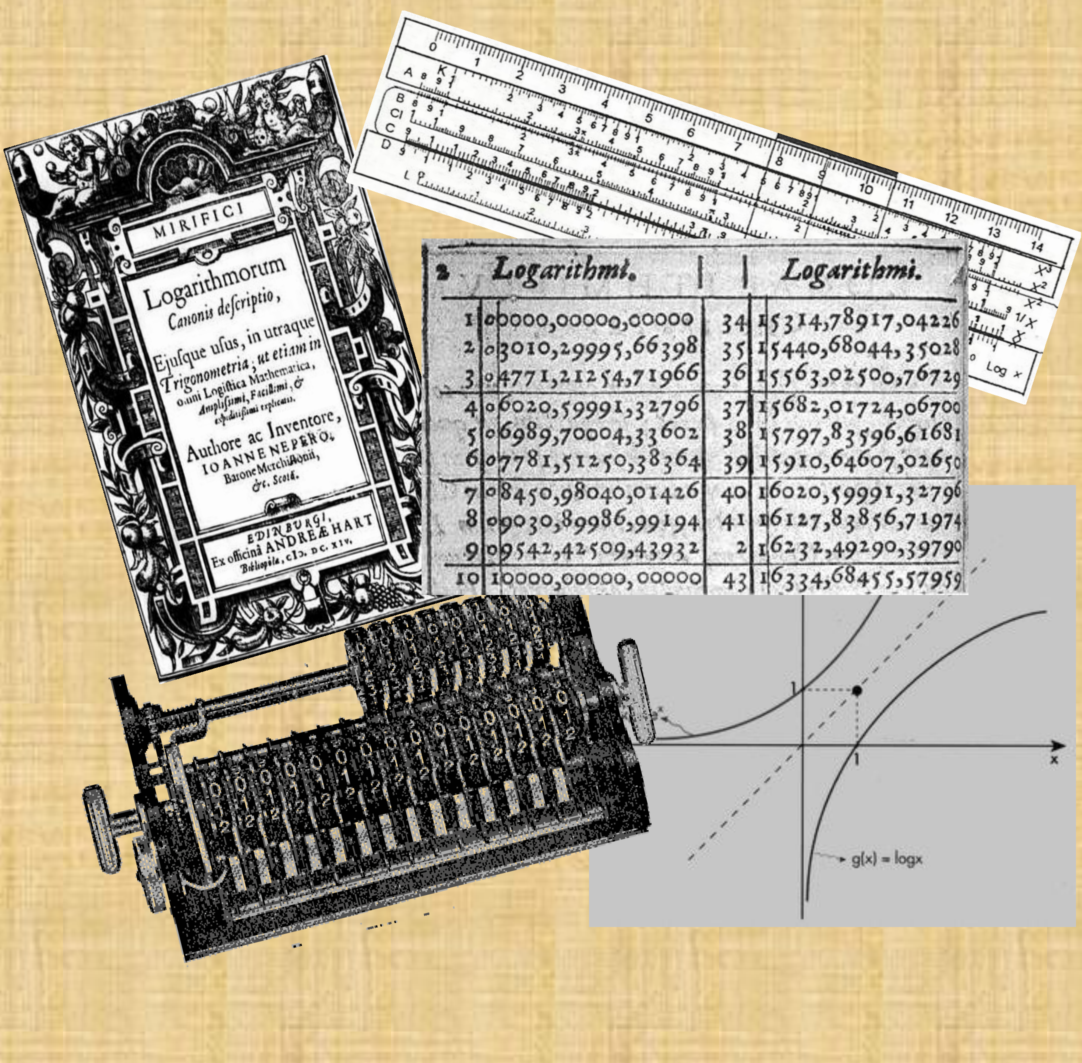
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

EVANILDO COSTA SOARES

UMA INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA SOBRE OS LOGARITMOS COM SUGESTÕES DIDÁTICAS PARA A SALA DE AULA



NATAL – RN
2011

EVANILDO COSTA SOARES

UMA INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA SOBRE OS LOGARITMOS COM SUGESTÕES DIDÁTICAS PARA A SALA DE AULA.

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes

NATAL – RN
2011

S676i Soares, Evanildo Costa.
Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula / Evanildo Costa Soares. – Natal, 2011.
144f.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. – Centro de Ciências Exatas e da Terra.

1. Número de Euler - Dissertação. 2. História da Matemática. 3. Unidade Básica e Problematização. I. Título.

EVANILDO COSTA SOARES

UMA INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA SOBRE OS LOGARITMOS COM SUGESTÕES DIDÁTICAS PARA A SALA DE AULA

Aprovado em ____/___/____

Banca Examinadora

____

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Orientador

____

Profa. Dra. Rosa Lúcia Sverzut Baroni
Universidade Estadual Paulista – UNESP – Rio Claro
Examinar Externo

____

Profa. Dra. Giselle Costa de Sousa
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Examinador Interno

____

Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Suplente

Dedico este trabalho a minha esposa, Kaline Rigno, meus pais, avós e a toda minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus que iluminou o meu caminho em toda essa trajetória;

Ao professor Dr. Iran Abreu Mendes, por ter contribuído como amigo e orientador pelas sugestões e pleno apoio em todo o processo;

Aos meus pais e avós: Teresinha Soares, Luiz Soares e Cândida dos Santos a quem agradeço por sempre acreditarem na realização desse trabalho.

A minha esposa: Kaline Rigno por sempre orar e apoiar nos momentos que eu mais precisava de ajuda.

A meu irmão, cunhada e sobrinha: Vanderlei Soares, Joelma Guilherme e Vivia Jaqueline pelo apoio, respeito e confiança no meu crescimento intelectual e profissional;

Aos amigos que me incentivaram nessa jornada, em especial a Márcia Maria Alves de Assis, Benedito Fialho Machado e Carlos Aldemir Farias.

Aos Amigos do mestrado, pelo o companheirismo e sugestões;

Aos meus amigos que apoiaram para a realização desse trabalho: Bruno Heleno Domingos Oliveira, Maria Elisabeth Domingos, Louis Anderson Nunes Bezerril, Gilmar Pereira Maia, entre outros.

A todos os membros da Igreja Adventista do Sétimo Dia de Santa Cruz pelo incentivo e pelas as orações.

À CAPES, pela bolsa de estudos, que permitiu uma maior dedicação a pesquisa no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

À Professora Maria José Alves pela colaboração na revisão do texto.

Mesmo as noites totalmente sem estrelas podem anunciar a aurora de uma grande realização.

(Martin Luther King).

RESUMO

Este trabalho foi realizado a partir de uma pesquisa preliminar, visando identificar a abordagem conceitual e didática dada aos logaritmos nos principais livros didáticos de Matemática adotados pelos os professores nas escolas estaduais do Ensino Médio do município de Natal, no Estado do Rio Grande do Norte. Realizei uma investigação histórica sobre os logaritmos com a finalidade de reorientar o professor de matemática na ampliação da sua abordagem didática desse assunto em sala de aula. Com base na investigação adotei um modelo de abordagem dos logaritmos centrado em três concepções: O aritmético, o geométrico e o algébrico-funcional. O objetivo principal deste trabalho é redirecionar o professor para uma compreensão ampla e significativa desse conteúdo, de modo que adquiram mais subsídios, em termos conceituais e práticos, para que possam ajudar no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. O estudo investigativo apontou a possibilidade de se abordar os logaritmos em sala de aula de forma transversalizante e interdisciplinar. A esse respeito, aponto como algumas aplicações práticas desse assunto são fundamentais no estudo de fenômenos naturais como terremotos, crescimento populacional, dentre outros. Essas aplicações práticas estão conectadas, de forma aproximada, às Unidades Básicas de Problematização (UBPs) a serem usadas em sala de aula. Ao finalizar, proponho algumas atividades que ajudaram o professor a compreender e esclarecer o estudo significativo desse tópico na sua prática docente.

Palavras-chave: Número de Euler. História da Matemática. Unidade Básica de Problematização.

ABSTRACT

This study was conducted from a preliminary research to identify the conceptual and didactic approach to the logarithms given in the main textbooks adopted by the Mathematics teachers in state schools in the School of Natal, in Rio Grande do Norte. I carried out an historical investigation of the logarithms in order to reorient the math teacher to improve its educational approach this subject in the classroom. Based on the research approach I adopted a model of the log based on three concepts: the arithmetic, the geometric and algebraic-functional. The main objective of this work is to redirect the teacher for a broad and significant understanding of the content in order to acquire more grants in the conceptual and practical terms, that can help the process of teaching and learning of mathematics. The investigative study indicated the possibility of addressing the logarithms in the classroom so transversalizante and interdisciplinary. In this regard, I point to some practical applications of this matter are fundamental in the study of natural phenomena as earthquakes, population growth, among others. These practical applications are connected, approximately, Basic Problematization Units (BPUs) to be used in the classroom. In closing, I offer some activities that helped teachers to understand and clarify the meaningful study of this topic in their teaching practice.

Key words: Number of Euler. History of Mathematics. Basic Problematization Units.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática tem sido considerada pela maioria das pessoas como uma disciplina de difícil compreensão e assimilação. Isto se deve ao fato de que as pessoas não estão adaptadas com a linguagem formal, escrita e com os símbolos usuais exigidos por essa disciplina. Nas escolas de Ensino Fundamenta e Médio, a Matemática é considerada como uma disciplina de difícil entendimento e complicada, e a forma como esta é ensinada tem levado muitos alunos a procurarem cursos universitários ou profissionalizantes em outras áreas com a ideia de não usar a Matemática em seu cotidiano escolar, fato esse que tem chamado a atenção de docentes da rede de ensino, bem como de pesquisadores da área de Educação Matemática.

Especificamente, nas escolas de Ensino Médio, os professores se deparam com as dificuldades dos alunos com operações matemáticas e suas conexões com outras disciplinas como Física, Química e Biologia. No caso do aprendizado e uso dos conceitos relacionados aos logaritmos, essa preocupação constitui o objeto de estudo desta dissertação.

Diante das inquietações e buscas realizadas nesse trabalho centrado nos logaritmos, muitos professores terão a oportunidade de analisar como foi construído esse importante instrumento de cálculo[1], de modo que adquiram mais subsídios, em termos conceituais e práticos, desse conteúdo, para que possam ajudar no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Nos dias atuais, a abordagem desse conteúdo no Ensino Médio quase sempre é realizada de forma mecânica devido ao uso retórico da álgebra e às poucas aplicabilidades do supracitado conteúdo na sociedade atual. A maneira como está sendo ensinado em sala de aula não estimula o aluno a ter um maior interesse sobre o assunto e a compreender como esse tema é importante em outros campos de ações disciplinares.

Nas escolas de Ensino Médio, os alunos apresentam uma grande dificuldade em compreender as operações envolvidas na aprendizagem de logaritmos, pois para os mesmos retratam um conteúdo de difícil entendimento, e, ainda, eles não

[1] O instrumento de cálculo nesse trabalho tem o mesmo significado que logaritmo, sua função, quando surgiu, era facilitar os cálculos multiplicativos e trigonométricos por meio de adições sucessivas.

conseguem fazer relações práticas com esse assunto, acreditam que, para aprender logaritmos, é necessário entender o que seja função exponencial, tornando-a, assim, um pré-requisito para sua aprendizagem.

Essa forma de abordagem didática dos logaritmos é efetivada, dessa maneira, como princípio de sua aprendizagem porque os professores seguem um modelo de ensino baseado no uso do livro didático, tornando-o um manual utilizado pela maioria dos docentes, funcionando geralmente como um dos principais guias ou recurso didático adquirido para ensinar tal assunto nas escolas de Ensino Médio. Contudo, para contribuir na configuração de uma postura diferente, este estudo pretende oferecer ao professor uma retomada da construção histórica e epistemológica dos logaritmos, de modo que se possa entender como foi desenvolvido o conceito, suas propriedades e aplicações e sua organização disciplinar.

O objetivo principal deste trabalho contempla um estudo para ampliação e complementação da abordagem didática dos logaritmos presente nos livros didáticos, a partir das informações históricas, para que o professor possa desenvolver um ensino ampliado do assunto, de modo a estimular o aluno a questionar, formular e contextualizar esse conteúdo em outras práticas sociais.

A seguir, apresento uma breve descrição dos assuntos abordados em cada capítulo de modo a proporcionar uma visão geral do trabalho de pesquisa realizado. Nesse sentido, a dissertação está estruturada em quatro partes.

No capítulo 1, apresento alguns estudos preliminares que são fundamentais para o desenvolvimento dessa pesquisa. Trata-se de uma visão geral da problemática estudada.

No capítulo 2, proponho um estudo histórico-epistemológico dos logaritmos, cuja finalidade é articular o professor no desenvolvimento de uma abordagem mais conceitualmente ampla desse assunto, a qual possa lhe dar condições de reorientação de suas ações didáticas, possibilitando alternativas às propostas dos livros didáticos pesquisados, bem como sugestões para atividades em sala de aula. Dando continuidade sobre esse estudo investigativo, também apresento um estudo sobre o significado etimológico da palavra logaritmo, visando, em especial, a esclarecer como os estudiosos receberam esse nome e propuseram a divulgação desse estudo no século XVII. Assim, tomando como base esse estudo realizado, caracterizo-o como uma abordagem sobre os logaritmos acerca de três enfoques conceituais: O aritmético, o geométrico e o algébrico-funcional.

No capítulo 3, menciono como os logaritmos aparecem nos livros didáticos tomando como parâmetro uma pesquisa realizada em alguns livros didáticos adotados pelos professores nas escolas estaduais do município de Natal-RN. Para isso, faço uma análise como esse tema foi implementado nos livros didáticos de Matemática nos séculos XIX e XX.

Em seguida, no capítulo 4, descrevo algumas implicações práticas desses logaritmos, com vistas a apontar o caráter transversalizante e interdisciplinar desse assunto. O objetivo, neste capítulo, é redirecionar o professor para a compreensão significativa e prática desse conteúdo. Desse modo, abordo de forma geral as principais aplicações práticas dos logaritmos no estudo de fenômenos naturais (terremotos, crescimento populacional, entre outros).

Para finalizar o capítulo, apresento algumas atividades que poderão ajudar o professor a compreender e colocar em prática o tema abordado, principalmente no Ensino Médio. Dessa maneira, tais atividades podem ser testadas e ajustadas pelos professores ocasionalmente em sala de aula para que despertem no aluno o interesse pelo estudo dos logaritmos, bem como podem estimular ações interdisciplinares ou transversais no Ensino Médio.

1 ESTUDOS PRELIMINARES

Neste capítulo, apresento a questão foco da pesquisa, as questões norteadoras, bem como os objetivos gerais, os objetivos específicos, alguns estudos a respeito do tema e os procedimentos teórico-metodológicos.

1.1 A PROBLEMÁTICA

O uso dos logaritmos em sala de aula, nos dias atuais, ocorre inicialmente na 1ª série do Ensino Médio, embora transversalize outros tópicos da Matemática e de disciplinas das áreas de ciências exatas e naturais, bem como das ciências sociais. A abordagem desse conteúdo no Ensino Médio dá-se geralmente através de livros didáticos de Matemática, selecionados e utilizados pelos professores da respectiva disciplina. Estes livros geralmente funcionam como principal recurso didático no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

O desafio para o desenvolvimento dessa pesquisa centrou-se em uma incessante busca empreendida desde 2003, com relação ao modo como os logaritmos eram ensinados nas escolas de Natal e quais seriam as possibilidades advindas do desenvolvimento histórico dessas ideias para a melhoria do aprendizado na Licenciatura em Matemática e, consequentemente no Ensino Médio, o que levou posteriormente a uma indagação sobre como os logaritmos são abordados nos livros didáticos de Matemática, tendo como referência aqueles que são usados nas escolas estaduais do Ensino Médio da cidade de Natal-RN.

Tudo começou em 2003, durante a graduação, ao cursar a disciplina intitulada *Tópicos de História da Matemática* na UFRN e a professora da disciplina mostrou alguns dos princípios operacionais nos quais estavam assentadas as bases epistemológicas para o desenvolvimento conceitual dos logaritmos. Em seguida, no semestre de 2004, na disciplina Fundamentos Epistemológicos da Matemática, tive nova oportunidade de desenvolver um pequeno estudo didático e conceitual sobre o mesmo tema, momento em que passei a me interessar sobre o assunto e a escrever um estudo minucioso sobre o desenvolvimento histórico e epistemológico dos logaritmos com a orientação do Prof. Iran Abreu Mendes, culminando com os estudos atuais que se referem à investigação histórica deste tópico - Matemática nos livros didáticos, na história, e suas implicações na sala de aula - considerando as suas aplicações e conexões com outras áreas da ciência.

Desse modo, as etapas propostas por esta pesquisa foram sendo organizadas gradualmente, quando ainda fazia graduação em 2005 e trabalhava no projeto de pesquisa realizado pelo prof. Iran Abreu Mendes sobre a *história da Matemática na formação continuada de professores*. Em trabalho conjunto com esse professor foram escritos artigos científicos sobre o referido tema, posteriormente, divulgado em congressos e seminários de história da Matemática, principalmente, nos anos de 2005, 2006, 2007, 2009 e 2010.

Desse modo, as buscas e estudos iniciais realizados sobre o tema nos anos de 2005 e 2006 foram importantes para que em 2008 publicasse um capítulo de um livro escrito pelo grupo de pesquisa em Educação, Cultura e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Para tal realização, a partir de 2008, com vistas ao Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, sob a orientação do Prof. Iran Abreu Mendes, procurei dar continuidade ao tema abordado e aos primeiros anseios que configuraram na problemática da pesquisa e na busca para responder a esse questionamento.

