1670), incluídos aí o período da Idade Média e do Renascimento são citados por Smith (1958) como trabalhos em que a palavra proporção foi utilizada para significar razão. Mas, ressalta que outros autores usavam estes termos como utilizamos atualmente.

Os termos que envolvem o conceito de proporcionalidade, que são atualmente designados por meios, antecedente e consequente derivaram-se das traduções latinas de *Os Elementos* de Euclides. Desde os antigos gregos até o século XVII, foram utilizados muitos termos antigos relacionados com razão, tais como razões múltiplas, duplas, triplas, superparticulares. Segundo Smith (1958), estes termos foram resultados do desenvolvimento de uma teoria geral das frações, quando na época ainda não existia um simbolismo algébrico bem desenvolvido para isto.

Muitos destes termos foram desaparecendo, a partir da introdução da nossa notação atual, que é resultado do simbolismo algébrico que estava sendo desenvolvido. Podemos citar os trabalhos de Pacioli (1494) e Stifel (1546) que faziam uso de uma simbologia que muito se aproxima da nossa notação usual. Segundo Smith (1958), foi na Idade Média que a diferença entre razões e frações, ou razão e divisão, tornou-se menos acentuada, e no período da Renascença estas diferenças quase desapareceram, com exceção dos casos de incomensurabilidade.

A palavra *proportion*, de acordo com Smith (1958), foi utilizada para designar séries, a exemplo de Pacioli (1494). O uso da palavra *proportion* para este tipo de designação era restrito a séries de quatro termos. Este tipo de série aparecia em registros feitos por antigos escritores como uma proporção aritmética, $b - a = d - c$, como 2, 3, 4 e 5 e também de uma proporção geométrica, $a: b = c: d$, como em 2, 4, 5 e 10. Ademais destas proporções, os gregos acrescentaram a proporção harmônica.

Se, por um lado, a palavra proporção passou por variações no processo de desenvolvimento simbólico, até o seu definitivo estabelecimento, assim também aconteceu com outros termos relacionados, a exemplo da regra de três. A regra de três foi chamada assim pelos hindus e árabes, além de certos escritores latinos. Esta regra foi largamente utilizada por mercadores orientais para a resolução de determinados problemas numéricos. Foi também denominada “regra de ouro”, “chave dos mercadores” e “regra dos mercadores”.

Neste levantamento histórico sobre o conceito de proporcionalidade apresentamos alguns pontos do desenvolvimento deste conceito, bem como a maneira como ele foi compreendido por diferentes povos em diferentes épocas. Passemos, agora, a discutir algumas perspectivas teóricas que envolvem a resolução de problemas de proporcionalidade na área de Educação Matemática.

1.3 Resolução de problemas de proporcionalidade

A proporcionalidade é um conceito de considerável relevância para a matemática e costuma aparecer em várias situações cotidianas tais como: na compra e venda, nas receitas de cozinha, na construção civil e nos demais ramos da atividade da ciência e tecnologia. Além disso, o conceito de proporcionalidade está relacionado a muitos outros conceitos matemáticos, como porcentagem, fração, função linear, taxas, inclinação do gráfico de uma função etc.

O conceito de proporcionalidade tem sido estudado com muito interesse pela psicologia no que se refere ao desenvolvimento cognitivo de sujeitos escolarizados e também não escolarizados. Esses estudos são realizados porque a proporcionalidade possui a propriedade da resolução de problemas matemáticos abrangerem diversos contextos, não se restringindo unicamente a problemas matemáticos de sala de aula.

Resolver problemas que envolvem o conceito de proporcionalidade vai muito além da mera aplicação de algoritmos, a exemplo da regra de três, costumeiramente associada à proporcionalidade. A compreensão de problemas que envolvem a proporcionalidade requer inicialmente, o estabelecimento das relações que existem entre as grandezas ou variáveis.

Segundo Spinillo (1997), o pensamento proporcional refere-se basicamente à habilidade em estabelecer relações.

Para Schliemann e Carraher (1997) o estudo da proporcionalidade na escola se restringe apenas à estratégia regra de três, baseando-se nas propriedades de razões equivalentes, ou seja, dadas duas razões equivalentes $\frac{a}{b} e \frac{c}{x}$, as igualdades $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ e $a \cdot x = b \cdot c$ são verdadeiras e, portanto, $x = \frac{b \cdot c}{a}$. Se o professor em seu trabalho com proporcionalidade utiliza apenas este tipo de procedimento, deixa de explorar as relações existentes entre as grandezas consideradas, consequentemente perde a oportunidade de desenvolver juntos aos seus alunos o pensamento proporcional. Dessa forma, entendemos que a resolução de problemas de proporcionalidade deve explorar as relações existentes entre as grandezas em questão, bem como enfatizar a relação deste conceito com outros conceitos matemáticos.

Historicamente a resolução de problemas já fazia parte da vida das pessoas, cuja utilização possuía cunho prático, ou seja, resolviam problemas de acordo com as suas necessidades de sobrevivência. Para a resolução de determinados problemas as pessoas utilizavam métodos e estratégias de solução, e, através destes procedimentos, os conceitos, mesmo que implícitos, são atualmente reconhecidos por aqueles que se dedicaram a estudos históricos.

Na concepção de Stanic & Kilpatrick (1990 apud HUANCA, 2006, p. 23), "os métodos particulares de resolução de problemas têm uma longa história". Eles dizem que Vera Sanford, em seu trabalho de 1927 - *A história de problemas de álgebra* -, dá um exemplo da aplicação da regra da falsa posição, usando um problema do século XV, trabalhado pelo matemático Phillipo Calandri:

A cabeça de um peixe pesa $\frac{1}{3}$ do peso total dele, seu rabo pesa $\frac{1}{4}$ e o que restou pesa 30 onças. Qual é o peso total do peixe?

Para a solução deste problema é aplicado o método da falsa posição:

Supondo que o peso total do peixe seja 12 (posição inicial)

$$\frac{1}{3}\cdot 12+\frac{1}{4}\cdot 12+x=12$$

$$4+3+x=12$$

$$x=5$$

Mas, sabemos que o restante do peixe pesa 30 onças, ou seja: $x=30$. Temos que 30 é múltiplo de 6, assim como 12 também o é. Deste modo, para que seja mantida a proporcionalidade, multiplica-se 12 por 6, que resulta em 72. Conclui-se que o peso total do peixe é 72.

Esse problema demonstra que, para a resolução do problema acima, fez-se necessário que o sujeito recorresse ao raciocínio proporcional.

A compreensão de um determinado conceito matemático pode ser verificada através das estratégias da resolução de problemas, tendo em vista que, em momentos da busca da solução do problema proposto, o sujeito submetido à resolução poderá utilizar habilidades matemáticas para encontrar uma solução. A respeito da compreensão em matemática,

> Skemp considera dois tipos de compreensão em matemática: a compreensão instrumental e a compreensão relacional. A compreensão instrumental refere-se à aquisição de regras ou métodos e à capacidade de usá-las na resolução de problemas. Neste caso, atribui-se ênfase ao saber como sem saber por quê. O objetivo é procurar uma regra que permita dar uma resposta satisfatória para o problema. Por outro lado, a compreensão relacional fundamenta-se em princípios que têm uma aplicação mais geral. Assenta no princípio de saber, ao mesmo tempo, o como e o porquê, permitindo não só perceber o método que funciona e porquê, como ajuda a relacioná-lo com o problema e possibilita a sua adaptação para a resolução de novos problemas. (SKEMP, 1978 apud DOMINGOS, 2003, p. 14)

A resolução de problemas tem sido estudada por diversos pesquisadores em Educação Matemática e, com frequência, estes estudos iniciam-se por definir o que vem a ser *problema,* e qual o significado de *resolver um problema.*

Onuchic (1999, p. 215) entende que por *problema* “é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”[...], ou seja, qualquer situação que estimule o sujeito a pensar, que possa interessá-lo, que lhe seja desafiadora e não trivial.

Polya (2006) assinala que *resolver um problema* consiste em encontrar um caminho previamente não conhecido, uma saída para uma situação difícil, para vencer um obstáculo, para alcançar um objetivo desejado que não pode ser imediatamente alcançado por meios adequados.

Compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, comunicar os resultados e possuir capacidade para utilizar estratégias conhecidas são características que devem ser estimuladas e exploradas no processo de investigação, através da resolução de problemas. O foco pretendido na resolução de problemas é considerar “o que fazer”, “o como fazer” ou “o que pensar”, e só posteriormente discutir os aspectos da formalização, da simbologia e das técnicas envolvidas no processo de resolução.

No presente estudo, a compreensão do que seja um problema matemático corresponde àquilo que González (1998) considera como uma Tarefa Intelectualmente Exigente (TIE), ou seja,

> “aquela que propicia um esforço de raciocínio e que não se realiza com o mero exercício de recordação e memória, nem com a utilização mecânica de esquemas algorítmicos, nem com a aplicação de receitas pré-concebidas; ao contrario, deve propiciar a realização de certo esforço intelectual”. (GONZÁLEZ, 1998, p. 67)

Frequentemente problema é concebido como toda e qualquer situação que exige a descoberta de informação desconhecida para alguém que busca resolvê-lo ou a criação de uma demonstração de um resultado dado.

A resolução de um problema matemático geralmente apresenta características de resolução baseadas em um modelo bastante antigo. Mais especificamente, a resolução que envolve a proporcionalidade está relacionada à teoria das proporções de Eudoxo (408-355 a.C) cujo princípio matemático é a igualdade de razões. Este modelo matemático possui bastante influência no ensino de proporcionalidade até os dias de hoje.

As concepções sobre a proporcionalidade fundamentadas no modelo da igualdade de razões são classificadas atualmente como uma abordagem puramente tradicional e geralmente difundida pela maioria dos livros didáticos de matemática, cuja atenção principal é dada a problemas de valor desconhecido, enfatizando o uso do algoritmo da regra de três para resolução:

> [...] grande ênfase tem sido dada apenas aos problemas de valor desconhecido e ao algoritmo da "regra de três", tornando-se um algoritmo mecanizado que, muitas vezes, é erroneamente empregado. [...] Parece que, muitas vezes, no trabalho com proporcionalidade, o produto final desejado é a regra de três em si e não o raciocínio proporcional. (BOTTA, 1997, p. 126).

Para a resolução de problemas de proporcionalidade, considerando-se uma abordagem tradicional difundida geralmente pela maioria dos livros didáticos, encontra-se uma sequência que consiste em:

a) Definição de razão;

b) Definição de proporção;

c) Definição de grandezas proporcionais:

A grandeza A é diretamente proporcional à grandeza B, se ambas variam na mesma razão, isto é, se dados os valores, a, b de A e os valores correspondentes c, d de B, os quatro valores formarem a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Por outro lado, A é inversamente proporcional a B, se ambas variam em razões inversas, ou seja, se os valores a, b, c e d, formarem a proporção $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$.

O modelo mencionado anteriormente descreve de forma adequada o conceito de proporcionalidade, porém ele não deve ser apresentado nestes padrões para se introduzir o estudo sobre proporcionalidade. O desenvolvimento do raciocínio proporcional requer um amplo leque de situações que priorizem o campo multiplicativo, tendo em vista que o raciocínio proporcional depende das estruturas multiplicativas já desenvolvidas pelo sujeito. Para isso julgamos necessário o conhecimento, por parte do professor, de alternativas diferenciadas para a exploração da proporcionalidade no contexto da sala de aula. Nesse sentido, cabe destacar a concepção de Ávila:

> [...] com a fundamentação dos números reais [...] em bases sólidas e mais confiáveis do que as da antiga geometria, a teoria das proporções de Eudoxo passa a ter apenas valor histórico. [...] E não precisamos mais usar a superada teoria das proporções, muito menos os resquícios que dela ficaram na terminologia, na notação e, sobretudo, na maneira de apresentar fatos, como os problemas de regra de três. (ÁVILA, 1986a, p. 2)

Alguns autores, a exemplo de Imenes e Lellis (2005), julgam que concepções baseadas na abordagem tradicional, apresentada anteriormente, além de serem inadequadas para o tratamento do conceito de proporcionalidade para o nível fundamental de ensino, estão ultrapassadas do ponto de vista matemático.

Encontramos em Lima et. al (2005, p. 2) definições mais modernas para a proporcionalidade, às quais estão relacionadas ao conceito de função, como podemos ver a seguir: sejam *x* e *y* dois tipo de grandezas. Diz-se que *y* é *proporcional* a *x* quando:

1) *As grandezas x e y acham-se de tal modo relacionadas que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y. Diz-se, então, que existe uma correspondência* $x \mapsto y$ *e que y é função de x.*

Quando escrevemos $x \mapsto y$ estamos querendo dizer que y é o valor que corresponde a x.

2) *Quanto maior for x, maior será y. Em símbolos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x<x'$ implica $y<y'$*

3) *Se a um valor x_0 corresponde y_0 e c é um numero qualquer, então o valor de y, que corresponde a cx_0, é cy_0. Simbolicamente: se $x_0 \mapsto y_0$ entao $cx_0 \mapsto cy_0$*

Para Lima et. al (2005, p. 14) a definição para grandezas proporcionais inversas é da seguinte forma:

Sejam *x*, *y* dois tipos de grandezas. Diz-se que *y* é *inversamente proporcional* a *x* quando:

1) *As grandezas x e y estão relacionadas de tal modo que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y. Escreve-se, então, $x \mapsto y$ e diz-se que y é função de x. Costuma-se também escrever $y = f(x)$.*

2) *Quanto maior for x menor será y. Simbolicamente: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$, então $x<x'$ implica $y'<y$. Ou ainda: se $y=f(x)$ e $y'=f(x')$, tem-se a implicação $x<x' \Rightarrow f(x')<f(x)$.*

3) *Se y_0 é o valor de y que corresponde ao valor x_0 de x e c é qualquer número, então ao valor cx_0 corresponde $\frac{1}{c}y_0$. Ou seja: se $x_0 \mapsto y_0$, então $cx_0 \mapsto \frac{1}{c}y_0$. Na notação funcional $f(cx) = \frac{1}{c}f(x)$.*

Os autores acima citados ressaltam que, para que seja válido o item *3* acima, basta considerar o caso em que *c* é um número inteiro. Ou seja, se a correspondência $x \mapsto y$, ou $y = f(x)$ cumprir as condições expressas nos itens *1 e 2* e, além disso, for verdade que $f(nx) = \frac{1}{n}f(x)$, quando n for inteiro, então valerá $f(cx) = \frac{1}{c}f(x)$, seja c inteiro ou não.

O modelo apresentado anteriormente é expresso por todo um rigor matemático, sua vantagem com relação a outros é a descrição feita utilizando-se de funções, o que demonstra a relação existente entre o raciocínio proporcional e o pensamento funcional. Mas como defendemos ao longo do trabalho, modelos como esses se mostram ineficazes para a compreensão do conceito de proporcionalidade, quando este ainda não está estabelecido na estrutura cognitiva do estudante.

Muitos estudos, incluindo os citados ao longo deste texto, descrevem o estudo da proporcionalidade pela utilização do algoritmo da regra de três. Vale ressaltar que as críticas endereçadas a esta abordagem não apresentam o caráter de ineficiência do método, mas da sua utilização como única estratégia de tratamento da proporcionalidade.

Autores como Post, Behr e Lesh (2001) dizem que o algoritmo padrão da proporcionalidade é aquele cuja representação algébrica é a igualdade entre duas razões, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ onde geralmente são dados três valores e pede-se um quarto valor. Eles esclarecem que este é um método eficiente, porém desprovido de significado do mundo real, devendo ser trabalhado após o desenvolvimento de abordagens mais compreensíveis acerca da proporcionalidade.

Ainda segundo esses autores, os problemas que envolvem situação proporcional e que podem ser resolvidos de acordo com o algoritmo padrão são do tipo: problema de valor desconhecido e de comparação numérica:

O problema de valor desconhecido

É o tipo de problema mais comum encontrado nos livros didáticos de matemática. Geralmente neste tipo são dados três valores e solicitado um quarto valor, onde se aplica o algoritmo padrão da proporcionalidade para se encontrar a solução. Não é comum encontrar nos livros didáticos problemas que abordem a proporcionalidade por outras estratégias nem tampouco em contextos diferenciados.

Segundo Post, Behr e Lesh (2001) compreender o raciocínio proporcional apenas pelas soluções de problemas de valor desconhecido é muito limitado, tendo em vista que este tipo de problema envolve soluções algorítmicas e muitas vezes desprovida de significado.

Problema de comparação numérica

Já os problemas que envolvem a comparação entre duas razões ou duas taxas são denominados problemas de comparação numérica. Diferentemente do primeiro tipo, a comparação numérica apresenta quatro valores envolvidos em duas razões ou taxas e solicita-se que o sujeito determine qual delas é maior, menor, igual e, dependendo do contexto do problema, se é mais rápida, mais cara, mais densa, etc.

Uma situação problema que envolve proporcionalidade expressa a relação multiplicativa existente entre as grandezas consideradas. Para a sua compreensão é pertinente o emprego de representações diferenciadas na exploração desse conceito, a exemplo do uso de gráficos, tabelas e expressões algébricas, para que, dessa forma, o conceito de proporcionalidade seja assimilado de forma mais compreensível. Também é necessário ressaltar que na resolução de problemas que envolvem situações proporcionais, a distinção entre situações proporcionais e não proporcionais é fundamental.

Ainda sobre a resolução de problemas de proporcionalidade, Vergnaud (apud SCLIEMANN & CARRAHER, 1997, p. 16) definiu três principais tipos de estratégias usadas na solução de problemas, envolvendo relações proporcionais: “*estratégia escalar, funcional e regra de três”*.

Na *estratégia escalar,* o sujeito obtém a solução, estabelecendo relações numéricas na própria variável. A título de exemplo deste tipo de estratégia, podemos considerar a seguinte situação: “Comprando quatro sorvetes por 12 reais, qual será o preço de oito sorvetes? Resolvendo o problema por meio da estratégia escalar, temos a seguinte solução: 8 sorvetes são duas vezes mais que quatro sorvetes, então é necessário pagar duas vezes mais, isto é, 12 vezes 2, o que dá 24". Neste caso, as transformações ocorrem em cada variável, porém mantendo-se a relação proporcional existente entre elas.

Esta estratégia é adequada, pois geralmente é usada com compreensão, o que nem sempre ocorre com a *regra de três,* algoritmo privilegiado pela escola. Nesse sentido, a estratégia escalar poderá auxiliar no desenvolvimento de procedimentos escolares de representações formais (SCHLIEMANN; CARRAHER, 1997).

Com relação à *estratégia funcional*, obtém-se a solução por meio do estabelecimento de relações entre as duas variáveis. No exemplo da compra do sorvete, teríamos a seguinte solução: "se 4 sorvetes custam 12 reais, qual é o preço de 8 sorvetes"? A cada sorvete correspondem 3 reais, se queremos 8 sorvetes vamos pagar 8 vezes 3 que são 24, ou "12 são 4 vezes 3, então multiplicamos 8 por 3 e obtemos 24". A solução funcional consiste em encontrar o valor unitário e, a partir dele, o valor total.

A terceira estratégia, de acordo com Schliemann & Carraher (1997), é a *regra de três,* baseando-se nas propriedades de razões equivalentes. A título de exemplo podemos considerar a seguinte situação: "Uma firma de engenharia asfaltou uma estrada de 36 km em 14 dias". Quantos dias seriam necessários para a mesma firma asfaltar uma estrada de 54 km? A solução pode ser estabelecida por meio do algoritmo da regra de três, ou seja: $\frac{36}{54} = \frac{14}{x}$.

Dadas duas razões equivalentes, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{x}$, as igualdades $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ e $ax = bc$ são verdadeiras e, portanto, $x = \frac{bc}{a}$.

1.4 Atribuição de significado

Como dissemos anteriormente, o objetivo do presente estudo é verificar se atividades envolvendo o conceito de proporcionalidade (mediadas pela História da Matemática) interferem no significado que professores atribuem a este conceito.

Estudos realizados no âmbito da Psicologia Cognitiva, tais como os de Brito (2001), Moreira e Masini (2009), esclarecem que conceitos e proposições já existentes na estrutura cognitiva do sujeito podem ser estendidos ou reorganizados a fim de satisfazer os particulares requisitos envolvidos na busca de solução de um problema.

A necessidade de percepção de um novo significado de proporcionalidade foi apontada no item anterior. Contudo, faz-se necessário precisar o conceito de *significado* no âmbito da Psicologia Cognitiva. De acordo com Moreira e Masini (2009, p. 108):

> Significado – Conteúdo consciente diferenciado e rigorosamente articulado, que se desenvolve como um produto de aprendizagem simbólica significativa ou que pode ser evocado por um símbolo ou grupo de símbolos, após este ter sido relacionado à estrutura cognitiva de maneira substantiva e não-arbitraria, incluindo significado denotativo e conotativo.

Os autores acima citados apresentam definições para os termos significado denotativo e conotativo. Segundo Moreira e Masini (2009, p. 108):

> **Significado denotativo -** os atributos criteriais distintivos evocados pelo nome de um conceito em contraposição às atitudes ou emoções que ele possa eliciar (significado conotativo).
> **Significado conotativo** – as reações atitudinais ou afetivas idiossincráticas eliciadas pelo nome do conceito.

Para Brito (2001) é fundamental que o professor compreenda o conceito de significado e aprendizagem, pois, assim, ele terá melhores condições de promover o ensino de maneira mais efetiva. Faz-se necessário que o professor, ao ensinar os conceitos, tenha clareza das relações que existem entre significado e aprendizagem significativa, além de aplicações que podem ser feitas entre estes últimos e os conceitos ensinados – aprendidos.

O ensino da matemática é fortemente marcado pelo uso de símbolos. Porém, a utilização destes símbolos na formação dos conceitos matemáticos pode gerar alguns problemas, quando não se tem a clareza que um mesmo símbolo matemático pode apresentar significados distintos, dependendo da situação considerada.

Van Egen (1953 apud MOREIRA e MASINI, 2009, p.78), em estudos sobre a formação de conceitos, assinalou a existência de três dimensões para o conceito de significado: “dimensão sintática, dimensão pragmática e dimensão semântica”.

A *dimensão sintática* é dada pela forma na qual as palavras ou símbolos são usados em uma sentença ou fórmula matemática. Assim, $\frac{2}{3}$, quando usado no estudo sobre frações, possui um significado que é diferente quando usado no estudo sobre razão.

A *dimensão pragmática* está relacionada aos significados que as palavras e os símbolos adquirem de acordo com as experiências que cada individuo ou grupo de indivíduos vão desenvolvendo em relação a essas palavras ou símbolos.

A *dimensão semântica* diz respeito às varias transformações pela quais passam o significado. Esta dimensão assinala as várias significações que um conceito assume em contextos distintos. Nesse caso, o professor que utiliza os conceitos de maneira contextualizada, deve inicialmente estabelecer o significado da palavra, quando usado de forma isolada.

Diante disso, é possível supor que, tendo estabelecido o significado de conceito de proporcionalidade, quando usado isoladamente, o professor poderá deparar-se com o problema de estabelecer vários significados deste conceito em diferentes contextos.

Brito (2001, p. 79) esclarece que “a aquisição de conceitos e dos significados dos conceitos é fundamental para a aprendizagem escolar uma vez que a maioria das atividades em sala de aula está baseada na aquisição de conceitos que serão, posteriormente, utilizados para a aprendizagem de princípios e na solução de problemas”.

Conforme o que foi explicitado anteriormente, a intenção da presente investigação foi conhecer o significado atribuído ao conceito de proporcionalidade, por parte de um grupo de professores de matemática, ao depararem-se com determinados problemas resolvidos na antiguidade e que envolvem este conceito. As situações problema presentes nas atividades previamente elaboradas foram apresentadas aos participantes por meio de uma tableta babilônica que contém o registro matemático de uma tabuada de multiplicação e de uma equação cujo método de resolução adotado pelos antigos egípcios é denominado método da falsa posição.

Nesta perspectiva, consideramos a História da Matemática, mais especificamente a história de conceitos, como uma fonte para a proposição de problemas e para a atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade. Acreditamos que a proposição de atividades mediadas pela História da Matemática poderá ser útil para uma reformulação e ampliação de conceitos e princípios que são utilizados para solucionar problemas.

Contudo, vale ressaltar que não bastam atividades bem elaboradas ou sequências de ensino bem estruturadas, pois elas por si mesmas não garantem o acesso ao saber. É necessário também que sejam feitas orientações voltadas para o entendimento do professor para que ele possa compreender o conceito em estudo e, a partir daí, criar condições para uma aprendizagem significativa (do referido conceito) em seus alunos.

1.5 A importância do estudo da História da Matemática

O debate em torno da História da Matemática como suporte pedagógico para o ensino de Matemática não é recente e encontra sustentação em estudos e pesquisas realizadas por investigadores e também por professores interessados em promover uma compreensão mais significativa da matemática.

Atualmente a pesquisa em História da Matemática tem ganhado destaque no cenário educacional nacional. São muitos os artigos produzidos, dissertações e teses defendidas, além de considerável número de encontros, congressos e seminários realizados na área. Porém, apesar de todo esse progresso, verifica-se que a História da Matemática ainda não é enfatizada efetivamente nos cursos de licenciatura em Matemática. Baroni e Nobre (1999) ressaltam que, apesar desse campo já se constituir em área de investigação e importante “instrumento” de apoio didático-pedagógico para o professor, ela ainda não adquiriu importância suficiente nas licenciaturas.

O estudo realizado por Stamato (2003) revela que a maioria das instituições começa a oferecer em seus currículos a disciplina História da Matemática, em 1998, após o primeiro Exame Nacional dos Cursos de Matemática. Isto indica o quanto é recente a inserção dessa disciplina na formação de professores, e reforça as hipóteses que são levantadas em torno do não uso da História da Matemática por parte da maioria dos professores de matemática do Ensino Básico.

Muitos estudos realizados sobre a História da Matemática apontam a importância desta na formação inicial e continuada de professores. Esta inserção da História da Matemática na formação de professores é de suma importância, tendo em vista o caráter de ampliação do conhecimento dos conteúdos a serem ensinados via seu desenvolvimento histórico. Parece existir um consenso entre estudiosos da Educação Matemática de que os professores tenham conhecimento acerca da história da disciplina que ensina, e isso é reforçado para a Matemática. D’Ambrosio (1996) ratifica esta posição quando ressalta:

> Uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino. Ter uma idéia, embora imprecisa e incompleta, sobre por que e quando se resolveu levar o ensino da matemática à importância que tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação em geral [...] (D’AMBROSIO, 1996, p. 29)

A História da Matemática tem se tornado assunto de debate e motivo de investigação por parte de estudiosos da Educação Matemática. Neste contexto, uma das questões relevantes ao debate é a inserção da História da Matemática na formação de professores. Este debate é de suma importância para a construção de elementos teórico-metodológicos que contribuam com a prática pedagógica dos professores, no que se refere ao conhecimento histórico matemático bem como a utilização desse conhecimento em sala de aula.

No Simpósio Nordeste de História da Matemática e Educação Matemática, realizado em Natal-RN, Radford (2009) apontou algumas razões que justificam o estudo da História da Matemática na formação de professores:

> *a) A História da Matemática deve ser parte da cultura geral do professor.*
> *b) A História da Matemática ajuda o professor a compreender melhor o conteúdo que deve ensinar.*
> *c) A História da Matemática ajuda o professor a entender o desenvolvimento das idéias matemáticas.*
> *d) A História da Matemática pode dar idéias ao professor sobre a maneira como apresentar o conteúdo.* (RADFORD, 2009, slides)

Esses pontos não somente são razões para a inserção da História da Matemática como uma disciplina do currículo na formação de professores, mas também se constituem em razões para o crescimento cultural do professor enquanto agente mediador do processo de ensino-aprendizagem.

Fauvel & Maanen (2000) também destacam as funções básicas do uso da História da Matemática na formação inicial de professores:

> a) levar os futuros professores a conhecer a matemática do passado (função direta da História da Matemática);
> b) melhorar a compreensão da matemática que eles irão ensinar (funções metodológicas e epistemológicas);
> c) fornecer métodos e técnicas para incorporar materiais históricos em sua prática (o uso da História da Matemática em sala de aula);
> d) ampliar o entendimento do desenvolvimento do currículo e de sua profissão (a História do ensino de matemática). (FAUVEL & MAANEN, 2000, p. 110)

Observamos que as concepções dos autores citados anteriormente, acerca da História da Matemática para a formação do professor de Matemática, convergem para uma mesma direção, ou seja, a História da Matemática possui a possibilidade de dar subsídios gerais, não só na formação do professor, mas também na sua prática pedagógica cotidiana. Este caráter unificador de vários elementos contributivos tanto para a formação inicial quanto continuada de professores de Matemática encontra sustentação de cunho teórico-prático nos pressupostos teóricos da História da Matemática.

Um dos possíveis e maiores problemas que o Ensino de Matemática vem apresentando ao longo dos últimos anos parece estar relacionado ao fato de que a maioria das pessoas, inclusive muitos professores de Matemática, apresentam a concepção de uma Matemática perfeita, pronta e acabada, sem levar em conta fatores históricos envolvidos no desenvolvimento desta. Segundo Miguel e Miorim (2008):

> Os defensores desse ponto de vista acreditam que a forma lógica e emplumada através da qual o conteúdo matemático é normalmente exposto ao aluno não reflete o modo como esse conhecimento foi historicamente produzido. (MIGUEL e MIORIM, 2008, p. 52)

Esta concepção equivocada da Matemática por parte de alguns professores, poderá afetar, de forma direta, a formação de seus alunos, criando nestes uma mistificação do conhecimento matemático e da própria Matemática. A História da Matemática pode contribuir para amenizar este equívoco a partir do momento que proporciona ao professor o conhecimento de uma Matemática que evoluiu ao longo do tempo. Muitos pesquisadores encontraram dificuldades, cometeram erros e acertos em suas investigações, mas isso possibilitou desmistificar a Matemática como uma disciplina que nasceu pronta e só foi desenvolvida e usufruída por gênios.

A História da Matemática apresenta-se, do ponto de vista de muitos estudiosos, como uma forte aliada para o conhecimento da construção da Matemática, muitas vezes repleta de enganos, idas e vindas, assim como acontece com todo processo de construção humana. É essencial que os professores adquiram essa visão da Matemática. Os cursos de formação de professores devem contribuir nesse sentido.

Segundo Miguel (1993), Morris Kline foi um dos grandes defensores da História da Matemática como elemento desmistificador da Matemática. Nesse sentido, Kline (1972, apud MIGUEL, 1993) nos esclarece que:

> Os cursos regulares de matemática são mistificadores num aspecto fundamental. Eles apresentam uma exposição do conteúdo matemático logicamente organizado, dando a impressão de que os matemáticos passam de teorema a teorema quase naturalmente, de que eles podem superar qualquer dificuldade, de que os conteúdos estão completamente prontos e acabados. [...] As exposições polidas dos cursos não conseguem mostrar os obstáculos do processo criativo, as frustrações e o longo e árduo caminho que os matemáticos tiveram que trilhar para atingir uma estrutura considerável. (KLINE, 1972 apud MIGUEL, 1993, p. 49)

Essa formação inicial torna cada vez mais difícil para os professores de matemática assumir uma concepção do ensino de matemática que vincule o conhecimento matemático que já possuem com a História da Matemática.

Mendes (2001) explica que este problema está ligado à maneira como as referências históricas aparecem nos livros didáticos ou como são abordadas durante a formação dos professores, pois estes não os levam a uma compreensão significativa do assunto para que possam utilizá-lo em suas práticas.

Em seu estudo sobre as potencialidades pedagógicas da História da Matemática Miguel (1993) descreve algumas funções que a História da Matemática pode exercer como recurso pedagógico para o professor de matemática.

O autor coloca que quando os professores de matemática lançam mão do uso da História da Matemática nas suas aulas, eles são estimulados por uma série de opiniões vinculadas à função que eles esperam que seja cumprida pela História da Matemática no processo pedagógico.

Em uma análise mais detalhada dessas opiniões, Miguel (1993) diz que “elas revelam a existência de determinadas funções pedagógicas que a História da Matemática pode desempenhar no processo de ensino-aprendizagem”. Julgamos relevante a inserção destas funções neste estudo, pois comungamos com as concepções que apontam a História da Matemática como papel fundamental na formação inicial e continuada de professores de Matemática.