Diante disso, considerei necessário fazer um levantamento de quais eram os livros mais solicitados pelos professores do Ensino Médio e usados como recurso didático para o ensino de Matemática, especificamente de logaritmos. Assim, uma das metas principais consistia em obter uma lista desses livros didáticos que só foi possível através da Secretaria Estadual de Educação, fornecendo uma lista com os principais livros matemáticos usados pelas escolas estaduais de Ensino Médio em Natal-RN, principalmente os que abordavam o tema logaritmos.

Dessa forma, começou a longa jornada para a realização deste trabalho que começou a efetivar-se em setembro de 2009 quando fui à Secretaria Estadual de Educação para aquisição dos livros didáticos de Matemática, em uso pelos professores de Ensino Médio, para análise. Na articulação para tal intento foi fornecida uma lista contendo cerca de doze livros didáticos de Matemática, além de outros livros importantes para o processo de ensino e aprendizagem.

Inicialmente, essa lista ajudaria em parte, mas não solucionaria o problema, pois havia livros, tais como: Biologia, Química, Matemática, entre outros. Então, procurei deter-me apenas em livros didáticos de Matemática que retratassem sobre o tema logaritmos.

A partir desse momento, a coordenadora pedagógica me comunicou que se quisesse adquirir os livros contidos na lista era necessário que fôssemos ao almoxarifado, principal local reservado pela secretaria para guardar os livros didáticos. Então, a supervisora levou-me ao almoxarifado em setembro de 2009 e aquele local continha diversos livros de Matemática, analisados pela Secretaria Estadual de Educação e enviados às escolas estaduais do município de Natal-RN.

Desse modo, foi no almoxarifado que pude escolher alguns livros didáticos que serviram como suporte teórico para o desenvolvimento dessa pesquisa. Assim, detive-me em escolher aqueles mais solicitados pelos professores de Matemática da rede estadual de ensino. Logo, foram selecionados 05 (cinco) livros didáticos de Matemática, adotados pelos professores do município de Natal como recurso didático para o ensino de logaritmos no Ensino Médio.

Com isso, iniciei a análise com a abordagem conceitual apresentada pelos livros solicitados na pesquisa a respeito do referido tema, dando sequência ao processo investigativo realizado sobre os logaritmos, no capítulo 2, quando apresento um estudo histórico e epistemológico dos logaritmos com a finalidade de complementar e ampliar a abordagem conceitual apresentada pelos livros didáticos referidos neste estudo.

Assim, com base na lista solicitada e com as escolhas dos livros didáticos, tendo em vista aqueles livros mais indicados pelos professores para o seu respectivo uso didático, tal escolha retomou à questão: como esses autores descrevem o estudo significativo de logaritmos, que serve como suporte teórico ou guia para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Posteriormente, delineou-se como meta analisar como esses livros didáticos abordam esse tema, tendo como referência o seu conceito, suas condições de existência, propriedades e a utilidade desse conteúdo na sociedade contemporânea.

Com base em tal escolha, os principais livros adotados pelos professores de Matemática e que foram analisados no desenvolvimento desta pesquisa foram:

- Matemática aula por aula (Benigno Barreto Filho e Claúdio Xavier da Silva, 2003)
- A Matemática (José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno, 2000)
- Matemática ciências e aplicações (Gelson Iezzi, 2004)
- Componente Curricular: Matemática (Edwaldo Bianchini, 2004)

- Matemática (Manoel Paiva, 2005)

A análise realizada levou-me a constatar que a abordagem conceitual dos logaritmos nestes livros é diagnosticada de forma concisa, como se o aluno já tivesse algum conhecimento sobre esse instrumento de cálculo. A ideia formulada por cada autor é sucinta, sem conexão com a realidade em que vivemos. Além disso, baseado nessa abordagem conceitual referida sobre os livros didáticos analisados, pude constatar que sua fundamentação conceitual possui um teor algébrico e funcional complexo para o leitor, mesmo aquele com alguma formação acadêmica.

Diante dessas considerações, escolhi como foco principal apresentar os logaritmos de uma maneira histórica e explicativa, tendo em vista complementar a maneira pela qual os logaritmos são apresentados nos livros didáticos. Esse estudo busca oferecer ao professor sugestões didáticas sobre os logaritmos para que, se possível, ele consiga entender, em níveis teóricos e práticos, o estudo significativo desse tema no ensino da Matemática. Por isso, a investigação histórica e epistemológica desse assunto proposta neste estudo, tenciona mostrar como surgiram os logaritmos, sua caracterização conceitual e o desenvolvimento de suas propriedades, seguindo três enfoques conceituais: o aritmético, o geométrico e o algébrico-funcional.

Desse modo, este estudo oferece ao professor uma visão mais aprofundada e reflexiva sobre os logaritmos, ampliando o seu campo de conhecimento com vistas a dar-lhe mais subsídios conceituais e didáticos que possam propiciar um ensino satisfatório, proporcionando ao aluno uma aprendizagem significativa sobre esse assunto.

Com base nessas perspectivas, foram propostas as seguintes questões:

Como as contribuições advindas do desenvolvimento histórico dos logaritmos podem superar a ausência de esclarecimento, explicação e didática contida nos livros de Matemática, e como o professor pode usar tais informações conectadas com os livros didáticos?

A seguir, apresento também algumas questões norteadoras que subsidiarão a busca de respostas para o problema da pesquisa, as quais buscam auxiliar o professor na compreensão e esclarecimento acerca do desenvolvimento conceitual dos logaritmos e suas implicações didáticas.

1.2 QUESTÕES NORTEADORAS

Levando em conta o que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sugerem - que a investigação e a compreensão sejam competências e habilidades a serem desenvolvidas na disciplina de Matemática, das questões referidas anteriormente se desdobraram os seguintes questionamentos norteadores:

- Como os logaritmos são abordados nos livros didáticos do Ensino de Matemática mais utilizados em Natal no século XX?
- Quais aspectos conceituais sobre os logaritmos estão ausentes nesses livros?
- Como os aspectos históricos relativos ao desenvolvimento conceitual dos logaritmos são abordados nesses livros?
- Como os aspectos histórico-conceituais poderão nortear uma abordagem didática que complemente o livro didático?

Com base nos questionamentos apresentados anteriormente, descrevo, a seguir, os objetivos gerais, os objetivos específicos, alguns estudos a respeito do tema, bem como os procedimentos teórico-metodológicos que nortearam a pesquisa.

1.3 OBJETIVOS GERAIS

Conforme comentários anteriores, esta pesquisa está fundamentada em uma análise histórica e epistemológica dos logaritmos, tendo em vista propiciar uma abordagem histórico-conceitual dos mesmos que possa ampliar e complementar a abordagem dada a esse assunto nos livros didáticos. Nesse sentido, os objetivos gerais são:

- Investigar a formulação dos logaritmos de Napier, Briggs e Burgi no século XVII visando apontar suas contribuições para a Matemática escolar abordada atualmente.
- Auxiliar o professor de Matemática na compreensão e uso de uma abordagem didática conceitual dos logaritmos, de modo a complementar e ampliar a abordagem desse assunto, presente nos livros didáticos.

1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Investigar o desenvolvimento do conceito de logaritmos a partir das informações da história da Matemática;
- Discutir os fundamentos históricos e epistemológicos dos logaritmos de Napier, Briggs e Burgi a partir de uma investigação histórica;
- Classificar o desenvolvimento conceitual dos logaritmos baseado em três enfoques: O aritmético, o geométrico e o algébrico-funcional;
- Estabelecer co-relações entre as características dos logaritmos de bases diferentes; suas propriedades e utilidades;
- Apresentar sugestões de ampliação da abordagem dada aos logaritmos pelos livros didáticos, a partir das informações obtidas na investigação histórica.

1.5 ALGUNS ESTUDOS A RESPEITO DO TEMA

Nessa parte do trabalho procurei, através de pesquisas, desenvolver estudos que retratassem o uso dos logaritmos envolvendo a história da Matemática na Educação Matemática.

A procura no banco de teses e dissertações da Capes, por pesquisas sobre os logaritmos, considerando o descritor *ensino de logaritmo*, propiciou-me encontrar 02 (duas) dissertações: O ensino de logaritmos a partir de uma perspectiva histórica de Andreia Júlio de Oliveira (2005) e Uma sequência de ensino para o estudo de logaritmos usando a engenharia didática de Ronize Lampert Ferreira (2006). Essas duas dissertações comentam sobre o ensino de logaritmos no que refere a sua investigação histórica no ensino da Matemática.

Na tentativa de ampliar essa busca, realizei levantamentos bibliográficos que retratassem esse tema em Matemática, Educação Matemática e História da Matemática e que descrevessem a sua investigação histórica e epistemológica tendo como objetivo a articulação desse tema no processo de ensino de Matemática.

Dessa maneira, procurei articular estudos que retratassem como foi desenvolvido esse instrumento de cálculo, seu conceito, propriedades e aplicações na sociedade da época. Diante disso, destacam-se os trabalhos de Naux (1966; 1971); Knott (1915); Horsburgh (1914); Eves (1997); Boyer (1974); Collete (1985) e

Mendes e Soares (2008) entre outros que tratam da investigação histórico-epistemológica dos logaritmos. No que refere à abordagem didática desse conteúdo no processo de ensino, apontam-se Miguel e Miorim (2002); Magalhães (2003) e Floriani (1999). Referente à Educação Matemática e à investigação histórica da matemática no processo de ensino, destacam-se ainda Miguel e Miorim (2004); Brito et al (2005); Mendes et al (2006) e Mendes (2001a; 2001b; 2009).

1.5.1 Uma síntese das dissertações sobre o tema

Na dissertação sobre *O ensino de logaritmos a partir de uma perspectiva histórica*, Oliveira (2005) objetiva seus estudos numa sequência de atividades pedagógicas, que tem como fio condutor a história da Matemática. Nesse trabalho, busca-se entender o conceito de logaritmos na relação Matemática e música, a fim de perceber qual o potencial que uma atividade direcionada sobre a óptica histórica teria, no que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem.

Na dissertação sobre *Uma sequência de ensino para o estudo de logaritmos usando a Engenharia didática*, Ferreira (2006) direciona seus estudos sobre uma sequência elaborada pelas etapas da Engenharia Didática, para tanto, centraliza sua pesquisa com problemas que privilegiam situações reais e atividades relacionadas ao surgimento dos logaritmos, que de certa forma contribuem para a construção e compreensão do conceito de logaritmos por parte dos alunos. O referido estudo fundamenta-se na Didática da Matemática, que se preocupa com resultados de experiências em sala de aula relativas ao ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Nesse trabalho, busca-se entender como se relacionam o estudo de funções logarítmicas através de sua representação gráfica.

1.5.2 Livros sobre história dos logaritmos

Nos livros: *A História dos logaritmos de Napier a Euler* de Charles Naux (1966; 1971), o autor faz uma pesquisa científica e minuciosa sobre a história dos logaritmos. Nesses trabalhos, o autor caracteriza como surgiram os logaritmos e como foram recebidos pela comunidade científica desde sua criação até a sua formulação algébrica demonstrada por Euler no século XVIII. Nesse estudo, seu autor menciona a criação dos logaritmos de Napier, Briggs e Burgi e sua difusão pelos países da Europa e como os logaritmos se tornaram um dos principais meios de estudos científicos da Matemática.

No livro *Napier tercentenary memorial volume* (Volume memorial do tri-centenário de Napier) de Cargill Gilston Knott (1915)**,** o autor descreve um estudo histórico e epistemológico dos logaritmos. Inicialmente, Knott (1915) comenta sobre a vida e as principais obras de Napier e como criou os logaritmos. Também comenta como Briggs e Burgi inventaram seus logaritmos e como tais estudos foram significantes para a Astronomia e para a Navegação do século XVII. Diante dessas invenções, ele ressalva como esses estudos foram recebidos pelos principais contemporâneos e cientistas da época e como esse tema foi importante no progresso da Matemática e do cálculo diferencial e integral.

No livro *Modern instruments and methods of calculation: A handbook of the napier tercentenary exhibition* (Modernos instrumentos e métodos de cálculo: Um manual de exibição do tri-centenário de Napier) de E. M. Horsburgh (1914), o autor desenvolve um estudo histórico e epistemológico sobre os logaritmos. Inicialmente, também propõe uma biografia sobre a vida e as principais invenções de Napier e de como chegou a desvendar e a se tornar o primeiro homem a criar os logaritmos. Em seguida, retrata como a invenção de Napier tornou-se um dos principais instrumentos úteis no progresso da astronomia, navegação e na simplificação dos cálculos trigonométricos realizados pelos estudiosos da época. Posteriormente, descreve como os logaritmos foram significantes no progresso da ciência e nas principais invenções de instrumentos modernos como a calculadora mecânica e posteriormente científica, bem como a computação gráfica. Ao finalizar, Horsburgh (1914) apresenta como os logaritmos foram importantes no estudo e no auxílio do cálculo diferencial e integral do século XVIII.

No livro *Introdução à História da Matemática* de Howard Eves (1997), o autor utiliza uma narrativa histórica que abarca a história da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos. O livro adota recursos pedagógicos, como exercícios ao fim de cada capítulo. Alguns capítulos são introduzidos por panoramas culturais da época abordada. O autor, num de seus capítulos panorâmicos, comenta como John Napier desvendou os logaritmos em termos práticos num dispositivo moderno através de duas semi-retas envolvendo progressões aritméticas e geométricas. Esse dispositivo foi usado por Euler no século XVIII para demonstrar que os logaritmos definidos por Napier (Número **e**[2]) é a base do logaritmo natural.

[2] O número **e** é conhecido como número de Euler. Isto ocorreu no século XVIII, pois foi o primeiro a demonstrar em termos algébricos, por meio de uma sequência o valor expressivo para esse número. Há séria controvérsia de

No livro *História da Matemática* de Carl Benjamin Boyer de 1974, o autor propõe uma obra didática que reúne os principais estudiosos, pensamentos e desenvolvimentos da Matemática e também no que se refere a sua relação com ciências correlatas, principalmente a física e as engenharias. Na caracterização e estudo bibliográfico desses pensadores, o autor faz uma análise da vida de Napier e como ele formulou a ideia de logaritmos como esse estudo foi importante para o progresso científico da Matemática.

No livro *El Comienzo de las Matemáticas Modernas (O início da Matemática Moderna)* de Jean Paul Collette (1985), o autor descreve um estudo sobre diversos estudiosos que foram importantes no processo de construções, pensamentos refentes a diversos temas no campo da Matemática ao longo da história. Dentre esses estudiosos, ele relata um estudo sobre a vida de Napier e suas principais invenções. Dentre as suas magníficas criações, o autor destaca os logaritmos, que foram importantes na simplicação dos cálculos multiplicativos e trigonométricos da época, ajudando os astrônomos no progresso significativo da ciência.

Em *A Matemática no século de Andrea Palladio* (MENDES et al, 2008), há uma coletânea de alguns estudos desenvolvidos pelos pesquisadores do grupo de pesquisa, Matemática e cultura, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. O capítulo II do referido livro apresenta um estudo histórico e epistemológico dos logaritmos de Napier, Briggs e Burgi. Para isso, seus autores Mendes e Soares (2008) caracterizam como esses personagens foram importantes e incisivos para a criação dos logaritmos no século XVII.

No livro *Os logaritmos na cultura escolar brasileira* de Maria Ângela Miorim e Antônio Miguel (2002), os autores tratam da história do ensino de logaritmos nos séculos XIX e XX. Para tanto, buscam distinguir entre duas concepções de logaritmos: o aritmético e o algébrico-funcional. Mostram ainda como o ensino dos mesmos progrediu, embora de forma não-linear, da primeira para a segunda concepção no período assinalado. Durante a exposição desta história, várias práticas dos logaritmos são mencionadas.

No livro intitulado *Trabalho monográfico sobre os logaritmos* de Magalhães (2003) descreve-se um estudo monográfico sobre os logaritmos, abordando

---

que esse nome tenha sido designado em homenagem ao criador dos logaritmos, John Napier, sendo conhecido como neperiano, por parte de alguns estudiosos do século XIX e de alguns autores de livros didáticos do século XX.

resumidamente como foram inventados os logaritmos de Napier e Briggs. Baseado nisso, o autor enfatiza como os logaritmos são importantes em outros campos do conhecimento, que é a principal característica de seu trabalho sobre os logaritmos. Ainda possibilita um estudo sobre a régua de cálculo e uma diversidade de atividades contextualizadas sobre o tópico realizado.

Em *Função logarítmica* de José Valdir Floriani (1999), seu autor apresenta um estudo detalhado sobre a evolução do conceito de logaritmos, o modo de construção de tabelas, exercícios operatórios e aplicações em situações reais da vida. O autor procura oferecer subsídios para o professor de Matemática nos níveis fundamental e médio a fim de que possa interagir com os alunos e ajudar no aperfeiçoamento de seus conhecimentos.

1.5.3 Livros sobre história na Educação Matemática

No livro *História na Educação Matemática: propostas e desafios* de Antônio Miguel e Maria Ângela Miorim (2004) seus autores discutem diversos temas que interessam ao educador matemático. Dentre esses temas estão a história da Matemática e a história da Educação Matemática que, nesse trabalho, se relacionam com a Educação Matemática. Os autores também apresentam uma visão sobre o que é história e abordam esse difícil tema de uma forma acessível e compreensiva..

No livro *História da Matemática em atividades didáticas* (BRITO et al, 2005), seus autores focalizam um eixo comum, que é o ensino de Matemática através de atividades didáticas nas quais a história da Matemática tem um papel fundamental. Os autores se debruçam sobre três temas distintos da Matemática escolar: Geometria, Trigonometria e Números Irracionais. Todos estes temas têm uma importância fundamental para o ensino-aprendizagem da Matemática escolar devido a estarem entre aqueles nos quais professores e alunos têm dificuldades em desenvolvê-los.

No livro *História como um agente de cognição na Educação Matemática* de (MENDES et al, 2006), seus autores oferecem um debate sobre a história da Matemática tendo como direcionamento o processo gerativo de conhecimentos. A história da Matemática retratada nesse livro é compreendida como um processo dinâmico e inacabado, que é responsável por reorganizar historicamente a Matemática escolar à medida que são articuladas as três dimensões do conhecimento: cotidiano, escolar e científico. Os autores procuram focalizar o eixo norteador das discussões presentes neste livro, que é entender e aprender a relacionar a história da Matemática à cognição matemática e à aprendizagem matemática. O livro traz uma contribuição enriquecedora para a formação de professores de Matemática, quando aborda como o conhecimento é construído na perspectiva escolar, nas interações com o indivíduo e em situações que envolvam o saber e o fazer.

No livro *Investigação Histórica no ensino de Matemática* de Iran Abreu Mendes (2009), seu autor demarca dois campos de pesquisa provenientes da Educação Matemática como abordagem de ensino, que é o uso da história da Matemática em sala aula e a investigação histórica. É delineado pelo autor um bloco de estudos e atividades temáticas para uso em sala de aula e com base na abordagem histórica e investigativa, aponta futuros rumos e sugestões didáticas para os professores. Ao final do livro o autor propõe uma lista de temas para investigação histórica nos três níveis de ensino, seguido de uma bibliografia comentada sobre a história da Matemática ou temas afins, como sugestões de leituras para os professores, considerando que as mesmas podem contribuir para estudos futuros, além de vindicar *home pages* sobre o tema para os professores.

1.6 FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Para nortear os caminhos na busca das respostas ao problema da pesquisa proposta nesse trabalho, recorro a estudos bibliográficos, constituídos principalmente de livros e artigos científicos de autores que tratam de aspectos ligados à Educação Matemática e História da Matemática, bem como da abordagem de livros didáticos relacionados ao tema desta pesquisa e sobre as ações do professor em sala de aula. Freire (1996) nos possibilita uma reflexão crítica sobre a prática docente do professor quanto à exigência com o ensino.

> Por isso, é fundamental, que na prática de formação, o aprendiz de educador assuma que o indispensável pensar certo não é presente dos deuses nem se acha nos guias de professores iluminados, pelo contrário, o pensar certo supera o ingênuo que deve ser produzido pelo aprendiz em comunhão com o professor formador. (FREIRE, 1996, p. 17).

A preocupação de Freire é chamar a atenção no que se refere a conduzir o ensino, colocando o professor formador como um ser que saiba socializar o conhecimento. Para que se torne real, é necessária uma reflexão crítica sobre a prática. Assim, ao professor advém o significado pleno e ético do que seja ensinar e aprender no contexto educacional.

De acordo com Ferreira (2006 p. 17-20), entretanto, “o professor não é o único detentor do conhecimento, nem o aluno uma página em branco onde se grava os diversos exercícios repetitivos”. Houve uma mudança quanto ao saber em nossos dias. Assim, o professor deve estar, constantemente, refletindo sobre sua prática, buscando através de recursos de leitura, em cursos de formação continuada, alternativas para enfrentar os problemas de sala de aula.

Nesse sentido, Fiorentini e Nacarato (2005) afirmam que o professor:

> [...] constitui-se num agente reflexivo de sua prática pedagógica, passando a buscar, autônoma e/ou colaborativamente, subsídios teóricos e práticos que ajudem a compreender e a enfrentar os problemas e desafios do trabalho docente. (FIORENTINI; NACARATO, 2005, p. 9 apud FERREIRA, 2006, p. 17).

Tais informações nos levam a compreender que não basta apenas ser consciente dos problemas de sala de aula. É necessário, também, buscar contribuições teóricas que permitam possíveis soluções além da percepção comum, pois o professor é o personagem central na expansão do conhecimento, cuja tarefa incumbe a de socializar, procurando desenvolver nos alunos habilidades e atitudes. Afinal de contas, o professor é o principal representante capaz de planejar, organizar e a propor problemas de modo que os alunos reflitam, estimulem a capacidade cognitiva na busca de soluções, que servem tanto para o aprendizado quanto para a vida profissional.

Nessa perspectiva, há uma preocupação quanto à exigência em relação ao professor, no que se refere ao processo de ensino. O professor precisa atualizar-se constantemente para que se torne um viabilizador de conhecimento. Essa renovação do conhecimento faz com que o profissional de educação assuma seu papel de formulador, organizador e atualizador de conteúdos, deixando de lado os repasses de informações que não colaboram para o desenvolvimento do cidadão.

Segundo Demo (1995, p. 57 apud FERREIRA, 2006, p. 19), “de tempos em tempos o professor deveria suspender suas atividades e passar um semestre estudando, para fazer jus ao processo inovador da educação, baseado na atualização do conhecimento”. Então, o desafio consiste em mostrar que os professores precisam acompanhar as mudanças econômico-sociais e tecnológicas sofridas pela sociedade. Para isso, é necessário que o professor mantenha-se ativo no seu papel de pesquisador.

Essa preocupação constante com a inovação do professor faz com que ele assuma o seu dever no papel disciplinar, tendo em vista possíveis melhorias em sua prática educacional. Essas mudanças constantes pelas quais passa a sociedade obrigam os professores e as escolas a reconsiderarem seu papel e a repensarem o modelo educacional pelo qual se trabalha. Contudo, percebe-se que a maioria dos professores transformou-se em meros especialistas em transferir conhecimentos adquiridos e esqueceram a qualidade de um profissional inovador que é a de desenvolver no aluno a criatividade e a capacidade crítico-reflexiva.

Nesse contexto, outro aspecto importante a ser considerado refere-se aos conteúdos que os professores aprendem na graduação. Os conteúdos abordados seguem um roteiro proposto pela universidade que tem como meta fornecer subsídios para a atuação do professor no processo de ensino.
Libâneo (1994) esclarece o que abrange esses conteúdos:

> Conteúdos de ensino superior são o conjunto de conhecimentos, habilidades, hábitos, modos valorativos e atitudinais de atuação social, organizados pedagógica e didaticamente, tendo em vista a assimilação ativa e aplicação pelos alunos na sua prática de vida. Englobam, portanto: conceitos, ideias, fatos, processos, princípios, leis científicas, regras; habilidades cognoscitivas, modos de atividade, métodos de compreensão e aplicação, hábitos de estudo, de trabalho e de convivência social; valores, convicções e atitudes (LIBÂNEO, 1994, p. 128).

Os conteúdos em si retratam a experiência social da humanidade no que se refere a conhecimento e modos de ação, transformando-se em instrumentos que serão úteis para que os alunos assimilem, compreendam e enfrentem as exigências teóricas e práticas da vida social.

É necessário, entretanto, que o professor reflita sobre o seu dever e como esses conteúdos podem ajudar a reelaborar o seu planejamento, de modo que propiciem a construção dos conhecimentos, ou seja, transformem os saberes científicos em saberes escolares, de maneira que estes tenham um significado para os alunos. Essa questão é um pouco desafiadora para o professor, pois não é tão fácil superar o modelo de ensino desvinculado dos aspectos sociais. É preciso, portanto, que o professor conheça a área em que atua, sem formalidades e regras, utilize esses conhecimentos para que desperte no aluno o interesse pelo conhecimento e pela sua aprendizagem.

Faz-se necessário, então, que os professores tornem-se mais aptos no que concerne ao ensino, adequando-o às necessidades e interesses dos alunos, principalmente daqueles que almejam aprender de forma significativa. Percebe-se então a necessidade de os professores desenvolverem as suas habilidades além daquelas apresentadas no curso de graduação. O objetivo principal é despertar nos alunos o interesse incessante, não somente para prestarem atenção nas aulas, mas para que eles compreendam o que está sendo trabalhado na sala de aula, para que possa verificar a utilidade dos saberes escolares**.** Conforme argumenta Fiorentini e Nacarato (2005):

> Do professor têm sido exigidas competências para as quais não está preparado, pois sua formação inicial não lhe deu e a continuada – quando existe – não aborda essas questões. Além de ministrar competentemente o conteúdo de sua disciplina, o professor deve exercer funções que deveriam ser de outras áreas: assistente social, psicólogo, orientador sexual... Enfim deve ser capaz de lidar com as questões emocionais, afetivas, sociais e cognitivas de seus alunos. (FIORENTINI; NACARATO, 2005, p. 97 apud FERREIRA, 2006, p. 20).

Diante de tal responsabilidade, o professor deve sempre procurar agir com harmonia, ou seja, a relação aluno-professor, aluno-aluno sempre tem que existir e ser correspondida no processo de ensino e aprendizagem. As devidas funções que o professor exerce como orientador e colaborador no processo da aprendizagem fazem parte do seu desempenho profissional e de sua conduta frente ao ensino.

Libâneo (1994, p. 71) apresenta um comentário a respeito de três objetivos considerados essenciais para a realização do trabalho docente, ou seja, na ação pedagógica do professor:

> - Assegurar aos alunos o domínio mais seguro e duradouro possível dos conhecimentos científicos;
> - Criar condições e os meios para que os alunos desenvolvam capacidades e habilidades intelectuais de modo que dominem métodos de estudo e de trabalho intelectual visando a sua autonomia no processo de aprendizagem e independência de pensamento;
> - Orientar as tarefas de ensino para objetivos educativos de formação de personalidade, isto é, ajudar os alunos a escolherem um caminho na vida, a terem atitudes e convicções que norteiem suas opções diante dos problemas e situações da vida.

Nesse contexto, a pesquisa tem como foco a Educação Matemática, voltando-se especificamente para o ensino de Matemática, na perspectiva de organizar um trabalho no qual os alunos sejam colocados diante de situações que realmente os desafiem e que os auxiliem no desenvolvimento da autonomia intelectual, de forma que os conhecimentos adquiridos na escola possam lhes proporcionar condições para compreender e participar do mundo.

Numa visão geral, a Educação Matemática é:

> [...] área educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição dos fenômenos referentes ao ensino e aprendizagem da matemática, nos diversos níveis de escolaridade, quer sejam em dimensão teórica ou prática (PAIS, 2002 p. 10).
>
> [...] uma atividade essencialmente pluri e interdisciplinar, constituindo-se de estudos e pesquisas dos mais diferentes tipos, cujas finalidades principais são: desenvolver, testar e divulgar métodos inovadores de ensino; elaborar e implementar mudanças curriculares, além de desenvolver e testar materiais de apoio para o ensino de matemática (MENDES, 2009, p. 3)

Essa pesquisa está centrada na área da Educação Matemática, cuja ênfase é o estudo das situações didáticas ligadas ao ensino de Matemática. Esta área de estudos e pesquisas, conforme comenta Mendes (2009, p. 3),

> busca oferecer subsídios teórico-metodológicos para que professor e aluno superem as dificuldades encontradas durante o processo educativo da matemática nos diferentes níveis de ensino e, principalmente, nos cursos de formação de professores.

A Educação Matemática tem como objetivo fundamental tornar o ensino mais eficaz e proveitoso. Nesse sentido, o desenvolvimento desta pesquisa está relacionado ao uso da história na Educação Matemática, tendo como ponto específico o contexto escolar.

Atualmente, uma das abordagens didáticas que tem sido apontada por pesquisadores da Educação Matemática como uma aliada na superação das dificuldades conceituais dos alunos é a história da Matemática. Há, entretanto, uma série de controvérsias de estudiosos e críticos quanto ao uso dessa alternativa didática no ensino de Matemática. Muitas dessas críticas apontam que tal abordagem de ensino não é suficiente para garantir ao aluno uma aprendizagem satisfatória.

Diante de alguns desses posicionamentos, bem como, da realidade na qual se encontra o ensino atual, considera-se necessário experimentar alternativas de mudança no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, principalmente, no que diz respeito ao modo como o aluno encara a Matemática em sala de aula.

Tendo em vista contribuir na superação de problemas como esses, decidiu-se explorar situações históricas que possibilitem uma aprendizagem da matemática. Nesse sentido, Mendes (2006) menciona que:

> A história é, ao nosso ver, uma tentativa de responder às perguntas acerca do processo de construção das informações apresentadas no presente. A história é escrita constantemente não apenas porque descobrimos fatos novos, mas também porque a nossa perspectiva sobre o que é um fato histórico muda, ou seja, sobre o que é importante do ponto de vista do processo histórico. À medida que passamos a conhecer e compreender o desenvolvimento da sociedade em sua trajetória de transformação, aprendemos novos meios de compreender e explicar um mesmo fenômeno. Esse é um procedimento típico do desenvolvimento epistemológico da Matemática. (MENDES, 2006, p. 81).

Ainda, de acordo com Mendes (2009):

> Os professores pesquisadores consideram que o conhecimento da história da Matemática é essencial para que eles adquiram mais segurança no ensino dos conteúdos matemáticos. Para que isso ocorra, é necessário conhecer e entender a Matemática como criação humana, construída de perguntas que surgiram de diferentes situações e contextos que geraram problemas práticos do cotidiano. Argumentaram ainda, que a história da Matemática possibilita ao professor uma explicação melhor dos conteúdos, pois conhecendo bem essa história, eles terão os subsídios suficientes para responder às perguntas surgidas na sala de aula, dando aos alunos sólidas noções do significado e aplicações do assunto, tornando a Matemática mais agradável e cheia de porquês a descobrir. (MENDES, 2009, p. 5-6).

A História da Matemática inclui-se, nessa pesquisa, como uma alternativa subsequente para descrever como foram construídos historicamente os logaritmos que são abordados pela Matemática escolar. A esse respeito, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apresentam uma caracterização a respeito do uso da História da Matemática no ensino de Matemática:

> Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propiciar compreensão mais ampla das trajetórias dos conceitos e métodos da ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a ser incorporado ao rol dos conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação dos fatos ou biografias de matemáticos famosos (BRASIL, 1998, p. 23).

Embora para os autores dos Parâmetros Curriculares Nacionais, a história da Matemática seja tratada como assunto específico ou conteúdo, segundo Miguel e Miorim (2004, p. 16), isso “seria insuficiente para contribuir no processo de ensino-aprendizagem”.

Entretanto, quanto à apresentação de tópicos de História da Matemática em sala de aula, essa abordagem tem sido defendida por um número expressivo de matemáticos, historiadores em Matemática e investigadores em Educação Matemática de diferentes épocas. Dentre esses autores, encontram-se Simons (1923), Hassler (1929), Wiltshire (1930), Humphreys (1980), Meserve (1980), Booker (1988) e Swetz (1989), Brito et al (2005), Mendes, et al (2006), Mendes (2001a; 2001b; 2009) e Miguel e Miorim (2004), dentre outros. Para esses autores, o conhecimento histórico da Matemática desperta o interesse do aluno pelo conteúdo matemático que lhe está sendo ensinado.

A epistemologia usada nessa pesquisa atua como recurso ou fonte histórica para descrever como foi desenvolvido o conceito, propriedades e relações envolvendo os logaritmos, tendo como meta o ensino e a aprendizagem da Matemática. Miguel e Miorim (2004) comentam por que os historiadores da Matemática e os investigadores em Educação Matemática defendem o uso da história dessa maneira.

Nesse sentido, Miguel e Miorim (2004, p. 61) apresentam alguns argumentos de natureza epistemológica:

> - Fonte de seleção e constituição de sequências adequadas de tópicos de ensino;
> - Fonte de seleção de métodos adequados de ensino para diferentes tópicos da matemática escolar;
> - Fonte de seleção de objetos adequados para o ensino-aprendizagem da matemática escolar;
> - Fonte de seleção de tópicos, problemas ou episódios considerados motivadores da aprendizagem da matemática escolar;
> - Fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino-aprendizagem da matemática escolar na atualidade;
> - Fonte de identificação de obstáculos epistemológicos de origem epistemológica para se enfrentar certas dificuldades que se manifestam entre os estudantes no processo de ensino-aprendizagem da matemática escolar;
> - Fonte de identificação de mecanismos operatórios cognitivos de passagem a serem levados em consideração nos processos de investigação em Educação Matemática e no processo de ensino-aprendizagem da matemática escolar.

Frente às possibilidades expostas, esta pesquisa centrou-se no estudo histórico e epistemológico dos logaritmos, tendo em vista as necessidades práticas e sociais que frequentemente servem de estímulo ao desenvolvimento de ideias matemáticas, assim como a percepção, por parte do professor, da natureza e do papel desempenhado pela abstração e generalização na história da Matemática.

O uso da história desenvolvida nesse trabalho se configura em uma associação com o conhecimento atualizado da Matemática e suas aplicações, o que pode levar o estudante a perceber a Matemática como uma criação humana, buscando razões pelas quais é feita, assim como as conexões que existem entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

De acordo com Miguel (1993), deve-se levar em consideração as possibilidades de trabalhar de forma compreensiva e significativa nessas abordagens didáticas contemporâneas, assim, a história dará então oportunidades para que tanto professores quanto pesquisadores em Educação Matemática tenham a oportunidade de reinterpretar algo que ainda não interpretaram em primeira instância.

> [...] como podem os aprendizes da atualidade legitimar significativamente o estilo contemporâneo se o confrontaram com os diferentes estilos que o precederam e nem apreenderam o núcleo fundamental daquilo que permanece e ao qual esses diferentes estilos se aplicam em última instância (MIGUEL, 1993, p. 92).