Essas funções são caracterizadas como sendo fonte:

- *de motivação*, quando gera no sujeito interesse e maior interação destes no estudo do conteúdo estudado e do conhecimento matemático de maneira geral;

- *de recreação*, quando utilizada para a seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos;

- *de seleção de objetivos*, quando encontra na história apoio para que se atinjam com os professores objetivos pedagógicos;

- *de método*, quando vêem na História da Matemática possibilidade de métodos pedagógicos adequados a abordagens dos conteúdos;

- *de desmistificação*, quando pela História da Matemática, pode-se ter a visão de uma matemática construída ao longo do tempo, permeada de dificuldades, erros e acertos por parte daqueles que mergulharam na busca desse conhecimento;

- *de formalização de conceitos*, quando "o formal" pode ser encarado como um caminho a ser traçado para se chegar a um determinado conceito e não como algo pronto e acabado;

- *de instrumento axiológico*, quando possibilita por parte do sujeito o desenvolvimento de valores;

- *de significação*, quando promove uma compreensão significativa da matemática, esclarecendo os conceitos e teorias estudadas;

- *de dialética*, quando o seu uso no processo ensino-aprendizagem contribuir no sentido de que os alunos construam seu pensamento a partir de uma perspectiva independente e crítica acerca da construção histórica da matemática;

- *de cultura*, quando a sua função pedagógica é a de resgatar a identidade cultural da sociedade por meio da História da Matemática;

- *de unificação*, quando exerce a função pedagógica de unificar os vários campos da Matemática através da História da Matemática;

- *de conscientização*, quando exerce a função de instrumento de conscientização epistemológica da Matemática.

As funções descritas anteriormente se assemelham àquelas apontadas por Fauvel e Maanen (2000). Na concepção destes autores a História da Matemática pode fazer com que os estudantes tenham uma visão da Matemática construída ao longo do tempo, permeada de dificuldades, erros e acertos e, na mesma perspectiva levar os professores a conhecer a matemática do passado, desmistificando a concepção da matemática como disciplina pronta e acabada, sem qualquer vínculo de cunho histórico.

As concepções dos autores se assemelham também no que concerne a função de método que a História da Matemática pode desempenhar. Para Miguel (1993) esta função se concretiza a partir do momento que a História da Matemática é vista como uma possibilidade de escolha de métodos pedagógicos adequados a abordagens de conteúdos. Na mesma direção estão Fauvel e Maanen (2000), quando afirmam que uma das funções da História da Matemática é melhorar a compreensão da Matemática que eles (os professores) irão ensinar, além de fornecer métodos e técnicas para incorporar materiais históricos em sua prática.

Percebemos que essas funções constituem um denso e vasto campo de conhecimento da área de História da Matemática, pois nelas estão contidas posições filosóficas e epistemológicas dos educadores matemáticos acerca do assunto, exigindo, assim, uma significativa compreensão por parte daqueles que adotaram esses posicionamentos para uma compreensão mais significativa dos conceitos envolvidos. Além do mais, as funções que a História da Matemática pode desempenhar no processo de ensino-aprendizagem abrangem vertentes que estão intrinsecamente relacionadas, como a formação do aluno e a própria formação do professor.

A esse respeito, Mendes (2001) diz que antes de se adotar qualquer posição com relação ao uso ou não da história como quaisquer dessas fontes, é importante que saibamos as finalidades pedagógicas que a história pode alcançar em Educação Matemática.

Os pressupostos teóricos da História da Matemática apontam para uma questão primordial na Educação Matemática: como fazer para melhorar a compreensão dessa disciplina? Preocupados com essa questão, diversos estudiosos da História da Matemática investem em pesquisas com objetivo de encontrar abordagens adequadas para a solução dessa questão.

No presente estudo, temos a intenção de investigar como aspectos relacionados ao conceito de proporcionalidade, por meio de atividades mediadas pela História da matemática, podem contribuir para a atribuição de significado a este conceito por parte do professor de matemática.

Acreditamos que ao adquirir o conhecimento sobre as dificuldades encontradas por antigas civilizações na solução de problemas matemáticos e na formulação de estratégias para se obter a solução destes problemas, o professor poderá ter uma visão mais otimista das muitas contribuições que a História da Matemática oferece para a Educação Matemática, além de perceber diferentes dimensões do conceito de proporcionalidade diante da possibilidade de diferentes significados que podem ser atribuídos a este conceito.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

2.1 O TIPO DE ESTUDO

O presente estudo apresenta características de natureza exploratória que, de acordo com GIL (1996, p.41), "pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de idéias ou a descoberta de intuições". Na visão de Triviños (1995, p. 109), "este tipo de estudo permite ao investigador aumentar sua experiência em torno de determinado problema".

Por se tratar de um estudo que foi realizado no âmbito de uma escola, foco do sistema educacional e ambiente onde são lançados os fundamentos do ensino e aprendizagem, através das interações que existem entre aluno-conhecimento-professor, delimitamos a nossa pesquisa como sendo de cunho qualitativo, por se ajustar ao nosso interesse de investigação.

Nas palavras de Triviños (1995, p. 133), "o estudo de caso é uma categoria de pesquisa cujo objeto é uma unidade que se analisa profundamente". Porém, cabe ressaltar que a delimitação qualitativa não exclui a inserção de dados quantitativos no estudo, bem como as análises de seus dados.

Além disso, a presente investigação assume as características de um estudo de caso porque pretendemos explorar uma situação concreta, ou seja, a atribuição de significados de nove professores sobre o conceito de proporcionalidade, quando este é analisado por meio do desenvolvimento histórico, pois ainda não se tem claro em que medida uma abordagem deste tipo contribuiria para a compreensão de conceitos matemáticos quando estes são estudados via Historia da Matemática.

Sendo assim, recorremos à coleta e análise de dados qualitativos, o que permitiu perceber o modo como esses professores expressam suas compreensões sobre o conceito de proporcionalidade, o que possibilitou revelar o significado atribuído a este conceito. Como forma de abordagem do problema proposto, verificamos, por comparação dos resultados obtidos por meio do uso de diferentes instrumentos de coleta de dados, possíveis mudanças na forma de compreender este conceito.

2.2 AS ETAPAS DO ESTUDO

No transcorrer do primeiro semestre de 2008 houve a oportunidade de o investigador entrar em contato com o grupo de nove professores de matemática do Colégio Municipal Padre Galvão, escola localizada na cidade de Pocinhos no Estado da Paraíba (no item 3.5 há a caracterização dos referidos professores).

Este período do estudo se caracterizou como sendo exploratório, tendo em vista que o investigador buscava se certificar sobre o interesse que esses professores tinham em participar da pesquisa. Era do nosso conhecimento que os professores de matemática da referida escola não haviam participado de estudos desta natureza.

Procuramos, a princípio, manter com esses professores uma conversa informal sobre a importância dos estudos realizados na área da Educação Matemática no sentido de elevar a qualidade do ensino da Matemática. Percebemos que os professores se mostraram interessados na busca de novos conhecimentos, ao mesmo tempo em que demonstraram certo receio em participar do estudo proposto. O receio se deveu ao fato de nunca terem participado de algo semelhante, como também por julgarem que o estudo com proporcionalidade é bastante complexo.

A primeira etapa se caracterizou pela coleta sistemática de dados por meio de procedimentos e instrumentos previamente escolhidos para esse estudo. Nessa etapa, foi utilizado um questionário por meio do qual foram coletados dados que permitiram caracterizar os nove professores participantes. Foi possível também obter informações demográficas e indícios do significado que eles atribuíam ao conceito de proporcionalidade. Ainda nessa etapa foram registradas as notas de campo coletadas através de anotações feitas por parte do investigador. Esta etapa da coleta de dados aconteceu no transcorrer do segundo semestre de 2008.

Na segunda etapa, a obtenção de indícios da atribuição de significados desses professores acerca do conceito de proporcionalidade ocorreu por meio da aplicação de atividades que abordaram este conceito via História da Matemática, na perspectiva da resolução de problemas. A aplicação das atividades foi realizada utilizando-se de slides que foram elaborados por meio do aplicativo PowerPoint e apresentados aos professores através de um projetor de imagens. Para a coleta dos dados relativos a essas atividades utilizamos uma filmagem e material impresso. Com estas atividades buscamos perceber em que medida a exploração do conceito de proporcionalidade, via História da Matemática, poderia interferir na compreensão dos professores acerca desse conceito. Essa segunda etapa da coleta de dados ocorreu no primeiro semestre de 2009.

Na terceira e última etapa da coleta de dados entrevistamos os nove professores participantes para podermos comparar os dados obtidos. Comparamos os dados coletados através do questionário e das notas de campo com os dados coletados através da entrevista, realizada após a aplicação das atividades, ainda no primeiro semestre de 2009. A confrontação dos dados obtidos permitiu perceber se houve mudança no significado atribuído ao conceito de proporcionalidade, presente nas atividades mediadas pela História da Matemática. Tal comparação forneceu indícios de mudança na compreensão do conceito de proporcionalidade por parte dos professores envolvidos nesse estudo. Esta etapa da coleta de dados ocorreu no segundo semestre de 2009.

2.3 OS INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Para se atingir os objetivos deste estudo, foram selecionados quatro instrumentos para a coleta de dados. São eles: as notas de campo, o questionário, o desenvolvimento de atividades registradas por meio de filmagem e um roteiro para as entrevistas.

As notas de campo constituem um instrumento que se caracteriza pelo registro escrito decorrente das observações feitas pelo investigador. Embora este tenha sido o primeiro instrumento, ele foi utilizado a cada encontro realizado com o grupo de professores. Com esse instrumento foi possível descrever o comportamento, os questionamentos, as colocações e as observações dos professores participantes deste estudo. O modelo utilizado pode ser observado no ANEXO 1 (pág. 208).

O segundo instrumento utilizado foi o questionário que teve o objetivo de identificar os professores e fornecer informações demográficas sobre eles. Segundo Faria (2006), o questionário tem se constituído em uma das formas de se obter informações para analisar tendências relativas ao sujeito em estudo.

Muitos pesquisadores desenvolvem questionários para encontrar informações mais precisas sobre os professores envolvidos em suas investigações. Por exemplo, no estudo desenvolvido por Faria (2006), foi utilizado um questionário por meio do qual foi possível obter informações a respeito das atitudes em relação à matemática de professores e futuros professores.

O questionário aqui utilizado apresenta questões fechadas e abertas, sendo que estas últimas permitiram verificar indícios da compreensão do conceito de proporcionalidade. Os indícios foram obtidos por meio dos relatos escritos nas respostas dadas ao questionário pelos professores envolvidos nesse estudo.

O terceiro instrumento de coleta de dados utilizado foi o desenvolvimento de atividades e filmagem. Foram realizadas duas atividades investigativas, de cunho histórico. A primeira aborda o conhecimento matemático babilônico relativo à proporcionalidade; enquanto a segunda diz respeito ao conhecimento matemático egípcio, também com ênfase para o conhecimento relativo à proporcionalidade.

As atividades que foram utilizadas no presente estudo estão descritas abaixo:

Atividade 1

Por meio de uma exposição dialogada foram apresentadas questões aos professores com relação ao sistema de numeração babilônica:

- O sistema de numeração utilizado por estes povos é considerado bastante avançado para aquela época. Você conhece tal sistema?
- Ainda com relação ao sistema de numeração por eles utilizado, você sabe informar qual era a base utilizada? Este sistema de numeração era posicional?
- Como já falamos anteriormente, os Babilônios utilizavam símbolos para representar os números. Qual era a quantidade de símbolos por eles utilizados?
- Como representavam os números 8, 14, 39, 72?

Dando continuidade a atividade, apresentamos aos professores uma sequência de perguntas relativas a uma tableta de multiplicação usada pelos babilônios, cujo conteúdo encontrava-se impresso e em posse dos participantes, conforme mostra ANEXO 4 (p. 215). As perguntas foram as seguintes:

- O que se observa nestas colunas?
- Em relação à coluna 1, o que se pode observar? Há alguma regularidade?
- Quanto à coluna 2, o que se pode observar? Há alguma regularidade nela?
- Há alguma relação entre os símbolos registrados nas colunas 1 e 2?

Atividade 2

A segunda atividade contém uma série de questionamentos acerca do sistema de numeração egípcio, como mostramos a seguir:

• Os egípcios também desenvolveram um sistema de numeração. Você tem conhecimento deste sistema de numeração?

• Quais símbolos eram utilizados para representar os números?

• Ainda com relação ao sistema de numeração utilizado por eles, você sabe informar qual era a base do sistema? Era um sistema posicional?

• Como já falamos anteriormente, os egípcios utilizavam símbolos para representar os números. Qual era a quantidade de símbolos por eles utilizados?

• Como representavam os números 1, 2,...,10,11,12,...,20,...,121,...,1543,...13015?

Realizada a apresentação das questões mencionadas anteriormente, apresentamos um problema e sua resolução pelo método da falsa posição. O problema foi o seguinte: *O valor desconhecido (aha) adicionado a 1/7 do valor desconhecido (aha) é igual a 24.* Depois disso, apresentamos o seguinte questionamento: “Observando a resolução da equação anterior, você poderia afirmar que 21 é realmente a solução da equação? Justifique sua resposta.” Uma explanação mais pormenorizada destas atividades será feita mais adiante.

As atividades foram apresentadas aos professores durante uma exposição dialogada, realizada pelo investigador. Essa exposição ocorreu por meio da utilização de slides e do envolvimento dos professores. Quase toda a exposição foi filmada, com exceção da parte final, por motivos técnicos.

A fase seguinte, posterior à aplicação das atividades, foi a realização das entrevistas com os professores participantes. Assim, o quarto e último instrumento de coleta de dados utilizado foi a entrevista, cujo roteiro encontra-se no ANEXO 3 (pág. 214). Este tipo de instrumento constitui-se em uma das técnicas de coleta de dados mais utilizadas nas pesquisas de caráter social. Através da entrevista, é possível obter dados, como, por exemplo, compreensões, sentimentos, ações que as pessoas têm sobre determinadas situações.

Segundo Haguette (1995), a entrevista é um processo de interação social, no qual o entrevistador tem a finalidade de obter informações do entrevistado, através de um roteiro contendo tópicos em torno de uma problemática central.

Para Minayo (1994), a entrevista privilegia a obtenção de informações através da fala individual, a qual revela condições estruturais, sistema de valores, normas e símbolos e transmite, através de um porta-voz, representações de determinados grupos.

Na literatura disponível sobre o assunto encontram-se diversas nomenclaturas para classificar os tipos de entrevista. Aqui citaremos apenas uma dessas nomenclaturas, a saber: *entrevista estruturada, semi-estruturada, e não estruturada.* Para este estudo, optamos por um dos tipos de entrevista (a entrevista semi-estruturada), porque este tipo oferece condições em que o entrevistado pode discorrer acerca de suas experiências, a partir do foco principal proposto pelo investigador.

Segundo Triviños (1995), a entrevista semi-estruturada apresenta como característica principal questões básicas que estão apoiadas em teorias e hipóteses relacionadas ao tema de pesquisa. Sendo assim, essas questões podem ser geradoras de novas hipóteses, a partir das respostas do entrevistado.

Algumas vantagens são apontadas por autores acerca da entrevista semi-estruturada como um instrumento de coleta de dados: ser utilizada em várias áreas do conhecimento, oportunizar a otimização do tempo disponível, o tratamento mais sistemático dos dados, a permissão de seleção de temáticas para aprofundamento, além de permitir a introdução de novas questões.

É importante esclarecer que as questões da entrevista semi-estruturada deste estudo foram originadas a partir da teoria que o embasa, além de todas as outras informações que foram coletadas sobre o tema em estudo, através dos outros instrumentos de coleta de dados utilizados. Conforme Triviños (1995, p. 152), “[...] os instrumentos de coleta de dados não são outra coisa que a ‘teoria em ação’, que apóia a visão do pesquisador”.

2.4 OS PROCEDIMENTOS

Após alguns encontros com os professores, iniciamos a coleta sistemática de dados. Os nove professores participantes deste estudo estiveram presentes em todos os momentos de coleta de dados.

No momento da aplicação de cada um dos instrumentos, explicamos aos participantes o objetivo do estudo e as características dos instrumentos que seriam aplicados em cada momento. Também informamos que todos os dados obtidos nos instrumentos ficariam restritos ao investigador, e que em hipótese alguma os divulgaria sem a consentida permissão dos participantes. Chamamos atenção para o fato de que os dados seriam utilizados exclusivamente para o estudo em desenvolvimento.

A coleta de dados teve início a partir de algumas visitas do investigador à escola. A primeira visita teve o objetivo de obter autorização por parte da direção da escola e convidar os professores de matemática para participarem do estudo. Posteriormente, ocorreram mais algumas visitas à escola, desta vez, para o investigador obter informações sobre a disponibilidade de horários dos professores, bem como para perceber o grau de interesse por parte deles na participação deste estudo. Em alguns momentos foi possível manter uma conversa informal com os professores acerca da importância de estudos deste tipo para a Educação Matemática.

Dessa forma, o início da coleta de dados se deu por meio do registro dessas visitas em notas de campo do investigador. O registro em notas de campo foi um procedimento adotado em todas as fases da coleta de dados desse estudo.

Em momento posterior foi aplicado o questionário. Antes da aplicação deste instrumento, o investigador explicou aos respondentes a forma de preenchimento, lendo as instruções contidas no inicio dele. Dessa forma, os respondentes registraram suas respostas a cada questão proposta no instrumento questionário.

A aplicação das atividades históricas deu-se alguns meses após a aplicação do questionário, por motivo de recesso escolar de final de ano. As atividades foram organizadas por meio do uso do software Power Point. Em seguida, foram apresentadas aos professores por meio de um recurso multimídia (computador e projetor de imagens).

Antes da apresentação, o investigador explicou aos professores a forma como seriam desenvolvidas as atividades. Uma exposição dialogada levou os professores a envolverem-se com as atividades, respondendo as perguntas que lhes eram feitas. Os dados coletados neste procedimento foram registrados através de filmagem e também por meio de registros escritos pelos próprios professores.

Logo após a aplicação das atividades, foram iniciadas as entrevistas. Entrevistamos cada um dos professores participantes em seu local de trabalho. O dia e o horário da entrevista foram agendados antecipadamente, de acordo com a disponibilidade de cada um deles. Os dados obtidos pelas entrevistas foram registrados por meio de gravação, em áudio, e também pelos registros escritos do investigador, realizados logo após a entrevista.

Os procedimentos expostos até aqui são importantes para a compreensão de cada um dos instrumentos utilizados em cada fase do estudo. Julgamos igualmente importante descrever de maneira detalhada, os procedimentos de coleta, o registro e a análise dos dados, adotados para cada um dos instrumentos.

2.4.1 Para as notas de campo

As notas de campo se constituem num instrumento de coleta de dados que são os registros provenientes da observação do investigador durante o estudo. Segundo Trivinõs (1995):

> As notas de campo podem ser entendidas como todo processo de coleta e análise de informações, isto é, elas compreenderiam descrições de fenômenos sociais e físicos, explicações levantadas sobre as mesmas e a compreensão da totalidade da situação em estudo [...] por outro ângulo as entendemos quando estamos preocupados em delinear nosso comportamento como pesquisadores atuando como observadores livres de uma situação de investigação claramente definida. (TRIVIÑOS, 1995, p. 154)

As notas de campo geralmente possuem duas vertentes bem definidas: as de natureza descritiva e as de natureza reflexiva. Realizamos registros de natureza descritiva quando estamos preocupados em captar imagens por palavras do local, das pessoas, ações e conversas observadas, como por exemplo: descrição de comportamento, ações, atitudes, etc., tal como eles aparecem à sua observação. Por outro lado, realizamos registros de natureza reflexiva, pois é a partir deles que o investigador pode refletir sobre o desenvolvimento de sua própria pesquisa, como por exemplo, refletir sobre determinados comportamentos, atitudes e ideias e a partir daí levantar questionamentos sobre o uso de determinados instrumentos; reconsiderar certos métodos ou técnicas de estudo e até mesmo refletir sobre a maneira de proceder do próprio investigador.

No presente estudo, as notas de campo foram elaboradas após os primeiros contatos do investigador com a escola e com os professores participantes. Este procedimento repetiu-se também para cada fase da coleta de dados, ou seja, o investigador, logo após o contato com os professores envolvidos nesse estudo, realizava os seus registros em notas de campo. Para esse registro utilizamos o modelo proposto por Bogdan e Biklen (1994), apresentado neste estudo no ANEXO 1 (p.208).

As notas de campo são um tipo de abordagem metodológica observacional, baseada na observação como instrumento da coleta de dados e registro em diário de campo. Segundo

Bogdan e Biklen (1994), é o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da coleta de dados.

As notas de campo são necessárias numa pesquisa qualitativa, pois permite ao investigador, através da observação, perceber certas nuances que podem fugir quando da coleta de dados por outros tipos de instrumentos.

2.4.2 Para o questionário

No momento da aplicação do questionário, explicamos aos professores as características do instrumento que seria utilizado naquele momento. O investigador procurou enfatizar a importância desse estudo. Esta estratégia foi adotada para que os mesmos se sentissem estimulados a responder às questões. Dessa forma, os dados coletados pelo questionário foram registrados pela expressão escrita dos respondentes.

O questionário aplicado neste estudo contém questões fechadas e questões abertas. Estes dois tipos de questões possibilitaram, respectivamente, análises quantitativas e qualitativas dos dados coletados. A maior parte das questões que constitui o questionário é de natureza quantitativa e foram analisadas por meio de estatística descritiva, utilizando para isso o aplicativo Excel 2007. A utilização do Excel permitiu apresentar os dados em tabelas de frequência e cálculo de porcentagens, para os professores, envolvendo gênero, faixa etária, níveis de escolaridade, entre outros.

Algumas questões que compõem o questionário são abertas, como por exemplo, as questões de 20 a 24.

O questionário contém cinco questões abertas, porém só foi possível a análise de quatro delas, tendo em vista que a questão de número 23: *Você teve oportunidade de estudar o conceito de proporcionalidade via História da Matemática?* obteve o não como resposta por oito dos nove respondentes. Sendo assim, o corpus para análise foi constituído apenas por quatro questões abertas.

As questões abertas contidas no questionário suscitaram análise de cunho qualitativo.

Para a análise dos dados obtidos por meio das quatro questões abertas, aplicamos a análise de conteúdo que consiste em um conjunto de técnicas que permite conhecer o que está por trás das palavras.

Como pretendíamos investigar a atribuição de significados sobre o conceito de proporcionalidade de um grupo de professores de Matemática, quando submetidos a uma abordagem histórica, levamos em consideração que esses significados podiam refletir os pressupostos epistemológicos sobre o conceito de proporcionalidade dos professores envolvidos nesse estudo. Dessa forma, utilizamos a análise de conteúdo para conhecer os indícios do significado que estes professores atribuem ao conceito de proporcionalidade.

Sobre a análise de conteúdo, Bardin esclarece:

> a análise de conteúdo é um conjunto de técnicas de análise das comunicações, visando, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, obter indicadores quantitativos ou não, que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) das mensagens. (BARDIN, 2004, p. 37)

Para a realização da análise de conteúdo, utilizamos como referência Bardin (2004). O método indicado pela autora organiza-se em torno de três fases cronológicas:

1. A pré-análise – nesta fase organiza o material a ser analisado com o objetivo de torná-lo operacional e sistematizar as ideias iniciais, onde se percorrem os três passos:

O *primeiro passo*, chamado de leitura flutuante, consiste em estabelecer o contato com os documentos a analisar e conhecer o texto, deixando-se invadir por impressões e orientações;

O *segundo passo*, chamado de escolha dos documentos, consiste em demarcar o universo dos documentos a serem analisados, constituindo-se um corpus. O corpus é o conjunto dos documentos considerados para serem submetidos aos procedimentos analíticos;

O *terceiro passo*, chamado de preparação do material, consiste na preparação formal dos documentos a serem analisados, constituindo-se novos documentos com todas as respostas de cada uma das perguntas.

2. A exploração do material – esta fase consiste na definição das unidades de registro e das unidades de contexto; definição do sistema de categorias e dos sistemas de codificação; e a identificação das unidades de registro nos documentos.

3. O tratamento dos resultados obtidos e interpretação – esta última fase consiste no tratamento estatístico simples dos resultados, permitindo a elaboração de tabelas que condensam e destacam as informações fornecidas pela análise.

Para a análise dos dados obtidos pelas questões abertas do questionário, aplicado aos professores participantes do presente estudo, apresentamos as três fases, juntamente com os procedimentos adotados para suas interpretações. Os resultados obtidos serão apresentados no próximo capítulo.

1. A Pré-Análise

Nesta fase foi feita a leitura de todas as respostas dos professores. Este procedimento teve como objetivo delimitar as respostas para cada uma das quatro perguntas de cada um dos respondentes. O segundo passo foi demarcar o que seria analisado, estabelecendo o corpus de análise.

Após a leitura de todas as respostas das questões abertas do questionário, foram elaborados documentos com as respostas de cada respondente, sendo um para cada pergunta, isto é, para a primeira questão agrupou-se a resposta de cada respondente referente a essa questão, e assim por diante. Portanto, foram elaborados quatro documentos, um para cada uma das quatro questões abertas, com o objetivo de separá-las para uma melhor análise das respostas referente àquela questão. Estes documentos foram obtidos através de recortes de texto provenientes de cada uma das respostas do questionário.

2. A exploração do material

Nesta segunda fase o objetivo foi definir as unidades de registro e as unidades de contexto – as unidades de registro são algumas palavras e as unidades de contexto são um ou mais parágrafos. Para o presente estudo, as unidades de contexto foram compostas por apenas um parágrafo, tendo em vista que as respostas a todas as perguntas se restringiram a apenas um parágrafo. As unidades de registro do presente estudo apoiaram-se na palavra como unidade de análise. Para Richardson (1999) a palavra é a menor unidade empregada nas pesquisas de análise de conteúdo. Buscamos identificá-las nas unidades de contexto de acordo com a expressão que possuísse similaridade com as outras respostas para uma mesma pergunta.

As unidades de registro permitiram interpretar o conteúdo das mensagens bem como uma categorização a partir de inferências.

3. O tratamento dos resultados obtidos e interpretação

Tendo identificado as unidades de registro nos extratos das respostas escritas de cada uma das quatro questões, partimos para o estabelecimento das categorias. Segundo Bardin (2004), as categorias são rubricas ou classes, que reúnem um grupo de elementos (unidades de registro, no caso da análise de conteúdo), sob um titulo genérico, agrupamento esse efetuado em razão dos caracteres comuns destes elementos.

Nesta última fase foram elaboradas tabelas para cada uma das questões, com as categorias e as unidades de registro (sublinhadas) e a frequência de cada uma delas.

2.4.3 Para as atividades

No momento da aplicação das atividades, esclarecemos novamente aos professores as características do instrumento que seria utilizado naquele momento. Enfatizamos a importância do estudo realizado, buscando atrair a atenção dos professores, procurando estimulá-los a se concentrar no que seria apresentado nos slides, bem como a responder as questões que lhes seriam propostas. Foi solicitado aos professores que ao emitirem uma resposta ou algum comentário acerca das perguntas o fizesse em bom tom de voz, pois as suas respostas seriam captadas através da gravação em filmagem. Também lhes foi informado que receberiam um material impresso, no qual poderiam fazer registros, caso julgassem necessário.

As atividades foram constituídas por duas vertentes: conhecimento matemático babilônico e conhecimento matemático egípcio, ambas relativas ao conceito de proporcionalidade.

As atividades foram propostas com a intenção de conhecer os significados que estes professores atribuiriam ao conceito de proporcionalidade usado nas civilizações babilônicas e egípcias.

Dessa forma, as atividades sobre os babilônios e egípcios foram constituídas por três partes: na primeira parte apresentamos um slide que continha um breve texto referente ao contexto histórico e outro slide apresentando um mapa geográfico da antiga civilização babilônica. Estes slides tiveram o objetivo de caracterizar e mostrar sua localização geográfica na antiguidade.

Na segunda parte da atividade foram apresentados slides que continham perguntas relativas ao sistema de numeração babilônico. O procedimento adotado foi o seguinte: apresentamos uma pergunta e, caso os professores não tivessem respostas ou apresentassem dúvidas sobre o assunto, apresentávamos uma possível resposta. Vale ressaltar que a apresentação dessas respostas sobre o sistema de numeração babilônico tinha o objetivo de dar subsídios aos professores para a interpretação da tableta babilônica a qual constituía o foco principal da nossa investigação, e que seria apresentada posteriormente; sendo assim, a apresentação de possíveis explicações para as questões sobre o sistema de numeração da civilização babilônica não eliminou o caráter investigativo da atividade.

Na terceira parte da atividade foi apresentado um slide contendo uma tableta babilônica e também foi entregue uma folha com a impressão da mesma. Em seguida, foi solicitado aos professores que observassem a tableta e, de acordo com as questões propostas a respeito dela, dessem suas interpretações. Dessa forma, os dados coletados na aplicação das atividades foram registrados de duas maneiras: pela própria expressão oral e também pela expressão escrita dos respondentes. O objetivo da utilização da tableta babilônica foi fazer com que os professores identificassem, nos registros matemáticos ali contidos, indícios do conceito de proporcionalidade.

ATIVIDADE 1

Descrevemos agora os procedimentos adotados na aplicação da primeira atividade (primeira parte). O primeiro slide exibiu um breve texto, através do qual se buscou, de forma sintética, contextualizar historicamente a civilização babilônica:

PARTE I - CONTEXTO HISTÓRICO

Por volta do quarto milênio antes da nossa era existia na Mesopotâmia, região situada entre os rios Tigres e Eufrates, no Oriente Médio, um conjunto de povos tradicionalmente conhecidos por babilônios. Esta região era denominada crescente fértil, onde atualmente se localiza o Iraque e a Síria. Em grego, a palavra Mesopotâmia significa entre rios. Os babilônios possuíam conhecimentos na área da agricultura, comércio, artesanato, astronomia, além de significativo conhecimento matemático.

Slide 1: Contexto histórico sobre a Civilização Mesopotâmica

O segundo slide trouxe um mapa que localizava geograficamente a civilização babilônica na antiguidade, além de mostrar a Babilônia como umas das cidades da região Mesopotâmica:

Slide 2: Mapa da antiga Civilização Mesopotâmica

Na segunda parte da atividade demos início a uma apresentação e posterior discussão a respeito do conhecimento matemático dos babilônios. Neste ponto, elaboramos dois slides. Um deles trouxe questões relativas ao tipo de escrita e ao tipo de sistema de numeração utilizado pelos babilônios. O outro mostra as atividades propostas aos professores:

PARTE II

Os Babilônios desenvolveram um sistema de escrita denominado cuneiforme, ou seja, em forma de cunha. Na matemática utilizavam os símbolos para a representação dos números.

Slide 3: Texto sobre o sistema de numeração cuneiforme dos Babilônios

- O sistema de numeração utilizado por estes povos é considerado bastante avançado, já que se refere a 2000 a.C. Você conhece tal sistema?
- Ainda com relação ao sistema de numeração por eles utilizado você sabe informar qual era a base utilizada? Este sistema de numeração era posicional?
- Como já falamos anteriormente, os babilônios utilizavam símbolos para representar os números. Qual era a quantidade de símbolos por eles utilizados?
- Como representavam os números 8, 14, 39, 72?

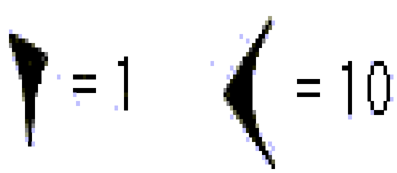
Slide 4: Questões sobre o sistema de numeração dos Babilônios

Diante da possibilidade dos professores não manifestarem conhecimento acerca das questões levantadas, certos slides foram estrategicamente elaborados com o propósito de fornecer informações mínimas e necessárias ao desenvolvimento da atividade.

Dessa forma, apresentamos as perguntas, uma de cada vez, e como os professores expressaram não ter resposta para aquela pergunta ou apresentavam dúvidas sobre o assunto, logo inserimos, através de outros slides, possíveis respostas. Essas perguntas tratavam de conhecimentos mais gerais sobre a matemática utilizada pelos babilônios.

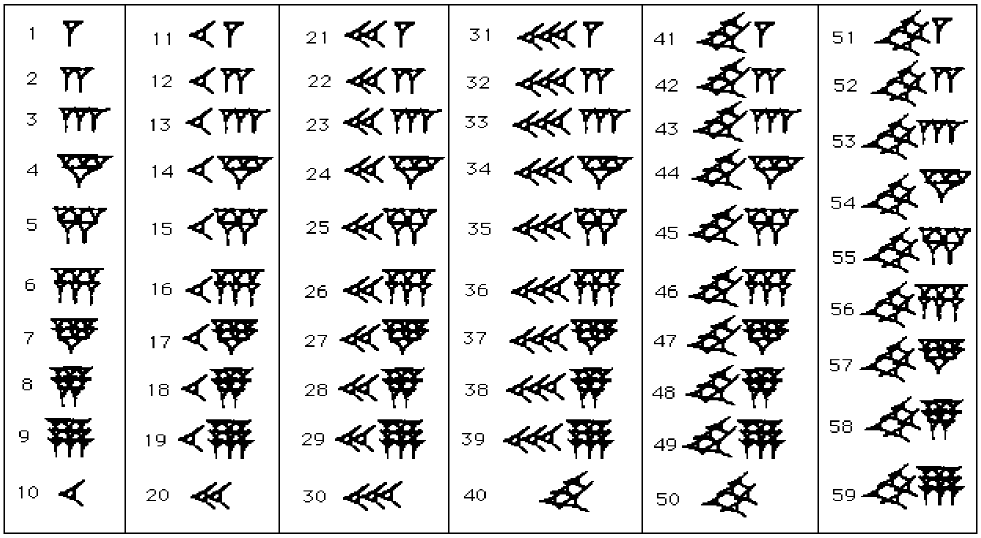
Na sequência, apresentamos os conteúdos dos slides 5, 6, 7 e 8, os quais foram estrategicamente elaborados para o fim proposto. Estes slides continham possíveis explicações acerca do sistema de numeração dessa civilização. Sua elaboração foi precedida por suposições relativas à falta de conhecimento sobre o assunto tratado. Estas suposições encontram respaldo em estudos que evidenciam a carência da História da Matemática em cursos de formação de professores de matemática, (BARONI e NOBRE, 1999), (MIGUEL 1993), (STAMATO, 2003), bem como evidências dessa carência expressa nas respostas do questionário que foi aplicado aos professores envolvidos nesse estudo.

O sistema de numeração babilônico era denominado cuneiforme devido os registros na tabela possuírem forma de cunha.



Slide 5: Apresentação da escrita cuneiforme. Mostra os símbolos utilizados pelos babilônios para o registro matemático acompanhados de sua representação decimal.

Para um maior esclarecimento do sistema de numeração utilizado pelos babilônios apresentamos um slide que continha a numeração de 1 a 59 em forma de cunha e sua respectiva representação em notação decimal atual, como mostrado abaixo:



Slide 6: Sistema de numeração cuneiforme

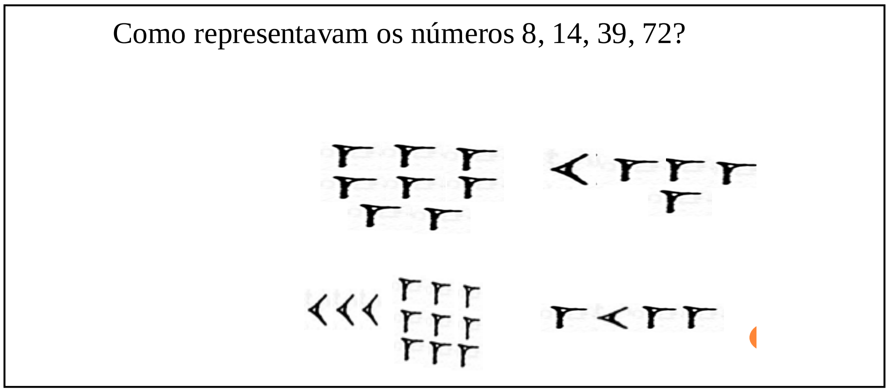
O sistema de numeração babilônico era um sistema misto, ou seja, os primeiros 60 números eram escritos nos moldes de um sistema de agrupamento simples decimal, enquanto que os números superiores a 60 eram escritos de acordo com o princípio posicional. O próximo slide teve a intenção de esclarecer este aspecto do sistema de numeração dos babilônios.

O slide seguinte apresentou alguns esclarecimentos acerca do sistema de numeração sexagesimal dos babilônios, tendo em vista que a maioria dos professores apresentou desconhecimento sobre o funcionamento do sistema:

- A base do sistema de numeração era sexagesimal, o que significa que sessenta unidades de uma determinada ordem eram nela equivalentes a uma unidade de ordem superior. Os números de 1 a 59 formavam, assim, as unidades simples ou unidades de primeira ordem; os de sessenta constituíam as unidades de segunda ordem; os múltiplos de 60 (ou sessenta vezes sessenta) correspondiam às unidades de terceira ordem e assim por diante.
- No sistema sexagesimal os números de 1 a 59 eram representados de modo aditivo, repetindo cada um desses dois símbolos tantas vezes quantas fosse necessário. Para além de 59, o sistema se tornava posicional.
- Esta numeração utilizava propriamente apenas dois símbolos: uma cunha vertical representando a unidade e uma cunha horizontal associada ao número 10.

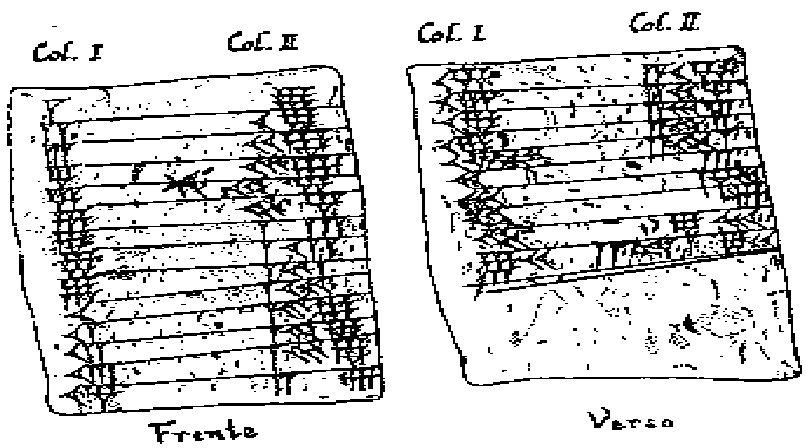
Slide 7: Texto sobre o sistema de numeração Babilônico

Em continuidade aos esclarecimentos sobre o funcionamento do sistema de numeração babilônico, apresentamos um slide com as respostas da questão: como representavam os números 8, 14, 39, 72?



Slide 8: Representação numérica em notação sexagesimal

Na <u>terceira parte</u> da aplicação da atividade foi apresentado o slide 9 com uma tableta babilônica que contém registros matemáticos realizados pelos babilônios:



Slide 9: Tableta Babilônica de multiplicação

A imagem da tableta também foi entregue impressa aos professores com o objetivo de facilitar a análise da mesma, conforme mostra ANEXO 4 (p. 215). Posteriormente à apresentação da tableta babilônica de multiplicação, foram propostas, por meio de slide, questões específicas sobre essa tableta, conforme apresentado a seguir:

O que se observa nestas colunas?
Em relação à coluna 1, o que se pode observar? Há alguma regularidade?
Quanto à coluna 2, o que se pode observar? Há alguma regularidade nela?
Há alguma relação entre os símbolos registrados nas colunas 1 e 2?

Slide 10: Questionamentos direcionados aos professores sobre a tableta de multiplicação Babilônica

Na sequência foi solicitado aos professores que respondessem oralmente, e caso julgassem necessário, fizessem registros por escrito.

ATIVIDADE 2

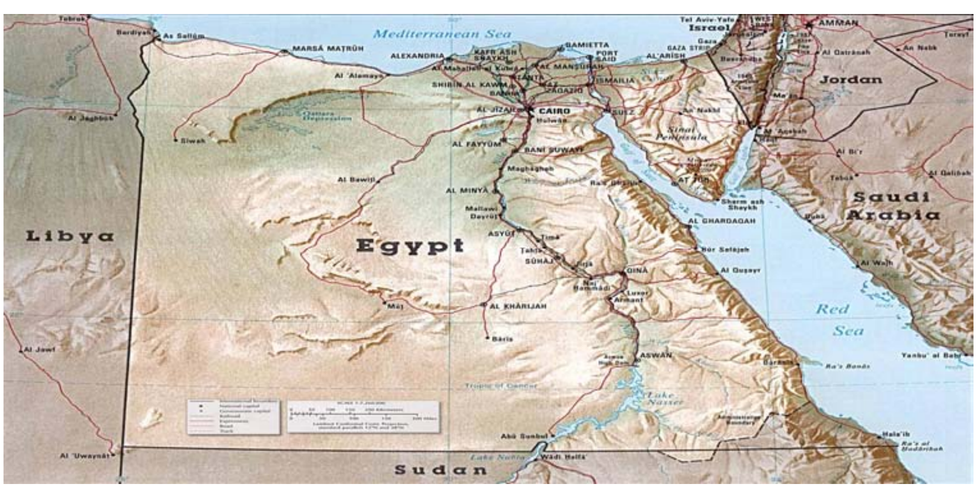
Em relação à aplicação da segunda atividade, seguimos os mesmos procedimentos concernentes à primeira. Esta atividade, por sua vez, tratou sobre o conhecimento matemático egípcio, direcionando-se especificamente ao conceito de proporcionalidade.

Na <u>primeira parte</u>, os slides 1 e 2 foram apresentados de forma a contextualizar historicamente a civilização egípcia, através de um breve texto e de um mapa geográfico:

PARTE I – CONTEXTO HISTÓRICO

Por volta do quarto milênio antes de Cristo surge às margens do Rio Nilo uma forma de sociedade mais evoluída, descendente das comunidades neolíticas. Esta nova forma de sociedade se caracterizava pelo uso da agricultura, comércio e também por questões ligadas a posse de terra e projetos de irrigação. Aos egípcios devemos a elaboração do primeiro calendário da história da humanidade, cuja criação está relacionada às inundações ocasionadas pelo Rio Nilo em determinado período do ano.

Slide 1: Conteúdo do slide apresentado para abordar o contexto histórico sobre o Egito.



Slide 2: mapa da civilização egípcia

Os slides foram apresentados pelo pesquisador e observados pelos professores. Em alguns momentos, surgiram alguns comentários entre os professores sobre o assunto tratado. O pesquisador buscou um diálogo com os participantes sobre a primeira parte.

Na <u>segunda parte</u> da atividade foram apresentadas questões relativas ao conhecimento matemático dos egípcios. Inicialmente tratamos do conhecimento matemático mais geral, isto é, sistema de escrita e o sistema de numeração, para em seguida nos direcionarmos ao conceito de proporcionalidade.

PARTE II

- Os egípcios também desenvolveram um sistema de numeração. Você tem conhecimento deste sistema de numeração?
- Quais símbolos eram utilizados para representar os números?
- Ainda com relação ao sistema de numeração utilizado por eles, você sabe informar qual era a base do sistema? Era um sistema posicional?
- Como já falamos anteriormente, os egípcios utilizavam símbolos para representar os números. Qual era a quantidade de símbolos por eles utilizados?
- Como representavam os números 1,2,...,10,11,12,...,20,...,121,...,1543,...13015?

Slide 3: Questionamentos direcionados aos professores sobre o sistema de numeração egípcio

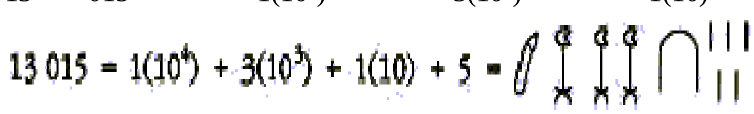
Novamente, slides foram elaborados estrategicamente, levando em consideração a hipótese da falta de conhecimento dos professores em relação às questões colocadas. Dessa forma, os slides 4, 5, 6 e 7 foram elaborados com objetivo de fornecer esclarecimentos sobre o sistema de numeração egípcio.

Foram apresentados esclarecimentos sobre cada uma das questões propostas no slide 3.

PARTE II

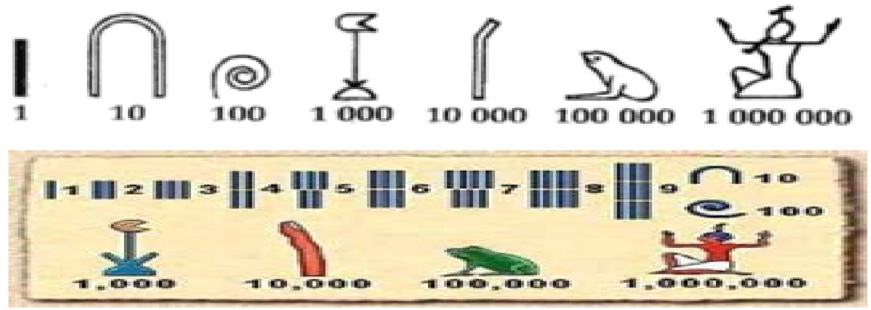
Os egípcios possuíam um sistema numeral hieroglífico, realizado através de desenhos, aos quais se atribuíam significados. A escrita hieroglífica era realizada da direita para a esquerda.

$13\ 015 = 1(10^4) + 3(10^3) + 1(10) + 5 =$



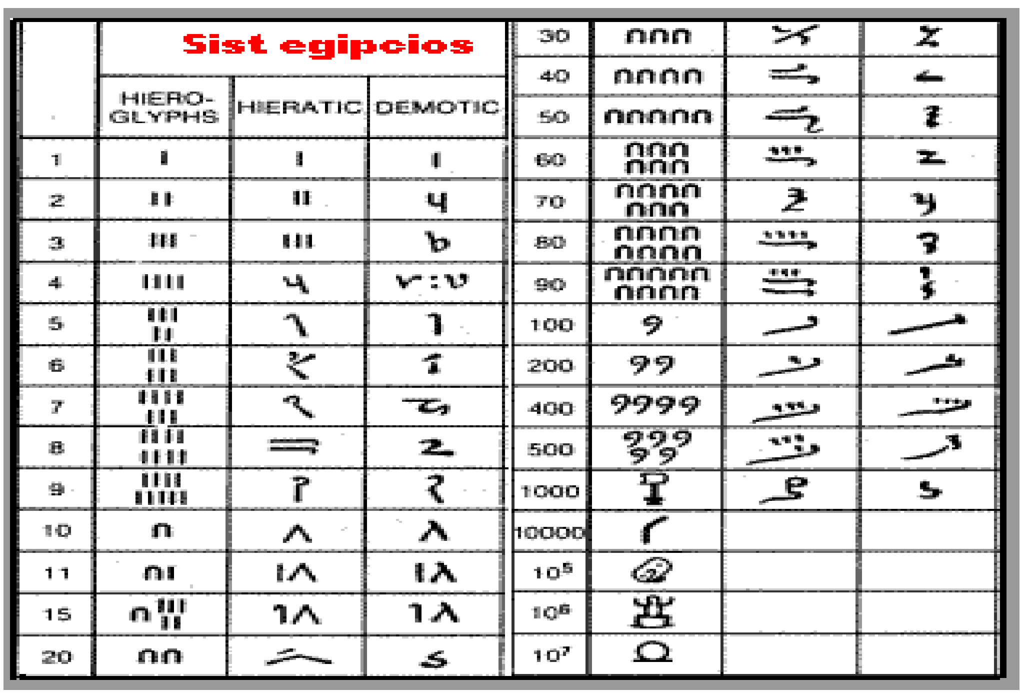
Por volta de 2000 a. C desenvolveram outro tipo de escrita, denominada hierática (escrita sagrada). Mais tarde surgiu ainda a escrita demótica, destinada à população em geral. Este tipo de escrita era uma simplificação da escrita hierática, utilizada pelo povo para registros ligados ao trabalho, transações comerciais, etc.

Slide 4: Apresentação dos sistemas de escrita egípcia



Slide 5: Representação numérica egípcia

Após a apresentação do conteúdo desses slides, apresentamos outro slide contendo uma tabela com o registro do sistema de numeração dos egípcios nos três tipos de escrita, ou seja, hieroglífica, hierática e demótica:



Slide 6: Sistemas de numeração egípcios

O texto abaixo, apresentado em slide, reproduz os pontos que destacamos sobre o sistema de numeração egípcio com o objetivo de esclarecer algumas dúvidas mencionadas pelos professores:

O sistema de numeração hieroglífico egípcio utilizava a base dez para a sua contagem. Este sistema não era posicional.

O sistema de numeração hierático não era posicional.

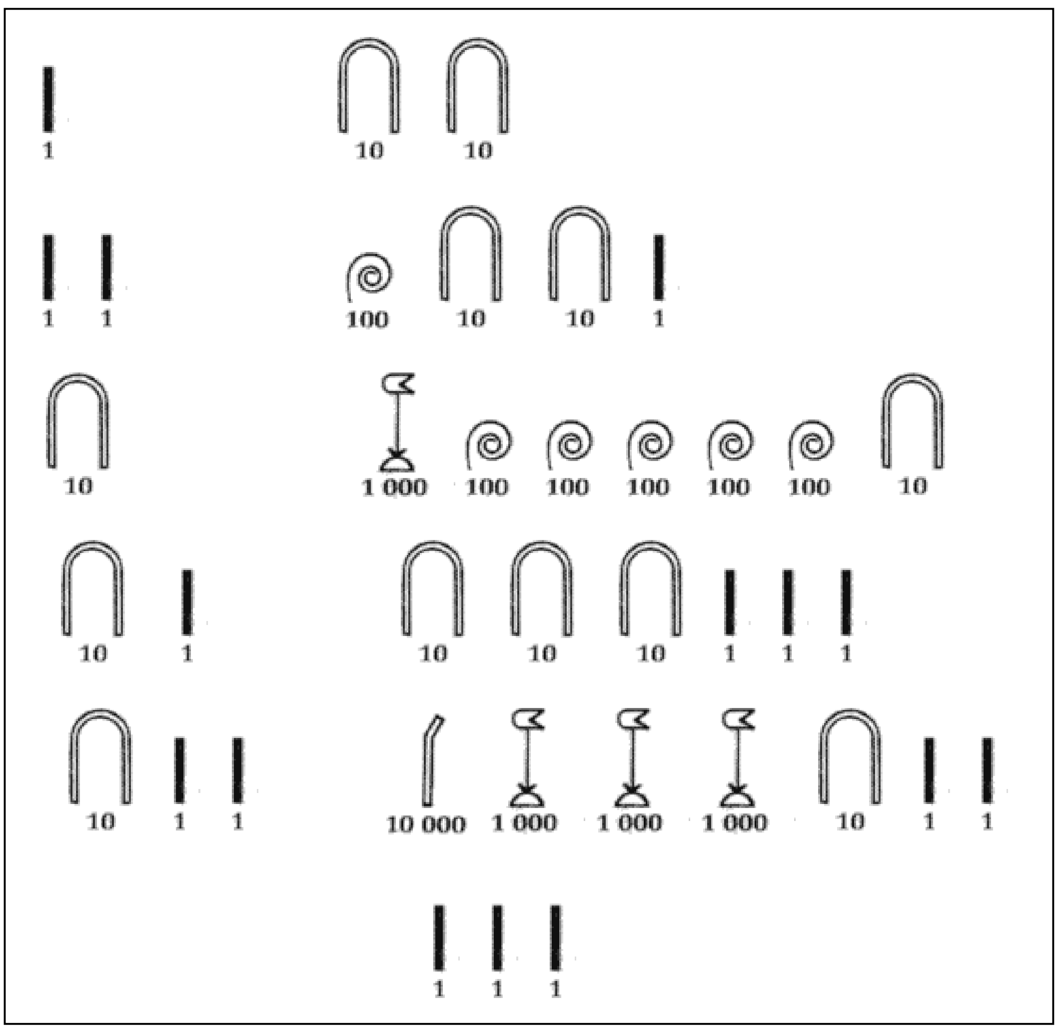
Os sistemas de numeração hierático (quando da invenção do papiro)
e demótico não pertencem ao tipo de agrupamentos simples.

Para o sistema de numeração hieroglífico eram utilizados 10 símbolos, enquanto que para o sistema de numeração hierático era utilizado um total de 36 símbolos.

Slide 7: Pontos destacados sobre o sistema de numeração egípcio

No final da segunda parte da atividade, apresentamos o slide 8 que continham a resposta para a questão proposta anteriormente:

Como representavam os números 1,2,...,10,11,12,...,20,...121,...,1543,...,13015?



Slide 8: Formas de representação numérica egípcia

Na terceira parte da atividade foi apresentado um slide contendo informações acerca do registro matemático contido nos papiros, bem como a introdução do método da falsa posição que era uma estratégia utilizada para a resolução de equações, cujo texto reproduzimos a seguir:

PARTE III
Como dissemos anteriormente, boa parte do conhecimento matemático egípcio era registrado em papiros. Um destes é o papiro de Rhind que recebeu essa denominação depois de ter sido comprado pelo egiptólogo A. Henry Rhind em 1858. O papiro foi compilado pelo escriba egípcio Ahmes em 1650 a.C. Atualmente encontramos versões traduzidas destes problemas em livros de História da Matemática. A maior parte destes problemas são equivalentes a uma equação linear, e são resolvidos por um método chamado de falsa posição. Segundo Boyer (1974) a *falsa posição* representa uma abordagem algébrica de resolução de equações.

Slide 9: Texto sobre o conhecimento matemático egípcio

Para finalizar, apresentamos um slide com uma equação egípcia (slide 10). Em seguida, solicitou-se aos professores que representassem a equação por escrito, de acordo com a sua compreensão. Segue o conteúdo do slide 10:

- Sabendo que os egípcios atribuíam ao termo "aha" um valor desconhecido, como podemos representar a seguinte expressão:

O valor desconhecido (aha) adicionado a 1/7 do valor desconhecido (aha) é igual a 24.

Slide 10: Apresentação de uma equação egípcia

Em seguida, apresentamos, por meio do slide 11, os passos utilizados para a resolução da equação numa linguagem simbólica atual, paralelamente à retórica utilizada pelos egípcios. Esse procedimento teve o objetivo de melhor esclarecer o método da falsa posição.

d + d/7 = 24	“*aha*” mais um sétimo de “*aha*” é igual a 24
Supunham d = 7	Os antigos egípcios supunham que esse valor fosse 7, com o intuito de evitar a fração.
7 + 7/7 = 8	Utilizavam o seguinte raciocínio: 7 + 1/7 de 7 é igual a 8.
$8 \times 3 = 24$	Como o resultado esperado era 24 eles multiplicavam o resultado obtido por 3.
7 x 3 = 21	Para solucionar a equação eles multiplicavam por 3 o valor inicialmente suposto, obtendo assim a solução 21.

Slide 11: Método de resolução da equação egípcia em notação moderna

Logo após esta apresentação foi entregue uma folha impressa ANEXO 5 (p. 216) com o seguinte questionamento: *Observando a resolução da equação anterior, você poderia afirmar que 21 é realmente a solução da equação? Justifique sua resposta.*

O objetivo de apresentar a resolução da equação dos egípcios pelo método da falsa posição foi fazer com que os professores refletissem acerca da técnica utilizada e concluíssem que aquele tipo de resolução estava fundamentado no uso da proporcionalidade. Os resultados destas atividades serão apresentados no próximo capítulo. Contudo, ressaltamos que em ambas as atividades houve a necessidade de apresentar explicações para as perguntas acerca do sistema de numeração babilônico e egípcio.

Destacamos também que a emissão de possíveis explicações, por parte do investigador, em relação às perguntas sobre o sistema de numeração egípcio não invalida o caráter investigativo da atividade, tendo em vista que o foco principal da investigação reside na observação e análise de um método de resolução de equação adotado pelos egípcios: o método da falsa posição.

2.4.4 Para a entrevista

No momento da aplicação da entrevista, foram esclarecidos aos participantes os objetivos do investigador e as características do instrumento que seria utilizado. O investigador, mais uma vez, explicou aos professores a importância do estudo e procurou encaminhar a entrevista de modo que os respondentes se sentissem o mais à vontade possível.

A entrevista foi antecipadamente agendada com cada um dos participantes, tendo em vista a disponibilidade de horários dos mesmos. No momento de agendar o dia e o horário da entrevista, o investigador pediu autorização para gravar, em áudio. Nenhum dos participantes se contrapôs e assim, realizamos as entrevistas e coletamos os dados por meio de gravação.

As entrevistas tiveram como principal objetivo responder os seguintes questionamentos: os resultados das entrevistas indicam alguma mudança com relação à atribuição de significados pelos sujeitos acerca do conceito de proporcionalidade? E ainda, as atividades mediadas pela História da Matemática provocam mudanças no significado que estes professores atribuem a este conceito?

A utilização da entrevista em pesquisas de cunho qualitativo apresenta-se como uma fonte riquíssima de dados porque promove um encontro interpessoal, desenvolvido num contexto determinado. Além disso, possibilita uma maior diversidade relativamente às questões e respostas, bem como uma excelente oportunidade para se aprofundar certos assuntos.

Para realizar a entrevista, elaboramos um roteiro prévio ANEXO 3 (p. 214) com a intenção de auxiliar o investigador no momento das entrevistas. O roteiro constituiu-se apenas como um guia, pois este não exigia uma ordem rígida, permitindo que o desenvolvimento da entrevista se adaptasse ao entrevistado. Dessa forma, optamos pela entrevista semi-estruturada. Conforme Trivinõs (1995), na entrevista semi-estruturada o informante tem a possibilidade de discorrer sobre suas experiências, a partir do foco principal proposto pelo investigador; ao mesmo tempo em que permite respostas livres e espontâneas do respondente.

2.5 OS SUJEITOS

Nesse trabalho foi realizado um estudo com um grupo de nove professores de ambos os sexos; sendo que oito deles lecionavam aulas de matemática do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e da 1ª a 3ª série do Ensino Médio, do Colégio Municipal Padre Galvão na cidade de Pocinhos – PB. O outro professor participante lecionava em turmas do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, do Grupo Escolar Estadual de Ensino Fundamental da mesma cidade, que, mostrando-se muito interessado em participar do estudo, ofereceu-se como voluntário.

O conjunto formado por esses nove professores, naquele momento, era composto por uma maioria graduada em Licenciatura Plena em Matemática e por outra parte que ainda está se licenciando.

A maior parte desses professores está na faixa etária de 31 a 40 anos de idade e aproximadamente 44,5% deles está há cinco anos em sala de aula. Outros 33,33% está de 6 a 10 anos; 11,11% está de 11 a 15 anos e 11,11% está há mais de 15 anos em sala de aula. Entre os professores participantes da pesquisa 77,78% graduaram-se (ou estão graduando-se) em instituição de nível superior pública, enquanto 22,22% graduaram-se (ou estão graduando-se) em instituição de Ensino Superior Privada.

Esses e outros dados que caracterizaram os professores são provenientes das respostas obtidas por intermédio do questionário. Uma melhor caracterização dos participantes será apresentada no próximo capítulo.

3 RESULTADOS

3.1 Para as Notas de Campo[1]

A utilização do registro de campo foi importante, pois permitiu ao investigador conhecer alguns indícios das concepções dos sujeitos acerca de vários assuntos, dos quais podemos citar: ensino-aprendizagem de Matemática, Educação Matemática, História da Matemática e também sobre o conceito de proporcionalidade.

Durante o processo de investigação houve vários encontros com os professores, alguns, inclusive, aconteceram antes do início da coleta sistemática de dados. Após cada encontro, registros foram realizados nas notas de campo do pesquisador vide ANEXO 6 (p. 217). O primeiro encontro teve como objetivo convidar os professores a participar da pesquisa, bem fazer alguns esclarecimentos gerais sobre o estudo pretendido. Os sujeitos mostraram-se interessados, pois, segundo eles, essa seria a primeira vez que participariam de um estudo deste tipo. Isso pode ser observado nas seguintes notas:

> *Gostarei de participar desse trabalho, pois nunca antes participei, nem nessa escola e nem em outra.*
> *Acredito que participar de estudos desse tipo poderá trazer a nós contribuições para a nossa prática do ensino da matemática.*

Um dos professores questionou sobre que conteúdo matemático iria estudar. Nesse primeiro encontro não tínhamos a intenção de detalhar a investigação. Mas eles foram informados que trabalharíamos com a História da Matemática e Proporcionalidade. Esclarecida essa questão, surgiu a seguinte pergunta?

> *Por que proporcionalidade, não poderia ser um conteúdo mais fácil não?*

Resposta dada pelo pesquisador:

> *Porque a proporcionalidade é um conteúdo muito importante no processo de ensino da matemática, tendo em vista que ele está*

---

[1] As notas de campo referentes aos registros do pesquisador encontram-se destacadas em itálico.

> *relacionado a outros conceitos matemáticos, bem como a outras áreas do conhecimento.*

A partir dessa questão podemos pressupor que a proporcionalidade representa, pelo menos para esse sujeito, um conteúdo de difícil compreensão. Talvez essa constatação seja a razão pela qual o sujeito tenha se mostrado interessado em participar do estudo. A necessidade de superar dificuldades pode o ter motivado a participação.

Os dois encontros seguintes tiveram como objetivo manter o contato com os professores, bem como conhecer suas ideias sobre aspectos da Educação Matemática.

Nestes encontros foi possível perceber que, por um lado, os professores estão sempre demonstrando interesse em participar do estudo, por outro, demonstram também não estarem informados sobre novas tendências ou abordagens para o ensino da matemática. Podemos perceber isso através de argumentos apresentados por um deles:

> *Acabamos reproduzindo o que aprendemos na universidade ou até mesmo com nossos professores do ensino básico, porque não estamos por dentro das novas metodologias de ensino. Sei que muitas pesquisas estão sendo realizadas nas universidades, mas elas ficam só lá e não chegam até nós.*
> *Nem sempre é possível ingressar em cursos de mestrado ou doutorado para poder a gente se capacitar melhor e assim proporcionar uma aprendizagem da matemática de qualidade.*

Informamos aos professores que no próximo encontro aplicaríamos um questionário, que se constituiria em nosso primeiro momento de coleta de dados, sendo também uma etapa muito importante do estudo. Dessa forma, pedimos a eles que não faltassem no dia combinado, com exceção, é claro, de falta por motivos superiores à sua vontade.

No encontro para a aplicação do questionário faltaram três deles. Os faltosos avisaram o pesquisador com antecedência sobre sua impossibilidade de participar. Isso mostra a responsabilidade e o envolvimento desses professores para com o estudo. Para os três faltosos marcamos uma data posterior, onde o investigador retornaria à escola para a aplicação do questionário.

Essa etapa do estudo transcorreu normalmente, com exceção de algumas dúvidas que surgiram relativas a duas questões: a décima quinta que abordava os documentos oficiais governamentais para o ensino da Matemática e da vigésima questão, a qual buscava uma definição ao conceito de proporcionalidade por parte dos participantes.

A expressão "documentos oficiais" não foi compreendida de imediato. A dificuldade para responder a questão sobre os documentos oficiais foi sanada logo que o investigador citou os Parâmetros Curriculares Nacionais, entre outros. Quanto à dificuldade para responder a vigésima questão, julgamos que esteja relacionada a insegurança em definir conceitos matemáticos na forma verbal. Para esta questão, os participantes expuseram os seguintes questionamentos:

> *Como assim, você quer que eu escreva a forma como eu ensino esse conceito?*
> *Nem sempre é possível ensinar esse conceito. Não dá tempo.*
> *Ensino como está nos livros didáticos.*

Esses posicionamentos nos levam a pressupor que existe dificuldade por parte desse grupo para ensinar o conceito de proporcionalidade e, quando o fazem, costuma seguir o livro didático, fato que demonstra, de acordo com estudos realizados (SPINILLO, 1997, 2002; SCHLIEMANN E CARRAHER, 1997), quanto o ensino da proporcionalidade na escola baseia-se unicamente na aplicação do algoritmo da regra de três.

Em virtude da falta de alguns professores no dia da aplicação do questionário, fez-se necessário promover mais um encontro; desta vez, apenas com três deles. Novamente, as dúvidas para as duas questões citadas anteriormente surgiram. Com exceção desta dificuldade, a aplicação do instrumento questionário transcorreu normalmente. Neste encontro combinamos com todos os professores o dia de aplicarmos as atividades, informando-lhes também sobre os procedimentos adotados para esta etapa.

Por volta do mês de maio de 2009, retornamos à escola para a aplicação das atividades mediadas pela História da Matemática. A aplicação foi filmada e os professores sentiam-se à vontade, sem inibição pela presença da pessoa que os filmava.

À medida que fomos apresentando as atividades, os professores mostravam-se curiosos e até mesmo surpresos com aquele tipo de abordagem, fato este que nos empolgava ainda mais. Por outro lado, os professores apresentaram dificuldades para responder certas questões, e em alguns momentos afirmaram não conhecer aqueles sistemas ou, pelo menos, não o conhecer segundo a abordagem adotada. Como podemos ver:

> *Não conheço esses sistemas.*
> *Os livros didáticos às vezes falam dos sistemas de numeração antigos, mas não mostram como esses sistemas são estruturados.*
> *Não conheço essa tableta babilônica.*
> *Não estou vendo proporção nessa resolução da equação.*
> *Se a gente relacionar uma coluna com a outra vamos ver que existe proporção aí.*

Em alguns momentos percebemos que os professores, apesar de algumas dificuldades, conseguiram atribuir significados coerentes ao conceito de proporcionalidade presente nas atividades mediadas pela História da Matemática.