A história pode ser um recurso viável para se conseguir o objetivo de formação, pois seu estudo busca oferecer aos professores uma interpretação dos fatos além da abordagem dos conteúdos matemáticos. Nessa perspectiva, “mesmo com algumas dificuldades, sua utilização pode tornar a aprendizagem significativa, mobilizando o aluno e estabelecendo entre ele e o objeto de conhecimento uma relação de reciprocidade” (BRASIL, 1999, p. 252 apud OLIVEIRA, 2006, p. 22).

Outro fator importante dessa pesquisa, de acordo com Miguel e Miorim (2004), é de que modo a história aparece como uma tentativa de dar significado ao ensino da Matemática presente nos livros didáticos de Matemática no final do século XIX e começo do XX.

O estudo indica ainda ser necessário que os livros didáticos articulem pedagogicamente a história da Matemática para que o professor possa criar condições que possibilitem o aluno desenvolver atitudes e valores mais favoráveis em relação a esse conhecimento, a fim de que passe a ter um olhar mais crítico e reflexivo sobre os conteúdos de Matemática.

Apoiando-se no trabalho de Miguel e Miorim (2004), D`Ambrósio (1996) e nos PCN do Ensino Médio (Brasil, 2000), a pesquisa ora desenvolvida indica que a História da Matemática vem sendo predominantemente abordada apenas com característica informativa, deixando de explorar as categorias lúdica, situações-problema, sem mostrar, ainda, a evolução e concepções ao longo do tempo, para que se possa utilizar com fins pedagógicos em sala de aula.

Neste capítulo, apresentei a problemática da pesquisa seguida de algumas questões a serem respondidas, dentre as quais constam duas: como os aspectos históricos relativos ao desenvolvimento conceitual dos logaritmos são abordados nesses livros? E, como os aspectos histórico-conceituais poderão nortear uma abordagem didática que complemente o livro didático?

No próximo capítulo, descrevo um estudo histórico e epistemológico dos logaritmos de modo que possa complementar a abordagem presente nos livros didáticos de Matemática apontados nesta pesquisa, bem como o significado etimológico da palavra logaritmo e sua difusão em alguns países ocidentais.

2. UM ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO DOS LOGARITMOS

Neste capítulo, apresento um estudo histórico-epistemológico sobre os logaritmos, cuja finalidade é articular o professor no desenvolvimento de uma abordagem mais conceitualmente ampla desse assunto, a qual possa lhe dar condições de reorientação de suas ações didáticas, visando, em especial, às alternativas propostas nos livros didáticos pesquisados, bem como as sugestões para atividades em sala de aula. O estudo fundamenta-se em Napier e Briggs e, consequentemente no trabalho de Jobst Burgi em sua ampliação conceitual e aplicação. Ainda apresento o significado etimológico da palavra logaritmo, sua divulgação e difusão nos principais países Europeus no século XVII.

2.1 SOBRE A VIDA DE NAPIER E A CRIAÇÃO DOS LOGARITMOS

Assim, para maior aprofundamento do estudo e compreensão da análise conceitual dos logaritmos, faz-se necessário entender o contexto histórico e epistemológico dos logaritmos, seus criadores e disseminadores, bem como as implicações e aplicações desse princípio operatório em outras áreas da ciência.

Ao se tomar como referência aquele que é considerado o criador ou inventor dos logaritmos – John Napier –, constata-se o quanto seus estudos foram essenciais para a descoberta dos logaritmos. De acordo com Horsburgh (1914):

> [...] John Napier, o inventor dos logaritmos, nasceu em 1550, no castelo de Merchiston, perto de Edimburgo. Embora ele deva ter gasto uma parte considerável da sua vida na propriedade de sua família em Lennox e Menteith, ele tinha uma residência em Gartness, a tradição que reivindica Gartness para sua terra natal deveria ser abandonada. (HORSBURGH,1914, p. 2). (Tradução Nossa)

Por ser de família rica, Jonh Napier tinha motivos para não estudar e sequer cursar uma universidade, mas pensou diferente: fitou seus estudos e buscas numa das melhores universidades do continente europeu, em Saint Andrew, onde não concluiu o curso por motivos familiares e religiosos de sua época. Aos treze anos de idade perdeu a sua mãe. Ainda conforme Horsburgh (1914):

> [...] Em 1563, a mãe de John Napier morreu, mas antes da sua morte tinha se matriculado em St Salvator's College, St Andrews, e, evidentemente, por um comunicado realizado por sua mãe, ele foi conduzido ao colégio interno sob o encargo especial de João Rutherfurd. Dos alunos cujos nomes sucedem nos cadernos de matrícula de St Salvator's em 1563, não existe nenhum, exceto Napier, que foi depois distinguido como estudioso,

> evangelista e estadista. Se Napier tivesse seguido o curso normal teria o seu nome aparecido na lista dos destacados de 1566, e dos Mestres das Artes de 1568, mas nenhum vestígio foi encontrado e a única conclusão é que a sua presença na residência St Salvator's foi relativamente curta. Rutherfurd, principalmente, parece ter sido um homem de realizações respeitáveis, mas não haveria dúvida de que ele não estava em St Andrews quando Napier adquiriu um vasto conhecimento da literatura clássica e foi estabelecida mediante o caminho que o conduziu as suas descobertas e invenções na área da matemática. (HORSBURGH,1914, p. 4). (Tradução Nossa)

De acordo com Naux (1966), ainda sem título universitário, Napier voltou a sua terra natal, em Gartness, onde era proprietário de várias terras. Ele era considerado um gênio. Mesmo sem ter um curso universitário, não deixou de estudar e pesquisar, prosseguindo seus estudos no ramo da Matemática e da teologia.

Segundo Knott (1915), foi na residência onde vivia, em Gartness, que Napier recebeu fortes impulsos sobre estudos teológicos ao longo de sua vida e uma atenção especial aos estudos sobre a Matemática. Suas pesquisas foram sobre o Apocalipse, em que afirmava que o Papa era o anticristo. Dentre os esforços sobre o estudo teológico, ele não podia descartar a Matemática, pois também se familiarizava com os cálculos e invenções.

Napier era também considerado um dos herdeiros dessa família e muito amado no palácio onde vivia a família. Após a morte de seu pai, ele veio realizar seus principais objetivos com suas pesquisas e principais invenções no campo da Matemática. Napier morreu em sua residência, em Gartness, em 1617.

Napier deteve seu estudo na busca de invenções matemáticas que ajudassem nos cálculos e o país onde nascera. Horsburgh (1914) a esse respeito ainda enfatiza:

> [...] Inventividade de Napier não se limitou ao pacífico domínio da matemática, mas mostrou-se eficaz na invenção de instrumentos de guerra. Mark Napier designa um fascículo de um documento conservado na Recolha do Balcão do palácio de Lambeth, no qual John Napier descreve algumas: "secretas invenções, rentável e necessária nestes dias para a defesa daquele lugar e da presença de estranhos, inimigos da verdade de Deus e da religião". As invenções consistem de: (i) um espelho para queimar os inimigos "No navio a qualquer distância, (ii) uma peça de artilharia destruindo tudo em volta de um arco de um círculo, e (3) uma roda de carruagem de metais construídos de forma que os seus ocupantes poderiam circulá-lo facilmente e rapidamente, enquanto ocorria a queima de pequenos orifícios. Sir Thomas Urquhart afirma que: Napier construiu um motor que ele testou em uma grande planície, na Escócia "para a destruição de um grande número de rebanhos de gado e rebanhos de ovelhas, que

> algumas eram afastadas pela metade, por todos os lados da milha, e algumas por toda a milha". Seria perigoso, no entanto, fazer qualquer afirmação sobre a resistência de Sir Thomas dessa prova, e sabemos muito pouco sobre estas invenções para formar qualquer concepção definida, mas existe pouca dúvida de que Napier tenha adquirido bastante habilidade mecânica. (HORSBURGH, 1914, p. 7-8). (Tradução Nossa).

Apesar de muita dedicação e estudos sobre secretas invenções, a maior de todas foi o logaritmo. Ainda estando na Escócia, Napier propôs uma magnífica invenção, que ficou reconhecida naquele país pelo seguinte nome: Barras de Napier ou Ossos de Napier. Conforme comenta Collette (1985):

> No final do século XVI, Napier, preocupado porque os cálculos eram grandes e difíceis, e freavam o progresso científico, concentrou todos os seus esforços em desenvolver métodos que pudessem simplificá-los. Com este fim, escreveu em sua *Rabdologia*, onde descreve a utilização de barras e quadrinhos para efetuar somas de parcelas parciais. Os quadrinhos de Napier eram tábuas de multiplicações montadas sobre barras de secções quadradas (COLLETTE,1985, p. 303).

Ainda conforme Knott (1915), as barras de Napier, ou ossos como eram conhecidos, eram compostos por dez quadrilongos pedaços de madeira, como mostra a figura 1.

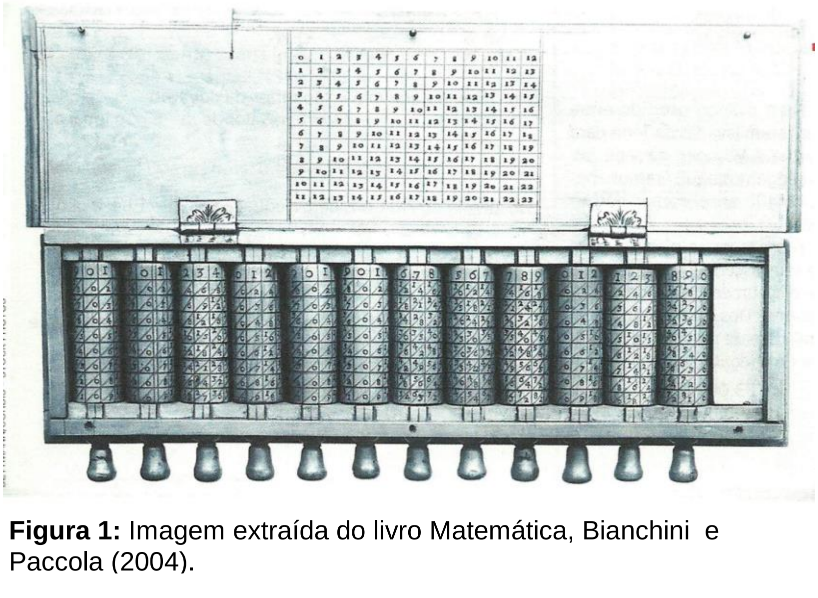


Figura 1: Imagem extraída do livro Matemática, Bianchini e Paccola (2004).

Esse trabalho proposto por Napier estava apoiado no trabalho de Luca Paccioli (1445 – 1517) sobre o método de Gelosia, que consistia em resolver multiplicação usando somas parciais. As Barras de Napier desvendaram os mistérios que freavam progresso científico, porque os seus cálculos eram grandes e difíceis. Então, o trabalho rendeu elogios por parte de alguns cientistas da época por essa maravilhosa invenção. De acordo com Collette (1985) esse trabalho foi bastante reconhecido na Escócia.

Segundo Miguel e Miorim (2002) e Boyer (1974), outro fator importante que contribuiu para que Napier desvendasse os logaritmos foi um método chamado de prostaférese (prosthaphaeresis – palavra grega que significa adição e subtração) que consistia em transformar multiplicações em adições e subtrações por meio de fórmulas trigonométricas, conhecidas como fórmulas de Johannes Werner (1468 – 1528), pelo fato de esse matemático alemão tê-las usadas com tal propósito. As principais fórmulas de Werner foram:

$$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos (A - B),$$
$$2 \operatorname{sen} A \cos B = \operatorname{sen} (A + B) + \operatorname{sen} (A - B),$$
$$2 \cos A \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} (A + B) - \operatorname{sen} (A - B),$$
$$2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos (A - B) - \cos (A + B)$$

As relações de Werner tinham uma ligação restrita com as barras de Napier. Foi exatamente inspirado nessa teoria que ele constatou que aritmeticamente era possível transformar produtos em somas usando relações trigonométricas. Dessa forma, essas fórmulas ajudaram Napier a representar os logaritmos em termos trigonométricos. Esse método tornou-se bastante conhecido, pois era usado pelos astrônomos da época, tais como: Kepler, Ticho Brahe, Burgi entre outros, na resolução e na simplificação dos cálculos astronômicos. Mas essas relações deixavam a desejar em alguns cálculos o que proporcionou a Napier com a criação dos logaritmos, ajudarem no auxílio dos cálculos trigonométricos.

Segundo Collette (1985), depois de uma série de estudos, Napier propôs uma tábua de logaritmos em termos práticos e trigonométricos. Como os logaritmos inventados por Napier não possuíam base, ele dedicou pelo menos vinte anos a essa teoria, tendo finalmente explorado os princípios de seu trabalho em termos geométricos publicando-os em 1614, como veremos posteriormente. Horsburgh (1914) ainda ressalta que:

> Nos dias de hoje talvez seja difícil formar uma concepção adequada da invenção de Napier; Sem dúvida, a invenção dos logaritmos ficou marcada em uma época na história da ciência. É geralmente admitido que a Principia de newton seja uma das grandes obras que marcou um rumo nesse sentido, não meramente da ciência moderna em aspecto prático, mas de pensamento científico em relação a filosofia e a teologia. Mas a dívida de

> Newton para Napier, embora indireta, foi muito real, porque Newton era essencialmente dependente nos resultados dos cálculos de Kepler, e estes cálculos podem não ter sido concluída nos momentos de sua vida com a ajuda que os logaritmos lhe ofereciam. Kepler sentiu profundamente doloroso o encargo imposto sobre ele pelos velhos métodos, e foi correspondentemente gratificado pelo alívio que os novos significados do cálculo eram fornecidos. Sem os logaritmos, nenhuma ajuda similar nas observações astronômicas poderia ter sido reduzida, se em tudo, a enorme dificuldade e o desenvolvimento da ciência moderna poderia ter seguido um rumo muito diferente. (HORSBURGH, 1914, p.1). (Tradução Nossa)

Assim, depois de estudar diferentes métodos de cálculo e descrever uma rabdologia que ajudou a simplificar cálculos enormes enfrentados pela comunidade científica, Napier no século XVII descreveu os logaritmos em termos trigonométricos, conforme veremos adiante. O logaritmo definido por Napier é bem diferente daquele que é usado hoje, principalmente no estudo de função. A sua ideia envolvia uma aritmética trigonométrica em termos de ângulos sucessivos.

O surgimento do logaritmo foi desenvolvido a partir de uma análise feita por Napier no final do século XVII, em que um dos grandes desafios da Matemática consistia em encontrar meios de simplificar os cálculos numéricos, visando em especial às necessidades da Astronomia e da Navegação.

Assim, Napier propôs sua primeira análise a respeito do logaritmo através de uma experiência prática e de acordo com Eves (1997), em linguagem moderna, concebeu os seus logaritmos da seguinte maneira:

> Imaginemos os pontos C e F percorrendo respectivamente o segmento AB e a semi-reta DX (como mostra a figura 18 a seguir), partindo ao mesmo tempo do ponto A e do ponto D, com a mesma velocidade inicial, admitamos ainda que, numericamente, a velocidade de C seja dada sempre pela medida de CB e que a velocidade de F seja constante; nessas condições Napier definiu como logaritmo de x = CB o número y = DF. Assim, explicitamente, nesse conceito não intervém a idéia de base. (EVES, 1997, p. 243)

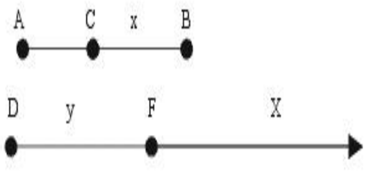


Figura 2: Imagem retirada do livro, Introdução à história da matemática, Eves (1997).

Com base na experiência adotada por Napier foi possível provar que y = 10^7 log $_{1/e}$ $(\frac{x}{10})$. A potência 10^7 surge aí porque Napier considerava AB = 10^7.

Sabendo que AB = 10^7, temos que AC = 10^7 – x. Como C parte de A, ao longo da linha com mesma velocidade inicial, mas só alcança velocidade numericamente constante quando:

$$\text{Velocidade de C} = CB = \frac{-dx}{dt} = x,$$

que é dado pela derivada da equação AC de x em relação ao tempo(t),

isto é, $\frac{-dx}{dt} = x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -dt$. Integrando em ambos os termos, tem-se:

$\int dx/x = \int -dt \Rightarrow \ln x = -t + C$

Pelo cálculo da constante de integração, ou seja, fazendo t = 0, obtém-se:

$$\ln x = -0 + C \Rightarrow \ln x = C.$$

Por outro lado, quando a velocidade de C alcança AC ao longo da linha, ou seja, quando velocidade de C = AC, não é constante, Napier considerou essa velocidade desprezível, então, velocidade de:

$$C = AC = 0.$$

Portanto, temos

$$AC = 10^7 - x = 0 \Rightarrow x = 10^7.$$

Logo,

$$\ln x = C \Rightarrow C = \ln 10^7.$$

Pelo que se viu anteriormente,

$$\ln x = -t + C \Rightarrow \ln x = -t + \ln 10^7 \Rightarrow t = \ln 10^7 - \ln x$$

Ao longo da outra semi-reta DX, F define-se a partir de D com velocidade nitidamente uniforme, ou seja, temos que velocidade de DF = $\frac{dy}{dt}$ = y (que foi obtido extraindo a derivada de y em relação a t). Assim, a velocidade inicial que parte de F é a mesma que C, ou seja,

$$DF = CB \Rightarrow x = y = 10^7.$$

Então, tem-se $\frac{dy}{dt} = 10^7 \Rightarrow dy = 10^7\, dt$. Integrando em ambos os termos resulta:

$$\int dy = \int 10^7\, dt => y = 10^7\, t.$$

Substituindo o valor de t, na equação, tem-se:

$y = 10^7\, t => y = 10^7 (\ln 10^7 - \ln x) => 10^7.\ln (\frac{10^7}{x}) = 10^7 \log_{1/e} (\frac{x}{10^7})$.