Ao término desta etapa, informamos aos professores que a próxima seria uma entrevista, a qual seria realizada individualmente e que utilizaríamos um gravador de voz para a coleta dos dados. Sendo assim, combinamos o período pelo qual realizaríamos esta etapa da pesquisa.

A etapa referente às entrevistas se deu através de vários encontros, de acordo com a disponibilidade de tempo de cada um dos professores. Esta etapa transcorreu de modo normal, não havendo nenhuma circunstância adversa a sua realização. Em cada momento de contato com os respondentes, verificamos que os mesmos encontravam-se tranquilos, respondendo as questões com naturalidade. Percebemos também que alguns respondentes pareceu se expressar melhor sobre conhecimento matemático quando foram solicitados a responderem por escrito do que quando eles tiveram que falar.

Ao fim desta etapa agradecemos aos professores pelo empenho e dedicação ao estudo, afirmando que as contribuições deles serão de grande valia para a Educação Matemática e que em breve retornaríamos à escola para trazer-lhes um produto como resultado de nosso estudo.

Estas constatações e observações foram registradas pelo pesquisador em suas notas de campo. A seguir, serão apresentados os resultados obtidos pelos demais instrumentos.

3.2 Para o questionário

O questionário utilizado no presente estudo permitiu a caracterização dos professores envolvidos, já que possibilitou a obtenção de dados pessoais e profissionais dos respondentes. Por meio da estatística descritiva (utilizando o aplicativo Excel 2007) foi possível conhecer diversos aspectos relacionados à formação inicial e ao exercício de docência.

No que se refere às questões abertas, a análise de conteúdo permitiu obter os primeiros indícios acerca das compreensões dos professores sobre o conceito de proporcionalidade. A seguir, apresentamos os resultados da análise realizada para algumas questões fechadas do questionário. As questões 3, 4 e 5 referem-se ao grau de escolaridade dos sujeitos. Para o nosso estudo, optamos por enfatizar o grau referente ao nível superior.

Tabela 2 – Distribuição da frequência dos professores de acordo com o gênero

Sexo	Frequência	Porcentagem
Masculino	8	88,89
Feminino	1	11,11
Total	9	100

A tabela 2 mostra as duas categorias que caracterizam a variável gênero. Nessa tabela, observamos, em cada categoria, a frequência e a porcentagem de respostas. A maior parte dos participantes (88,89%) deste estudo é do sexo masculino e a menor parte (11,11%), do sexo feminino.

Tabela 3 – Distribuição da frequência dos professores de acordo com a idade

Idade	Frequência	Porcentagem
Até 20 anos	0	0
De 21 a 30 anos	3	33,33
De 31 a 40 anos	5	55,56
Mais de 40 anos	1	11,11
Total	9	100

Na tabela 3, percebe-se que a maior parte dos professores (55,56%) está na faixa etária compreendida entre 31 e 40 anos. A menor parte (11,11%) é composta por professores que possuem mais de 40 anos.

Tabela 4 – Distribuição da frequência de acordo com o tipo de instituição onde fizeram o Ensino Superior

Instituição	Frequência	Porcentagem
Pública	7	77,78
Privada	2	22,22
Total	9	100

Com relação à escolaridade dos professores, julgamos necessário analisar apenas algumas questões do questionário relacionadas a este item, pois o nosso interesse está em caracterizar esses sujeitos com relação ao campo profissional. Dessa forma, não analisamos algumas questões do referido questionário sobre toda escolaridade do sujeito, priorizando somente o item Ensino Superior.

Na tabela 4, observamos que a maior parte dos professores (77,78%) graduou-se (ou está se graduando) em Instituição de Ensino Superior Pública, enquanto que a outra parte (22,22%) graduou-se (ou está se graduando) em Instituição de Ensino Superior Privada.

Tabela 5 – Distribuição da frequência de acordo com o período em que fizeram o curso superior.

Período	Frequência	Porcentagem
Diurno	4	44,44
Noturno	5	55,56
Total	9	100

Na tabela 5, observamos que a maior parte dos professores (55,56%) estudou (ou estuda) no período noturno, enquanto que a menor parte (44,44%) estudou (ou estuda) no período diurno.

Tabela 6 – Distribuição da frequência dos professores de acordo com o tipo de curso no qual é graduado (ou está se graduando)

Tipo de curso	Frequência	Porcentagem
Licenciatura Plena em Matemática	8	88,89
Bacharelado em Matemática	0	0
Licenciatura em Ciências, com habilitação em Matemática	0	0
Licenciatura em Ciências com outra Habilitação	0	0
Outro curso superior	1	11,11
Total	9	100

Na tabela 6, notamos que maior parte dos professores (88,89%) cursou (ou está cursando) Licenciatura Plena em Matemática, enquanto que a menor parte (11,11%) cursou (ou está) cursando o curso de bacharelado em estatística.

As questões 9, 10, 11 e 13, 14 não foram aqui abordadas porque julgamos que os resultados das mesmas não teriam implicações diretas com o foco principal de investigação, tendo em vista que as respectivas questões referiam-se à escolha do curso do curso superior por parte dos respondentes; ocupação durante o período em que faziam o curso; atuação atual em sala de aula; tempo de docência na escola atual em que trabalham e finalmente, quanto à titulação na área de educação.

Entendemos que independente dos resultados quanto às questões colocadas anteriormente, os participantes desta pesquisa devem apresentar parâmetro mínimo quanto à compreensão do conceito em questão.

Tabela 7 – Distribuição da frequência dos sujeitos de acordo com o tempo de docência

Tempo de docência	Frequência	Porcentagem
De 1 a 5 anos	4	44,45
De 6 a 10 anos	3	33,33
De 11 a 15 anos	1	11,11
Mais de quinze anos	1	11,11
Total	9	100

Na tabela 7, observamos que a maior parte dos professores (44,45%) tem de 1 a 5 anos de docência, enquanto que a menor parte (11,11%) tem de 11 a 15 anos ou mais de quinze anos de docência.

Em síntese, de acordo com os resultados obtidos pelas respostas emitidas a algumas perguntas do questionário, os professores podem ser caracterizados da seguinte maneira: a maior parte dos participantes deste estudo é do sexo masculino; está numa faixa etária compreendida entre 31 e 40 anos; graduou-se (ou está se graduando) em instituição de Ensino Superior Pública; estudou (ou estuda) no período noturno e a maior parte destes professores apresenta tempo de docência compreendido entre 1 e 5 anos.

Apresentamos agora os resultados que obtivemos a partir da análise de conteúdo das questões abertas do questionário. Esta análise foi realizada seguindo o método proposto por Bardin (2004), pois este se apresenta em sintonia com os propósitos do presente estudo. Dessa forma, foram estabelecidas as unidades de contexto, as unidades de registro e, por fim, as categorias, sendo estas últimas organizadas em tabelas. As categorias foram estabelecidas a partir de expressões que apresentaram similaridades de resposta.

Este procedimento foi feito para as questões, 20, 21, 22 e 24 do questionário. Foi possível um tratamento estatístico simples para a quantificação das palavras que apresentavam similaridade em cada uma das questões destacadas acima. Novamente, lembramos que a questão 23, a respeito da oportunidade de estudar o conceito de proporcionalidade via História da Matemática não foi abordada por ter recebido 88,89 % de resposta negativa.

Para uma melhor compreensão do método de análise aplicado às questões abertas do questionário, retomamos, a seguir, as definições pertinentes à análise de conteúdo realizada:

UNIDADE DE CONTEXTO – Todo o extrato da fala do sujeito (relacionada a uma das questões do questionário).

UNIDADE DE REGISTRO – Uma ou mais palavras que expressam resposta à pergunta feita.

CATEGORIAS – Conjunto mais amplo de palavras que expressam similaridade de resposta, selecionadas a partir das unidades de registro.

Para a análise das questões a seguir, utilizamos tabelas que mostram as respostas agrupadas em categorias, que foram previamente definidas, de acordo com nosso problema de pesquisa. Cada uma destas categorias reúne as unidades de registro de cada uma das respostas.

QUESTÃO 20 – Para você, o que significa proporcionalidade?

UNIDADES DE CONTEXTO

UC1 - Quando se fala de proporcionalidade não se pode deixar de se falar em <u>proporção</u>, <u>razões entre grandezas</u>, tamanhos que vão estar relacionados com determinadas situações, <u>comparações de medidas</u>.

UC2 - Na minha opinião significa <u>comparar grandezas e medidas</u> de determinadas coisas ou matérias.

UC3 - É algo que não se pode ensinar pensando apenas em conceitos matemáticos, tem que envolver os alunos no conteúdo e daí os conceitos passarão a ser uma consequência. Então proporcionalidade <u>é tudo aquilo que pode ser relacionado e demonstrado numericamente</u>.

UC4 - Proporção é uma equivalência entre duas razões, que mantém entre si uma razão de semelhança.

UC5 - No mundo atual vivemos sempre de olho em tudo que iremos fazer verificando medidas, vendo se uma roupa está proporcional com o meu tamanho, por exemplo, e de uma forma indireta podemos comparar a proporcionalidade com a combinação, tanto a combinação e proporção. Verificar todas as maneiras de combinação no modo geral.

UC6 - É algo que está relacionado a outro independente de circunstância adversa.

UC7 - Uma igualdade entre duas razões.

UC8 - Proporção é uma igualdade entre duas razões.

UC9 - É uma harmonia entre grandezas.

UNIDADE DE REGISTRO

Para esta questão foram selecionadas doze unidades de registro identificadas nas unidades de contexto, as quais foram agrupadas em categorias para posterior análise.

1. Proporção
2. Razões entre grandezas
3. Comparações de medidas
4. Comparar grandezas e medidas
5. É tudo aquilo que pode ser relacionado e demonstrado numericamente
6. Equivalência entre duas razões
7. Razão de semelhança,
8. Comparar a proporcionalidade com a combinação
9. É algo que está relacionado a outro
10. Igualdade entre duas razões
11. Igualdade entre duas razões

12. Harmonia entre grandezas

CATEGORIAS ESTABELECIDAS

Categoria	Unidades de registro	Frequência
Significado pertinente ao conceito de proporcionalidade	1. Proporção 2. Igualdade entre duas razões 3. Igualdade entre duas razões 4. Comparações de medidas 5. Razão de semelhança 6. Razões entre grandezas 7. Equivalência entre duas razões	7 58,33%
Significado não pertinente ao conceito de proporcionalidade	1. Comparar grandezas e medidas 2. Comparar a proporcionalidade com a combinação 3. Harmonia entre grandezas	3 25%
Respostas evasivas	1. É tudo aquilo que pode ser relacionado e demonstrado numericamente 2. É algo que está relacionado a outro	2 16,67%

A organização dos dados em categorias revelou que 58,33% das unidades de registro indicaram que o significado atribuído ao conceito de proporcionalidade está associado à proporção e à razão entre grandezas. Esta constatação encontra respaldo em muitos estudos desenvolvidos sobre o conceito de proporcionalidade. Por exemplo, Spinillo (1997) afirma que os educadores precisam desenvolver uma compreensão conceitual adequada da proporção para evitar a visão simplista e errônea de que o ensino do algoritmo, a exemplo da regra de três, é o cerne do processo de aprendizagem do conceito de proporcionalidade.

A outra categoria estabelecida revelou que 25% das unidades de registro indicaram significados não pertinentes acerca do conceito de proporcionalidade. A análise dessa categoria indica que estas incompreensões acerca do conceito de proporcionalidade são de natureza conceitual, ou seja, existe compreensão inadequada do conceito de proporcionalidade no grupo observado.

A terceira categoria estabelecida considerou 16,67% das unidades de registro como sendo evasivas. Denominamos assim esta categoria porque determinadas respostas não correspondem à pergunta feita. Isso significa que estas respostas não apresentam nenhuma relação com o conceito de proporcionalidade.

QUESTÃO 21 – Para você, o conceito de Proporcionalidade está relacionado a outros conceitos matemáticos?

UNIDADES DE CONTEXTO

UC1 – Sim. Semelhanças de triângulos, fração equivalente, escalas e várias situações do dia a dia.

UC2 – Sim. Porcentagem, área e volume de figuras geométricas.

UC3 – Sim. Não posso citar em que momentos utilizamos essa relação, mas, por exemplo, podemos ver quando se trabalha conjunto observa-se uma boa relação, mas o conceito também pode ser dado em probabilidade, análise combinatória.

UC4 – Sim. Frações equivalentes, cálculo de juros, regra de três, teorema de Tales, semelhança de figuras planas, equações equivalentes, relação métrica em triângulo retângulo.

UC5 – Sim. A proporcionalidade está ligada a vários fatores nos conceitos matemáticos como semelhança de triângulos, proporção de uma vacina para o controle de doenças etc.

UC6 – Sim. Frações, na geometria, comparações de grandezas.

UC7 – Sim. Frações equivalentes.

UC8 – Sim. O estudo de proporção possibilita o estabelecimento de conexões com outros temas da matemática, como a geometria quando o aluno conclui que o lado e o perímetro do quadrado são proporcionais, etc.

UC9 – Sim. Porcentagem, função e semelhança de figuras planas.

UNIDADES DE REGISTRO

Para a segunda questão foram selecionadas vinte e seis unidades de registro identificadas na unidade de contexto correspondente a esta questão. Em seguida, elas foram agrupadas em categorias, para posterior análise.

1. <u>Semelhanças de triângulos</u>
2. <u>Fração equivalente</u>
3. <u>Escalas</u>
4. <u>Situações do dia a dia</u>
5. <u>Porcentagem</u>
6. <u>Área e volume de figuras geométricas</u>
7. <u>Conjunto</u>
8. <u>Probabilidade</u>
9. <u>Análise combinatória</u>
10. <u>Frações equivalentes</u>
11. <u>Cálculo de juros</u>
12. <u>Regra de três</u>
13. <u>Teorema de Tales</u>
14. <u>Semelhança de figuras planas</u>
15. <u>Equações equivalentes</u>
16. <u>Relação métrica em triângulo retângulo.</u>
17. <u>Semelhança de triângulos</u>
18. <u>Proporção de uma vacina para o controle de doenças etc.</u>
19. <u>Frações</u>
20. <u>Geometria</u>
21. <u>Comparações de grandezas</u>

22. Frações equivalentes

23. Lado e o perímetro do quadrado são proporcionais

24. Porcentagem

25. Função

26. Semelhança de figuras planas

CATEGORIAS ESTABELECIDAS

Categorias	Unidades de Registro	Frequência
Estabelecimento de relação pertinente ao conceito de proporcionalidade	1. Semelhanças de triângulos 2. Fração equivalente 3. Escalas 4. Porcentagem 5. Frações equivalentes 6. Cálculo de juros 7. Regra de três 8. Teorema de Tales 9. Semelhança de figuras planas 10. Equações equivalentes 11. Semelhança de triângulos 12. Frações equivalentes 13. Porcentagem 14. Função 15. Semelhança de figuras planas 16. Lado e perímetro do quadrado são proporcionais 17. Probabilidade	17 65,38%
Estabelecimento de relação não pertinente ao conceito de proporcionalidade	1.Área e volume de figuras geométricas 2. Conjunto 3. Frações 4. Geometria 5. Comparações de grandezas 6. Análise Combinatória 7.Relação métrica no triângulo retângulo	7 26,92%
Respostas Evasivas	1. Situações do dia-a-dia 2.Proporção de uma vacina para o controle de doenças	2 7,70%

A organização dos dados em categorias revelou que 65,38% das unidades de registro correspondem a uma adequada compreensão com relação à pergunta, ou seja, a maior parte dos respondentes faz uma correta relação entre o conceito de proporcionalidade e outros conceitos matemáticos.

A segunda categoria estabelecida para esta questão considerou que 26,92% das unidades de registro indicam estabelecimento de relação não pertinente ao conceito de proporcionalidade, ou seja, estas respostas não estabeleceram uma relação adequada do conceito de proporcionalidade a outros conceitos matemáticos.

A terceira categoria estabelecida revelou 7,70% de respostas evasivas, ou seja, que não correspondem à pergunta feita. Este índice de respostas evasivas indica indícios de incompreensão conceitual acerca do conceito de proporcionalidade.

QUESTÃO 22 – Para você, o conceito de Proporcionalidade está relacionado a outras áreas do conhecimento?

UNIDADES DE CONTEXTO

UC1 – Sim. Crescimento Populacional, crescimento de uma cultura de bactérias, reações químicas, etc.

UC2 – Sim. Por exemplo, na geografia por meio da utilização de escalas. Na física, química, biologia e até no cotidiano.

UC3 – Sim. Geografia e física.

UC4 – Sim. Na estatística, na física, na química, etc.

UC5 – Sim. No controle da natalidade, mortalidade, epidemias e indústrias farmacêuticas na formulação de novas drogas.

UC6 – Sim. Biologia, física, química.

UC7- Sim. Os geógrafos muito se utilizam de proporcionalidade para utilizar escala de ampliação e redução.

UC8 – Sim. Geografia, informática.

UC9 – Sim. Engenharia civil, cálculos sobre escalas.

UNIDADES DE REGISTRO

Para a terceira questão foram selecionadas vinte e quatro unidades de registro a partir das unidades de contexto. Em seguida, elas foram agrupadas em categorias para análise posterior.

1. Crescimento Populacional
2. Crescimento de uma cultura de bactérias
3. Reações químicas
4. Geografia
5. Física
6. Química
7. Biologia
8. Cotidiano
9. Geografia
10. Física
11. Estatística
12. Física
13. Química
14. Controle da natalidade e mortalidade
15. Epidemias
16. Indústrias farmacêuticas na formulação de novas drogas.
17. Biologia
18. Física
19. Química

20. Escala de ampliação e redução.

21. Geografia

22. Informática

23. Engenharia civil

24. Cálculos sobre escalas

CATEGORIAS ESTABELECIDAS

Categorias	Unidades de Registro	Frequência
Estabelecimento de relação pertinente	1. Geografia 2. Física 3. Química 4. Biologia 5. Geografia 6. Física. 7. Estatística 8. Física 9. Química 10 Biologia 11. Física 12. Química 13. Geografia 14. Informática 15. Engenharia civil	15 62,5%
Respostas evasivas	1. Cotidiano 2. Indústrias farmacêuticas na formulação de novas drogas. 3. Crescimento Populacional 4. Controle da natalidade e mortalidade 5. Epidemias 6. Escala de ampliação e redução 7. Cálculos sobre escalas 8.Crescimento de uma cultura de bactérias 9. Reações químicas	9 37,5%

A organização dos dados em categorias revelou que 62,5% das unidades de registro correspondem à relação pertinente existente entre o conceito de proporcionalidade e outras áreas do conhecimento. Este fato é apontado por estudiosos como Spinillo (1997), quando afirma que este conceito é importante para lidar com varias situações do mundo, para estudar e compreender outras áreas do conhecimento, além de contribuir para o desenvolvimento cognitivo dos indivíduos.

A segunda categoria estabelecida indicou que 37,5% das unidades de registro foram evasivas, ou seja, não correspondia corretamente à pergunta proposta. Este índice nos dá indícios da não existência de um tratamento mais interdisciplinar para o trabalho com a matemática na formação de professores, isto é, parece existir uma lacuna na formação de professores de matemática no que diz respeito à conexão da matemática a outras áreas do conhecimento.

QUESTÃO 24 – Você acredita que a História da Matemática poderia contribuir para a sua compreensão a respeito do conceito de Proporcionalidade?

UNIDADES DE CONTEXTO

UC1 – Sim. Maior esclarecimento da utilização, da conceituação, da generalização, do surgimento, aperfeiçoamento métodos de ensino.

UC2 – Sim. O desenvolvimento dos conceitos matemáticos num todo, vem do raciocínio proporcional.

UC3 – Sim. Conhecer a maneira ou modo que os antigos matemáticos entendiam ou conceituavam a proporção.

UC4 – Sim. Porque sabia a fundo as primeiras necessidades de sua utilização e faria a interpretação com a atual.

UC5 – Sim. Interagir com outras ciências do conhecimento científico na comparação de grandezas universais.

UC6 – Sim. Trazendo alusões a outras aplicações que só as que habitualmente vêm nos livros didáticos.

UC7 – Sim. Para conhecermos os conceitos e de onde veio tal conhecimento.

UC8 – Não.

UC9 – Sim. Acredito que qualquer que seja o estudo feito que envolva história, conceito influencia, contribui para a qual crescimento de conhecimentos matemáticos.

UNIDADES DE REGISTRO

Para a última questão foram selecionadas nove unidades de registro, identificadas a partir das unidades de contexto. Em seguida, elas foram agrupadas em categorias para posteriormente serem analisadas.

1. Esclarecimentos da utilização, conceituação, generalização, surgimento, aperfeiçoamento e métodos de ensino
2. Desenvolvimento dos conceitos matemáticos
3. Conhecer a maneira ou modo que os antigos matemáticos entendiam ou conceituavam a proporção
4. Sabia a fundo as primeiras necessidades de sua utilização
5. Interagir com outras ciências do conhecimento científico
6. Trazendo alusões a outras aplicações que só as que habitualmente vêm nos livros didáticos
7. Conhecermos os conceitos e de onde veio tal conhecimento
8. Não
9. Acredito que qualquer que seja o estudo feito que envolva história, conceito influencia, contribui para qual crescimento de conhecimentos matemáticos

CATEGORIAS ESTABELECIDAS

Categorias	Unidades de Registro	Frequência
Opiniões favoráveis à História da Matemática	1.Esclarecimento da utilização, conceituação, generalização, surgimento, aperfeiçoamento e métodos de ensino. 2. Desenvolvimento dos conceitos matemáticos. 3. Conhecer a maneira ou modo que os antigos matemáticos entendiam ou conceituavam a proporção. 4. Sabia a fundo as primeiras necessidades de sua utilização. 5. Conhecermos os conceitos e de onde veio tal	6 66,67%

	conhecimento. 6. Trazendo alusões a outras aplicações que só as que habitualmente vêm nos livros didáticos.	
Opiniões desfavoráveis à História da Matemática	1. Não	1 11,11%
Respostas evasivas	1. Interagir com outras ciências do conhecimento científico 2. Acredito que qualquer que seja o estudo feito que envolva história, conceito influencia, contribui para a qual crescimento de conhecimentos matemáticos	2 22,22%

A organização dos dados em categorias permitiu revelar que 66,67% das respostas apresentam opinião favorável a História da Matemática para a compreensão do conceito de proporcionalidade. Essas opiniões que revelam as funções da História da Matemática refletem àquelas que Miguel (1993) defende com propriedade: função de desmistificação e função de formalização de conceitos.

Nas opiniões expostas pelos professores verificamos indícios destas funções nas seguintes expressões dos próprios respondentes:

- *Maior esclarecimento da utilização, da conceituação, da generalização, do surgimento, aperfeiçoamento métodos de ensino.* (Função de formalização de conceitos)

- *Conhecer a maneira ou modo que os antigos matemáticos entendiam ou conceituavam a proporção.* (Função de desmistificação)

Para Miguel (1993), quando, pela História da Matemática, o conhecimento formal pode ser encarado como um caminho a ser traçado para se chegar a um determinado conceito e não como algo pronto e acabado, esta opinião assume a função de formalização de conceitos. Por outro lado, quando, pela História da Matemática, pode-se ter a visão de uma matemática construída ao longo do tempo, permeada de dificuldades, erros e acertos por parte daqueles que mergulharam na busca desse conhecimento, esta assume a função de desmistificação. Estas funções estão presentes nas opiniões dos professores do presente estudo, como mostra as expressões acima destacadas abaixo.

Dentre as respostas dadas ao questionário, encontramos uma, correspondendo a 11,11%, das respostas desfavoráveis a História da Matemática para a compreensão do conceito de proporcionalidade.

Por outro lado, a organização dos dados em categorias permitiu revelar que 22,22%, das respostas correspondem a respostas evasivas, ou seja, não estão de acordo com a pergunta proposta.

Podemos observar, na análise das respostas do instrumento questionário, os primeiros indícios acerca dos significados atribuídos ao conceito de proporcionalidade, pelos sujeitos neste estudo.

Percebemos, na maioria das respostas, que os sujeitos relacionam o conceito de proporcionalidade ao estudo da regra de três; um número considerável de sujeitos apresenta uma visão adequada da relação existente entre o conceito de proporcionalidade e outros conceitos matemáticos, além de perceber a ligação direta existente entre a proporcionalidade e outras áreas do conhecimento. Porém, vale ressaltar que os resultados obtidos com este instrumento apontaram algumas deficiências com relação ao conceito de proporcionalidade, tais deficiências nos parecem derivadas de uma compreensão conceitual ainda inadequada acerca da proporcionalidade.

A literatura disponível sobre o assunto, bem como a nossa própria experiência como educadores matemáticos, vêm mostrando que o trabalho desenvolvido nas salas de aula de nosso país, no que se refere ao conceito de proporcionalidade, está voltado para um tratamento meramente mecânico e isolado de outros contextos, conforme mostram os resultados deste questionário. Neste sentido, Schliemann e Carraher (1997) chamam a atenção para constatação de que a escola apenas utiliza a regra de três para o estudo da proporcionalidade, baseando-se nas propriedades de razões equivalentes. Esse é um problema que demanda atenção tanto na formação inicial quanto continuada de professores de matemática.

3.3 Para as atividades

Apresentamos agora o processo de aplicação e resolução das atividades, bem como os resultados desta etapa da presente pesquisa. Ressaltamos que os dados aqui apresentados representam apenas uma parte do que foi coletado, ou seja, descreveremos aquilo que julgamos pertinente ao objeto de investigação. Embora os dados coletados por meio da filmagem sejam muito densos, optamos por destacar somente alguns extratos das falas dos sujeitos; pois julgamos ser suficiente para a presente investigação. Assim sendo, descrevemos trechos das falas dos sujeitos, os quais foram nomeados pelas letras A, B,..., I.

A primeira atividade apresentada aos sujeitos diz respeito ao conhecimento matemático babilônico. Inicialmente buscamos investigar quais as informações que os sujeitos apresentavam com relação ao sistema de numeração utilizado por estes povos, no período compreendido entre 3000 a.C e 2000 a.C., período este que, segundo Eves (2004), os babilônios desenvolveram um sistema sexagesimal que utilizava o princípio posicional. Dessa forma, inicialmente propomos as seguintes questões, conforme o slide 4 (pág. 122) da atividade 1:

i) O sistema de numeração utilizado por estes povos é considerado bastante avançado, já que se refere a 2000 a.C. Você conhece tal sistema?

> (Prof. A) *Só em parte. Totalmente não. Era na base sexagesimal...*
>
> (Prof. C) *Eu também já ouvi falar parcialmente, pois o livro didático traz algumas coisas...*

ii) Ainda com relação ao sistema de numeração por eles utilizado você sabe informar qual era a base utilizada? Este era um sistema posicional?

> (Prof. D)*Segundo Marcos, "né", repetindo, a base que eles utilizavam era sessenta, "né*".
>
> (Prof. C) *Eu não "to" lembrado.*
>
> (Prof. E) *Eu também não sei.*
>
> (Prof. F) *Eu não tenho conhecimento.*
>
> (Prof. A) *Acena negativamente balançando a cabeça*.
>
> (Prof. C) *Eu acho que é mas não tenho certeza.*

iii) Como já falamos anteriormente, os babilônios utilizavam símbolos para representar os números. Qual era a quantidade de símbolos por eles utilizados?

> (Prof. A) *Era semelhante aos dos egípcios. Era em forma de cunha, como um triângulo. Um mesmo símbolo com posições diferentes (procura explicar ao colega fazendo gestos com as mãos).*
>
> (Prof. E) *Iam mudando a posição do símbolo, mas eu não sei quantos são não.*
>
> (Prof. A) *É um mesmo símbolo com posições diferentes*.

iv) Como representavam os números 8, 14, 39, 72?

Para a questão da representação dos números no sistema de numeração babilônico, não obtivemos nenhuma resposta por parte dos sujeitos.

Diante do cenário de incertezas e dúvidas, apresentamos aos sujeitos uma sequência de slides que continham possíveis explicações para estas questões. Após esta apresentação, deu-se início um momento de discussão mais geral sobre os aspectos questionados nas atividades.

A partir da apresentação do slide 5 (p. 123) da atividade 1, os professores começaram a expressar como seriam representados os números do sistema decimal através do sistema cuneiforme. Foram apresentando respostas para os números que apareciam no slide, transpondo esses argumentos para o registro de outros números, demonstrando compreensão adequada acerca da representação cuneiforme:

> (Prof. G) *Até 59 é assim. E depois de 59? Seria [sic] seis cunhas de 10?*

> (Prof. A) *Acredito que não, pois se o sistema é posicional deve ter um símbolo que represente 60.*
>
> (Prof. E) *Como no nosso sistema que 10 unidades passa [sic] a ser uma dezena.*
>
> (Prof. B) *Deve ter outro símbolo.*
>
> (Prof. C) *Mas só existem dois símbolos*.

Surgem várias dúvidas e sugestões sobre a representação dos números para além de 59. A ideia de representar 60 (prof. G) é contestada pelo seguinte comentário:

> (Prof. E) *Se o 60 fosse representado dessa forma necessitaria de muitas cunhas para representar um número maior.*

Observamos que os sujeitos, para chegarem à conclusão de que o sistema de numeração babilônico era posicional, tomam como referência o sistema de numeração decimal, fazendo analogias entre eles.

Quando expomos a maneira de representar o número 72, slide 8 (p. 125) da atividade 1, houve uma melhor compreensão acerca da representação de um número no sistema de numeração sexagesimal:

> (Prof. A) *Porque 60 passa a funcionar como unidade da próxima ordem.*

Segue-se a discussão acerca das representações para outros números maiores que 60, 120, etc. Coloca-se a questão da diferença entre os números maiores que 60 que são representados da mesma maneira que os menores que 60, a exemplo de 120 e 2. Neste ponto, acrescentam comentários sobre o zero, porém não aprofundaram a discussão sobre isso.

Após apresentação do slide 5, 6 e 7 e, posteriormente, do slide 8 (p. 123 a 125) da atividade 1, obtivemos comentários para a questão: Era um sistema posicional?

> (Prof. D)*"Eu agora acho que eles deveriam chegar a um ponto de precisar fazer isso 'né', de maneira que era gerar outro símbolo para se representar outra unidade que não suportava isso, vamos dizer assim, e assim sucessivamente... eu vi agora, mesmo que rápido, deu para observar"*.

Analisando a fala do sujeito, percebemos que ele compreendeu que os babilônios necessitaram criar um sistema que possibilitasse sua representação de maneira operacional. Para isso, foi necessária a criação de uma representação posicional, em que um determinado símbolo representasse várias quantidades.

Inicialmente, os sujeitos dão indícios de não saber se o sistema de numeração babilônico era ou não posicional. Contudo, após apresentação de alguns esclarecimentos sobre o assunto surgem comentários, como os mostrados no extrato anterior. Podemos inferir, a partir dessas falas, que eles deduziram ser o sistema babilônico um sistema posicional, tomando como base o sistema de numeração decimal.

A segunda parte da atividade constitui-se no foco principal da investigação, tendo em vista que é nesta parte que pretendemos conhecer mais especificamente quais os significados atribuídos pelos sujeitos envolvidos na pesquisa para o conceito de proporcionalidade.

Apresentada a tableta babilônica ANEXO 4 (p. 215) foram propostos os seguintes questionamentos, conforme slide 10 (p. 126) da atividade 1:

i) O que se pode observar nestas colunas?

> (Prof. E) *Uma sequência numérica*.
>
> (Prof. F) *Sequências.*
>
> (Prof. D) *Uma sequência.*

ii) Em relação à coluna 1, o que se pode observar? Há alguma regularidade nela?

> (Prof. E) *Estar [sic] aumentando 1 unidade.*
>
> (Prof. F) *Sequência de números de 1 a 14. Sim, há regularidade, onde cada linha representa um número na sequência dos números naturais de 1 a 14.*
>
> (Prof. D) *Há uma regularidade. Sequência.*
>
> (Prof. B) *Sim há regularidade.*

iii) Quanto à coluna 2, o que se pode observar? Há alguma regularidade nela?

(Prof. E) *Estar [sic] acrescida sempre 9 em relação ao número anterior*.

(Prof. D) *Há uma regularidade. Sequências.*
(Prof. B) *Sim há regularidade.*

(Prof. F) *Há uma sequência de números de 9 em 9. Sim há regularidade.*

iv) Há alguma relação entre os símbolos registrados nas colunas 1 e 2?

(Prof. E) *Multiplicando a 1ª coluna por 9 obtém-se a 2ª coluna*.