Então, partindo da ideia do que Napier chegou, observa-se que

$\text{Log}_{1/e} (\frac{10^7}{x}) = y => (\frac{1}{e}.)^y = \frac{x}{10^7} => e^y = \frac{10^7}{x}$ obtém-se:

$\ln e^y = \ln(\frac{10^7}{x}) => y . \ln e = \ln (\frac{10^7}{x})$. Considerando que $\ln e = 1$,

então $y = \ln (\frac{10^7}{x})$.

Logo, conclui-se que:

$y= 10^7 \ln (\frac{10^7}{x}) = 10^7 \log_{1/e} (\frac{x}{10^7})$.

Nota-se que sobre uma sucessão de tempos iguais, x decresce em progressão geométrica enquanto que y cresce em progressão aritmética. Este procedimento usado por Napier caracterizou a concepção geométrica dos logaritmos, pois definiu o logaritmo em termos de medidas geométricas ao longo das semi-retas. Então, de acordo com a relação obtida desse dispositivo, a base do logaritmo de Napier é 1/e; expõe-se a seguir como chegou nesse resultado. De acordo com a igualdade do resultado obtido, temos:

$$\ln (\frac{10^7}{x}) = \log_{1/e} (\frac{x}{10^7}).$$

Isto resulta na seguinte proporção:

$$\ln x = \log_e x.$$

O **e** funciona nessa igualdade como a base do logaritmo natural, conforme abordaram os livros didáticos que analisaremos no capítulo 3. A seguir, mostra-se como surgiu esse número **e,** qual o seu respectivo valor e por que recebe esse nome.

De acordo com Miguel e Miorim (2002), o procedimento adotado por Napier para descrever esse trabalho em termos práticos foi desenvolvido por uma ideia comparativa entre duas relações matemáticas chamadas de progressões aritméticas e geométricas. Esse método era conhecido, como relações de Stiffel, nome designado ao inventor Michael Stifel[3] (1487-1567).

As relações de Stifel consistem em observar que era possível associar os termos de uma progressão geométrica

$$b,\ b^2, b^3, b^4, ..., b^m, ..., b^n, ...$$

com as de uma progressão aritmética

$$1, 2, 3, 4, ..., m, ..., n, ...,.$$

A sua primeira observação foi que ao produto $b^m.\ b^n = b^{m+n}$ de dois termos da progressão geométrica está associada uma soma m + n dos termos correspondentes da progressão aritmética.

Mendes e Soares (2008) concluem que essa ideia fez Napier prosperar na busca de uma resolução para os cálculos logaritmos, pois a sua invenção envolvia esse procedimento. Sendo assim, para manter os termos da progressão geométrica, suficientemente próximos, de modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos, deve-se escolher um número próximo de 1, conhecido como fator de medida. Por isso, Napier fixou esse valor em $(1 - \frac{1}{10^7})$, que é igual a 0,9999999, e para evitar muitas casas decimais, ele o multiplicava por 10^7. Então, sendo N um número e L o respectivo Logaritmo, Napier assim o definia:

$$N = 10^7 \times (1 - \frac{1}{10^7})^L, \text{ ou seja,}$$

$$N = 10^7 \times [\ (1 - \frac{1}{10^7})^{10^7}\ ]^{\frac{L}{10^7}}\ .$$

Olhando para dentro do colchete e detendo a atenção na grandeza do expoente, $(1 - \frac{1}{10^7})^{10^7}$, percebe-se que quanto mais se aumenta o valor na potência de dez, mais próximo N está de um certo valor. Esse valor fixo designado por Napier caracteriza uma sequência que só é representada sob essa abordagem no século XVIII com o surgimento da álgebra.

[3] Michael Stifel é considerado o maior algebrista alemão do século XVI.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x} = \frac{1}{e}.$$

Em termos práticos, tem-se:

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} = \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Observe:

$$\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} = 0{,}3660$$

$$\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 0{,}3677$$

$$\left(1 - \frac{1}{10000000}\right)^{10000000} = 0{,}3679$$

Desse modo, aumentando-se a potência, chega-se a um valor aproximado a 0,3679 que seria exatamente o inverso do logaritmo neperiano. Isto é a base fixa de Napier. Agora, vejamos:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{-x}\right)\right]^{x}$$

seja n = -x => x = -n, tem-se

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Olhando para dentro do colchete e detendo-se na sequência, tem-se

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \mathbf{e}$$

Esse conceito de logaritmos apresentado por Napier o fez interessar-se cada vez mais pelo estudo significativo desse instrumento de cálculo. A sequência apresentada acima não convém ser demonstrada, pois ela funciona como suporte teórico para representar o significado do número **e**. Essa análise construtiva o levou adiante na primeira ideia do que fosse o número **e**, e no século XVIII e fosse demonstrada por Leonard Euler a seguinte relação:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \mathbf{e}$$

Observe, em termos práticos:

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 1{,}01^{100} = 2{,}704813...$$

$$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 1{,}001^{1000} = 2{,}7146023...$$

$$\left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 1{,}0000001^{100} = 2{,}718280...$$

e = 2,718281828459045.....

Baseado na aplicação dos termos numéricos, Euler chamou esse valor encontrado de **número de Euler**, sendo reconhecido pelos principais estudiosos como Neperiano ou número **e**. Observa-se de imediato, que o número **e** é comentado superficialmente pelos livros didáticos de Matemática, principalmente, no que refere aqueles que analisaremos no capítulo 3. É notificada, por alguns autores, a ideia do número **e,** sob a perspectiva de alguns problemas superficiais referente ao dia a dia, sem detalhar precisamente um estudo reflexivo sobre esse número.

Então, Napier desvendou os mistérios dos logaritmos e motivou os pesquisadores a estudarem cada vez mais sobre esse tema, sendo recebido muito bem pela comunidade científica. Apesar de ser uma descoberta nova, os logaritmos começaram logo e se expandiram para outros países da Europa. O trabalho de Napier começou a ser procurado, sendo traduzido em outras línguas, como será abordado posteriormente.

No século XIX, os logaritmos começaram a ser notificados em termos algébricos por meio de exponenciais, devido ao estudo de função. Essa ideia explorada começa a aparecer em livros didáticos de Matemática pela necessidade do surgimento da álgebra e da lógica matemática, seguindo como referência os trabalhos de Napier e de outros autores. Sendo assim, essa nova concepção preponderou para um novo direcionamento de logaritmo, figurando sob a forma de representação simbólica e formal.

2.2 RECONFIGURANDO O CONCEITO DE LOGARITMOS DE NAPIER

Diante do que foi apresentado, Napier tornou-se o primeiro homem a desvendar os logaritmos. A sua análise lógica sobre esse procedimento ajudou a desenvolver melhor os cálculos tornando-se útil para o desenvolvimento científico e para estudos posteriores.

Um dos meios mais utilizados para se compreender o significado lógico dos logaritmos são as progressões geométricas e progressões aritméticas. Para desenvolver os logaritmos, Napier apropriou-se das progressões aritméticas e geométricas, estabelecendo uma relação entre elas, obtendo o que os livros didáticos chamam de **conceito de logaritmo**. Para entender o conceito de logaritmo ou em que consistem os logaritmos, ampliando o significado lógico dessa expressão apresentada nos livros didáticos, toma-se a ideia provinda de Napier obtida sobre as relações entre as progressões geométricas e progressões aritméticas. Pode-se observar:

2	4	8	16	32	64	128	256	512	(Progressão Geométrica)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	(Progressão Aritmética)

A sua primeira observação apontou que o produto de dois termos da primeira progressão está associado com a soma dos dois termos correspondentes da segunda progressão. Por exemplo, na progressão aritmética, a soma de 2+3=5. Enquanto na progressão geométrica corresponde a 4.8 = 32. Reescrevendo essa ideia na base 2, tem-se:

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	(Progressão Geométrica)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	(Progressão Aritmética)

Observando essa ideia, depara-se com o conceito de logaritmos proposto por Napier sobre as duas semi-retas, ou seja, que os elementos postos sobre a progressão geométrica são os que saem com velocidade variada, enquanto isso, os da progressão aritmética são os que partem com velocidade constante. Em outras palavras, os termos da progressão aritmética são os respectivos logaritmos da progressão geométrica. Observe-se:

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

.
.
.

$$2^9 = 512$$

O valor 2 é uma constante elevada aos valores 1, 2, 3, 4, ...9. Essa constante 2 denomina-se de **base do logaritmo**. Os valores dos resultados de cada potenciação 2, 4, 8, 16, ..., 512 denominam-se, por sua vez, de **logaritmando**. E os **logaritmos** são os respectivos valores de cada expoente, que elevados à base encontram o logaritmando. De outra forma, os logaritmos são os respectivos valores que acompanham os termos de uma progressão aritmética. Assim, por exemplo:

$$\log_2 64 = 6$$

logo,

$$2^6 = 64.$$

Reescrevendo de uma forma geral tem-se:

$a \quad a^2 \quad a^3 \quad a^4 ... \quad a^m$ (Progressão Geométrica)

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 ... \quad b$ (Progressão Aritmética)

Diz-se:

$$a^m = b$$

Reescrevendo na forma de logaritmo

$$\log_a b = m.$$

Assim, diz-se que **m** é o logaritmo de **b** na base **a**, onde $a > 0$ e $a \neq 1$ e $b > 0$ para quaisquer que sejam a, b e m reais.

Essa forma utilizada para definir o logaritmo não se encontra nos livros didáticos de Matemática atuais, principalmente daqueles que analisaremos no capítulo 3. Na verdade, a progressão aritmética e geométrica são um dos meios mais importantes para explicar e justificar o conceito de logaritmo.

Essa ideia proposta sobre a comparação entre duas progressões caracteriza uma melhor compreensão conceitual sobre os logaritmos, ampliando o conhecimento do professor, uma vez que os livros didáticos pesquisados não abordam mais essa concepção conceitual dos logaritmos. Portanto, essa caracterização dos logaritmos conduz a questionar em qual campo numérico os logaritmos são válidos. Observa-se inicialmente que é válido para qualquer valor real positivo. O que se evidencia aqui é a ampliação do conhecimento proposto por Briggs. Na verdade, mostra-se que agora o logaritmo é válido para qualquer base maior que 1.

2.3 OS LOGARITMOS DE BRIGGS E A CORRELAÇÃO COM O TRABALHO DE NAPIER

A publicação em 1614 do sistema de logaritmos teve sucesso imediato, e entre seus admiradores, estava Henry Briggs, professor de Geometria em Oxford. Henry Briggs nasceu em 1561, Yorkshire, Inglaterra. Estudou na Universidade de Cambrige e formou-se em 1581. Prosseguiu nos estudos e obteve o doutorado em 1588. Foi professor de Geometria, na Universidade de Saint-Andrews e mais tarde em Oxford. Nesta última, iniciou as lições com a nova proposição do livro de Euclides. Foi o primeiro a reconhecer a importância dos logaritmos de Napier, tendo estabelecido contato com o mesmo para uma troca de ideias. Ele morreu em 26 de janeiro de 1631, na Inglaterra. Em 1615 havia visitado Napier em sua casa na Escócia, e lá eles discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos, como mostra Horsburgh (1914):

> Na primeira visita Napier e Briggs discutiram algumas alterações no sistema de logaritmos. Em uma carta a Napier antes da primeira visita, Briggs havia sugerido que seria mais conveniente, ao passo que o logaritmo de todo o seno ainda era tida como zero, para tomar o logaritmo da décima parte do seno como uma potência de 10 e eles tinham iniciado o cálculo das tábuas de seu sistema proposto. Napier concordou que a mudança era desejável, e afirmou que ele tinha anteriormente desejado fazer uma mudança, mas ele preferiu a publicar as tábuas já preparadas, como ele não poderia concluí-lo por motivo da falta de saúde e por outros importantes, comprometendo a construção de novas tábuas. Ele propôs, contudo, um pouco diferente da sugerida pelo sistema Briggs, a saber, que logaritmo de 1 deve ser zero, mas não para toda a condição de unidade, mas, ao mesmo tempo, tal como sugerido por Briggs, o logaritmo da décima parte da condição deve ser uma potência de 10. Briggs e Napier admitiram de uma única vez que esse método decidido era o melhor e colocou sobre o cálculo das tábuas o novo sistema que é essencialmente o sistema de logaritmos já em uso. (HORSBURGH, 1914, p. 11). (Tradução Nossa)

Assim, depois dessa visita ocorreu uma mudança que já era até esperada por Napier diante de suas investigações, mas não teve como fazer pela falta de tempo. Contudo, tomando essa conveniência lógica adquirida, os dois decidiram construir uma nova tabela dos logaritmos. Assim, Briggs já não pôde contar com Napier, pois antes que viesse visitá-lo novamente para propor a construção dessa tábua, ele veio a falecer, em 1917. Este autor referencia:

> Segundo os seus clássicos tratados sobre logaritmos, *o Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, em que dava uma exposição completa dos métodos que usava para construir suas tabelas, apareceu postumamente em 1619. Por isso, recaiu sobre Briggs a tarefa de construir

> a primeira tabela de logaritmos comuns ou breggsianos. (BOYER, 1974, p. 230).

Então, coube a ele escrever essas tábuas baseado no que tinha determinado com Napier. Por isso, inicialmente escolheu que log 1 = 0 e log 10 = 1, sendo matematicamente provado pela relação anterior, porque log 1 = 0 => 10^0 =1 e log 10 => 10^1 = 10. Seguindo esse raciocínio, Briggs definiu seus logaritmos como é conhecido nos dias de hoje como logaritmos de base dez. Para propor essas tábuas ele se apropriou da média geométrica dos números. Observe-se como fez para encontrar, por exemplo, o logaritmo de 2 na base 10.

- Sabendo que 10^0 =1 e 10^1=10, achar n tal que 10^n =2.

De imediato 10^0 < n <10^1. Isto significa que o expoente do logaritmo n, de dois na base dez, está entre 0 e 1.

Partindo da ideia de Napier que foi adquirida através da relação entre PA e PG obtém-se:

1	2	10	Progressão Aritmética
10^0	10^n	10^1	Progressão Geométrica

Como 10^0 < n <10^1, então 0< log 2 <1. Briggs passou a trabalhar com média geométrica entre os extremos:

$\sqrt{1.10}$ = $\sqrt{10}$ = 3,1623.

Como $\sqrt{10}$ = $10^{0,5}$ = 3,1623.

Então, log 3,1623 ≡ 0,5

Em notação atual:

$$\log\sqrt{1.10} = \log 3{,}1623 = ½(\log 1 + \log 10) = ½.$$

Como 10^0 < n <$10^{0.5}$, então 0< log 2 < 0,5

1	2	3,1623	10
10^0	10^n	$10^{0,5}$	10^1

Achou, novamente, a média geométrica entre os extremos, temos $\sqrt{1.3{,}1683}$ ≡ 1,7783, pois Briggs trabalhava com dez casas decimais, em vez de quatro.

$$\sqrt{1.3{,}1683} = \sqrt{10^{0}.10^{0,5}} = \sqrt{10^{0+0,5}} = 10^{\,0,25} = 1{,}7783.$$

Então, pode-se concluir que log 1.7783 ≡ 0,25.

Em notação atual seria da seguinte forma:

$$\log \sqrt{1.3{,}1683} = \log 1{,}7783 = \log \sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt[4]{10} = \frac{1}{4}\log 10 = 0{,}25.$$

E sendo $10^{0,25} < 10^{n} < 10^{0,5}$ então 0, 25 < log 2 < 0,5.

1	1,7783	2	3,1623	10
10^{0}	$10^{0.25}$	10^{n}	$10^{0,5}$	10^{1}

Extraindo novamente a média geométrica entre os extremos, tem-se:

$\sqrt{1{,}7783.3{,}1683} = \sqrt{5{,}6235} = 2{,}3715$ ou

$\sqrt{1{,}7783.3{,}1683} = \sqrt{10^{0,25}.10^{0,5}} = \sqrt{10^{0,75}} = 10^{0,375} = 2{,}3715$. Assim, pode-se afirmar que log 2,3715 ≡ 0,375 e que 0,25 < log 2 < 0,375

1	1,7783	2	2,3715	3,1683	10
10^{0}	$10^{0.25}$	10^{n}	$10^{0,375}$	$10^{0,5}$	10^{1}

Obtendo, novamente, a média geométrica, nos extremos, $\sqrt{1{,}7783.2{,}3715} = \sqrt{4{,}2171}$ = 2,0535 ou

$$\sqrt{1{,}7783.2{,}3715} = \sqrt{10^{0,25}.10^{0,375}} = \sqrt{10^{0,625}} = 10^{0,3125} = 2{,}0535.$$

Assim, log 2,0535 = 0,3125 e que 0,25 < log 2 < 0,3125.

Quanto mais o valor se aproxima de 0,3 mais próximo ele torna-se de 2 pelas respectivas casas decimais, assim por aproximação chegou a estabelecer que

$10^{0,3101029995}$ 2 ou log 2 ≅ 0,301029995.

Usando o mesmo método e sabendo que $10^{0} = 1$ e $10^{1} = 10$, acha-se um **n** tal que $10^{n} = 3$.