(Prof. D) *Sim. 1– 9; 2 – 18; 3 – 27; 4 – 36; 5 – 45 e assim por diante.*

(Prof. F) *Sim. Pois existe uma espécie de tabuada de 9. Aprofundando mais, existe uma proporcionalidade entre os números da 1ª coluna com os números da 2ª coluna.*

(Prof. C) *Há ideia de proporcionalidade, pois a coluna 2 é sempre múltipla da primeira.*

(Prof. A) *Existe uma relação de proporcionalidade que perdura entre as colunas, observe que* $\frac{1}{2}=\frac{9}{18}, \quad \frac{2}{3}=\frac{18}{27}$ *e assim por diante.*

(Prof. G) *Há uma relação de grandezas diretamente proporcionais.*

(Prof. H) *Em relação a tableta babilônica existe uma proporcionalidade diretamente proporcional, com uma razão de número 9 onde a segunda coluna cresce na mesma proporcionalidade da 1ª coluna.*

(Prof. I) *Há uma relação de grandezas diretamente proporcionais.*

(Prof. B) *A relação que existe nas colunas é proporção de razão 9.*

As respostas para estas questões foram feitas pelo registro escrito dos próprios sujeitos. Descrevemos estas respostas detalhadamente com o objetivo de explicitar de maneira o mais clara possível os significados que foram atribuídos ao objeto principal da investigação.

Observamos pelo que foi exposto anteriormente, que a princípio os sujeitos apresentam dúvidas e/ou falta de conhecimento sobre o sistema de numeração babilônico, porém essas mesmas dúvidas começaram a ser sanadas na medida em que fomos apresentando os slides, ao mesmo tempo em que trocavam ideias entre si.

Na última parte da atividade, constituída pelo foco principal de investigação, os sujeitos já se encontravam mais familiarizados com o sistema e não apresentaram mais dúvidas com relação à interpretação do sistema cuneiforme. Observamos, através de trechos das falas descritas anteriormente, que os sujeitos, à medida que analisavam a tableta, foram atribuindo significados coerentes ao conceito de proporcionalidade.

Inicialmente, os significados atribuídos à tableta de multiplicação dos babilônios referem-se apenas a sequências de números. Na medida em que fomos tornando as perguntas mais especificas, observamos que os sujeitos foram atribuindo significados mais próximos do conceito de proporcionalidade.

Partindo da interpretação de sequência de números, os sujeitos observaram que os números da segunda coluna aumentavam de 9 em 9 e que, multiplicando os números da primeira coluna por 9, obtinham-se os números da segunda coluna. Neste ponto, observamos que os sujeitos atribuíram à tableta o significado de uma tabuada de 9, o que significa dizer que o significado atribuído aqui se refere à multiplicação, aproximando-se ainda mais do conceito de proporcionalidade, tendo em vista que esta foi interpretada como uma relação multiplicativa.

Ainda com relação à atribuição de significados expressos pelos sujeitos à tableta de multiplicação dos babilônios, percebemos que todos eles direcionaram-se para o conceito de proporcionalidade, tendo em vista que as interpretações realizadas por estes sujeitos referem-se a conceitos como: *sequências de números, tabuada, multiplicação, razão, proporção, relação de grandezas diretamente proporcionais e proporcionalidade.* É de extrema importância esclarecer que os sujeitos participantes da pesquisa não conheciam a tableta de multiplicação dos babilônios, o que reforça nossos indícios da ocorrência de atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade.

O segundo momento foi constituído por aplicação e resolução das atividades acerca do conhecimento matemático egípcio. Inicialmente, propomos questões relativas ao sistema de numeração egípcio; em seguida, apresentamos uma equação de primeiro grau, acompanhada de sua resolução. O método de resolução adotado para esta equação é o *método da falsa posição*, que era utilizado pelos egípcios para resolver determinadas equações.

Para esta parte da análise, adotamos a mesma nomenclatura utilizada na atividade anterior, referindo-se aos mesmos sujeitos. Dessa forma, iniciamos apresentando a sequência de perguntas, slide 3 (p. 127) da atividade 2:

i) Os egípcios também desenvolveram um sistema de numeração. Você tem conhecimento deste sistema de numeração?

(Prof. A) *Não tenho certeza, parece que é terciária, base 3*.

ii) Quais símbolos eram utilizados para representar os números?

(Prof. A) *Um ponto e uma barrinha*.

iii) Ainda com relação ao sistema de numeração utilizado por eles, você sabe informar qual era base do sistema? Era um sistema posicional?

(Prof. A) *Acho que é base 3.*

Com relação ao sistema de numeração egípcio, os sujeitos declararam não possuir conhecimento suficiente para responder às questões que estavam sendo propostas. Dessa forma, optamos por apresentar os slides, que foram elaborados estrategicamente, quando da hipótese da falta de conhecimento dos sujeitos relacionada ao assunto. O conteúdo dos slides 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (p. 127 a 130) da atividade 2, apresentava possíveis explicações para as questões propostas aos sujeitos. Cabe ressaltar que a apresentação desses slides não invalidou o caráter investigativo da atividade, tendo em vista que o foco da investigação estava no processo de resolução da equação dos egípcios, baseada no método da *falsa posição*.

O procedimento posterior foi apresentar o enunciado de uma equação de primeiro grau e solicitar aos sujeitos que representasse tal enunciado, slide 10 (p. 130) da atividade 2, o valor desconhecido (aha), adicionado a $\frac{1}{7}$ do valor desconhecido (aha), é igual a 24. (EVES, 2004, p.73). As representações deste problema, elaboradas pelos professores, foram as seguintes:

(Prof. E) $x+\frac{1}{7}x=24$

(Prof. B) $x+\frac{x}{7}=24$

(Prof. I) $x+\frac{x}{7}=24$

(Prof. H) $aha+\frac{1}{7}aha=24$

(Prof. G) $x+\frac{x}{7}=24$

(Prof. A) $x+\frac{x}{7}=24$

(Prof. C) $aha+\frac{aha}{7}=24$

(Prof. F) *Não consegui fazer a representação, pois não conheço a representação utilizada por estes povos.*

(Prof. D) $x+\frac{1}{7}x=24$

Como podemos observar, a maioria dos sujeitos utilizou representações modernas para o registro escrito da equação, mesmo com algumas pequenas variações, percebemos que o significado aqui atribuído ao valor desconhecido foi o da letra *x*, enquanto apenas dois não utilizaram esse tipo de registro. O registro algébrico simbólico através de letras e especialmente pela letra *x* aqui aparece com bastante expressividade.

Em seguida, apresentamos a resolução da equação por meio de uma linguagem atual, conforme mostra o slide 11 (p. 131) da atividade 2. Além disso, apresentamos o seguinte questionamento por meio de um registro escrito: Observando a resolução da equação anterior, você poderia afirmar que 21 é realmente a solução da equação? Justifique sua resposta, ANEXO 5 (p. 216).

Na busca de encontrar a resposta para a pergunta anterior, os sujeitos procuraram obter a solução da equação. Percebemos que a maioria dos participantes resolveu a equação do modo mais tradicional, como mostrado aqui:

$$x + \frac{1}{7}x = 24 \rightarrow \frac{7x + x}{7} = 24 \rightarrow 8x = 24 \times 7 \rightarrow x = \frac{168}{8} \rightarrow x = 21$$

ou com pequenas variações, porém todas utilizando-se dessa mesma estrutura.

Entre esse processo de resolução encontramos um tipo diferenciado dos demais. Um sujeito utilizou outro tipo de estratégia para resolver a equação proposta e verificar se o número 21 era mesmo a resposta da equação. Descreveremos aqui o processo de resolução utilizado pelo sujeito tal qual aparece no seu registro escrito:

(Prof. E) $7 + \frac{7}{7} = 24 \rightarrow 7 + 1 = 24 \rightarrow 8 = 24$

8 é 3 x menor que 24. Multiplica 7 (número inicial) x 3 = 21.

$21 + \frac{21}{7} = 24 \rightarrow 21 + 3 = 24 \rightarrow 24 = 24$

O sujeito justifica sua resposta afirmando que os egípcios usavam o raciocínio proporcional para resolver equações. Entre as respostas encontramos esta estratégia para a resolução da equação, cujo processo de resolução se assemelha ao método da *falsa posição*:

(Prof. D) $x + \frac{1}{7}x = 24$

8 x 3 = 24

7 x 3 = 21

$\frac{8}{7} = \frac{24}{x} \rightarrow x = \frac{168}{8} \rightarrow x = 21$

Percebemos que o método de resolução utilizado pelo sujeito aproxima-se do que foi apresentado por nós, ou seja, o sujeito percebeu a proporção presente no método da falsa posição, quando assumiu o valor inicial 7. Este valor somado a 1/7 dele resulta em 8. Portanto, o valor procurado é 21, pois se deve multiplicar 7 pela razão entre 24 e 8 (o valor desejado e o encontrado no inicio), ou seja, 3. Notamos que o sujeito, para justificar sua resposta, utiliza uma igualdade de duas razões, o que configura-se numa proporção. Podemos supor, nesse caso, que a familiaridade do sujeito com a regra de três facilitou na compreensão da existência da proporção no método da *falsa posição*.

Com relação às atividades sobre os babilônios, podemos afirmar que o registro matemático implícito na tableta babilônica trata-se de uma tabuada de multiplicação por nove; por se tratar de um objeto matemático com base na multiplicação, logo podemos falar numa relação proporcional e esta relação apresenta características de uma proporção direta simples. Significados desta natureza foram atribuídos pelos sujeitos quando da resolução das atividades mediadas pela História da Matemática.

No que se refere às atividades sobre os egípcios, pudemos observar que alguns sujeitos atribuíram significado coerente ao conceito de proporcionalidade quando da resolução de uma equação por meio do método da *falsa posição.* Por outro lado, observamos também que nessa atividade alguns sujeitos apresentaram certa dificuldade em identificar a relação proporcional própria do método. Essa dificuldade foi observada principalmente no reconhecimento da aplicação do conceito de proporcionalidade na resolução da equação.

De uma maneira geral, há razões para supor que os professores, ao serem solicitados à resolução de atividades mediadas pela História da Matemática, apresentaram um conjunto de estratégias, semelhantes àqueles que eles utilizam na resolução de problemas de proporção. Este fato é perceptível na atribuição de significados dado à tableta de multiplicação dos babilônios, na qual verificamos que os sujeitos, ao apreenderem o significado dos símbolos do sistema babilônico, logo passaram a observar a existência de uma sequência de números, deduziram a existência da tabuada de multiplicação por nove e, por fim, verificaram a existência do conceito de proporcionalidade inerente à relação multiplicativa. Algo semelhante ocorreu quando buscaram a solução da equação pelo método da falsa posição adotado pelos egípcios.

3.4 Para a entrevista

No presente trabalho, as entrevistas tiveram como objetivo averiguar se houve alguma mudança (ou não) com relação à atribuição de significados pelos sujeitos acerca do conceito de proporcionalidade, bem como investigar se as atividades mediadas pela História da Matemática podem contribuir (ou não) para tal atribuição de significado.

Dessa forma, concluída a etapa de aplicação das atividades, demos início às entrevistas e assim foi possível analisar mais minuciosamente os resultados obtidos por este instrumento.

Como dissemos anteriormente, utilizamos o tipo de entrevista semi-estruturada, gravada em áudio, com seis perguntas abertas e um roteiro que serviu de base para entrevistar todos os sujeitos, no qual poderiam ser acrescidas mais algumas perguntas, caso julgássemos pertinente. O acréscimo de alguma pergunta no momento das entrevistas tem o objetivo de esclarecer, com mais detalhes, algumas respostas que, por ventura, não tenham ficado claras. Este instrumento possibilitou maior liberdade de expressão por parte dos respondentes, no momento em que eles discorriam sobre as perguntas que haviam sido feitas a eles.

Como mencionamos anteriormente, as entrevistas foram realizadas após a aplicação das atividades. É pertinente esclarecer que entrevistamos os sujeitos em dias e horários diferentes, de acordo com a disponibilidade de tempo de cada um deles.

Na análise das entrevistas, buscamos averiguar o conhecimento deles sobre a História da Matemática; especificamente no que se refere aos sistemas de numeração babilônica e egípcia; conhecer os significados que atribuem ao conceito de proporcionalidade, bem como conhecer as opiniões deles acerca da utilização de atividades mediadas pela História da Matemática para a compreensão de um conceito matemático; neste caso, o conceito de proporcionalidade. Convém esclarecer que os resultados das questões 1 e 6 do roteiro, ANEXO 3 (pág. 214) foram analisados separadamente, pois elas são similares às questões 20 e 24, respectivamente, do questionário. A análise de conteúdo foi utilizada para interpretar os dados das questões 1 e 6 da entrevista.

A partir da análise dos dados obtidos, buscamos inferir se houve modificação ou não nos significados atribuídos ao conceito de proporcionalidade presente nas atividades mediadas pela História da Matemática.

QUESTÃO 2 – Você já tinha conhecimento acerca do sistema de numeração babilônico e egípcio?

A partir do que foi mencionado pelos sujeitos quando da entrevista pudemos perceber que a maior parte deles não tinha conhecimento ou não lembrava desse tipo de sistema, como constatamos na própria fala dos sujeitos. Alguns deles atribuíram tal falta de conhecimento ao livro didático, já que estes nem sempre trazem elementos da História da Matemática. Para a questão mencionada acima, obtivemos as seguintes respostas:

> (Prof. A) *Pouco. Com relação ao que a gente adquiriu naquele dia abrangiu bem mais coisa, pois eu só tinha noções básicas.*
>
> (Prof. B) *Não. Para ser sincero não.*
>
> (Prof. C) *Já tinha conhecimento. Inclusive na sala de aula eu gosto muito de fazer aqueles exercícios.*
>
> (Prof. D) *Muito remotamente [...] os livros didáticos não trabalham, então no nosso dia a dia, a gente não se detém muito a isso.*
>
> (Prof. E) *Não. Não tinha conhecimento*
> .
> (Prof. F)*Não. Assim eu via em livros, mas nunca parei para estudar o assunto e nem ensinar o assunto para o aluno.*
>
> (Prof. G) *Sim. Sempre tive curiosidade em estudar coisas da matemática de antigamente, mas não conheço muito, pois nunca me aprofundei em leituras desse tipo.*

> (Prof. H) *Conhecimento sim, lembrar não* [...] *Não tava lembrado de detalhes que foram apresentados, é [...] que você apresentou nas atividades, não lembrava e alguns detalhes eu não sabia, nunca tinha visto*.
>
> (Prof. I) *Já, mais [sic] eu não recordava bem como era esse sistema não.*

À resposta do (Prof. C), acrescentamos uma pergunta, que não estava prevista no roteiro da entrevista, de modo que ele pudesse explicar melhor sua colocação: **de que tipo de exercícios você fala?**

> *Exercícios que trazem elementos sobre a História da Matemática, mas que tenham relação com o conteúdo que eu esteja trabalhando.*

À resposta do (Prof. H), acrescentamos a seguinte pergunta: **o que você nunca tinha visto?**

> *A forma como era estruturado o sistema de numeração daquelas cunhas, eu até já tinha visto aqueles símbolos em algum livro, mas eu não sabia o que significava.*

QUESTÃO 3 – em que medida a atividade realizada contribuiu para o conhecimento destes sistemas?

Quando questionados sobre a contribuição dessas atividades para o conhecimento dos sistemas, os sujeitos afirmaram que foi de grande valia. Embora não conhecessem ou não lembrassem das estruturas dos sistemas, por meio das atividades tiveram a oportunidade de conhecer e/ou lembrar, como podemos observar nos extratos da fala dos próprios sujeitos:

> (Prof. A) *Contribuiu bastante porque ampliou aquele nível básico que a gente tinha e acrescentou vários outros fatores, né! Assim, a gente passou a dar importância maior de se trabalhar isso. Trabalhar isso tem sido um pouco esquecido nos livros didáticos.*
>
> (Prof. B) *Ah! Isso aí contribuiu muito, né, porque se a gente for pensar numa coisa que eu não conhecia; conhecia só de ouvir falar, não levava, não dava tanta relevância nas aulas para passar para os alunos [...] a gente aprendeu, se aprofundou mais.*
>
> (Prof. C) *Eu achei que fundamenta melhor os sistemas de numeração, porque até então a gente vê nos livros didáticos e é*

> *muita coisa solta e aquela atividade que fizemos deixou a gente mais inteirado com o assunto[...].*
> (Prof. D) *Aquela atividade trouxe algumas recordações, inclusive algumas novidades [...] Então, contribui sim, com curiosidades e, futuramente, a gente pode usar com os alunos, mostrando que antigamente os povos escreviam assim, porque boa parte dela nem os livros didáticos trazem mais, é muito difícil de encontrar.*
>
> (Prof. E) *Foi muito bom porque eu aprendi. Tomei conhecimento de uma coisa que eu desconhecia.*
>
> (Prof. F) *É [...] eu acredito que contribuiu assim para a gente ver como os antigos faziam, "né", como era a numeração deles, como eles faziam as operações. Acho que contribuiu também para mostrar outros tipos de sistemas de numeração.*
>
> (Prof. G) *Na verdade, aquela atividade contribuiu muito, pois eu [...] é [...] conheci sobre a estrutura dos sistemas, como eles eram estruturados e como funcionava e isso os livros didáticos não mostra. Ainda percebi que muito do que usamos hoje tem ligação direta com essa matemática do passado.*
>
> (Prof. H) *Permitiu saber detalhes da História, de onde vinha e até mesmo como a gente é [...] quando for dá uma aula sobre o conteúdo para a gente facilitar mais a apresentação da origem e de onde possivelmente se originou os números.*
>
> (Prof. I) *Apesar da gente estar usando símbolos, mesmo assim mostrou que os egípcios e os babilônios já usavam a proporcionalidade. A atividade contribuiu também para o conhecimento mais aprofundado desses sistemas.*

QUESTÃO 4 – Nas atividades desenvolvidas foi abordado o conceito de proporcionalidade. De que maneira ele foi abordado?

Há razões para supor que os questionamentos apresentados sobre os sistemas de numeração e, posteriormente, os esclarecimentos acerca da estrutura destes sistemas foram cruciais para o desenvolvimento das atividades propostas. Sem estes questionamentos e esclarecimentos não teria sido possível a realização da parte principal da atividade, constituída pela tableta babilônica de multiplicação e da resolução de uma equação egípcia pelo método da *falsa posição.*

Ao questionarmos os sujeitos sobre a maneira como o conceito de proporcionalidade foi abordado nas atividades, obtivemos as seguintes respostas, as quais apresentaremos por meio de extratos da fala dos sujeitos:

> (Prof. A) *A gente percebe que houve a construção da numeração segundo uma proporção [...] dentro da construção do sistema sempre está inserido ali a idéia de proporcionalidade [...] a questão da falsa posição. Testava-se um valor e aquele valor chegava a uma resposta que não era a que se queria, mas fazia-se uma proporção daquilo para o valor que se quer, quantas vezes o valor que se quer é maior ou menor e, a partir daí, se conseguir a resposta que era desejada, fazendo a proporção de quanto é mais ou menos do que aquilo.*
>
> (Prof. B) *A gente comparou uma tabela com a outra e viu que os números iam até o nove, depois ia até o dezoito, ia numa seqüência de 1 para 9, nessa proporção [...] A gente só fez comparar [...] proporção de 1 para 9.*
>
> (Prof. C) *Um número na 1ª coluna que estava ligado diretamente ao número da 2ª coluna, diretamente proporcional; era aí que estava a proporcionalidade.*
>
> (Prof. D) *Era com relação ao [...] a forma como os antigos escreviam os números, que no caso era: tinha uma tabela que aumentava [...] como é que eu posso dizer*? Era multiplicado por 9 eu acho de 9 em 9, e assim por diante.
>
> (Prof. E) *Ele foi abordado aqui na forma de resolver equação, só que acho que eles usavam a proporcionalidade de maneira inconsciente, não sabia bem que era proporção. Era uma forma que eles conseguiam para resolver equação; usando proporção.*
>
> (Prof. F) *Eu lembro que tinha uma tabuada [...] e [...] quando ia aumentando os valores da primeira coluna de um em um, os valores da segunda coluna ia aumentando de 9 em 9. Com relação a atividade sobre os egípcios, eu não identifiquei como era exatamente.*
>
> (Prof. G)*Tabela onde os números da primeira coluna estavam relacionados com a segunda tabela como uma multiplicação [...]1 e 9, 2 e 18, 3 e 27, e assim por diante, então, posso tirar disso uma razão 9.*
>
> (Prof. H) *Através do sistema de numeração deles. Foi uma maneira prática de mostrar o conceito [...].*
>
> (Prof. I) *Nos babilônios tinha um crescimento entre os números.*

À resposta dada pelo (Prof. I), acrescentamos mais uma pergunta, de modo que este pudesse esclarecer melhor sua colocação: **você poderia me explicar melhor esse crescimento entre os números?**

> *É que naquela tabela lá da atividade os números iam crescendo sempre de 9 em 9, assim [...] 1 na primeira coluna e 9 na segunda, 2 na primeira e 18 na segunda, 3 na primeira e 27 na segunda, seguindo sempre na mesma razão. Daí, se eu for tirar a razão entre a segunda e primeira coluna, vou achar uma razão igual a 9. É isso.*

QUESTÃO 5 – Você utilizaria atividades deste tipo para ensinar proporcionalidade aos seus alunos? Por quê?

A pergunta cinco teve por objetivo averiguar se estes sujeitos utilizariam atividades deste tipo para ensinar o conceito de proporcionalidade aos seus alunos. Obtivemos respostas positivas para essa questão, justificando que atividades desse tipo, ou seja, mediadas pela História da Matemática, pode facilitar na apresentação dos conteúdos, despertar interesse e curiosidade por parte dos alunos, bem como revelar a matemática como produto de um longo processo. Podemos visualizar essas concepções por meio dos extratos da fala dos sujeitos:

> (Prof. A) *Sim. Aí vem justamente é [...] o enfoque sobre a questão de repensar os conteúdos que se trabalha. Porque somos muito ligados ao livro didático e acabamos não trabalhando certos assuntos.*
>
> (Prof. B) *Sim. Acredito que traz mais motivação para o aluno e consequentemente, mais chances para ele aprender. Também utilizo algumas atividades históricas que tem nos livros didáticos.*
>
> (Prof. C) *Ah, com certeza. Porque da forma que foi bom para a gente é [...] e foi esclarecedor para a gente e "puxou" a curiosidade, então, eu acho que da mesma forma a gente pode fazer em sala de aula e "puxar" ainda mais a atenção do aluno. A princípio parece simples, só símbolos, aí, quando a gente começa a ver a importância de conteúdo tão rico quanto esse, então é mais uma forma de conquistar o aluno. É uma coisa curiosa e interessante.*
>
> (Prof. D) *Dependendo da turma [...] Porque como achei curioso, então creio eu que os alunos também vão [...] instiga os alunos a comparar como antigamente eram feitas as coisas e agora [...] a história geralmente contribui para a gente refletir sobre nosso passado e futuro.*

> (Prof. E) *Sim. Até para eles entenderem onde surgiu a proporção. Até* para *entender o desenvolvimento, até onde ele chegou no momento de hoje.*
>
> (Prof. F) *Sim. Poderia utilizar estas e outras também. Porque serviria para os alunos verem como aqueles povos tinham a ideia de proporcionalidade.*
>
> (Prof. G) *Sim. Porque o conteúdo de proporcionalidade sempre é visto como muito difícil e os livros didáticos contribui muito para isso, porque geralmente apresentam esse conteúdo de forma muito seca e com tarefas difícieis, [...], então utilizaria porque achei uma forma simples de introduzir esse assunto com meus alunos.*
>
> (Prof. H) *Sim. Facilita muito para mostrar, transmitir a origem dos sistemas de numeração. Porque facilitaria tanto a aprendizagem como nosso trabalho na hora de transmitir. Além de tornar mais prazeroso para nós e para os alunos, é uma maior facilidade para transmitir.*
>
> (Prof. I) *Sim. Porque no momento que estamos trabalhando esses tópicos, estamos trabalhando o contexto histórico da matemática. A atividade permite mostrar a construção dos sistemas de numeração.*

A análise das respostas à entrevista mostra que houve facilidade na interpretação da tableta babilônica de multiplicação e, consequentemente, houve atribuição de significados desta ao conceito de proporcionalidade. Ao identificarem o registro matemático contido na tableta como sendo uma "tabuada" de multiplicação por nove, logo começaram a relacioná-la com proporção, fazendo a relação dos números da primeira com a segunda coluna, verificando a proporcionalidade existente. O mesmo não aconteceu com o processo de resolução de uma equação egípcia pelo método da *falsa posição*, cuja maioria não atribuiu ao mecanismo de resolução à proporção. Na tentativa de explicar a proporção existente neste método de resolução, a maioria dos sujeitos acabava afirmando não ter conseguindo identificar o conceito de proporcionalidade. Alguns sujeitos identificaram a presença da proporcionalidade no método, através da proporção existente entre o valor suposto inicialmente e o valor desejado.

Apresentamos agora, com mais detalhes, a análise da primeira e da última questão da entrevista. A razão pela qual analisamos estas duas questões, por um método distinto das demais, justifica-se por elas terem sido abordadas por meio de perguntas similares no questionário e, assim, pudemos estabelecer uma comparação de respostas antes e depois da aplicação das atividades.

O método utilizado para a análise dos dados fornecidos pelas questões 1 e 6 da entrevista é o da *Análise de Conteúdo*, cujos fundamentos teóricos e justificativa de escolha encontram-se no item 3.4.2 deste trabalho, além das definições de unidades de contexto, unidades de registro e categorias. As categorias estabelecidas aqui são as mesmas que foram utilizadas para as duas questões similares do questionário.

QUESTÃO 1 – Qual o significado de proporcionalidade para você?

UNIDADES DE CONTEXTO

UC1 - *É uma igualdade entre razões que, através dela, você descobre o quanto uma grandeza está se relacionando com a outra em matéria de tamanho, etc.*

UC2 - *Proporcionalidade [...] é [...] se a gente for comparar com [...] acho que é uma pequena parte que a gente vai pegar como, com relação a outra, como por exemplo, [...] é aquela história, que a gente usou [...] posso usar a história da abelha? Uma abelha come mais que um elefante, né, isso. É aquela história da proporção, do tamanho, ta certo? Com relação a abelha come mais, mas dependendo da proporção do tamanho dela com relação ao tamanho do elefante.*

UC3 - *Para mim proporcionalidade é tudo que tá ligado a proporção.*

UC4 - *É [...] para mim o significado de proporcionalidade é uma relação que existe entre as variações de duas grandezas, ou [...] é de duas grandezas; se uma varia numa determinada razã, a outra, para proporcionar a primeira, tem que variar na mesma razão. Então, segundo* *o caso: se uma for aumentar o dobro, a outra tem que ser o dobro ou, se uma diminuir pela metade, a outra do mesmo jeito, pela metade. Então, para mim, é mais ou menos isso.*

UC5 - *Proporcionalidade [...] é uma igualdade entre duas razões. O que mais que eu posso dizer? Eu acho que é isso, uma igualdade entre duas razões.*

UC6 - *É [...] eu entendo assim a proporcionalidade quando uma grandeza é [...] dobra de valor, a outra grandeza cai para a metade, por exemplo [...] é [...] por exemplo, se a velocidade de um carro era de 10km/h e aumentar para 20km/h, o tempo de chegada, né, por exemplo, quando o carro tava em 10km/h o tempo era de 5 horas [...] 6 horas e dobrou de 10km/h para 20km/h, então o tempo vai "cair" de 6 horas para 3 horas. É o que eu entendo.*

UC7 - *Proporcionalidade é um conceito da matemática que relaciona grandezas e variáveis. Através dela podemos resolver vários tipos de problemas da matemática, além de problemas de outras áreas do conhecimento. É [...] na matemática existem vários conceitos que estão relacionados à proporcionalidade.*

UC8 - *O sentido, matematicamente falando? Proporcionalidade quando a gente vai explicar para o aluno, normalmente a gente trabalha com uma comparação, uma coisa que está relacionada a outra. É onde entra o significado de proporção.*

UC9 - *O significado é que toda proporção é [...] alguma coisa que pode ser comparada com outra; um exemplo bem prático é quando a gente vai fazer um suco em que iremos colocar açúcar na proporção que fique agradável ao paladar.*

UNIDADES DE REGISTRO

Para esta questão foram selecionadas quinze unidades de registro identificadas nas unidades de contexto, as quais foram agrupadas para posterior análise.

1. *É uma igualdade entre razões.*
2. *Grandeza está se relacionando com a outra em matéria de tamanho.*
3. *É aquela história da proporção, do tamanho ta certo?*

4. <u>*Tudo que tá ligado a proporção.*</u>

5. <u>*É uma relação que existe entre as variações de duas grandezas.*</u>

6. <u>*Se uma varia numa determinada razão, a outra, para proporcionar a primeira, tem que variar na mesma razão.*</u>

7. <u>*Se uma for aumentar o dobro, a outra tem que ser o dobro ou, se uma diminuir pela metade, a outra, do mesmo jeito, pela metade.*</u>

8. <u>*É uma igualdade entre duas razões.*</u>

9. <u>*Uma grandeza é [...] dobra de valor, a outra grandeza cai para a metade.*</u>

10. <u>*Quando o carro tava em 10km/h o tempo era de 5 horas [...] 6 horas e dobrou de 10km/h para 20km/h, então, o tempo vai "cair" de 6 horas para 3 horas.*</u>

11. <u>*Relaciona grandezas e variáveis.*</u>

12. <u>*Uma comparação.*</u>

13. <u>*Uma coisa que está relacionada a outra.*</u>

14. <u>*Coisa que pode ser comparada com outra.*</u>

15. <u>*Acho que é uma pequena parte que a gente vai pegar como, com relação a outra.*</u>

CATEGORIAS ESTABELECIDAS

Categoria	Unidades de registro	Frequência
Significado pertinente ao conceito de proporcionalidade.	1. <u>*É uma igualdade entre razões.*</u> 2.<u>*É uma relação que existe entre as variações de duas grandezas.*</u> 3. <u>*Se uma varia numa determinada razão a outra, para proporcionar a primeira tem que variar na mesma razão.*</u> 4. <u>*Se uma for aumentar o dobro, a outra tem que ser o dobro ou se uma diminuir pela metade, a outra do mesmo jeito, pela metade.*</u> 5. É <u>*uma igualdade entre duas razões.*</u> 6. <u>*Uma grandeza é [...] dobra de valor a outra grandeza cai para a metade.*</u> 7. <u>*Quando o carro tava em 10km/h o tempo*</u>	11 73,33%

	era de 5 horas [...] 6 horas e dobrou de 10km/h para 20km/h, então, o tempo vai "cair" de 6 horas para 3 horas. 8. *Relaciona grandezas e variáveis.* 9. *Uma abelha come mais que um elefante, né, isso. É aquela história da proporção, do tamanho, ta certo?* 10. *É uma igualdade entre duas razões.* 11. *Relaciona grandezas e variáveis.*	
Significado não pertinente ao conceito de proporcionalidade	-	0 0%
Respostas evasivas	1. *Uma coisa que está relacionada a outra.* 2. *Coisa que pode ser comparada com outra.* 3. *Acho que é uma pequena parte que a gente vai pegar como, com relação a outra.* 4. *Uma comparação.*	4 26,67%

A análise mostra que 73,33 % das unidades de registro correspondem a significados pertinentes ao conceito de proporcionalidade; 0% de significados não pertinentes ao conceito e 26,67% correspondendo a respostas evasivas. Para esta mesma questão, quando feita no instrumento questionário (questão 20), obtivemos os seguintes valores: 58,33% de significados pertinentes ao conceito de proporcionalidade; 25% indicando significados não pertinentes ao conceito e 16,67% correspondendo a respostas evasivas.

Esses valores, quando comparados, apontam um relevante acréscimo da porcentagem de respostas correspondendo significados pertinentes ao conceito. Consideramos importante o fato de que as respostas expressas pela própria fala dos sujeitos apontaram 0% de incompreensões acerca do conceito de proporcionalidade. Isso sugere que a maioria dos participantes conseguiu atribuir significado ao conceito de proporcionalidade por meio de uma representação distinta das usuais.

A literatura disponível sobre o assunto SPINILLO, (1997, 2002); SCHLIEMANN e CARRAHER, (1997) mostra que geralmente o estudo da proporcionalidade nas escolas é explorado unicamente pela aplicação do algoritmo da regra de três. Em nossa opinião, essa constatação nos dá indícios da compreensão dos professores acerca da proporcionalidade, bem como o significado que atribuem a este conceito.