De imediato $10^{0} < n < 10^{1}$. Isso significa que o logaritmo de três na base dez, está entre 0 e 1. Partindo dessa concepção relacionada entre P.A e P.G mostrada acima, observa-se que:

como $10^{0} < n < 10^{1}$, então 0< log 3 <1.

1	3	10	Progressão Aritmética
10^{0}	10^{n}	10^{1}	Progressão Geométrica

Pela média geométrica, tem-se que

$\sqrt{1.10} = \sqrt{10} = 3{,}1623.$

Como $\sqrt{10} = 10^{0.5} = 3{,}1623$, então

log 3,1623 ≡ 0.5

Como $10^{0} < 10^{n} < 10^{0,5}$ então 0< log 3 < 0,5.

1	3	3,1683	10
10^{0}	10^{n}	$10^{0.5}$	10^{1}

Obtendo a média geométrica entre os extremos, tem-se:

$\sqrt{1.3{,}1683} \equiv 1{,}7783$. Vale salientar que Briggs trabalhava com dez casas decimais, em vez de quatro.

$\sqrt{1.3{,}1683} = \sqrt{10^{0}.10^{0,5}} = \sqrt{10^{0+0,5}} = 10^{0,25} = 1{,}7783.$

Assim, log 1.7783 ≡ 0,25.

Como $10^{0,25} < 10^{n} < 10^{0,5}$, então 0, 25 < log 3 < 0,5

1	1,7783	3	3,1683	10
10^{0}	$10^{0.25}$	10^{n}	$10^{0,5}$	10^{1}

Obtendo a média geométrica nos extremos

$\sqrt{1{,}7783.3{,}1683} = \sqrt{5{,}6235} = 2{,}3715$ ou

$\sqrt{1{,}7783.3{,}1683} = \sqrt{10^{0,25}.10^{0,5}} = \sqrt{10^{0,75}} = 10^{0,375} = 2{,}3715.$

Desse modo, pode-se afirmar que log 2,3715 ≅ 0,375

como $10^{0,375} < 10^{n} < 10^{0,5}$ então 0, 375 < log3 < 0,5.

1	1,7783	2,3715	3	3,1683	10
10^{0}	$10^{0.25}$	$10^{0,375}$	10^{n}	$10^{0,5}$	10^{1}

Obtendo a média geométrica entre os extremos, obtém-se

$\sqrt{2{,}3714.3{,}1683}$ = $\sqrt{7{,}5133}$ = 2,7410 ou

$\sqrt{2{,}3714.3{,}1683} = \sqrt{10^{0,375}.10^{0,5}} = \sqrt{10^{0,375+0,5}} = \sqrt{10^{0,875}} = 10^{0,4375} = 2{,}7410$.

Portanto, o log 2,7410 = 0,4375.

Como $10^{0,4375} < 10^{n} < 10^{0,5}$ então 0,4375 < log 3 < 0,5.

1,7783	2,3714	2,7410	3	3,1683	10
$10^{0.25}$	$10^{0,375}$	$10^{0,4375}$	10^{n}	$10^{0,5}$	10^{1}

Obtendo novamente a média geométrica, entre os extremos, tem-se:

$\sqrt{2{,}7410.3{,}1683}$ = $\sqrt{8{,}6843}$ = 2,9469 ou

$\sqrt{2{,}7410.3{,}1683} = \sqrt{10^{0,4375}.10^{0,5}} = \sqrt{10^{0,4375+0,5}} = \sqrt{10^{0,9375}} = 10^{0,4687} = 2{,}9469$.

Portanto, o log 2,9469 = 0,4687.

Como $10^{0,4687} < 10^{n} < 10^{0,5}$ então 0,4687 < log 3 < 0,5.

2,3714	2,7410	2,9469	3	3,1683	10
$10^{0,375}$	$10^{0,4375}$	$10^{0,4687}$	10^{n}	$10^{0,5}$	10^{1}

Obtendo novamente a média geométrica entre os extremos, tem-se:

$\sqrt{2{,}9469.3{,}1683}$ = $\sqrt{9{,}3367}$ = 3, 0556 ou

$\sqrt{2{,}9469.3{,}1683} = \sqrt{10^{0,4687}.10^{0,5}} = \sqrt{10^{0,4687+0,5}} = \sqrt{10^{0,9687}} = 10^{0,4843} = 3{,}0556$.

Então o log 3,0556 = 0,4843.

Como $10^{0,4687} < 10^{n} < 10^{0,4843}$ então 0,4687 < log 3 < 0,4843.

2,3714	2,7410	2,9469	3	3,0556	3,1683	10
$10^{0,375}$	$10^{0,4375}$	$10^{0,4687}$	10^{n}	$10^{0,4843}$	$10^{0,5}$	10^{1}

No último esquema, os dois expoentes são 0,4687 e 0,4843 e estão realmente próximos do log 3. Quanto mais o valor se aproxima de 3 pelas suas respectivas casas decimais, mais próximo ele fica de 0,48. Logo, pode-se definir uma aproximação para o log 3. Portanto, log 3 ≅ 0,477.

Em 1619, ano da publicação da mais nova obra de Napier, Briggs conseguiu fazer uma tábua dos logaritmos compreendidos entre 1 e 1.000, baseado no método anteriormente apresentado. Assim, esses logaritmos tornaram-se reconhecidos tanto quanto os logaritmos de Napier. Nesse contexto, os livros didáticos se apoiam na proposta de Briggs e desvendam os seus logaritmos em forma de exercícios teóricos, mas não exploram tanto esse lado construtivo.

Alguns livros adotam essa ideia só para mostrar como funcionava esse logaritmo. Assim, propõe-se neste trabalho, uma síntese mais construtiva de modo que ajude o professor a entender melhor a origem desses logaritmos e de como foram construídos, diferenciando-se daqueles apresentados nos livros didáticos.

Esse método não é explorado pelos livros didáticos. Para entender melhor como foram construídos os logaritmos briggsianos, utilizou-se o método da aproximação de modo que auxilie o professor na sua compreensão:

- Sabendo que $2^{10} = 1024$, achar n tal que $10^n = 2$.

De imediato $10^0 < n < 10^1$. Isto significa que logaritmo de dois na base dez, está entre 0 e 1.

Partindo dessa ideia, utilizou-se uma aproximação para o valor $2^{10} = 1024$**.** Com um erro de apenas de 2,4%, $2^{10} \cong 10^3$, ou seja, 1024 é aproximadamente 1000. Assim, obtém-se:

$$2^{10} \cong 1000$$

$$2^{10} \cong 10^3$$

Dividindo ambos os expoentes por 10, obtém-se:

$$2^{10/10} \cong 10^{3/10}$$

$$2^1 \cong 10^{0,3}$$

$$2 \cong 10^{0,3}$$

Então, o valor de **n** encontrado é 0,30, que é aproximadamente o log 2.

Portanto, log 2 ≅ 0,30.

- Sabendo que $3^9 = 19.683$, achar n tal que $10^n = 3$**.**

De imediato, $10^0 < n < 10^1$. Isto significa que logaritmo de três na base dez, está entre 0 e 1.

Partindo dessa ideia, utiliza-se uma aproximação para o valor $3^9 = 19.683$, **c**om um erro de apenas de 3,4%, $3^9 \cong 20.000$, ou seja, 19.683 é aproximadamente 20.000. Assim, obtém-se:

$$3^9 \cong 20.000.$$

$3^9 \cong 2x10.000$

$3^9 \cong 2x10^4$

Dividindo ambos os expoentes por 9, obtém-se:

$3^{9/9} \cong 2^{1/9}\ x10^4$

$3^1 \cong 2^{0,111}\ x\ 10^{0,444.}$

Sabendo que $10^{0,3} = 2$**,** tem-se:

$3^1 \cong (10^{0,3})^{0,111}\ x\ 10^{0,444}$

$3 \cong 10^{0,033}\ x\ 10^{0,444}$

Usando a propriedade da multiplicação de mesma base, tem-se:

$3 \cong 10^{0,033}\ x\ 10^{0,444}$

$3 \cong 10^{0,033\ +\ 0,444}$

$3 \cong 10^{0,477}$

Então, o valor de **n** encontrado é 0,477, que é aproximadamente o log 3.

Portanto, aproximando o valor encontrado, tem-se log 3 $\cong$ 0,48 em duas casas decimais.

Essa proposta usada por Briggs para descrever os logaritmos auxiliou na caracterização dos primeiros logaritmos decimais, que ficaram reconhecidos como logaritmos de base dez. Esse estudo foi fundamental para encontrar determinadas relações objetivas do logaritmo. Essas relações objetivas receberam um nome especial, reconhecida como *propriedades dos logaritmos,* cuja abordagem aparece nos livros didáticos sobre análise algébrica e formal. A demonstração dessas propriedades é difícil de ser compreendida devido ao uso algébrico e simbólico abordado pelos livros didáticos. Quanto ao seu uso prático, não são bem exploradas.

Para facilitar a compreensão dessas propriedades e o seu uso específico, procuraremos desenvolver em termos práticos as propriedades dos logaritmos, seguindo como referência o estudo realizado por Briggs sobre logaritmo de base dez.

Observe como encontrá-las em termos práticos, usando os logaritmos decimais:

- Vamos determinar o log 4 , ou seja, encontrar um n tal que $10^n = 4$.

Sabendo que log 2 $\cong$ 0,3010 e log 3 $\cong$ 0,477.

$10^n = 4 = 2.2 = 10^{0,3010}.\ 10^{0,3010} = 10^{0,3010+0,3010}$ => n = 0,3010+0,3010 =>

log 2 + log 2 => 2. log 2 =2.0,3010 = 0,6020.

Portanto, log 4 = log (2. 2) = log 2 + log 2 ou

log 4 = log 2^2 = log 2 + log 2 = 2. log 2

Portanto, o log 4 = 0,6020.

- Para determinar log 5, ou seja, encontrar um n tal que $10^n = 5$,

sabendo que o log 10 = 1 e log 2 = 0,3010, tem-se:

$10^n = 5 = \frac{10}{2} = \frac{10}{10^{0,3010}} = 10^{1-0,3010} \Rightarrow n = 1 - 0,3010 = 0,6990.$

$10^n = 10^{1-0,3010} \Rightarrow n = 1 - 0,3010 \Rightarrow \log 10 - \log 2$, ou seja,

$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2.$

Portanto, o log 5 = 0,6990.

Desses dois exemplos, podemos citar três propriedades básicas encontradas através dos log 4 e log 5, que são:

- ✓ O produto transforma-se em adição;
- ✓ A potenciação transforma-se em multiplicação;
- ✓ A divisão transforma-se em subtração**.**

Ou seja**,** reescrevendo de uma forma geral, tem-se:

- $\log_a (x \,.\, y) = \log_a x + \log_a$
- $\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^z = z. \log_a x$.

onde, $a > 0$ e $a \neq 1$, $x > 0$ e $y > 0$.

2.4 OS LOGARITMOS DE BURGI: AMPLIAÇÃO CONCEITUAL E APLICAÇÕES

De acordo com Naux (1966) e Knott (1915), Jobst Burgi nasceu em 28 de fevereiro de 1552, à Lichtensteig, uma aldeia do cantão de WS-Esfoladura, Suíça, e morreu em 31 de janeiro de 1632 em Kassel (atualmente Alemanha). Um matemático amador e auto-didático que soube chamar a atenção dos grandes cientistas de sua época pelos seus feitos importantes como: a fabricação de relógios astronômicos, os trabalhosos cálculos apresentados na astronomia e pela publicação de suas tábuas de logaritmos (Arithmetische und geometrische Progress – Tabulen), em 1620, uma data que não trouxe muita repercussão ao seu trabalho porque Napier já tinha publicado os seus logaritmos.

Brugi era procedente de uma família pobre, modesta e numerosa; deixou a sua terra natal para viver uma vida pobre e difícil. Isto acontecia, porque procurava afastar-se do meio intelectual, pois sentia inferior ao que seus dons lhe mostravam. Ocupou grande parte de sua vida com atividade relacionada à fabricação de relógios para o conde de Landgraf de Hesse-Kassel, para o imperador romano Rudolph II e o sucessor dele Mathias (em Praga). Não conhecia outra paixão além das ciências astronômicas. (NAUX, 1966, TOME I, p. 93).

Ninguém sabia ou poderia imaginar, ou até mesmo explicar a sua habilidade manual na orientação dos famosos relógios, isso o designou como assistente aos grandes construtores de relógios da época. Ora, presume-se que seu primeiro contato com a matemática foi tornando-se aluno do grande matemático Dasypodius, mas independentemente disso, soube ascender ao nível dos cientistas da época (NAUX, 1966, TOME I, 94).

Nunca chegou à universidade e não publicou nenhum livro, exceto as tábuas de logaritmos. A falta de cultura literária e o seu domínio do latim foram dois de seus principais empecilhos quanto às suas invenções e publicações, pois era a língua oficial da época. Sua habilidade matemática com as relações trigonométricas ajudou Kepler e seus companheiros a desvendar os possíveis cálculos que circundavam os trabalhos dos astrônomos da época. No entanto, apareceram algumas relações trigonométricas que não tinham solução e dificultavam os astrônomos. Então, coube a Burgi desvendar algumas relações trigonométricas, podendo-se aqui citar como exemplo:

$$1+\text{Sen } 60^{\circ} = 2 \text{ Sen}^2 75^{\circ}$$

$$\text{Cos } 2a = 1 - 2\text{Sen}^2 a$$

Isto ajudou a Kepler a manejar os meios trigonométricos de sua época, pois não sabia a quem recorrer. Assim, os ensinos desta modesta ratificação o levaram a inventar mais tarde os logaritmos usados em termos trigonométricos.

Burgi foi o primeiro homem a propor os logaritmos, comparando duas progressões: uma aritmética e outra geométrica. Seus logaritmos ficaram conhecidos como *logaritmos naturais.* Quando concebeu essa ideia, dedicou-se a esse estudo, mas não foi como Napier tão reconhecido apesar de seus logaritmos serem úteis. Quando ele divulgou o seu trabalho foi um pouco tarde, seis anos após a publicação dos logaritmos de Napier.

Essa foi uma das implicações por que o seu trabalho não teve tanto êxito quanto o de Napier. As ideias propostas eram quase as mesmas. O que diferenciava eram as bases que foram tomadas por valores diferentes. Os logaritmos de Burgi eram mais difíceis de ser compreendidos, principalmente no que se refere à construção lógica de suas tábuas.

A construção dos logaritmos foi um esforço próprio baseado nas relações de Stiffel, e suas tábuas compreendiam sete páginas e meia e eram apresentadas na forma de progressões aritméticas e geométricas. Partindo inicialmente de uma progressão aritmética de primeiro termo 0, razão 10, e último termo 32 000, cujos elementos chamou de números vermelhos (pela cor com que os imprimiu). A progressão geométrica correspondente começa com 10^8 e sua razão é $1 + 10^{-4}$ (notação atual) – seus termos são chamados números negros.

A partir daí constrói, o que na verdade é, na terminologia atual, uma tábua de antilogaritmos: os números vermelhos (logaritmos) são escritos na primeira linha e na coluna da esquerda e os pretos correspondentes distribuídos pelas demais linhas e colunas. A escolha de 1,0001 como razão da P.G, objetivava fazer com que suas potências ficassem muito próximas entre si; e começar essa progressão 10^8 era um procedimento para evitar números decimais. Observe a tabela da primeira coluna a seguir:

	0	500	1000
0	**100000000**	**100501227**	**101004966**
10	**100010000**	**100511277**	**101015067**
20	**100020001**	**100521328**	**101015108**
30	**100030003**	**100531380**	**101035271**
40	**100040006**	**100541433**	**101045374**
50	**100050010**	**100551487**	**101055407**
60	**100060015**	**100561543**	**101065584**
70	**100070021**	**100571599**	**101076691**
80	**100080028**	**100581656**	**101085799**
210	**100010210**	**100512491**	**101017289**
220	**100020231**	**100522562**	**101027411**
230	**100030253**	**100532634**	**101037533**
240	**100040276**	**100542707**	**101047657**
250	**100050300**	**100552787**	**101057782**
260	**100060325**	**10056285**	**1010679**
270	**100070351**	**100572933**	**101078095**
280	**100080378**	**100583011**	**101088162**
290	**100090400**	**100593180**	**101098291**

Fazendo uma síntese, observa-se que o preenchimento das lacunas foi dado pela razão fixa 1 + 10^{-4}, então, multiplicando as potências por 10^8 e seus índices por 10, obtém-se:

$$N= 10^8 \left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10L} \Rightarrow$$

Onde, chamava 10L o número *vermelho* correspondente ao número *preto* N. Logo,

$$N=\left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^{\frac{10L}{10^4}}$$

Fixando o olhar para dentro do colchete e aumentando a potência de dez, o próximo N está de um certo valor. Isso significa que:

$$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4} = \left(1+\frac{1}{10^n}\right)^{n} = \mathbf{e}.$$
$$n \to +\infty$$

Observa-se que foi exatamente Burgi quem primeiro estabeleceu a sequência que no século XVII é demonstrada, e em uso prático chegou a um valor que nesse trabalho convencionou-se chamar de número **e**. De imediato, esse número **e** recebe o nome de número de Euler, pois foi quem primeiro provou por meio de uma sequência matemática esse número. Pelo que se pôde ver, a sequência adotada por Napier gera o termo 1/e, que é o inverso do número **e**. No entanto, o número fixo adotado por Burgi gera a sequência que prova a origem desse número. Se a descoberta do cálculo infinitesimal tivesse ocorrido no século auge do logaritmo, Burgi teria se tornado o primeiro homem a demonstrar matematicamente esse número, pois foi ele quem iniciou um estudo sobre logaritmos que gerou a respectiva sequência.