Neste estudo, identificamos com a análise das respostas do questionário ideias semelhantes às citadas pelos autores, onde a maioria das respostas relacionava à proporcionalidade a regra de três. Em contrapartida, verificamos, com a análise das entrevistas, indícios de mudanças em torno das definições dadas pelos sujeitos no que se refere ao conceito de proporcionalidade, ou seja, deixa-se de relacionar o conceito unicamente à regra de três e passa-se a falar da proporcionalidade como uma relação multiplicativa, a qual não precisa, necessariamente, ser evidenciada pela igualdade entre duas razões. Essas ideias podem ser visualizadas através dos extratos das falas dos sujeitos entrevistados, com relação à primeira pergunta da entrevista:

> *É uma relação que existe entre as variações de duas grandezas.* (Prof. D)
>
> *Se uma varia numa determinada razão a outra, para proporcionar a primeira, tem que variar na mesma razão.* (Prof. D)
>
> *Se uma for aumentar o dobro, a outra tem que ser o dobro ou, se uma diminuir pela metade, a outra, do mesmo jeito, pela metade.* (Prof. D)
>
> *Quando o carro tava em 10km/h, o tempo era de 5 horas [...] 6 horas e dobrou de 10km/h para 20km/h, então, o tempo vai "cair" de 6 horas para 3 horas.* (Prof. F)
>
> *Relaciona grandezas e variáveis.* (Prof. G)
>
> *Uma abelha come mais que um elefante, né, isso. É aquela história da proporção, do tamanho ta certo?* (Prof. B)

Embora algumas respostas não apresentem a definição matemática formal do conceito de proporcionalidade, tal qual aparece nos livros, elas demonstram coerência neste sentido, levando-nos a perceber o estabelecimento correto e adequado da relação entre proporcionalidade e relações multiplicativas.

QUESTÃO 6 – Em sua opinião, a História da Matemática pode contribuir para a compreensão de um conceito matemático? De que maneira?

UNIDADES DE CONTEXTO

UC1 - *Sim. Pode contribuir estimulando mais, porque determinadas coisas que a gente tem de decorar, aceitar, a gente vê que tem uma origem, teve um fator histórico, teve todo um processo histórico, toda uma construção para se chegar ali. Acho que se o aluno passasse a perceber que aquilo não é uma coisa pronta, ele também não ia ter que pensar que tinha que decorar e pronto! Ele ia perceber que é uma construção, então ele pode ser capaz de refazer essa construção, né, pode ir refazer essa construção, talvez isso facilite o aprendizado do que ele só decorar, do que já pegar pronto e decorar. A História da Matemática mostra que tudo ou praticamente tudo teve basicamente uma construção, não foi assim do dia para a noite que surgiu aquilo ou tipo decore e pronto, como muitas vezes o livro didático estimula que a gente faça, já tudo pronto sem mostrar a construção que teve para aquilo.*

UC2 - *Pode sim. Até porque essa história de proporção, né isso, da cunha, aquela parte do 1 para o 9, tá influenciando, ta ajudando a gente resolver aquelas outras questões. Então, se a pessoa for pensar dessa maneira, influencia; é tanto que a equação a gente resolve por isso aí, usando aquela formula dá [...] não estou lembrado [...] o método que a gente usou para resolver a equação, ou seja, que os meninos usaram, eu usei fração.*

UC3 - *Eu acho que sim. Posso falar até por mim, assim, eu tive professores que antes de iniciar o conteúdo ele contava a história, de onde vinha aquilo; então quando a gente ia ver o conceito em si do assunto ficava muito mais claro, então, da mesma forma, a gente pode fazer na sala de aula para que a matemática deixe de ser um pouco seca como é passada, de forma muito mecânica, e começar a criar outros aspectos em torno do assunto para poder ficar mais gostoso de aprender, entendeu?*

UC4 - *Eu acredito que sim. No caso da razão e proporção, a gente vê como os antigos faziam; é o sistema de numeração deles, então, eles seguiam uma certa razão, né, onde os números iam de 10 em 10 ou então de 3 em 3 e assim por diante. É [...] deixa eu ver aqui [...] Eu acho que em relação à História da Matemática tem um que eu utilizo bastante, que é o jeito que os egípcios mediam as terras, né, em torno do rio, esta eu geralmente trago para as minhas aulas para poder iniciar o assunto de geometria e falar sobre o Teorema de Pitágoras, como eles faziam antigamente, é os cálculos de medida da hipotenusa no triângulo retângulo, para medir terrenos. Eu utilizo e acredito que a História da Matemática contribui.*

UC5 - *Sim. Porque eles conservam a origem da matemática, de onde começou até os dias atuais e como ela tá evoluindo, né, historicamente. A gente "pega" só aqueles conteúdos, fica só naqueles [...] já prontinhos, talvez eles não tenham nem noção de como [...] para eles compreenderem toda evolução, nesse sentido, a História da Matemática pode contribuir.*

UC6 - *Eu acredito que pode porque tal assunto surgiu porque lá atrás se originou um problema e aquele matemático foi pensando naquele problema e foi desenvolvendo um cálculo que resolvesse aquela situação, né. A História da Matemática pode ajudar a entender tal assunto que hoje a gente tem dificuldade.*

UC7 – *Sim, pode. Eu acredito que da maneira como foi abordada nessas atividades. Porque nelas estudamos a matemática feita na antiguidade e nela encontramos o conceito de proporcionalidade. Assim eu acho que [...] é [...] a História da Matemática pode ser usada na introdução de muitos conteúdos que trabalhamos em sala para que o aluno compreenda o conceito estudado, né! Podemos colocar atividades desse tipo para o aluno explorar e ele mesmo chegar a conclusão de qual conceito está ali, assim ele vai através da História aprender um conceito, [...] como aconteceu com a gente, né!*

UC8 - *Sem dúvida. É [...] a própria maneira como foi apresentada para a gente a história, dentro da história já vinha questionamentos, é [...] maneira de apresentar problemas e isso* *facilitou, porque não ficou uma coisa solta, mas uma matemática apresentada com objetividade.*

UC9 - *Sim. Contribui bastante porque mediante a História da Matemática, ela pode dá subsídios, aliás, suporte ao professor para ele poder modelar mais suas aulas ministradas em sala*.

UNIDADES DE REGISTRO

Para esta questão, foram selecionadas vinte e cinco unidades de registro identificadas nas unidades de contexto, as quais foram agrupadas em categorias para posterior análise.

1. *Pode contribuir estimulando mais.*

2. *A gente ver que tem uma origem.*

3. *Teve um fator histórico.*

4. *Teve todo um processo histórico.*

5. *Toda uma construção para se chegar ali.*

6. *Se o aluno passasse a perceber que aquilo não é uma coisa pronta, ele também não ia ter que pensar que tinha que decorar e pronto! Ele ia perceber que é uma construção.*

7. *A História da Matemática mostra que tudo ou praticamente tudo teve basicamente uma construção.*

8. *Não foi assim do dia para a noite que surgiu aquilo.*

9. *Até porque essa história de proporção, né isso, da cunha, aquela parte do 1 para o 9, tá influenciando, tá ajudando a gente resolver aquelas outras questões. Então, se a pessoa for pensar dessa maneira, influencia.*

10. *Eu tive professores que antes de iniciar o conteúdo ele contava a história.*

11. *De onde vinha aquilo.*

12. *Matemática deixe de ser um pouco seca como é passada.*

13. *No caso da razão e proporção a gente ver como os antigos faziam.*

14. _A História da Matemática tem um que eu utilizo bastante, que é o jeito que os egípcios mediam as terras, né, em torno do rio, esta eu geralmente trago para as minhas aulas para poder iniciar o assunto de geometria e falar sobre o Teorema de Pitágoras, como eles faziam antigamente._

15._Conservam a origem da matemática, de onde começou até os dias atuais._

16. _Para eles compreenderem toda evolução._

17. _A História da Matemática pode ajudar a entender tal assunto que hoje a gente tem dificuldade_.

18. _Porque nelas estudamos a matemática feita na antiguidade e nela encontramos o conceito de proporcionalidade._

19. _A História da Matemática pode ser usada na introdução de muitos conteúdos que trabalhamos em sala para que o aluno compreenda o conceito estudado._

20. _Podemos colocar atividades desse tipo para o aluno explorar e ele mesmo chegar a conclusão de qual conceito está ali._

21. _Através da História aprender um conceito._

22. _A própria maneira como foi apresentada para a gente a história._

23. _Dentro da história já vinha questionamentos._

24. _Uma matemática apresentada com objetividade._

25. _A História da Matemática, ela pode dá subsídios, aliás, suporte ao professor para ele poder modelar mais suas aula._

CATEGORIAS ESTABELECIDAS

Categorias	Unidades de Registro	Frequência
Opiniões favoráveis à História da Matemática	1. _Pode contribuir estimulando mais._ 2. _A gente ver que tem uma origem._ 3. _Teve um fator histórico._ 4. _Teve todo um processo histórico._ 5. _Toda uma construção para se chegar ali._	

	6. *Se o aluno passasse a perceber que aquilo não é uma coisa pronta, ele também não ia Ter que pensar que tinha que decorar e pronto! Ele ia perceber que é uma construção.* 7. *A História da Matemática mostra que tudo ou praticamente tudo teve basicamente uma construção.* 8. *Eu tive professores que antes de iniciar o conteúdo ele contava a história.* 9. *Matemática deixe de ser um pouco seca como é passada.* 10. *No caso da razão e proporção a gente ver como os antigos faziam.* 11. *A História da Matemática tem um que eu utilizo bastante, que é o jeito que os egípcios mediam as terras, né, em torno do rio, esta eu geralmente trago para as minhas aulas para poder iniciar o assunto de geometria e falar sobre o Teorema de Pitágoras, como eles faziam antigamente.* 12. *Conservam a origem da matemática, de onde começou até os dias atuais.* 13. *A História da Matemática pode ajudar a entender tal assunto que hoje a gente tem dificuldade*. 14. *Porque nelas estudamos a matemática feita na antiguidade e nela encontramos o conceito de proporcionalidade.* 15. *A História da Matemática pode ser usada na introdução de muitos conteúdos que trabalhamos em sala para que o aluno compreenda o conceito estudado.* 16. *Podemos colocar atividades desse tipo para o aluno explorar e ele mesmo chegar a conclusão de qual conceito está ali.* 17. *A própria maneira como foi apresentada para a gente a história.* 18. *Dentro da história já vinha questionamentos.*	18 72%
Opiniões desfavoráveis	-	0 0%
Respostas evasivas	1. *Não foi assim do dia para a noite que surgiu aquilo.* 2. *Até porque essa história de proporção, né isso, da cunha, aquela parte do 1 para o 9, tá influenciando, ta ajudando a gente resolver aquelas outras questões. Então se a pessoa for pensar dessa maneira, influencia.* 3. *De onde vinha aquilo.* 4. *Para eles compreenderem toda evolução.* 5. *Através da História aprender um conceito.* 6. *Uma matemática apresentada com objetividade.*	7 28%

	7. *A História da Matemática, ela pode dá subsídios, aliás, suporte ao professor para ele poder modelar mais suas aula.*	

A análise da pergunta 6 da entrevista evidencia que 72% das unidades de registro correspondem a opiniões favoráveis à História da Matemática para a compreensão do conceito de proporcionalidade; 0% de opiniões desfavoráveis e 28% correspondendo a respostas evasivas. Para uma questão similar, quando feita no instrumento questionário (questão 24), obtivemos os seguintes resultados: 66,67% de opiniões favoráveis à História da Matemática; 11,11% de opiniões desfavoráveis à História da Matemática e 22,22% correspondendo a respostas evasivas.

Esses valores, quando comparados, apontam um relevante acréscimo da porcentagem de respostas correspondendo a opiniões favoráveis à História da Matemática para a compreensão do conceito de proporcionalidade. Consideramos importante o fato de que as respostas expressas pela própria fala dos participantes apontaram 0% de opiniões desfavoráveis. Diante deste dado, há razões para supor que é possível atribuir significado a um conceito matemático, nesse caso, o conceito de proporcionalidade, por meio da História da Matemática.

A literatura consultada sobre as contribuições da História da Matemática na formação de professores de matemática STAMATO, (2003); RADFORD, (2009); FAUVEL & MAANEN, (2000); MIGUEL, (1993); MENDES, (2001) indicam possibilidades pedagógicas no processo de ensino e aprendizagem da matemática, além de apontar razões para o uso da História da Matemática na formação de professores. Por exemplo, Miguel (1993) esclarece que os professores de matemática ao utilizar a História da Matemática em suas aulas, são estimulados por uma série de opiniões vinculadas à função que eles esperam que seja cumprida pela História da Matemática no processo pedagógico.

Para os participantes do presente estudo a maneira que a História da Matemática pode contribuir para a compreensão de um conceito é tornar evidente que tudo na Matemática teve uma origem; passou por todo um processo histórico, tendo sido construída pela humanidade e não como um conhecimento pronto e acabado. Além disso, foi colocado que através de atividades em que se tenha oportunidade de explorar a História da Matemática é possível que a aprendizagem de um determinado conceito matemático ocorra.

Quanto ao significado atribuído ao conceito de proporcionalidade, os participantes expressaram pontos de vista, porém todos se aproximam de definições coerentes, ou seja, verificamos que os participantes relacionaram a proporcionalidade como variação entre grandezas, apresentando exemplos de proporcionalidade direta e/ou indireta entre grandezas, bem como exemplos de proporção relacionada ao pensamento funcional e sua relação com o cotidiano.

4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Inicialmente, constatamos, através da análise dos dados do questionário, que os sujeitos envolvidos na pesquisa, quando questionados sobre o significado de proporcionalidade, apresentaram respostas corretas do ponto de vista conceitual, levando-se em consideração que essas respostas estavam relacionadas à proporção, igualdade entre duas razões, razão de semelhança e equivalência entre duas razões.

Esses resultados mostraram, inicialmente, que os sujeitos envolvidos na pesquisa relacionam corretamente o conceito de proporcionalidade ao algoritmo da regra de três. Contudo, segundo Post, Behr e Lesh (2001), compreender o raciocínio proporcional apenas pelas soluções de problemas de valor desconhecido é muito limitado, tendo em vista que este tipo de problema envolve soluções algorítmicas e muitas vezes desprovida de significado.

O conceito de proporcionalidade é muito mais abrangente que a aplicação do algoritmo da regra de três para a resolução de problemas matemáticos. A aquisição e posterior desenvolvimento cognitivo deste conceito podem se dar por meio de estratégias diversificadas, ou seja, deve-se priorizar o raciocínio proporcional de maneira que o indivíduo possa estabelecer relações entre as grandezas envolvidas no problema. Além do mais, o conceito de proporcionalidade está presente em muitas situações do cotidiano das pessoas, relacionado a outros conceitos matemáticos, bem como em outras áreas do conhecimento. Entendemos que para que ocorra uma compreensão adequada deste conceito, o estudo da proporcionalidade deve explorar os diversos contextos em que este conceito está inserido.

Algumas das respostas emitidas a certas questões do questionário, as quais buscavam tornar evidente o significado atribuído ao conceito de proporcionalidade, foram categorizadas como significados não pertinentes acerca desse conceito. Podemos supor que esses significados não pertinentes sejam derivados de erro conceitual, tendo em vista que alguns participantes não definiram o conceito de uma maneira adequada.

Outros resultados obtidos por meio de respostas às questões do questionário também indicaram que a maioria dos sujeitos envolvidos na presente pesquisa apresenta opiniões favoráveis à História da Matemática, tendo em vista que os mesmos acreditam que, através da História da Matemática, eles podem tornar claro aos seus alunos o surgimento, a utilização, o aperfeiçoamento e a generalização dos conceitos matemáticos estudados, além de auxiliar na escolha de métodos de ensino.

As opiniões dos participantes relativas à História da Matemática refletem àquelas funções que, para Miguel (1993), a História da Matemática pode desempenhar no processo de ensino-aprendizagem. No geral, os participantes deste estudo não apontaram a História da Matemática unicamente como fonte de motivação para a aprendizagem da Matemática. Conforme a análise dos dados revelou, as opiniões dos participantes estariam ligadas às funções de desmistificação, formalização de conceitos e de significação.

As opiniões expostas pela análise dos dados do questionário confirmam as razões apontadas por Radford (2009) para o estudo da História da Matemática na formação de professores; segundo esse autor, "A História da Matemática ajuda o professor a compreender melhor o conteúdo que deve ensinar". (RADFORD, 2009, slides)

Este pressuposto teórico é revelado nas respostas dos participantes quando expressam que: "*por meio da História da Matemática pode haver maior esclarecimento da utilização, da conceituação, da generalização, do surgimento e aperfeiçoamento dos métodos de ensino*". "A História da Matemática ajuda o professor a entender o desenvolvimento das idéias matemáticas".(RADFORD, 2009, slides)

Entendemos que este pressuposto revela-se nas respostas dos sujeitos quando expressam que: "*por meio da História da Matemática pode-se conhecer a maneira ou modo que os antigos matemáticos entendiam ou conceituavam a proporção,* ou ainda, *para conhecermos os conceitos e de onde veio tal conhecimento*".

“A História da Matemática pode dar idéias ao professor sobre a maneira como apresentar o conteúdo”. (RADFORD, 2009, slides)

Sobre este pressuposto teórico da maneira como apresentar o conteúdo através da História da Matemática, podemos apresentar a opinião de um dos participantes: “*trazendo alusões a outras aplicações e não só somente aquelas que vêm nos livros didáticos”*.

Opiniões desta natureza refletem também as funções básicas do uso da História da Matemática na formação de professores apontadas por Fauvel e Maanen (2000). Para estes autores uma das funções é classificada como função direta da História da Matemática: *“levar os professores a conhecer a matemática do passado”*.

Neste estudo encontramos respostas que exprimem este pressuposto teórico, como por exemplo: “*por meio da História da Matemática pode haver maior esclarecimento da utilização, conceituação, generalização, surgimento, aperfeiçoamento dos métodos de ensino”*, ou ainda, *“conhecer a maneira ou modo que os antigos matemáticos entendiam ou conceituavam a proporção”*, e também, “*conhecermos os conceitos e de onde veio tal conhecimento”*.

Os participantes envolvidos na pesquisa não expressaram nenhuma resposta que pudéssemos categorizar como desfavorável à História da Matemática, enquanto outros responderam à questão de forma evasiva, cujo sentido não emitia uma opinião que pudesse ser categorizada como favorável ou não.

Os resultados da aplicação das atividades mediadas pela História da Matemática, inicialmente indicaram que os sujeitos envolvidos na presente pesquisa possuíam conhecimento parcial sobre os sistemas de numeração babilônicos e egípcios, tendo em vista que para a maioria das perguntas acerca desses sistemas, os sujeitos apresentavam muitas dúvidas e/ou insegurança para respondê-las.

Este fato revela a pouca evidência da História da Matemática na formação desses sujeitos e reforça o que vários estudiosos dessa área vêm apontando nos últimos anos. Estudos realizados demonstram que apesar da História da Matemática poder contribuir para a construção do conhecimento matemático no processo de ensino-aprendizagem, ainda são poucas as evidências de efetividade do seu uso nas salas de aula.

Apesar da constatação dessas dificuldades com relação à História da Matemática percebemos que as atividades mediadas pela História despertaram interesse e curiosidade por parte dos participantes. A partir das atividades adotadas nesta pesquisa foi possível a apreensão do conhecimento matemático, mais especificamente, do conceito de proporcionalidade implícito na matemática dos egípcios e babilônios.

A partir da apresentação da tableta babilônica que contém registros matemáticos, os sujeitos foram interpretando esses registros de maneira coerente. Inicialmente, eles identificaram na tableta a existência de uma sequência numérica com regularidade entre esses números.

Nesta primeira parte os significados atribuídos à tableta foram de sequência numérica e números naturais, observando a regularidade existente entre os números. Observaram também que a construção da tableta dava-se pela multiplicação dos números da primeira coluna por nove para a obtenção da segunda coluna.

A partir do momento que relacionaram a construção da sequência numérica com a multiplicação, os participantes utilizaram-se do raciocínio proporcional para concluírem a existência do conceito de proporcionalidade implícita na tableta de multiplicação babilônica.

Percebemos que o significado de proporcionalidade atribuído por alguns participantes deu-se da seguinte maneira: a cada aumento de uma unidade, na primeira coluna, corresponde um aumento de nove unidades na segunda coluna, estabelecendo-se que as variáveis mantêm uma relação multiplicativa e, consequentemente, de proporcionalidade. De acordo com

Schliemann & Carraher (1997), este tipo de estratégia é denominada funcional, tendo em vista que foram consideradas as relações entre as duas variáveis, consistindo em encontrar a razão que liga essas duas variáveis.

Supondo que os participantes deste estudo possuíam o conceito de proporcionalidade em sua estrutura cognitiva, era de se esperar que, para a resolução do problema, eles tivessem buscado a definição desse conceito em suas estruturas cognitivas, para esse fim. O pensamento em torno desse conceito, a priori, pode ter ocorrido de maneira isolada, ou seja, o sujeito pode ter pensado no conceito isolado de qualquer contexto.

À medida que os participantes depararam-se com os problemas propostos pelas atividades, eles foram levados a pensar no conceito de proporcionalidade em um determinado contexto, utilizando-se desse conceito para alcançar a solução do problema. Neste ponto, os sujeitos procederam de maneira que a utilização do conceito funcionasse como uma aplicação dele na resolução do problema. Neste sentido, estudos como os de Brito (2001), Moreira e Masini (2009) esclarecem que conceitos e proposições já existentes na estrutura cognitiva do sujeito podem ser estendidos ou reorganizados a fim de satisfazer os particulares requisitos envolvidos na busca de solução de um problema.

O significado de um determinado conceito, quando existe na estrutura cognitiva de um sujeito, é produto de uma aprendizagem significativa, além de ser rigorosamente articulado a outros conceitos.

Como o raciocínio multiplicativo é um tipo de pensamento proporcional, os significados atribuídos ao conceito de proporcionalidade presente nas atividades partiram do conceito de multiplicação existente na estrutura cognitiva dos sujeitos envolvidos no estudo e, a partir daí, estabeleceram relação com o conceito de proporcionalidade.

Para Moreira e Masini (2009, p. 108), o “significado é um conteúdo consciente diferenciado e rigorosamente articulado, que se desenvolve como um produto de aprendizagem simbólica significativa [...] após este ter sido relacionado à estrutura cognitiva de maneira substantiva e não-arbitraria [...]".

Neste estudo, o conteúdo consciente desenvolvido por meio de situações de aprendizagem significativa, existente na estrutura cognitiva dos sujeitos, é a estrutura multiplicativa (ou estudo do conceito de multiplicação), e foi a partir desse conteúdo que os sujeitos atribuíram significado ao conceito de proporcionalidade.

Em situações de aprendizagem é essencial que o professor tenha a clareza que os sujeitos aprendentes só poderão aprender de maneira significativa, caso eles mobilizem os conhecimentos prévios existentes em suas estruturas cognitivas para que estes sejam relacionados à nova informação e, daí, produzir o significado correto a um determinado conceito. Conforme Brito (2001), é fundamental que o professor compreenda o conceito de significado e aprendizagem, pois assim ele terá melhores condições de promover o ensino de maneira efetiva.

Com relação à atividade que envolvia o sistema de numeração egípcio, os sujeitos apresentaram mais dificuldades para responder às questões propostas, bem como para atribuir significado ao conceito de proporcionalidade no método de resolução de equação linear dos egípcios. Nesse caso, a maioria dos sujeitos não fez relação do conceito de proporcionalidade com equações, o que pareceu ser um problema de outra natureza e não gerado por falta de conhecimentos prévios sobre esses tais assuntos.

Podemos supor que tais dificuldades são provenientes da carência da História da Matemática da formação dos sujeitos envolvidos neste estudo, tendo em vista que 88,89% deles, ao responderem um das questões do questionário, afirmaram não terem tido a oportunidade de estudar o conceito de proporcionalidade via História da Matemática.

Outro aspecto que mereceu destaque no estudo foram os encaminhamentos dados pelos pressupostos teóricos da História da Matemática. Por meio dos estudos sobre a importância da História da Matemática na formação inicial e continuada de professores de Matemática, foi possível estabelecer aproximações entre o estudo realizado com os professores de Matemática e os pressupostos teóricos traçados no referencial teórico.

A carência da História da Matemática é um problema real nos cursos de formação de professores, que geralmente não introduzem a História da Matemática na formação dos professores. Acabam, muitas vezes, difundindo o conhecimento matemático de maneira pronta e acabada, sem levar em conta os aspectos históricos envolvidos nesse processo:

> Os cursos regulares de matemática são mistificadores num aspecto fundamental. Eles apresentam uma exposição polida do conteúdo matemático logicamente organizado, dando a impressão de que os matemáticos passam de teorema a teorema quase naturalmente, de que eles podem superar qualquer dificuldade, de que os conteúdos estão completamente prontos e acabados. [...] As exposições polidas dos cursos não conseguem mostrar os obstáculos do processo criativo, as frustrações e o longo e árduo caminho que os matemáticos tiveram que trilhar para atingir uma estrutura considerável. (KLINE, 1972 apud MIGUEL, 1993, p.49)

Radford (2009) nos diz que uma das razões de estudar a História da Matemática é ajudar o professor a entender o desenvolvimento das ideias matemáticas, além disso, experiências significativas com a História da Matemática podem gerar ideias ao professor sobre o modo como apresentar determinados conteúdos.

Diante do cenário de dúvidas com relação ao sistema de numeração egípcio, apresentamos uma sequência de slides que continham possíveis esclarecimentos para as questões propostas, para, a partir dali, podermos dar continuidade ao processo de resolução das atividades.

Desse modo, apresentamos um enunciado de uma equação egípcia e solicitamos aos sujeitos que representassem tal enunciado. Pela análise dos dados, observamos que a maioria dos sujeitos usou de simbolismo algébrico atual conforme os livros didáticos apresentam. Além da representação do enunciado, a maioria dos participantes resolveu a equação pelo modo convencional, tal qual aparece nos livros didáticos, como podemos observar:

$$x+\frac{1}{7}x=24 \rightarrow \frac{7x+x}{7}=24 \rightarrow 8x=24\times 7 \rightarrow x=\frac{168}{8} \rightarrow x=21$$

Apresentamos também esta mesma equação resolvida pelo método da falsa posição e perguntamos se 21 era a realmente solução da equação, solicitando a justificativa da resposta. O nosso objetivo principal com esse questionamento foi perceber se os sujeitos identificariam o conceito de proporcionalidade no método da falsa posição.

A maioria dos sujeitos não conseguiu identificar o conceito de proporcionalidade no método, com exceção de dois deles que apresentaram significados corretos e coerentes para a resolução da equação, bem como justificou adequadamente.

Com relação aos dois participantes que atribuíram significado correto ao conceito de proporcionalidade presente no método de resolução da equação egípcia, podemos supor que eles apresentaram uma compreensão relacional, tendo em vista terem demonstrado saber como o método funciona e por que. Segundo Skemp (1978 apud DOMINGOS, 2003, p. 14), “a compreensão relacional assenta no principio de saber, ao mesmo tempo, o como e o porquê, permitindo não só perceber o método que funciona e possibilita a sua adaptação para a resolução de novos problemas”.

O modelo de resolução de equações egípcias, apesar de basear-se no algoritmo do valor desconhecido, mostra-se eficiente no processo de resolução, além de privilegiar o raciocínio proporcional. Os resultados mostrados anteriormente indicaram a utilização deste tipo de raciocínio na resolução e justificativa do resultado da equação. Esse processo de resolução para equações lineares proporcionado pela História da Matemática revela uma estratégia útil para a resolução de equações de primeiro grau, diferente das utilizadas pelos livros didáticos, além de favorecer o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

A análise dos dados referentes à entrevista confirmou a carência de certos assuntos relativos à História da Matemática, tendo em vista que os sujeitos afirmaram não conhecer ou não lembrar das características dos sistemas de numeração babilônico e egípcio. Por outro lado, a análise também indicou que as atividades realizadas contribuíram para o conhecimento e/ou aprofundamento da estrutura destes sistemas, conforme mostramos no capítulo anterior.

Para os sujeitos envolvidos na pesquisa, as atividades contribuíram também porque tiveram a oportunidade de abordar a História da Matemática relacionada com um conteúdo que é explorado em sala de aula. Além do mais, as atividades desenvolvidas juntamente com os participantes contribuíram para a ampliação do conhecimento básico que tinham e, a partir de então, considerar o tratamento da História da Matemática nas suas aulas um subsídio importante.

Segundo os respondentes, o tipo de atividade realizada contribuiu para o conhecimento da matemática do passado, pois mostrou a maneira pela qual ela era produzida na antiguidade; para Miguel (1993), esse tipo de concepção revela a existência da função que a História da Matemática pode exercer no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Nesse sentido, podemos incluir a opinião dos sujeitos nas funções da História da Matemática com função de *desmistificação*, *formalização de conceitos* e de *significação.*

Com relação ao conceito de proporcionalidade, observamos, pela análise dos dados da entrevista, que os sujeitos apresentaram sensível modificação na atribuição de significado, quando comparados aos resultados revelados pela análise dos dados do questionário.

Esta constatação deve-se ao fato que os sujeitos ao, se referirem inicialmente ao conceito de proporcionalidade, relacionaram este à igualdade entre duas razões, comparações de medidas, razão de semelhança, etc., desconsiderando outras definições e/ou estratégias que podem envolver a proporcionalidade. Ao propormos a mesma pergunta na entrevista, observamos que as percepções acerca do conceito em estudo ampliaram-se um pouco mais, tendo em vista que os sujeitos passaram a considerar proporcionalidade como relações existentes entre as grandezas, definindo proporcionalidade pelo modelo descrito por Lima et al. (2005).

Nas definições observadas nas respostas dadas na entrevista, pareceu-nos que os sujeitos, ao falar de proporcionalidade, procuraram analisar se as grandezas consideradas são ou não grandezas proporcionais.

Esta consideração é extremamente importante para a compreensão do conceito de proporcionalidade, pois, na maioria das vezes, os sujeitos, quando submetidos à resolução de problemas de proporcionalidade, não realizam uma análise das grandezas em questão. Esta análise é bem mais importante para a compreensão do conceito que a simples aplicação da regra padrão e sua posterior resposta para o problema. Este tipo de análise nos problemas de proporcionalidade tem implicações diretas na aprendizagem deste conceito.

Por meio da análise realizada pelos dados do questionário, obtivemos 58,33% de respostas consideradas adequadas acerca do conceito de proporcionalidade. Este número aumentou para 73,33%, quando a mesma pergunta foi feita na entrevista, após a aplicação das atividades mediadas pela História da Matemática.

Com relação às opiniões favoráveis à História da Matemática para a compreensão de conceitos matemáticos, também observamos um acréscimo considerável no número de respostas. No instrumento questionário tínhamos 66,67% de opiniões favoráveis, enquanto na entrevista tivemos 72% de respostas favoráveis. O número de respostas desfavoráveis caiu de 11,11% para 0%.

Esses resultados indicam que a utilização da História da Matemática, em atividades intencionalmente elaboradas, pode contribuir para a compreensão de conceitos matemáticos, bem como mostrar a Matemática como conhecimento construído ao longo do tempo, desmistificando a ideia que os conceitos matemáticos estiveram sempre prontos e acabados.

Por meio de atividades mediadas pela História da Matemática foi possível identificar os significados que os professores de Matemática, envolvidos neste estudo, atribuíram ao conceito de proporcionalidade. Tal constatação encontra respaldo no fato de que os sujeitos não conheciam a tableta de multiplicação dos babilônios, o que reforça nossos indícios da ocorrência da atribuição de significado a este conceito.

Os significados atribuídos ao conceito de proporcionalidade foram identificados a partir do momento que os sujeitos relacionaram o registro contido na tableta como uma tabuada de multiplicação por nove. A partir daí, o registro deixou de ser apenas uma representação de símbolos antigos, configurando-se numa sequência de números cuja relação matemática existente entre eles é de proporcionalidade.

O estabelecimento da relação entre o conteúdo da tableta babilônica e o conceito de proporcionalidade ocorreu por meio do significado de multiplicação que lhe foi atribuído. Este significado de multiplicação serviu como uma espécie de "ponte" para que os sujeitos, através dos seus conhecimentos prévios, atribuíssem ao conteúdo da tableta babilônica o conceito de proporcionalidade. Conforme Brito (2001), a aprendizagem escolar depende da aquisição de conceitos e dos significados dos conceitos, já que na escola a maior parte das atividades está baseada na aquisição dos conceitos, que em outros momentos serão utilizados na aprendizagem de princípios e na resolução de problemas.

O conhecimento do conceito de significado por parte do professor pode ser um subsídio importante para o desenvolvimento de atividades orientadas para a aprendizagem dos alunos, pois, por meio dele, torna-se possível à articulação de um conceito já existente na estrutura cognitiva do sujeito com um conceito novo.

A análise dos dados indicou que as atividades mediadas pela História da Matemática possibilitaram a atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade, à medida que os participantes foram estabelecendo relações com conceitos já existentes em suas estruturas cognitivas. Em consequência, percebemos que houve certa modificação na maneira que estes participantes atribuíam significado ao conceito de proporcionalidade.

Tal constatação pôde ser observada através da comparação do percentual obtido das respostas do questionário com as da entrevista. Esta constatação mostrou um considerável aumento de atribuição de significado pertinente ao conceito de proporcionalidade. Porém esta modificação não ficou restrita somente ao campo quantitativo, pois as respostas dadas à entrevista mostraram que os participantes passaram a expressar a proporcionalidade como uma relação multiplicativa entre duas ou mais grandezas, e não apenas como um conteúdo para a aplicação do algoritmo da regra de três; este fato implica num “salto” qualitativo para o ensino desse conceito por parte do grupo estudado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Finalizando este estudo, esperamos que as considerações que foram feitas possam contribuir no sentido de que novas pesquisas possam ser realizadas no que se refere à relação existente entre a História da Matemática e a compreensão de conceitos matemáticos. Nesse sentido, acreditamos que novas pesquisas que possam aprofundar esse tema tragam significativas contribuições à Educação Matemática, além de nos fazer repensar sobre certos assuntos que torne relevante e possível a inserção da História da Matemática na formação inicial e continuada de professores de matemática.

As atividades mediadas pela História da Matemática revelaram que os nove professores envolvidos na pesquisa demonstraram não ter conhecimento de certos aspectos históricos, a exemplo dos sistemas de numeração babilônico e egípcio, uma vez que a maioria deles afirmou não conhecer sobre estas estruturas. Além disso, esses mesmos professores afirmaram, no questionário, não terem tido a oportunidade de estudar o conceito de proporcionalidade por meio da História da Matemática.

Além disso, existem indícios que a formação inicial de professores de Matemática ainda se encontra um tanto quanto precária com relação à História da Matemática. Estes indícios são apontados por estudos realizados na área, a exemplo de FAUVEL & MAANEN (2000), RADFORD (2009), MIGUEL (1993), MENDES (2001), MIGUEL e MIORIM (2008), STAMATO (2003), entre outros, mesmo este conteúdo, tendo sido, embora recentemente incorporado à grade curricular dos cursos de formação inicial de professores de Matemática. Esta lacuna relativa à História da Matemática que acaba por refletir na prática pedagógica dos professores. Neste sentido, Stamato (2003) esclarece que a maioria das instituições começa a oferecer em seus currículos a disciplina História da Matemática, em 1998, após o primeiro Exame Nacional dos Cursos de Matemática.

Um dos elementos contributivos para a carência da História da Matemática na prática pedagógica dos professores, ao que tudo indica, é a forma como ela aparece nos livros didáticos de matemática, geralmente desarticulada do conteúdo. Este tipo de abordagem parece não fomentar a História da Matemática como uma estratégia útil no processo de aprendizagem da matemática, tendo em vista que o livro didático de matemática é uma referência muito forte para os professores.

Em consonância com estes indícios mencionados anteriormente, encontram-se os resultados apresentados neste trabalho, que mesmo tendo alcançado os seus objetivos, indicaram também a carência desse grupo em certos assuntos relativos à História da Matemática. Sendo assim, torna-se possível a possibilidade de estudos futuros que contribuam com o desenvolvimento deste tema, bem como ampliar os estudos concernentes à História da Matemática e, assim, contribuir para uma Educação Matemática de qualidade.

Apesar da dificuldade de se trabalhar com a História da Matemática, os professores julgam de maneira positiva o valor didático dela, acreditando ser possível a compreensão de conceitos matemáticos a partir do seu uso. Nesse sentido, destacamos o bom desempenho obtido na resolução de parte das atividades que foram aplicadas a estes professores.

O conceito de proporcionalidade na matemática é de fundamental importância, tendo em vista a sua conexão com outros conceitos da mesma área; sua relação com outros campos do conhecimento, além de ser um conceito presente em ações do cotidiano de muitas pessoas. Por outro lado, esse conceito parece ser ao que tudo indica, menos considerado no processo de ensino da matemática e, quando trabalhado, não costuma ser abordado de maneira compreensível.

Nesse sentido, buscamos uma abordagem da proporcionalidade que privilegiasse a História da Matemática como pano de fundo para a compreensão desse conceito. Por meio dessa abordagem, foi possível responder a nossa questão de estudo: *A utilização de atividades* *envolvendo o conceito de proporcionalidade e mediadas pela História da Matemática interfere na atribuição de significado desse conceito por parte de professores de matemática?*

As atividades mediadas pela História da Matemática proporcionaram a atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade em um contexto distinto do comumente utilizado. Neste estudo, o contexto no qual este conceito estava inserido foi o contexto histórico. Nele, o conceito de proporcionalidade apareceu de maneira distinta daquela em que, geralmente, utiliza-se o algoritmo da regra de três para a resolução de problemas.

Do ponto de vista da Psicologia Cognitiva, os significados passam por transformações de acordo com o contexto no qual ele está inserido. Neste sentido, Van Engen (1953 apud MOREIRA e MASINI, 2009, p. 78) esclarece que o significado possui uma dimensão semântica e esta se refere às várias significações que um conceito assume em diferentes contextos. Neste estudo, inicialmente, o significado dado ao conceito de proporcionalidade esteve relacionado ao algoritmo da regra de três (contexto matemático puro), conforme resultados apresentados pelo questionário.

Os resultados das entrevistas apresentaram um cenário diferenciado do inicial; neles, os significados dados ao conceito estavam relacionados às estruturas multiplicativas, o que, para os estudiosos da Psicologia Cognitiva, SCHLIEMANN e CARRAHER (1997), SPINILLO (2002), POST, BEHR e LESH (2001), trata-se de um avanço no estudo da proporcionalidade, tendo em vista que compreender o raciocínio proporcional apenas pelas soluções de problemas de valor desconhecido é muito limitado.

Percebemos que, mediados pelas atividades, os participantes passaram a expressar esse conceito por meio de relações entre grandezas, considerando a influência da variação das grandezas, o que implica na consideração de grandezas proporcionais e não proporcionais. Constatamos que os participantes deste estudo indicaram alguma modificação quanto à atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade, porém julgamos pertinente a realização de estudos futuros que abordem este tema. Neste estudo categorizamos algumas respostas como sendo evasivas, o que sugere uma retomada de outros pontos de vista, para que estudos dessa natureza possam contribuir no sentido de ampliar e melhorar a qualidade da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, A. **Episódios da História antiga da Matemática.** Tradução: João Bosco Pitombeira de Carvalho. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

ABDOUNUR, O. J. **Mudanças estruturais nos fundamentos matemáticos da música a partir do século XVII: considerações sobre consonância, série harmônica e temperamento**. Revista Brasileira de História da Matemática. Especial n. 1, p. 369-380, 2007.

AGUIAR, M.C.A. **Formação de conceitos de fração e de proporcionalidade e as operações concretas e formais.** Recife, 1980. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE, Universidade Federal de Pernambuco, 1980.

ARTEAGA, A. C., **Aspectos Estéticos de la Divina Proporción**. Madrid, 2001. 421 p. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Filosofia – PPGF, Universidade Complutense de Madrid, 2001.

ATALAY, B. **A matemática e a Mona Lisa: a confluência da arte com a ciência**. São Paulo: Mercuryo, 2007.

ÁVILA, G. **Razões, proporções e regra de três.** Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 8, p. 1-8, 1986a.

______. Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de matemática. Revista do Professor de Matemática. Editora: Sociedade Brasileira de Matemática. Nº 7, p. 5-10, 1985.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 2004.

BARONI, R. L. S.; TEIXEIRA, M. V.; NOBRE, S. **A Investigação Científica em História da Matemática e suas Relações com o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.** In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

BARONI, R. L.S., NOBRE, S. **A pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática**. In: BICUDO, Maria A. V., (org). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Unesp, p. 129-136, 1999.

BERNAL, M. Mª. **Estudo do objeto proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado**. Florianópolis, 2004. 170 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica – PPGECT, Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.

BIANCHI, Mª. I. Z. **Uma reflexão sobre a presença da História da Matemática nos livros didáticos**. In: SPHEM-1º Seminário Paulista de História e Educação Matemática, 2005, São Paulo. 1º Seminário Paulista de História e Educação Matemática sphem – Anais. São Paulo: IME- USP, 2005. v. 1, p. 150-160.

EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: editora Unesp, 2009.

BICUDO, I. **As figuras nos Elementos de Euclides**. Revista Brasileira de História da Matemática. Especial n. 1, p. 211-213, 2007.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Notas de campo**. In: BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. Investigação qualitativa em educação: uma introdução às teorias e aos métodos. Porto: Porto Editora, p. 150-175, 1994.

BOTTA, L. S. **Números Racionais e Raciocínio Proporcional: considerações sobre ensino-aprendizagem.** Rio Claro, 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM. Universidade Estadual Paulista, 1997.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRITO, M. R. F. **Aprendizagem significativa e a formação de conceitos na escola.** In: Psicologia da Educação Matemática: Teorias e Pesquisa. M. R. F. Brito (Org.) Florianópolis: Insular, 2001.

BROLEZZI, A. C. **A arte de contar: uma introdução ao estudo do valor didático da História da Matemática.** São Paulo, 1991. 75 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1991.

CAPRA, F. **A Ciênica de Leonardo da Vinci: um mergulho profundo na mente do grande gênio da Renascença**. Tradução Bruno Costa. São Paulo: Cultrix, 2008.

COSTA, C. R. **Panorama de um estudo sobre razões e proporções em três livros didáticos**. São Paulo, 2005. 146 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGEM, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

CRUZ, J. A. G. **Las Matemáticas en Luca Pacioli**. In: Seminário Orotava da História de La Ciência, 2001. Acesso em: 10 Jul 2008. Disponível em <http://webpages.ull.es/users/jagcruz/articulos/pacioli.pdf>.

DAMEROW, P. **Socrates in Babylon.** Revista Brasileira de História da Matemática. Especial n. 1, p. 477-491, 2007.

D'AMBROSIO, B. S. **Reflexões sobre a História da Matemática na Formação de Professores**. Revista Brasileira de História da Matemática. Especial n. 1, p. 399-406, 2007.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.

______. **Da Realidade à Ação: reflexões sobre Educação e Matemática.** São Paulo: summus. Campinas: Ed. Da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

DOMINGOS, A. M. D. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados: a matemática do início do superior.** Lisboa, 2003. 387 p. Tese (Doutorado em Ciências de Educação) – Programa de Pós-Graduação em Ciências de Educação – Universidade Nova de Lisboa, 2003.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

FARIA, P. C de. **Atitudes em Relação à Matemática de Professores e Futuros Professores**. Curitiba, 2006. 332 p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação - Universidade Federal do Paraná, 2006.

FAUVEL, J.; van MAANEN, J. (Eds.) **History in Mathematics Education: the ICMI study.** Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

FERREIRA, T. F. **A Disciplina História da Matemática: um estudo sobre as concepções do professor do Ensino Superior**. São Paulo, 2005. 147 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGEM, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

FOSSA, J. A. **Ensaios sobre Educação Matemática.** Belém: Editora da Universidade Estadual do Pará, 2001.

FURINGHETTI, F. **Mathematics Education and ICMI in the Proceedings of the Internacional Congresses.** Revista Brasileira de História da Matemática. Especial n. 1, p. 97-115, 2007.

GERDES, P. **Sobre a história da formação de matemáticos africanos: os primeiros doutorados e o contributo do Ubiratan D'Ambrosio em perspectiva.** Revista Brasileira de História da Matemática. Especial n. 1, p. 71-80, 2007.

GIL, A. C., **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 1996.

GONZALEZ, E. G. **Metacognicion e tareas intelectuamente exigentes**. Revista Zetetiké. Vol. 6, n. 9, p. 57-87, 1998.

HAGUETTE, T. M. F. **Metodologias qualitativas na sociologia**. 4 ed. Petropólis: vozes, 1995.

HEATH, T. **A History of Greek Mathematics**. Vol. 1. England: Thoemmes, 1993.

HUANCA, H. R. R. **A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação da matemática na e além da sala de aula**. Rio Claro, 2006. 253 p. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista, 2006.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Livro didático, Porcentagem, Proporcionalidade: uma crítica da crítica.** Revista Bolema, Rio Claro, Ano 18, nº 24, 2005. p. 1 a 30.

LIMA, E. L. et al. **Temas e Problemas Elementares.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

MAGALHÃES, V. P. de. **A resolução de problemas de proporção e sua transferência entre diferentes conteúdos.** Recife, 1990. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) – Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva – Universidade Federal de Pernambuco, 1990.

MENDES, I. A., FOSSA, J. A., VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática.** Porto Alegre: Sulina, 2006.

MENDES, I. A. **Matemática e Investigação em sala de aula: Tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

______. **O uso da história no ensino da matemática: reflexões teóricas e experiências**. Belém: EDUEPA - Editora da Universidade do Estado do Pará, 2001.

MIGUEL, A.; MIORIM, Mª. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios.** 1ª edição, Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre História e Educação Matemática**. Campinas, 1993. 274 p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE, Universidade Estadual de campinas, 1993.

MINAYO, M. C de S. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde**. 3 ed. São Paulo: Hutitec/Abrasco, 1994.

MOREIRA, M. A. e MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel.** São Paulo: Centauro, 2009.

MOREY, B.; MENDES, I. A. **A formação de professores de matemática a partir da História da Matemática.** In: SPHEM-1º Seminário Paulista de História e Educação Matemática, 2005, São Paulo. 1º Seminário Paulista de História e Educação Matemática sphem – Anais. São Paulo: IME- USP, 2005. v. 1, p. 144-149.

NOBRE, S. **Leitura Crítica da História: Reflexões sobre a História da Matemática.** Ciência & Educação, v. 10, n. 3, p. 531-543, 2004.

POST, T. R.; BEHR, M. J.; LESH, R. **A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra.** In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P.; (org.) As idéias da álgebra. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Saraiva, 2001. p. 89-103.

NUNES, T. **É hora de ensinar proporção**. Revista Nova Escola. Ano XVII, n 161. São Paulo, 2003.

ONUCHIC, L. de la R. **Ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (org) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Unesp, p. 199-218, 1999.

OLIVEIRA, I. A. F. G. de. **Um estudo sobre a proporcionalidade: a resolução de problemas no ensino fundamental.** Recife, 2000. 133 p. (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE, Universidade Federal do Pernambuco, 2000.

PEREIRA, A. C. C. **Demonstrações do Teorema de Thales: um enfoque histórico na antiguidade grega.** In: SPHEM-1º Seminário Paulista de História e Educação Matemática, 2005, São Paulo. 1º Seminário Paulista de História e Educação Matemática sphem – Anais. São Paulo: IME- USP, 2005. v. 1, p. 333-339

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Traduação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTES, M[a] G. de O. **Medidas e Proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho.** Campinas, 1996. 223 p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE, Universidade Estadual de Campinas, 1996.

RADFORD, L. **Tendências Internacionais em História da Matemática e Educação Matemática.** Natal: Luís Radford, 2009. 38 slides, cor azul.

RADFORD, L. & EMPEY, H. **Mathematics, Culture and Selves: The Formation of New Social Sensibilities in the Renaissance and Medieval Islam.** Revista Brasileira de História da Matemática. Especial n. 1, p. 231-254, 2007.

RICHARDSON, R. J. **Pesquisa social: métodos e técnicas**. São Paulo: Atlas, 1999.

SÁ, A. L. de. **Luca Pacioli, ícone na história da contabilidade**. Revista de Controle e Administração. Rio de Janeiro, ano I, n. 1, p. 53-67, 2005.

SAD, L. A. **Relações epistemológicas de elementos históricos do cálculo a partir da obra *Principios Mathematicos* de José Anastácio da Cunha**. Revista Brasileira de História da Matemática. Especial n. 1, p. 493-504, 2007.

SIGLER, L. **Fibonacci's Liber abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation**. Translated by Laurence Sigler. New York: Springer-Verlag, 2003.

SMITH, D. E. **History of Mathematics: Special topics of elementary mathematics**. Vol. II. New York: Dover Publications, 1958.

STAMATO, J. M. de A. **A Disciplina História da Matemática e a Formação de Professor de Matemática: Dados e Circunstâncias de sua Implantação na Universidade Estadual Paulista, campi de Rio Claro, São José do Rio Preto e Presidente Prudente.** Rio Claro, 2003. 197 p. (Dissertação de Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPEM, Universidade Estadual de Rio Claro, 2003.

STRUIK, D. J. **A Concise History of Mathematics**. Tradução: João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1989.

SPINILLO, A. G. **O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção**. Psicologia Reflexiva e Crítica. Porto Alegre, v. 15, n. 3, p. 475-487, 2002.

______. Proporções nas séries iniciais do primeiro grau. In: A. Schliemann; D. Carraher; A. Spinillo; L. Meira; J. Falcão; N. Acioly-Régnier (org.). Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, p. 40-61, 1997.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W. **Razões e proporções na vida diária e na escola.** Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, p. 13-37, 1997.

TRIVIÑOS, A. N.S., **Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais**. São Paulo: Atlas, 1995.

VALENTE, W. R. **No tempo em que Normalista precisavam saber estatística**. Revista Brasileira de História da Matemática. Especial n. 1, p. 357-368, 2007.

______. **História da Matemática na Licenciatura: uma contribuição para o debate.** Educação Matemática em Revista, São Paulo, Ed. Especial, n. 11A, p.88-94, 2002.

WUSSING, H. **Lecciones de História de lãs Matemáticas**. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1998.

ANEXOS

ANEXO 1

MODELO PARA O REGISTRO DAS NOTAS DE CAMPO

Título	
Data	
Horário	
Local da observação	
Registro descritivo	
Registro reflexivo	

ANEXO 2

QUESTIONÁRIO

As informações a seguir são solicitadas com o objetivo de permitir que conheçamos melhor o corpo docente de matemática e que fará parte deste estudo. Mesmo solicitando a identificação dos participantes, esclareci que as análises serão realizadas sem identificação. As informações contidas neste questionário serão analisadas de maneira geral. Solicitamos que as respostas sejam as mais precisas possíveis. Por favor, responda atentamente a cada uma das questões. Obrigado.

Data:___/___/___

INFORMAÇOES PESSOAIS

Nome: ____

Telefone: _________ Email: _____________________________________

1. **Sexo**: 1. ( ) Masculino 2. ( ) Feminino

2. **Idade**:

1. ( ) Até 20 anos
2. ( ) 21 – 30 anos
3. ( ) 31 – 40 anos
4. ( ) Mais de 40 anos

Escolaridade:

3. **O ensino fundamental foi feito em escola**: 1. ( ) Pública 2. ( ) Privada

4. **O ensino médio foi feito em escola**: 1. ( ) Pública 2. ( ) Privada

5. **O ensino médio foi**:

1. ( ) Curso de magistério (antigo curso normal)
2. ( ) Curso Técnico
3. ( ) Ensino Médio – regular
4. ( ) Supletivo

5. ( ) Outros. Especifique: ____

6. O curso superior foi feito (está sendo feito) em instituição:

1. ( ) Pública 2. ( ) Privada

7. Fez (ou está fazendo) curso superior no período: 1. ( ) Diurno 2. Noturno

Nome da instituição:____

Cidade: _____________________ **Ano da conclusão**: ________________

Observação: Caso tenha mais de um curso superior cite apenas um deles. Cite aquele que estiver mais relacionado ao exercício do magistério.

8. Tipo de curso no qual é graduado (ou está se graduando)

1. ( ) Licenciatura Plena em Matemática
2. ( ) Bacharelado em Matemática
3. ( ) Licenciatura em \Ciências, habilitação Matemática
4. ( ) Licenciatura em Ciências, habilitação ___________________________
5. ( ) Outro curso superior. Qual? ___________________________________

9. Qual a razão de ter escolhido esse curso superior? ________________________
____

10. Você trabalhava (trabalha) enquanto fazia (faz) o curso superior?

1. ( ) Sim 2. ( ) Não

INFORMAÇÕES PROFISSIONAIS

11. Atualmente você dá aulas de Matemática:

1. ( ) Na Educação Infantil
2. ( ) Do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental
3. ( ) Do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental
4. ( ) De 1ª a 3ª série do Ensino Médio
5. ( ) Curso Superior
6. ( ) Outro. Especifique: ____

12. Há quanto tempo você é professor de Matemática?

1. ( ) De 1 a 5 anos

2. (   ) De 6 a 10 anos

3. (   ) De 11 a 15 anos

4. (   ) Mais de quinze anos

Escola onde você leciona a maior quantidade de aulas de matemática:

Nome: ____

Cidade: ___________________________________ Estado: ___________________

Esta escola é: 1. (   ) Pública 2. (   ) Privada

Você mora na mesma cidade onde leciona? 1. (   ) Sim   2. (   ) Não

13. Há quanto tempo você leciona nesta escola?

1. (   ) De 1 a 5 anos

2. (   ) De 6 a 10 anos

3. (   ) De 11 a 15 anos

4. (   ) Mais de 15 anos

14. Você tem curso de especialização, mestrado ou doutorado?

1. (   ) Sim. 2. (   ) Não

Se a resposta for afirmativa, especifique:

Nome do curso: ____

Instituição: ____

Local: _________________________________ Ano de conclusão: ______________

15. Você utiliza os documentos oficiais como referência para ao ensino da matemática?

1. (   ) Sim 2. (   ) Não

Se sua resposta for afirmativa, cite quais: ____________________________________

____

16. Você utiliza livro didático para ensinar Matemática? 1. (   ) Sim 2. (   ) Não

17. Você conhece e utiliza outros recursos para o ensino da Matemática?

1. (   ) Sim   2. (   ) Não

Se sua resposta for afirmativa, cite quais: ____________________________________

____

18. Você prefere ensinar:

1. (   ) Aritmética 2.(   ) Álgebra 3. (   ) Geometria 4. Não tenho preferência

19. Você já estudou História da Matemática?

1. (   ) Sim   2. (   ) Não

Se sua resposta for afirmativa, cite em que circunstâncias: _______________________

____

INFORMAÇÕES CONCEITUAIS

20. Para você o que significa Proporcionalidade?__________________________________

____

____

____

____

21. Para você o conceito de Proporcionalidade está relacionado a outros conceitos matemáticos?

1. (   ) Sim 2. (   ) Não

Se sua resposta for afirmativa, cite quais: ____

____

____

____

22. Para você o conceito de Proporcionalidade está relacionado a outras áreas do conhecimento?

1. (   ) Sim 2. (   ) Não

Se sua resposta for afirmativa,cite algumas dessas relações ____________________________

____

____

____

23. Você teve a oportunidade de estudar o conceito de Proporcionalidade via História da Matemática?

1. (   ) Sim 2. (   ) Não

Se sua resposta for afirmativa, cite em que circunstâncias: ______________________________

____

____

24. Você acredita que a História da Matemática poderia contribuir para a sua compreensão a respeito do conceito de Proporcionalidade?

1. ( ) Sim 2. ( ) Não

Se sua resposta for afirmativa, cite as principais contribuições _____________________

____

____

____

ANEXO 3

ROTEIRO PARA A ENTREVISTA

1) Qual o significado de proporcionalidade para você?

2) Você já tinha conhecimento acerca do sistema de numeração babilônico e egípcio?

3) Em que medida a atividade realizada contribuiu para o conhecimento destes sistemas?

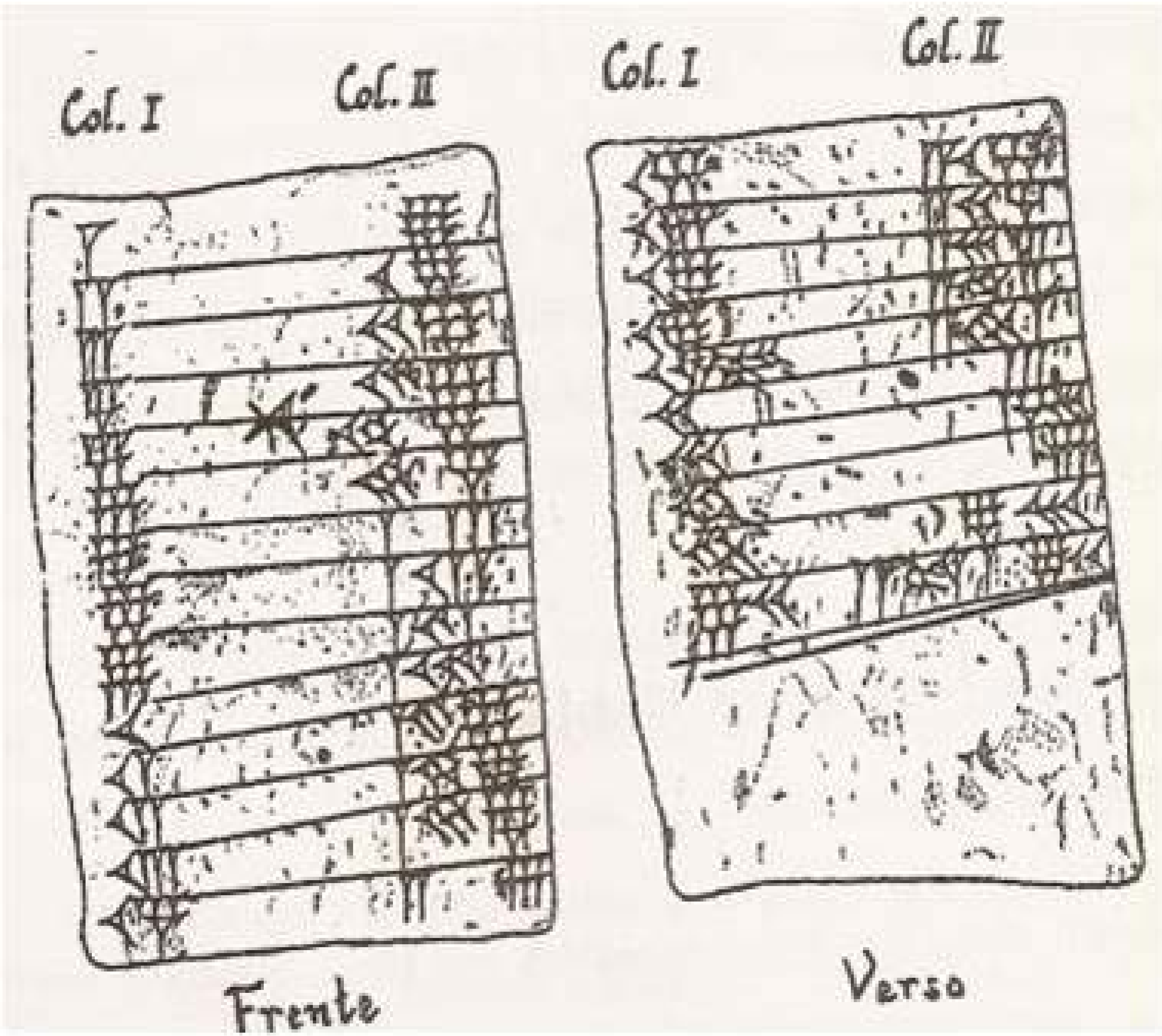
4) Nas atividades desenvolvidas foi abordado o conceito de proporcionalidade. De que maneira ele foi abordado?

5) Você utilizaria atividades deste tipo para ensinar proporcionalidade aos seus alunos? Por quê?

6) Em sua opinião a História da Matemática pode contribuir para a compreensão de um conceito matemático? De que maneira?

ANEXO 4

Tableta de multiplicação babilônica impressa para os professores



ANEXO 5

MATERIAL IMPRESSO PARA OS PROFESSORES CONTENDO QUESTIONAMENTO SOBRE O MÉTODO DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO DOS EGÍPCIOS

Observando a resolução da equação feita acima, você poderia afirmar que 21 é realmente a solução da equação? Justifique sua resposta.

ANEXO 6

NOTAS DE CAMPO

Título	Visita à escola para planejamento dos encontros
Data	25/07/08
Horário	15h30min
Local da observação	Colégio Municipal Padre Galvão
Registro descritivo	Por volta das 15h30min me reuni com os professores de matemática na tela sala. Esta sala é destinada a reuniões e aulas quando os professores necessitam apresentar algum vídeo ou usar recursos computacionais. Neste dia estavam cinco professores. Eles foram chegando aos poucos. Pareciam está preocupados ou algo semelhante, mas logo entendi que se tratava de preocupações com relação às atividades rotineiras, já que se encontrava em período de avaliação de recuperação da segunda unidade e tinham prazo determinado para entregar as notas dos alunos para a coordenação. Reunimos-nos em círculo e os professores conversavam entre si antes que eu iniciasse a minha fala.
Registro reflexivo	O encontro com os professores durou em média 1h e foi bem mais centrado que o anterior ocorrido em Maio. Falei sobre a minha intenção de pesquisa na área de ensino de matemática e da importância de estudos desse tipo para a educação matemática, enfatizando sobre a minha responsabilidade em desenvolver este estudo em contribuição de elevar a qualidade do ensino no País. Após estes esclarecimentos os professores concordaram em participar do estudo e me pareceram, inclusive, curiosos e interessados. Este é um tipo de trabalho que os referidos professores nunca participaram e um dos motivos de mostrara-se interessados, segundo alguns falaram é que sabem que em muitas escolas pesquisadores das universidades realizam estudos e nessa escola isso nunca tinha acontecido. Para finalizar me fizeram algumas perguntas sobre a pesquisa, tais como: duração da pesquisa, se envolveria os seus alunos, que tema ou conteúdo matemático iria estudar, como seria a participação deles no estudo. Esclareci todas essas questões. Ao esclarecer que pretendia trabalhar com proporcionalidade, um dos professores me questionou? Por que proporcionalidade? Não poderia ser um tema mais fácil de estudar não? Respondi para o professor: porque a proporcionalidade é um conteúdo muito importante no processo de ensino da matemática, tendo em vista que ele está relacionado a outros conceitos matemáticos, bem como a outras áreas do conhecimento. Esse questionamento me deu indícios que o professor já possui uma posição definida sobre o estudo com proporcionalidade, considerando-o difícil. Decidimos que nos encontraríamos na primeira sexta-feira de cada mês e caso fosse necessário me disponibilizaria uma outra sexta-feira.

Título	Encontro com os professores
Data	01.08.08
Horário	13h30min
Local da observação	Colégio Municipal Padre Galvão
Registro descritivo	Reunimos-nos na biblioteca da escola, pois a sala de reuniões estava ocupada neste dia. Os professores pareciam está mais calmos em relação ao encontro anterior. Estavam presentes seis professores e o encontro teve duração apenas de meia hora, pois neste dia os professores iam se reunir com a coordenação da escola para o planejamento. Durante este tempo conversamos sobre as pesquisas desenvolvidas pelas universidades e o fato de muitas delas não chegarem à escola, pois é consenso do grupo que o acesso as tais pesquisas poderiam trazer contribuições para a melhoria do ensino – aprendizagem no nosso país, tendo em vista que a maioria dos professores não dispõem de condições de ingressar em cursos de pós-graduação em nível de mestrado e doutorado. Esclareci que no próximo encontro aplicaria um questionário e ficou acertado que esta etapa seria realizada no dia 05.09.08, primeira sexta-feira de setembro a partir das 13h30min.
Registro reflexivo	A discussão do grupo revela aquilo que de certa forma já se sabe, que é o fato de desenvolver metodologias variadas e adequadas para que o aluno atinja a aprendizagem, mas isso se torna difícil, pois sendo provientes de uma formação tradicional, muitas vezes fica difícil trabalhar de outra forma, além do mais existe uma sobrecarga de trabalho muito grande dos professores, o que dificulta ainda mais o acesso ao ingresso em cursos de pós-graduação e até mesmo disponibilidade de tempo para estudos individuais. Especificamente neste grupo percebi através de suas falas que eles na maioria das suas aulas trabalham os conteúdos de forma tradicional, tal qual foi formado. Esse fato me parece uma barreira muito forte a ser modificada.

Título	Encontro com os professores para aplicação do questionário
Data	05.09.08
Horário	13h30min
Local da observação	Colégio Municipal Padre Galvão
Registro descritivo	O encontro com os professores para a aplicação do questionário iniciou às 13h40min na tela sala. Estavam presentes seis professores e três deles me avisaram com antecedência que não poderiam ir até à escola naquele dia, me solicitando outro encontro no qual eu pudesse aplicar o questionário para eles. Inicialmente esclareci que os dados ali contidos bem como as análises não seriam identificados. Solicitei dos presentes que as suas respostas fossem as mais precisas possíveis e que respondesse atentamente a cada uma das questões. Alguns professores apresentaram dúvida com relação a décima quinta questão, que tratava sobre documentos oficiais e tiveram dificuldades na vigésima questão que perguntava sobre as estratégias por eles utilizadas para ensinar o conceito de proporcionalidade. Para as demais questões não houve dúvidas ou dificuldades. Esclareci que a próxima etapa do estudo seria a aplicação das atividades e que necessitaria que este momento fosse filmado, mas para isso precisava da autorização de todos. Não houve nenhuma rejeição, sendo assim ficou certo que no inicio do próximo semestre com a data a definir nos reuniríamos para a realização das atividades.
Registro reflexivo	No momento da aplicação do questionário os professores pareciam ansiosos. Um fato particular chamou-me atenção: a maioria deles teve dificuldade para responder a questão sobre as estratégias utilizadas para ensinar o conceito de proporcionalidade. Alguns me questionaram: como assim? Você quer que eu escreva a forma como eu ensino esse conceito? Com alguns comentários feitos por eles pude perceber que eles não conheciam ou não aplicavam estratégias diferentes daquelas que os livros didáticos trazem e arriscando um pouco mais na dedução: alguns parece não ensinar esse conceito aos seus alunos, pois o julga complexo e que os seus alunos não têm base matemática para aprender o conceito de proporcionalidade.