Os matemáticos que estudaram as suas tábuas não puderam definir uma maneira para calcular a base deste sistema logarítmico. Não se sabe como colocar a vírgula nos seus números, e por isso, ignoram-se quais foram os princípios fundamentais suficientes para organizar e realizar os seus cálculos. No entanto, não se deve entrar nesse mundo de incertezas, é aconselhável que a história possa julgá-la conforme os seus documentários.

Pode-se dizer que Burgi teve uma visão mais detalhista do que Napier, tornando-se o primeiro homem a usar o termo *logaritmo*, que perdeu nome por apenas publicar em 1620, seis anos depois da publicação de Napier. Mas isso não vem ao caso, pois das particularidades de Napier pode-se constatar que Burgi soube decifrar em textos a visão que estudiosos e pensadores tinham da matemática deste século.

2.5 A IDEIA DE LOGARITMOS

A propósito da ideia de logaritmo, alguns autores têm expressado suas posições explicativas acerca da origem e desenvolvimento desse tema. De acordo com Knott (1915, p. 11), "a palavra logaritmo antecede da criação de John Napier, que tem origem nessas palavras λόγων ἀριθμός, as quais significam *números de razões*. Dessa forma, as razões propostas sobre a etimologia da palavra levaram John Napier a propor os logaritmos, os quais eram usados em termos trigonométricos.

Seguindo o que foi comentado por Knott (1915), sobre a etimologia da palavra, Miguel e Miorim (2002, p. 58-59) esclarecem o significado da palavra logaritmo numa "combinação entre duas palavras em latim – *lógos* e *arithmós* - a primeira significando razão e a segunda, número". A junção entre as duas remete ao significado epistemológico da palavra logaritmo *como o número de razões*, sendo que o termo razão refere-se à razão da PG e o número, ou seja, o logaritmo, a um termo qualquer da PG.

Magalhães (2003), por exemplo, proporciona uma ideia do que seja e como surgiram os logaritmos que são, por vezes, encontrados em alguns livros didáticos ou paradidáticos. A explicação dada pelo autor objetiva mostrar o que se entende por logaritmo e como foram inventados, fazendo uma análise sucinta sobre essa palavra, dando ênfase ao significado etimológico.

A palavra logaritmo apresentada por Magalhães (2003), segue um conjunto de regras, ou seja, construções que são explicadas num processo de investigação histórica. Assim, o percurso sugerido pelo autor apresenta algumas semelhanças ao que é apresentado em diversos livros didáticos. Ele, primordialmente, procura esclarecer o que significa a palavra sob a ótica de sua origem logaritmos *logos* – razão; *arithmos* – número da razão (quantas vezes tomam-se a base como fator para se obter um número).

Observa-se, então, que a ideia sugerida por Magalhães (2003) assemelha-se àquela proposta por Napier no século XVII. A diferença encontrada sobre essa etimologia reside na maneira como os logaritmos eram explorados. Ao invés de envolver aritmética e trigonometria, apropria-se de um modelo algébrico-funcional baseado no estudo de potenciação e funções exponenciais.

A comparação aritmética sobre as razões entre números foi o primeiro recurso que Napier utilizou para descrever os logaritmos, sendo estruturados por meio das relações de Michael Stifel (1544), que consistia em comparar duas progressões matemáticas (progressões aritméticas e progressões geométricas). Nessa comparação, observava que o produto de dois termos da progressão geométrica está associado com a soma dos termos das respectivas progressões aritméticas. Esse método, proposto por Stifel, era bem requisitado pelos principais astrônomos e matemáticos do século XVI.

A princípio, as relações de Stifel, usadas por Napier tinham uma semelhança com as suas Barras como eram conhecidas na Escócia, ou seja, ambas transformavam produtos em somas, conforme vimos anteriormente. O uso específico da etimologia da palavra e essas relações ajudaram Napier a formular os logaritmos em termos práticos e trigonométricos.

No século XVII, os logaritmos propostos por Napier não eram fáceis de entender, pois sua composição não constituía base, sendo desvendados somente em termos trigonométricos devido ao uso desconhecido dos métodos algébricos. Então, para facilitar os seus cálculos, ele fixou um valor que ficou reconhecido como fator de medida e que era usado para preencher as lacunas entre os espaços vazios das progressões geométricas e o que representa em termos numéricos conforme vimos anteriormente. Por isso, a noção da palavra logaritmo foi fundamental para a caracterização desse instrumento de cálculo.

Dessa maneira, essa nova ideia transcrita por Napier foi recebida por alguns contemporâneos da época, destacando o valor expressivo de sua obra. Em um estudo minucioso sobre o tema, Naux (1966) descreve como esses contemporâneos receberam o nome por ele atribuído:

> A imagem do “número de razões” pareceu seduzir os autores da época; a facilidade e a simplicidade de seu poder de representação tornam-no imediatamente uma fonte do pensamento da qual todos poderiam saciar sua sede. A seu velho professor Maestlin, que lhe indagava acerca das previsões sobre a natureza dos logaritmos. Kepler responde (carta datada

> de junho de 1620) iniciando pela seguinte recomendação: Observei bem o nome, uma vez que nomes são abidmoi tou logou. Cavalieri fez essa observação no prefácio (p.29) de seu ‘Directorium gererale’. “o logaritmo de 7 é 8450980400, visto que esse número me indica que entre 7 e 1 estão intercalados 8450980400 ‘atomas proporcionais’ partículas infinitamente pequenas’. Essa visão do logaritmo como número de razões tornou-se finalmente a melhor forma de apoio para a sua divulgação. Seu poder de atração e de sedução foi tal que ela tornou-se o ponto de partida das explicações preliminares de todos os tratados e de todas as tábuas. (NAUX, 1966 Tome I, p. 67 e 68 apud MIGUEL; MIORIM, 2002, p. 59-60).

Assim, o autor expressa que o significado etimológico dessa palavra foi recebido com bastante clareza por parte de alguns estudiosos do século XVII. A caracterização lógica dessa etimologia sucedeu a etapa aritmética dos logaritmos. O termo criado por Napier resistiu ao tempo, mesmo após as transformações conceituais sofridas por essa noção. Segundo Naux (1966), a palavra logaritmo teria resistido ao tempo:

> Em virtude da ideia associada à sua etimologia. Esta sólida união da palavra e da ideia não seria desfeita e apagada senão pela potente e ação renovadora do cálculo infinitesimal, por volta de 1700: mas, a transformação radical imposta pela a ideia de logaritmo que se tinha até então, não exerceu qualquer ação dissolutiva da palavra, a qual permaneceu a mesma após tal transformação conceitual. Ela tinha em seu favor o poder do hábito e, sobretudo, a quase impossibilidade de se encontrar uma melhor que a sucedesse e que aparecesse como uma substituta digna de tomar o seu lugar na teoria elementar através das progressões (NAUX, 1966, tome I, p. 68) (Tradução Nossa).

Então, de acordo com Miguel e Miorim (2002, p. 61), seguindo a explicação dada por Naux (1971), é importante notar que “a ruptura entre a palavra e a ideia que ela expressa encontra-se presente nos livros didáticos brasileiros a partir de meados do século XIX, ainda que eles desenvolvam um trabalho centrado na concepção aritmética de logaritmo”. Assim, essa ideia expressa o fato de a grande maioria dos professores e estudantes não estabelecerem qualquer conexão entre a ideia e a palavra que ela expressa.

2.6 OS PRIMEIROS TRABALHOS PUBLICADOS SOBRE LOGARITMOS

As primeiras publicações dos trabalhos sobre os logaritmos ocorreram no século XVII. De acordo com Naux (1966) e Boyer (1974), baseado nos estudos de Napier sobre os logaritmos realizados na escócia, foram publicados dois trabalhos: o primeiro, sendo publicado em 1614, sob o *título Mirifici logarithmorum canonis* *descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos Logaritmos), e, posteriormente, em 1619, com o título *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Uma construção da maravilhosa regra dos Logaritmos), como mostram as figuras 3 e 4.

MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.
EDINBURGI,
Ex officina ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIↃ. DC. XIV.

Figura 3: Capa do trabalho de Napier publicado em 1614, Knott (1915).

MIRIFICI
LOGARITHMORUM CANONIS
DESCRIPTIO,
Ejusque usus, in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica Mathematica, amplissimi, facillimi, & expeditissimi explicatio.
ACCESSERUNT OPERA POSTHUMA;
Primò, Mirifici ipsius canonis constructio, & Logarithmorum ad naturales ipsorum numeros habitudines.
Secundò, Appendix de alia, eaque præstantiore Logarithmorum specie construenda.
Tertiò, Propositiones quædam eminentissimæ, ad Triangula sphærica mirâ facilitate resolvenda.
Autore ac Inventore IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, &c. Scoto.
EDINBURGI,
EXCUDEBAT ANDREAS HART.
ANNO 1619.

Figura 4: Capa do trabalho de Napier publicado em 1619, Knott (1915).

Em ambas as obras, a criação, descrição ou invenção dos logaritmos foi concebida dentro de um cenário simultaneamente geométrico, cinemático, aritmético, funcional e trigonométrico. Conforme ilustra Miguel e Miorim (2002):

> Geométrico, porque o logaritmo não aparecia como um número puro, mas como uma medida de um segmento de reta; cinemático, porque a situação que utilizava para descrever tal conceito envolvia a coordenação de dois movimentos; aritmético, porque o mesmo conceito era expresso por meio de um relacionamento entre duas seqüências de números, uma geométrica e outra aritmética; funcional, porque a situação cinemática envolvia uma grandeza variando em função da outra; e trigonométrico, porque Napier se propôs a determinar, não os logaritmos de segmentos de retas genéricos, mas os logaritmos de segmentos de reta representativos dos senos dos ângulos.(MIORIM, 2002, p. 50).

De fato, os logaritmos foram essenciais para o campo científico e as suas publicações surtiram efeitos imediatos na comunidade científica e por meio de diversos estudiosos do século XVII e XVIII. Assim, essas primeiras publicações levaram os cientistas a estudar e prescrever os trabalhos de Napier e Briggs e a expandir esse instrumento de cálculo como afirma Naux (1971):

> Levando em conta a iniciativa das idéias e das descobertas de Neper e Briggs, podemos afirmar que os logaritmos tiveram pouco sucesso, mas em meio a condições da época efetuou-se de maneira rápida e extensa, no entanto, não foi tão adquirido pelas circunstâncias; os meios de comunicação eram muito lentos, pouco numerosos e não eram certos. Os livros viajavam apenas com as mercadorias transportadas para o meio de grandes feiras, numa data marcada, e em lugares bem determinados, que limitavam as possibilidades de indicá-los. Apesar das dificuldades enfrentadas, esses trabalhos foram alvo de pesquisas para a ampliação de avanços tecnológicos, no qual levaram cientistas, professores e analistas a estudar esse instrumento de muita significância para o progresso científico. (NAUX,Tome II, 1971, p. 1) (Tradução Nossa)

A iniciativa abordada por Napier configurou outros personagens que dedicaram seus estudos aos logaritmos e ao aprimoramento dos cálculos e de suas tábuas. Segundo Naux (1971), os logaritmos tornaram-se a principal descoberta proveniente de estudos da época.

2.7 A DIFUSÃO DOS LOGARITMOS A PARTIR DO SÉCULO XVII

Foi diante dessa maravilhosa invenção matemática que muitos estudiosos propuseram os primeiros estudos e publicações a respeito dos logaritmos de Napier, pois não demorou muito para que fossem adotados nos países da Europa. Assim, a iniciativa de Napier de propor os logaritmos despertou o interesse de outros estudiosos. Henry Briggs foi o primeiro homem, junto a Napier, a modificar, transformar e redefinir os logaritmos na direção do que se usa nos livros didáticos de Matemática atualmente.

Segundo Boyer (1974) e Collette (1985), Briggs e Napier introduziram a ideia de logaritmo de base 10 quando Briggs visitou Napier na sua terra natal, em Gartness, na Escócia. Depois de uma discussão sobre o tema, ambos concluíram que os logaritmos deveriam ser modificados, o que fez surgir os logaritmos de base 10, conforme vimos anteriormente.

Essa proposição e mudança nos logaritmos contribuíram para que Briggs pudesse desvendar os logaritmos e assim propor uma tábua que continha todos os logaritmos de 1 até 1.000 com 14 casas decimais, sob o título *Logarithmorum Chilias Prima* (Introdução aos logaritmos) sendo publicada em 1617 após a morte de Napier, conforme ilustra a Figura 5.

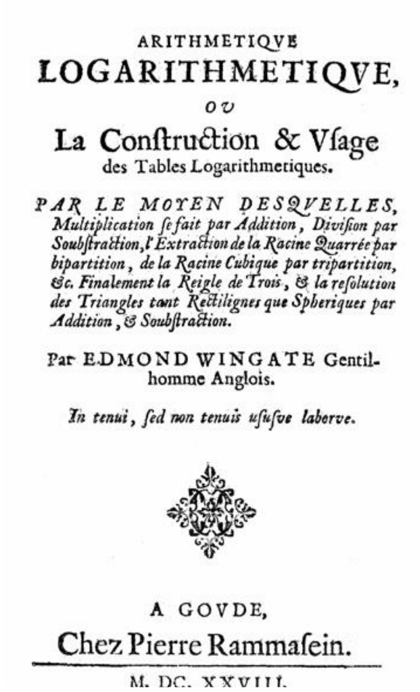
2		Logarithmi.			Logarithmi.
1	0	0000,00000,00000	34	1	5314,78917,04226
2	0	3010,29995,66398	35	1	5440,68044,35028
3	0	4771,21254,71966	36	1	5563,02500,76729
4	0	6020,59991,32796	37	1	5682,01724,06700
5	0	6989,70004,33602	38	1	5797,83596,61681
6	0	7781,51250,38364	39	1	5910,64607,02650
7	0	8450,98040,01426	40	1	6020,59991,32796
8	0	9030,89986,99194	41	1	6127,83856,71974
9	0	9542,42509,43932	2	1	6232,49290,39790
10	1	0000,00000,00000	43	1	6334,68455,57959

Figura 5: Parte 8 do trabalho de Briggs (1617).

A partir desse momento, alguns estudiosos se propuseram a traduzir os trabalhos de Napier e Briggs para outros idiomas. Segundo Magalhães (2003), William Oughtred (1575 – 1660), inglês, ministro episcopal, matemático, publicou uma Clavis Mathematicae (A chave Matemática). Vale salientar que foi quem primeiro usou a simbologia de multiplicação (x) e que inventou a régua de cálculo[4].

Outro personagem que também contribuiu para o avanço significativo desse estudo foi Edmund Wingate (1596 – 1656) que publicou tanto na Inglaterra quanto na França uma compilação do trabalho de Napier em 1626, cujo título é logarithmetique arithmetique (logaritmo aritmético) conforme ilustra a figura 6, a seguir. Esse trabalho incentiva os ingleses para o estudo significativo dos logaritmos. O segundo trabalho de Wingate (1633), cujo título é Fragmentum Logarithmotechnicæ (fragmentação técnica dos logaritmos) conforme ilustra a figura 7, contém os logaritmos dos senos e das tangentes, sendo medidos todos em graus e minutos pelos quadrantes; cada grau era dividido em 100 minutos (WINGATE, 1633).

[4] Instrumento que funcionava como uma calculadora e era útil para os cálculos dos logaritmos, raiz quadrada, raiz cúbica entre outros cálculos.



ARITHMETIQVE

LOGARITHMETIQVE,

OV

La Conſtruction & Vſage

des Tables Logarithmetiques.

PAR LE MOYEN DESQVELLES,

Multiplication ſe fait par Addition, Diviſion par Soubſtraction, l'Extraction de la Racine Quarrée par bipartition, de la Racine Cubique par tripartition, &c. Finalement la Reigle de Trois, & la reſolution des Triangles tant Rectilignes que Spheriques par Addition, & Soubſtraction.

Par EDMOND WINGATE Gentil-homme Anglois.

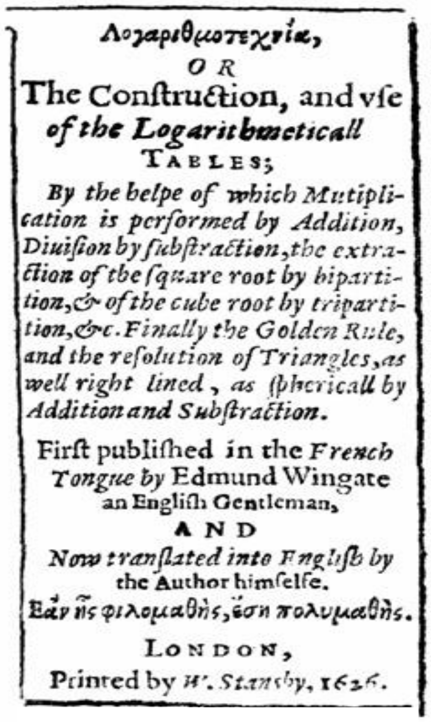
In tenui, ſed non tenuis uſuſve laborve.

A GOVDE,

Chez Pierre Rammaſein.

M. DC. XXVIII.

Figura 6: Imagem extraída de Tomash (1989).



Λογαριθμοτεχνία,

OR

The Conſtruction, and vſe of the Logarithmeticall Tables;

By the helpe of which Multiplication is performed by Addition, Diuiſion by ſubſtraction, the extraction of the ſquare root by bipartition, & of the cube root by tripartition, &c. Finally the Golden Rule, and the reſolution of Triangles, as well right lined, as ſphericall by Addition and Subſtraction.