Título	Retorno à escola para aplicação do questionário
Data	10.09.08
Horário	15h30min
Local da observação	Colégio Municipal Padre Galvão
Registro descritivo	Reuni-me com os três professores que faltavam responder o questionário. Neste dia tive que ficar a tarde inteira na escola, pois tinha que esperar pelos horários vagos de cada um deles. Apliquei o questionário na tela sala que estava disponível e era um lugar tranqüilo. Inicialmente fiz os mesmos esclarecimentos que já tinha feito aos outros professores. O desenvolvimento desta etapa foi tranqüilo, porém eles também apresentaram dúvidas quanto à décima quinta e vigésima questão. Informei sobre o período de aplicação das atividades e sobre os procedimentos que eu adotaria, havendo concordância por partes deles.
Registro reflexivo	Os professores encontravam tranqüilos no momento da aplicação do questionário, o que fizeram em aproximadamente meia hora. Com relação a dúvida apresentada na décima quinta questão, me pareceu que os professores não utilizam os documentos oficiais (Parâmetros Curriculares Nacionais) como suporte teórico na sua prática docente. Já com relação a vigésima questão, me pareceu que estes professores ao ensinar o conceito de proporcionalidade utilizam apenas o livro didático como recurso para este fim.

Título	Aplicação das atividades históricas
Data	Maio de 2009
Horário	14h00min
Local da observação	Colégio Municipal Padre Galvão
Registro descritivo	A aplicação das atividades realizou-se na tela sala com início às 14 horas. A sala estava preparada com aparelhos de multimídia, além de uma pessoa que se encontrava presente para fazer a filmagem. Estavam presentes todos os professores envolvidos no estudo. Sentaram-se formando um semicírculo e demos início as atividades. Iniciei com a atividade sobre os babilônios, apresentando os slides que continham as questões sobre o sistema de numeração destes povos. A apresentação foi acompanhada de pequenas discussões, elaboração de argumentos e lançamento de hipóteses. Em seguida apresentei uma tableta babilônica e lancei algumas questões sobre a mesma. No segundo momento apliquei a atividade sobre os egípcios, mantendo para esta o mesmo procedimento da anterior. Também entreguei aos professores algumas folhas com a impressão da tableta babilônica e da equação dos egípcios. O desenvolvimento das atividades durou aproximadamente duas horas e meia.
Registro reflexivo	No momento da aplicação das atividades os professores encontravam-se tranqüilos, porém curiosos com o conteúdo das atividades. Ao vivenciar o desenvolvimento das atividades percebi que o grupo apresentava pouco conhecimento sobre o conhecimento matemático daquelas civilizações, o que reflete certa carência em História da Matemática. Alguns comentários reforçam essa hipótese: não conheço esse sistema; não conheço essa tableta babilônica; os livros didáticos às vezes falam dos sistemas antigos, mas não mostram como são estruturados. Quanto a interpretação da tableta babilônica, os professores apresentaram relativa facilidade para reconhecer o conceito de proporcionalidade ali implícito: se a gente relacionar uma coluna com a outra vamos ver que existe proporção aí. Por outro lado, o mesmo não aconteceu com o processo de resolução de equação pelo método da falsa posição, em que nem todos eles conseguiram deduzir que este método nada mais é do que a aplicação de proporções e sendo assim contém o conceito de proporcionalidade. Não estou vendo proporção nessa resolução da equação. Mas levando em consideração a quantidade de professores que deduziram em ambas as atividades que o conceito de proporcionalidade estava presente, posso pressupor que as atividades históricas contribuíram para a compreensão de um conceito e este fato nos dá indícios que a História da Matemática dá suporte teórico para o ensino de conceito matemático.

Título	Realização das entrevistas
Data	Julho de 2009
Horário	A partir das 14 h
Local da observação	Colégio Municipal Padre Galvão
Registro descritivo	Inicialmente esclareci sobre o procedimento adotado para esta fase da pesquisa, pedindo aos professores que respondessem às perguntas de forma clara e atenta, prestando atenção a cada uma das perguntas. Também lhes informei que os dados não seriam divulgados sem a autorização dos mesmos. A entrevista do tipo semi-estruturada foi aplicada individualmente e de acordo com a disponibilidade de horários vagos dos professores, assim tive que ir à escola várias vezes até que entrevistasse todo o grupo. A entrevista foi gravada em áudio e o desenvolvimento destas se deu forma satisfatória. Os professores estavam bem à vontade e foram respondendo às perguntas de maneira natural.
Registro reflexivo	A par das respostas, mesmo sem fazer a análise das mesmas, posso pressupor que houve certa modificação na compreensão do conceito de proporcionalidade por parte destes sujeitos. Tendo em vista que antes da aplicação das atividades, estes professores quando falavam em proporcionalidade logo se reportavam a regra de três. Agora eles já dão indícios da compreensão deste conceito por meio de estratégias diferentes da regra de três. Posso pressupor agora com mais consistência que através de atividades mediadas pela História da Matemática é possível compreender um conceito matemático. Esta pressuposição encontra respaldo na experiência da realização de tais atividades e na própria fala dos sujeitos envolvidos na pesquisa.

ANEXO 7

Conteúdo das entrevistas na íntegra

Transição de entrevista realizada com o Professor A

Tempo de docência: de 6 a 10 anos

Gênero: Masculino

Legenda

E – entrevistador

R – entrevistado

E - Qual o significado de proporcionalidade para você?

R - *É uma igualdade entre razões, que através dela você descobre o quanto uma grandeza está se relacionando com a outra em matéria de tamanho, etc.*

E - Você já tinha conhecimento acerca do sistema de numeração babilônico e egípcio?

R – *Pouco. Com relação ao que a gente adquiriu naquele dia abrangiu bem mais coisa, pois eu só tinha noções básicas.*

E - Em que medida a atividade realizada contribuiu para o conhecimento destes sistemas?

R – *Bastante porque ampliou aquele nível básico que a gente tinha e "acrescentou" vários outros fatores né! Assim a gente passou a dar importância maior de se trabalhar isso. Trabalhar isso tem sido um pouco esquecido nos livros didáticos.*

E – O que você quis dizer com isso?

R – *Me refiro aos sistemas de numeração estudados nas atividades.*

E - Nas atividades desenvolvidas foi abordado o conceito de proporcionalidade. De que maneira ele foi abordado?

R – *Através do reconhecimento. Eu me lembro daquela questão da "tábua", a gente percebe que houve a construção da numeração segundo uma proporção; eles já trabalhavam com a proporção naquelas "tábuas", a gente percebeu dentro da construção do sistema sempre está inserido ali a idéia de proporcionalidade. Já com relação aos egípcios, a idéia de proporcionalidade [...] é [...] a questão da falsa posição. Testava-se um valor e aquele valor* *chegava a uma resposta que não era a que se queria, mas fazia-se uma proporção daquilo para o valor que se quer, quantas vezes o valor que se quer é maior ou menor e a partir daí se conseguir a resposta que era desejada, fazendo a proporção de quanto é mais ou menos do que aquilo.*

E - Você utilizaria atividades deste tipo para ensinar proporcionalidade aos seus alunos? Por quê?

R – *Sim. Ai vem justamente é [...] o enfoque sobre uma questão de a gente ver mais essa grade, usar essa grade porque se trabalha o sistema de numeração na 5ª, já pode introduzir essa idéia no 5º e não deixar para o 6º, 7º ano que é aquela questão que a gente que a gente tem de rigidez de seguir a grade. Também é porque a gente é muito "vidrado" na questão do livro didático e como a maioria segue a gente acaba[...]*

E – Em que sentido você está utilizando o termo grade?

R – *Quero dizer trabalhar de uma forma diferenciada da tradicional, pois no ensino tradicional raramente se utiliza atividades deste tipo.*

E - Em sua opinião a História da Matemática pode contribuir para a compreensão de um conceito matemático? De que maneira?

R – *Sim. Pode contribuir estimulando mais, porque determinadas coisas que a gente tem de decorar, aceitar a gente ver que tem uma origem, teve um fator histórico, teve todo um processo histórico, toda uma construção para se chegar ali. Acho que se o aluno passasse a perceber que aquilo não é uma coisa pronta, ele também não ia ter que pensar que tinha que decorar e pronto! Ele ia perceber que é uma construção, então ele pode ser capaz de refazer essa construção, né, pode ir refazer essa construção, talvez isso facilite o aprendizado do que ele só decorar, do que já pegar pronto e decorar. A História da Matemática mostra que tudo ou praticamente tudo teve basicamente uma construção, não foi assim do dia para a noite que surgiu aquilo ou tipo decore e pronto, como muitas vezes o livro didático estimula que a gente faça, já tudo pronto sem mostrar a construção que teve para aquilo.*

E – Você poderia me explicar melhor o sentido que você esta empregando para o termo construção, ou seja, o que é esta construção? E o que você quer dizer quando se refere à aquilo?

R – *Me refiro a construção do conhecimento matemático e quando falei a palavra aquilo me referi à matemática.*

Transcrição da entrevista realizada com o Professor B
Tempo de docência: de 1 a 5 anos
Gênero: Masculino

E - Qual o significado de proporcionalidade para você?
R – *Proporcionalidade [...] é [...] se a gente for comparar com [...] acho que é uma pequena parte que a gente vai pegar como, com relação a outra, como por exemplo, [...] é aquela história, que a gente usou [...] posso usar a história da abelha? Uma abelha come mais que um elefante, né, isso. É aquela história da proporção, do tamanho ta certo? Com relação a abelha come mais, mas dependendo da proporção do tamanho dela com relação ao tamanho do elefante.*

E - Você já tinha conhecimento acerca do sistema de numeração babilônico e egípcio?
R – *Não. Para ser sincero não. Naquele dia que a teve a aula foi que eu vim saber da cunha. Não cunha eu já tinha uma noção! Porque a gente ver nos livros que ele fala, mas não tinha se aprofundado como a gente. A gente deu olhadinha naquela parte da [...] é de como elas se agrupavam para formar os números e, mas os egípcios a gente tinha uma noção porque a gente usa mais no dia a dia da aula*.

E - Em que medida a atividade realizada contribuiu para o conhecimento destes sistemas?
R – *Ah! Isso aí contribuiu muito, né, porque se a gente for pensar numa coisa que eu não conhecia; conhecia só de ouvir falar, não levava, não dava tanta relevância nas aulas para passar para os alunos. A gente dava só uma olhadinha e geralmente os números que a gente usava era só os romanos, né, e isso aí não, a gente aprendeu, se aprofundou mais, com relação aquela maneira do formato e o jeito que ia se formando o número 1, o número 2, [...] e [...] como é que se diz? A posição da cunha ia diferenciar no valor do número. Por isso que eu digo que a gente conheceu muito. Uma coisa que a gente não sabia, eu mesmo não sabia e aprendi bastante.*

E - Nas atividades desenvolvidas foi abordado o conceito de proporcionalidade. De que maneira ele foi abordado?

R – *Eu lembro que a gente comparou uma tabela com a outra e viu que os números iam até o nove, depois ia até o dezoito, ia numa seqüência de 1 para 9, nessa proporção a gente chegou até o 60 ou 59? Falo do 9, depois 18, 81, [...] aquela coisa lá. A gente só fez comparar [...] proporção de 1 para 9. Na dos egípcios a gente usou como forma de fração. Eu resolvi a equação por fração, não me lembro bem.*

E - Você utilizaria atividades deste tipo para ensinar proporcionalidade aos seus alunos? Por quê?
R – *Sim. Até porque o arraribá traz. Não só utilizaria como utilizo. O arraribá traz algumas histórias. Na parte de ensino a distancia a gente está estudando, ou melhor, a gente estudou na parte que fala da história traz muito essas questões, ele diz que mexe com a mente do aluno e fica mais fácil de aprender.*

E – Por que você acredita que usando atividades deste tipo fica mais fácil de aprender?
R – *Porque usando a história eu acredito que os alunos se sentirão mais motivados para estudar e consequentemente aprenderão.*

E - Em sua opinião a História da Matemática pode contribuir para a compreensão de um conceito matemático? De que maneira?
R – *Pode sim. Até porque essa história de proporção, né isso, da cunha, aquela parte do 1 para o 9, tá influenciando, ta ajudando a gente resolver aquelas outras questões. Então se a pessoa for pensar dessa maneira, influencia; é tanto que a equação a gente resolve por isso aí, usando aquela formula dá [...] não estou lembrado [...] o método que a gente usou para resolver a equação, ou seja, que os meninos usaram, eu usei fração.*

E – A questão da proporção na está influenciando em que?
R – *Eu quis dizer que a identificação do conceito de proporção influencia nas características do sistema de numeração babilônico e egípcio*

.

Transcrição da entrevista realizada com o professor C

Tempo de docência: de 6 a 10 anos

Gênero: Masculino

E - Qual o significado de proporcionalidade para você?

R – *Para mim proporcionalidade é tudo que tá ligado a proporção.*

E - Você já tinha conhecimento acerca do sistema de numeração babilônico e egípcio?

R – *Já tinha conhecimento. Inclusive na sala de aula eu gosto muito de fazer aqueles exercícios. Muitas vezes as pessoas acham sem importância, mas eu gosto, pois fundamenta melhor a matemática.*

E – De que tipo de exercícios você fala?

R – *Exercícios que trazem elementos sobre a História da Matemática, mas que tenham relação com o conteúdo que eu esteja trabalhando.*

E - Em que medida a atividade realizada contribuiu para o conhecimento destes sistemas?

R – *Eu achei que fundamenta melhor o sistema, porque até então a gente "pega" nos livros e é uma coisa muito solta e aquela atividade que foi lá deixou a gente mais inteirado com o assunto, levando mais a sério; porque a gente ver que no livro vem duas páginas apenas muito soltas e a gente não tem nem tanto estímulo assim de pesquisar, procurar e essa atividade deu uma abertura para a gente ir mais fundo nesses sistemas.*

E – O que tem no livro que você acha tão solto?

R – *O que trata sobre a História da Matemática, pois nunca vi algo que ligasse a História da Matemática com o um conceito da matemática.*

E - Nas atividades desenvolvidas foi abordado o conceito de proporcionalidade. De que maneira ele foi abordado?

R – *Nas tabletas. Eu me lembro que tinha um número na 1ª coluna que estava ligado diretamente ao número da 2ª coluna, diretamente proporcional; era aí que estava a proporcionalidade. A dos egípcios eu não identifiquei, tinha muitos símbolos e agora não lembro.*

E - Você utilizaria atividades deste tipo para ensinar proporcionalidade aos seus alunos? Por quê?

R – *Ah com certeza. Porque da forma que foi bom para a gente é [...] e foi esclarecedor para a gente e "puxou" a curiosidade, então eu acho que da mesma forma a gente pode fazer em sala de aula e "puxar" ainda mais a atenção do aluno. A princípio parece simples, só símbolos, aí quando a gente começa a ver a importância de conteúdo tão rico quanto esse, então é mais uma forma de conquistar o aluno. É uma coisa curiosa e interessante.*

E – Você poderia explicar melhor o que a princípio pareceu simples?

R – *É [...] pareceu que íamos estudar somente as representações da matemática do passado, depois vimos que ali estudamos um conceito da matemática muito usado atualmente.*

E - Em sua opinião a História da Matemática pode contribuir para a compreensão de um conceito matemático? De que maneira?

R – *Eu acho que sim. Posso falar até por mim, assim, eu tive professores que antes de iniciar o conteúdo ele contava a história, de onde vinha aquilo; então quando a gente ia ver o conceito em si do assunto ficava muito mais claro, então da mesma forma a gente pode fazer na sala de aula para que a matemática deixe de ser um pouco seca como é passada, de forma muito mecânica e começar a criar outros aspectos em torno do assunto para poder ficar mais gostoso de aprender, entendeu?*

E – De que outros aspectos você fala?

R – *Procurar usar outras estratégias para as aulas, que possam gerar mais interesse por parte dos alunos.*

Transcrição da entrevista realizada com o Professor D

Tempo de docência: de 6 a 10 anos

Gênero: Masculino

E - Qual o significado de proporcionalidade para você?

R – *É [...] para mim o significado de proporcionalidade é uma relação que existe entre as variações de duas grandezas, ou [...] é de duas grandezas; se uma varia numa determinada razão a outra para proporcionar a primeira tem que variar na mesma razão. Então, segundo o caso: se uma for aumentar o dobro, a outra tem que ser o dobro ou se uma diminuir pela metade, a outra do mesmo jeito, pela metade. Então, para mim, é mais ou menos isso.*

E - Você já tinha conhecimento acerca do sistema de numeração babilônico e egípcio?

R – *Muito remotamente, só[...] eu acho o que me recorda são os estudos da universidade, mesmo assim superficial. Muito pouco tempo. E mais ainda os livros didáticos não trabalham, então no nosso dia a dia, a gente não se detém muito a isso. Além do mais o MEC exige muito outras coisas e acaba não dando tempo cumprir tudo.*

E - Em que medida a atividade realizada contribuiu para o conhecimento destes sistemas?

R – *Eu acho o seguinte: como eu já estava é [...] muito assim é [...] sem noção dos conteúdos, eu acho que [...] é [...] eu nem sabia de determinadas coisas né, e aquela atividade trouxe algumas recordações, inclusive algumas novidades. É como eu já tinha dito na [...] como a gente não trabalha no dia a dia, a gente vai esquecendo e esquecendo da história a gente pode esquecer do futuro né!. Então contribui sim, com curiosidades e futuramente a gente pode usar com os alunos, mostrando que antigamente os povos escreviam assim, porque boa parte dela nem os livros didáticos trazem mais, é muito difícil de encontrar.*

E – Que tipo de novidade a atividade trouxe e o que é difícil de encontrar nos livros didáticos?

R – *A novidade que achei foi trabalhar um conteúdo através da História da Matemática, como foi o caso da proporção. E é muito difícil encontrar nos livros didáticos a História da Matemática desse jeito.*

E - Nas atividades desenvolvidas foi abordado o conceito de proporcionalidade. De que maneira ele foi abordado?

R – *Era em relação ao [...] a forma como os antigos escreviam os números, que era no caso, tinha umas tabelas que aumentavam [...] uma coluna em relação a outra, os números era [...] como é que eu posso dizer? Eram multiplicados por 3 eu acho, de 3 em 3 e assim ia. Os egípcios [...] se não me engano eles usavam uma estratégia [...] não consegui entender.*

E - Você utilizaria atividades deste tipo para ensinar proporcionalidade aos seus alunos? Por quê?

R – *Dependendo da turma, acho que sim. Porque como achei curioso, então creio eu que os alunos também vão ter uma mesma mentalidade, porque sinceramente é bem diferente da nossa realidade; instiga os alunos a comparar como antigamente eram feitas as coisas e agora, né; eu acho que eles iam ficar curiosos como as coisas de antigamente eram arcaicas e hoje a gente ta muito desenvolvido e mesmo assim, eu acho que a gente tem muito a avançar. E do mesmo jeito que a gente ta vendo os conteúdos hoje, daqui a um certo tempo, os povos do futuro dirão a mesma coisa. Eu acho que a história geralmente contribui para a gente refletir sobre nosso passado e futuro.*

E - Em sua opinião a História da Matemática pode contribuir para a compreensão de um conceito matemático? De que maneira?

R – *Eu acredito que sim. No caso da razão e proporção a gente ver como os antigos faziam; é o sistema de numeração deles, então eles seguiam uma certa razão, né, onde os números iam de 10 em 10 ou então de 3 em 3 e assim por diante. É [...] deixa eu ver aqui [...] Eu acho que em relação a História da Matemática tem um que eu utilizo bastante, que é o jeito que os egípcios mediam as terras, né, em torno do rio, esta eu geralmente trago para as minhas aulas para poder iniciar o assunto de geometria e falar sobre o Teorema de Pitágoras, como eles faziam antigamente, é os cálculos de medida da hipotenusa no triângulo retângulo, para medir terrenos. Eu utilizo e acredito que a História da Matemática contribui.*

Transcrição da entrevista realizada com o Professor E

Tempo de docência: de 11 a 15 anos

Gênero: Feminino

E - Qual o significado de proporcionalidade para você?

R – *Proporcionalidade [...] é uma igualdade entre duas razões. O que mais que eu posso dizer? Eu acho que é isso, uma igualdade entre duas razões.*

E - Você já tinha conhecimento acerca do sistema de numeração babilônico e egípcio?

R – *Não. Não tinha conhecimento. Não conhecia nenhum dos dois.*

E - Em que medida a atividade realizada contribuiu para o conhecimento destes sistemas?

R – *Foi muito bom porque eu aprendi, tomei conhecimento de uma coisa que eu desconhecia.*

E – Você poderia me explicar melhor sobre o que aprendeu?

R – *Aprendi um pouco da estrutura do sistema de numeração babilônico e egípcio, além de ver um pouco da matemática que ensinamos hoje sendo utilizada na antiguidade.*

E - Nas atividades desenvolvidas foi abordado o conceito de proporcionalidade. De que maneira ele foi abordado?

R – *Ele foi abordado aqui na forma de resolver equação, só que acho que eles usavam essa proporcionalidade de maneira inconsciente, não sabia bem que era proporção. Era uma forma que eles conseguiam para resolver equação, usando proporção.*

E – E com relação aos babilônios?

R – *É porque a 1ª coluna está sempre multiplicada por 9 para construir a 2ª coluna. São números proporcionais.*

E - Você utilizaria atividades deste tipo para ensinar proporcionalidade aos seus alunos? Por quê?

R – *Sim. Até para eles entenderem onde surgiu a proporção. Até para entender o desenvolvimento, até onde ele chegou no momento de hoje.*

E - Em sua opinião a História da Matemática pode contribuir para a compreensão de um conceito matemático? De que maneira?

R – *Sim. Porque eles conservam a origem da matemática, de onde começou até os dias atuais e como ela ta evoluindo, né, historicamente. A gente "pega" só aqueles conteúdos, fica só naqueles [...] já prontinhos, talvez eles não tenham nem noção de como [...] para eles compreenderem toda evolução, nesse sentido a História da Matemática pode contribuir.*

Transcrição da entrevista realizada com o Professor F

Tempo de docência: de 1 a 5 anos

Gênero: Masculino

E - Qual o significado de proporcionalidade para você?

R – *É [...] eu entendo assim a proporcionalidade quando uma grandeza é [...] dobra de valor a outra grandeza cai para a metade, por exemplo [...] é [...] por exemplo, se a velocidade de um carro era de 10km/h e aumentar para 20km/h, o tempo de chegada, né, por exemplo, quando o carro tava em 10km/h o tempo era de 5 horas [...] 6 horas e dobrou de 10km/h para 20km/h, então o tempo vai "cair" de 6 horas para 3 horas. É o que eu entendo.*

E - Você já tinha conhecimento acerca do sistema de numeração babilônico e egípcio?

R – *Não. Assim eu via em livros, mas nunca parei para estudar o assunto e nem ensinar o assunto para o aluno. Eu já vi em livros, mas nos planejamentos nunca coloquei como um assunto para trabalhar com o aluno.*

E - Em que medida a atividade realizada contribuiu para o conhecimento destes sistemas?

R – *Assim [...] é [...] eu acredito que contribuiu assim para a gente ver como os egípcios faziam né, como era a numeração deles, como eles faziam as operações, né, acho que contribuiu também para mostrar outro tipo de numeração.*

E - Nas atividades desenvolvidas foi abordado o conceito de proporcionalidade. De que maneira ele foi abordado?

R – *Eu lembro que tinha uma tabuada [...] e [...] quando ia dobrando os valores poderia cair para a metade ou quando fosse triplicando o outro ia sendo dividido por três. Eram os múltiplos. Com relação a atividade dos egípcios não identifiquei como era.*

E - Você utilizaria atividades deste tipo para ensinar proporcionalidade aos seus alunos? Por quê?
R – *É poderia usar também ou outras mais fáceis, né! Como um problema do dia a dia. É usaria para eles verem como aqueles povos tinham a idéia de proporcionalidade.*

E - Em sua opinião a História da Matemática pode contribuir para a compreensão de um conceito matemático? De que maneira?
R – *Eu acredito que pode porque tal assunto surgiu porque lá atrás se originou um problema e aquele matemático foi pensando naquele problema e foi desenvolvendo um cálculo que resolvesse aquela situação, né. A História da Matemática pode ajudar a entender tal assunto que hoje a gente tem dificuldade.*

Transcrição da entrevista realizada com o Professor G
Tempo de docência: acima de 15 anos
Gênero: Masculino

E - Qual o significado de proporcionalidade para você?
R – *Proporcionalidade é um conceito da matemática que relaciona grandezas e variáveis. Através dela podemos resolver vários tipos de problemas da matemática, além de problemas de outras áreas do conhecimento. É [...] na matemática existem vários conceitos que estão relacionados à proporcionalidade.*

E - Você já tinha conhecimento acerca do sistema de numeração babilônico e egípcio?
R – *Sim. Sempre tive curiosidade em estudar coisas da matemática de antigamente, mas não conheço muito, pois nunca me aprofundei em leituras desse tipo.*

E - Em que medida a atividade realizada contribuiu para o conhecimento destes sistemas?
R – *Na verdade aquela atividade contribuiu muito, pois eu [...] é [...] conheci sobre a estrutura dos sistemas, como eles eram estruturados e como funcionava e isso os livros didáticos não mostra. Ainda percebi que muito do que usamos hoje tem ligação direta com essa matemática do passado.*

E – Você poderia me falar sobre essa ligação da matemática do passado com a que utilizamos hoje?

R – *É [...] que nessas atividades eu vi que os babilônios usavam um sistema de numeração posicional, como utilizamos hoje, só que no caso deles era de base 60, né, então tem uma semelhança e também porque essa base 60 ainda utilizamos hoje com a nossa medida de tempo, onde 1 hora corresponde a 60 minutos, etc.*

E - Nas atividades desenvolvidas foi abordado o conceito de proporcionalidade. De que maneira ele foi abordado?

R – *Na dos babilônios eu lembro que tinha uma tabela onde os números da primeira coluna estavam relacionados com a segunda tabela como uma multiplicação, pois era assim [...] 1 e 9, 2 e 18, 3 e 27, e assim por diante, então posso tirar disso uma razão 9. Já os egípcios tinham uma equação resolvida usando proporção, era [...] para encontrar a solução eles colocavam um número que logo depois via que não era o correto, em seguida usando proporção eles chegavam ao valor correto.*

E - Você utilizaria atividades deste tipo para ensinar proporcionalidade aos seus alunos? Por quê?

R – *Sim. Porque o conteúdo de proporcionalidade sempre é visto como muito difícil e os livros didáticos contribui muito para isso, porque geralmente apresenta esse conteúdo e forma muito seca e com tarefas dificieis, [...] então utilizaria porque achei uma forma simples de introduzir esse assunto com meus alunos.*

E - Em sua opinião a História da Matemática pode contribuir para a compreensão de um conceito matemático? De que maneira?

R – *Sim pode. Eu acredito que da maneira como foi abordada nessas atividades. Porque nelas estudamos a matemática feita na antiguidade e nela encontramos o conceito de proporcionalidade. Assim eu acho que [...] é [...] a História da Matemática pode ser usada na introdução de muitos conteúdos que trabalhamos em sala para que o aluno compreenda o conceito estudado, né! Podemos colocar atividades desse tipo para o aluno explorar e ele mesmo chegar a conclusão de qual conceito está ali, assim ele vai através da História aprender um conceito, [...] como aconteceu com a gente, né!*

Transcrição da entrevista realizada com o Professor H

Tempo de docência: de 1 a 5 anos

Gênero: Masculino

E - Qual o significado de proporcionalidade para você?

R – *O sentido matematicamente falando? Proporcionalidade quando a gente vai explicar para o aluno, normalmente a gente trabalha com uma comparação, uma coisa que está relacionada a outra. É onde entra o significado de proporção.*

E - Você já tinha conhecimento acerca do sistema de numeração babilônico e egípcio?

R – *Conhecimento sim, lembrar não. Eu já tinha estudado, visto, lido sobre o assunto, mas lembrar não. Não tava lembrado de detalhes que foram apresentados, é [...] que você apresentou nas atividades, não lembrava e alguns detalhes eu não sabia, nunca tinha visto.*

E – O que você nunca tinha visto?

R – *A forma como era estruturado o sistema de numeração daquelas cunhas, eu até já tinha visto aqueles símbolos em algum livro, mas eu não sabia o que significava.*

E - Em que medida a atividade realizada contribuiu para o conhecimento destes sistemas?

R – *Permitiu saber detalhes da História, de onde vinha e até mesmo como a gente é [...] quando for dá uma aula sobre o conteúdo para a gente facilitar mais a apresentação da origem e de onde possivelmente se originou os números.*

E - Nas atividades desenvolvidas foi abordado o conceito de proporcionalidade. De que maneira ele foi abordado?

R – *A maneira como abordado? Foi através da numeração [...] foi uma maneira prática de mostrar o conceito, mas não lembro.*

E - Você utilizaria atividades deste tipo para ensinar proporcionalidade aos seus alunos? Por quê?

R – *Sim. Facilita muito para mostrar, transmitir a origem dos sistemas de numeração. Porque facilitaria tanto a aprendizagem como nosso trabalho na hora de transmitir. Além de tornar mais prazeroso para nós e para os alunos é uma maior facilidade para transmitir.*

E - Em sua opinião a História da Matemática pode contribuir para a compreensão de um conceito matemático? De que maneira?

R – *Sem dúvida. É [...] a própria maneira como foi apresentada para a gente a história, dentro da história já vinha questionamentos, é [...] maneira de apresentar problemas e isso facilitou, porque não ficou uma coisa solta, mas uma matemática apresentada com objetividade.*

Transcrição da entrevista realizada com o Professor I

Tempo de docência: de 1 a 5 anos

Gênero: Masculino

E - Qual o significado de proporcionalidade para você?

R – *O significado é que toda proporção é [...] alguma coisa que pode ser comparada com outra; um exemplo bem prático é quando a gente vai fazer um suco em que iremos colocar açúcar na proporção que fique agradável ao paladar.*

E - Você já tinha conhecimento acerca do sistema de numeração babilônico e egípcio?

R – *Já mais eu não recordava bem como era esse sistema não. O momento que me lembrei desses conceitos, desse sistema de numeração foi quando a gente se encontrou naquele dia para discutir essas questões sobre esses tópicos.*

E - Em que medida a atividade realizada contribuiu para o conhecimento destes sistemas?

R – *É que [...] apesar, né da gente esta usando símbolos, tanto babilônicos quantos egípcios, é [...] usando símbolos mas nem assim em cima dessa simbologia, né, de uma forma direta ou indireta lá se mostrava a proporcionalidade entre os números também, né. Então a atividade contribuiu para o conhecimento dos sistemas de numeração.*

E - Nas atividades desenvolvidas foi abordado o conceito de proporcionalidade. De que maneira ele foi abordado?

R – *Nos babilônios tinha um crescimento entre os números [...] quanto aos egípcios eu não identifiquei.*

E – Você poderia me explicar melhor esse crescimento entre os números?

R – *É que naquela tabela lá da atividade os números iam crescendo sempre de 9 em 9, assim [...] 1 na primeira coluna e 9 na segunda, 2 na primeira e 18 na segunda, 3 na primeira e 27* *na segunda, seguindo sempre na mesma razão. Daí se eu for tirar a razão entre a segunda e primeira coluna vou achar uma razão igual a 9. É isso.*

E - Você utilizaria atividades deste tipo para ensinar proporcionalidade aos seus alunos? Por quê?
R – *Sim. Porque no momento em que estamos trabalhando sobre esses tópicos, estamos trabalhando a parte prática, não é? A Parte prática, não só a parte teórica e sim mostrando como foi feito todo esse sistema de numeração, tanto dos babilônios quantos dos egípcios, né.*

E - Em sua opinião a História da Matemática pode contribuir para a compreensão de um conceito matemático? De que maneira?
R – *Sim. Contribui bastante porque mediante a História da Matemática, ela pode dá subsídios, aliás, suporte ao professor para ele poder modelar mais suas aulas ministradas em sala.*