Firſt publiſhed in the French Tongue by Edmund Wingate an Engliſh Gentleman,

AND

Now tranſlated into Engliſh by the Author himſelfe.

Ἐὰν ῇς φιλομαθὴς, ἔσῃ πολυμαθής.

LONDON,

Printed by W. Stansby, 1626.

Figura 7: Ilustração extraída de Tomash (1989).

Em seguida, inventou um dispositivo de cálculo baseado nos logaritmos de Briggs, concedendo-lhes o nome de *Logarithmicae de Tabulae* (tabela dos logaritmos). Esse dispositivo continha todos os logaritmos numéricos de Briggs de 1 até 100.000, contidos num volume portátil. Este dispositivo tinha a mesma procedência do uso da régua de cálculo. Naux (1971, p.7) sugere como seria esse dispositivo. Observe-se o quadro a seguir:

N	1000	1050		1400	1450	N
L	300	302		314	316	L
1	04 340	16 027	...	64 381	16 674	51
			...			
2	08 677	20 157	...	67 480	19 666	52
.	...	...	...	...	...	.
.	...	...	...	...	...	.
50	11 892	13 926		13 680	60 912	100

Nota-se que este dispositivo reproduz em cada coluna uma página de Briggs com valores maiores que 1000. Ora, N representa os respectivos logaritmos e L é o valor preciso para cada logaritmo de N na base 10, sendo que os valores 300, 302, ..., 314 são considerados como mantissa para o respectivo corte nos valores logarítmicos. Esse dispositivo reproduz o trabalho de Briggs com apenas 7 casas decimais. É importante observar, por exemplo, como a coluna 2 deve ser lida:

$$\log 1051 = 3{,}0216027$$

$$\log 1052 = 3{,}0220157$$

etc...

Os três primeiros números leem-se na parte superior da coluna. Em contrapartida, a diferença de dois logaritmos sucessivos lê-se claramente. O dispositivo moderno que comporta os números 300, 302, ...,, 314, 316 no interior das colunas, deve-se a John Newton, que foi o primeiro a utilizá-lo em sua trigonometria britânica em 1658.

Em 1619, John Speidell (1600 – 1634), calculou os logaritmos naturais das funções trigonométricas, de 1 a 100.000, publicando-os em seu trabalho novos logaritmos. Nesse trabalho, houve uma ampliação dos logaritmos usados por Napier e Briggs. Conforme Naux (1971, p. 7): “Em 1619, John Speidell, publicou uma tábua de logaritmos diferente das utilizadas por Napier e Briggs. A tradução só foi estabelecida quando obtiveram a primeira tábua dos logaritmos naturais, de base **e**”. Anteriormente, mostra-se como Euler calculou esse número que ficou conhecido como número **e** ou número de Euler.

Em seguida, restabeleceu a verdade mostrando que esses novos logaritmos eram calculados simplesmente pela seguinte regra:

$$\log x \text{ de Speidell} = 1 - \log x \text{ de Neper}$$

verificação:

$$\log x \text{ de neper} = \log_e 1/x$$

Então,

$$\log x \text{ de Speidell} = 1 - \log_e 1/x$$

Isto resulta que,

$$\log x \text{ de Speidell} = 1 - \log_e 1/x = \log_e e + \log_e x = \log_e ex$$

Os logaritmos de Spediell são conhecidos como logaritmos naturais, ou hiperbólicos. Recebe esse nome hiperbólico porque ele usa uma hipérbole 1/x, estabelecendo uma relação entre os logaritmos de Napier. Essa ideia de usar uma hipérbole era comum, na França em 1660. Era usada para tentar solucionar o problema da quadratura das curvas. O método proposto era usado na comparação de duas progressões, uma aritmética e outra geométrica, representadas sobre áreas dos retângulos analisados sobre uma curva, conforme mostra a figura 8.

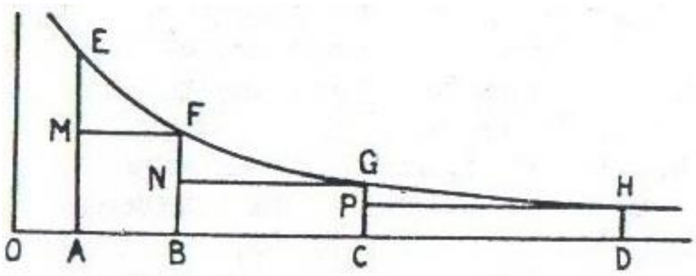


Figura 8: Imagem extraída do livro de Naux (1971).

Naux (1971) comenta que:

> As ordenadas OA, OB, OC, OD... são uma progressão geométrica. Os retângulos inscritos destinados a preparar a medida da área são construídos sobre os segmentos AB, BC, CD... O método, comentado procede por exaustão, consiste em calcular algebricamente a soma das áreas retangulares quando AB, BC, CD... ficam infinitamente pequenos. Tendo sempre êxito, exceto num caso notável, onde a curva é a hipérbole comum y = ax. Então, como Fermat fez observar, todas as áreas das figuras EABF, FBCG, GCDH, etc.... são iguais. A sua soma é infinita em vez de convergir como nos outros casos. (NAUX, 1971, TOME II, p. 21)

Essa análise, proposta por Pierre Fermat (1601 – 1670), pode, efetivamente, calcular tais áreas, expressando-as numericamente. Contudo, nesse momento, ele não faz nenhuma menção dessa análise das áreas com os logaritmos. Então, foi *Alphonse Antonio de Sarasa* (1618 – 1667) quem primeiro conectou essa proposta em 1649 mostrando que na área da hipérbole equilátera média eram os logaritmos dos números que formavam as abscissas.

Tomando a iniciativa da verdade estabelecida por Sarasa, concluiu que: as abscissas cresciam em progressão geométrica, e as áreas, em progressão aritmética. Então, como não poderia negar a teoria elementar dos logaritmos difundiu por toda a França os prefácios das tábuas dos logaritmos através do uso da hipérbole. As devidas conclusões referidas pelos autores acerca dessas áreas configuraram a concepção algébrico-funcional dos logaritmos, os quais, inicialmente não foram abordados pelos livros didáticos sob essa ótica funcional. Esse trabalho auxiliou na reformulação do cálculo infinitesimal.

Outro fator intrigante e importante na divulgação desses trabalhos era como esses autores realizavam o cálculo preciso dos logaritmos. Sabe-se que nessa época não existia ainda a calculadora. Para a realização desses cálculos foi necessário formular uma régua de cálculo, que era considerada a calculadora da época, conforme ilustra a figura 9.

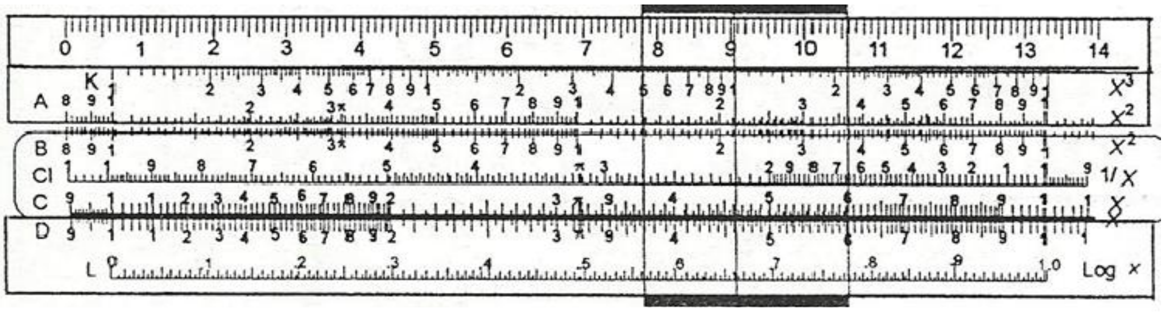


Figura 9: Figura extraída do livro de Magalhães (2003)

A criação dessa régua foi realizada pelo padre inglês William Oughtred em 1638, baseando-se num trabalho chamado círculo das proporções, publicado em 1633. De acordo com Magalhães (2003, p.13), “o uso específico dessa régua era necessário, pois ela continha escalas decimais e os intervalos tinham exatamente o mesmo comprimento, que facilitava os cálculos multiplicativos e ajudava a calcular os logaritmos”.

A figura ilustrada mostra a ampla aplicação que era feira desta régua:

- Efetuar multiplicação ou divisão convertendo-os em somas e subtrações;
- Encontrar o logaritmo decimal – Escala L;
- Elevar ao quadrado ou extrair raiz quadrada, podendo efetuar diretamente multiplicação e divisão de quadrados – Escalas A e B;
- Elevar ao cubo ou extrair raiz cúbica – Escala K;

No outro lado da lingueta apresentava as escalas trigonométricas

- Seno de x – Escala S;
- Tangente de x – Escala T;
- Arco correspondente à função trigonométrica – Escala ST.

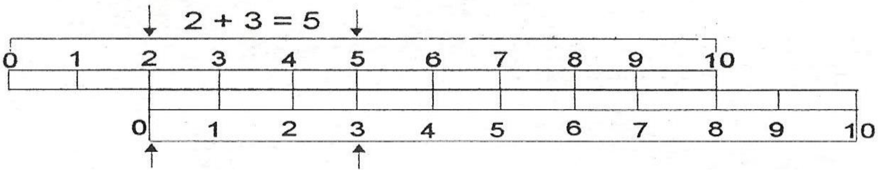


Figura 10: Imagem extraída do livro de Magalhães (2003).

A principal diferença que existia entre elas era que suas escalas tinham formatos diferentes. Na régua com escala decimal, os intervalos entre os valores têm exatamente o mesmo comprimento. Então, a efetuação da soma de dois segmentos era realizada normalmente, conforme ilustra a figura 10.

Na régua com escala logarítmica, os intervalos são proporcionais aos logaritmos (base dez). Dessa maneira, para efetuar a soma de dois comprimentos era necessário realizar a multiplicação dos valores, conforme ilustra a figura 11.

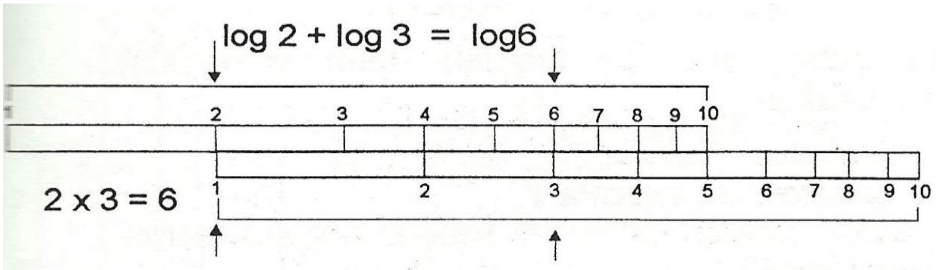


Figura 11: Ilustração extraída do livro de Magalhães (2003)

Existiam réguas de vários tamanhos e com diversas funções, como por exemplo, função hiperbólica, logaritmo natural, valores trigonométricos do cosseno. Esse objeto de cálculo tinha diversas utilidades e facilitava os cálculos logaritmos da época, além de auxiliar na sua publicação.

Em 1620, surge outro personagem notável que contribuiu para a criação dos logaritmos - Jobst Burgi (1552 – 1632). Esse matemático propôs uma publicação que ficou reconhecida na história, mas não teve tanto êxito quanto Napier, por publicar 06 anos depois do notável trabalho, conforme já referenciado. Seus logaritmos eram bem semelhantes aos de Napier, por seguir uma mesma etimologia dos logaritmos trigonométricos, diferenciando apenas do valor fixo ou fator de medida como era conhecido. Esse fator de medida tornou-se fundamental para ele caracterizar os logaritmos e publicar as suas tábuas no século XVII, conforme ilustra a figura 12.

Figura 12: Imagem extraída do livro de Knott (1915).

Em 1628, o Sr. Adrian Vlacq refez e ampliou os cálculos logaritmos de 1 a 100.000 e associou-os aos valores trigonométricos e induziu os astrônomos a usarem logaritmos nos seus cálculos. Ele era um homem estudioso e seus tratados continham uma ampliação dos logaritmos de Napier e Briggs. Observe-se como Naux (1971) menciona essa obra:

> O logaritmo Aritmético, Gouda, 1628, que também compreende: os logaritmos dos números de 1 até 100.000 com 10 casas decimais - sobre os senos, tangentes e secantes de minuto em minuto, de 0º à 90º, com 10 casas decimais. Entre essas duas tábuas, as primeiras diferenças são retomadas sobre os logaritmos. (NAUX,TOME II, 1971, p. 25). (Tradução Nossa).

Percebe-se assim uma preocupação dos estudiosos na área das ciências e notadamente da Matemática em avançar nos estudos dos logaritmos com vistas a facilitar os cálculos matemáticos.

Segundo Naux (1971, p.15), Ludovic Probeni é o primeiro autor alemão que adaptou o uso dos logaritmos decimais. Em 1634, publicou seu "Clavis universi Trigonométrica (A chave universal trigonométrica)", em que no seu prefácio, elogia a Napier, Briggs e Vlacq; e ainda afirma que lê-lo, pode colocá-los em igualdade inigualável. Seu trabalho abrange 3 notificações para cada um dos seus problemas; o primeiro em cálculo trivial; o segundo em prostaférese, e o último pelos logaritmos. Foi um dos últimos a não utilizar exclusivamente os logaritmos. O seu trabalho reproduz os logaritmos de Briggs, que utiliza 6 casas decimais não separados da parte inteira. Assim, escreve log 41 = 1.612.784 em vez de 1,612784 e isto porque calcula tomando para unidade a do último número, milionésimo. As tábuas variam de 1 até 19.810.

Dessa maneira, os logaritmos começaram a expandir-se. A cada momento crescia o número de pesquisadores e estudiosos que se interessavam pelo estudo significativo desse instrumento de cálculo. Então, com o surgimento da geometria indivisível proposta na Itália por Cavalieri, os logaritmos seguiram uma nova direção referente às obras de Napier, Briggs.

A primeira modificação proposta para os logaritmos ocorreu na Itália. Coube a Boventura Cavalieri (1598-1647), discípulo de Galilleu (1564 – 1642), e geômetra, principal autor da Geometria Indivísivel ao fazer uma análise nos logaritmos referente às obras de Napier e Briggs.

Ao analisar as obras de Napier e Briggs, Boventura Cavalieri direciona uma investigação tomando como base um dos tratados de Euclides. Cavalieri possuía bastante dificuldade em analisar o quociente aritmético entre dois números, pois este método não era tão conhecido na Itália. Por exemplo, o resultado do quociente aritmético de 6, dividido por 3 era 2, mas analisando a correspondência do quociente de 7 dividido por 3, observa-se que nessa conta, a divisão não era exata, ou seja, o quociente do maior não era divisível pelo menor. Pareceria que nessa conta nunca iria encontrar uma resposta ou método que satisfizesse a sua análise, isso o deixou um pouco abatido.

De acordo com Naux (1971, p. 14 – 15), “a operação do quociente aproximado, ao número dado 7:3 = 2, 3333... era uma novidade que provavelmente não havia sido desenvolvida na Itália; no entanto, as opiniões sobre a diferença entre valor exato e sobre um valor aproximado não permitiam encontrar um resultado exato sobre um valor aproximado. Cavalieri professava sem dúvida que essas opiniões não seguiam as suas investigações. Contudo, voltou-se para os logaritmos por uma diligência de pensamento bastante curioso.

Considerando, pois, os números 8,.4,.2,.1 (não sabia pois escrever-se 8/4 = 4/2 = 2/1 (e pensar como uma sequência de quocientes iguais): os resultados de 8 para 4; de 4 para 2; e de 2 para 1 são iguais por definição, através da teoria de Neper:

Log 8 – log 4 = log 4 – log 2 = log 2 – log 1.

Esta diferença constante pode seguidamente servir de medida comum para todos os valores iguais. E isto reside verdadeiramente numa sequência análoga, para quaisquer que sejam. Por exemplo, os valores:

7/3 = 14/6 = 21/9

promovem uma igualdade, logo,

log 7 – log 3 = log 14 – log 6 = cte,

se bem que o valor comum nas suas igualdades poderia servir de exemplo para encontrar o valor 7/3.

Finalmente, isso o conduz às seguintes propostas: os logaritmos são números associados a números continuamente proporcionais e conservam diferenças iguais que servem de medida aos números continuamente proporcionais.

Portanto, podem-se atribuir dois pontos fundamentais:

- Medida de valores irredutíveis;
- Nova definição dos logaritmos.

Seguindo esse parâmetro, o seu trabalho concretizava-se basicamente sobre duas tábuas, sem as quais o seu ensino teria faltado o objetivo principal e uma renovação efetiva do cálculo astronômico. A primeira foi uma tábua trigonométrica e a segunda foi uma tábua dos logaritmos decimais de 1 até 100.000. Briggs tinha calculado uma tábua que valeria para toda a vida; mas, só tornaram aceita em 1630, inclusive nos países afastados da Inglaterra. Cavalieri abreviou essa crise satisfazendo uma retomada aos números de Napier, num dispositivo moderno, com números de casas decimais reduzidos, embora isso fosse suficiente para satisfazer às necessidades de uma exatidão trigonométrica da época.

A disposição era clássica, como mostra o quadro seguinte, válido para todo arco de 23º 12'.

23º	Seno Reto	Logarit Para seno reto	Mesolog. Para Tangente	Tomolog. Para Secante	Versilog. Para Inv. do seno
0 . . 12’	... ... 393 941,909 6	... ... 95 954 322	... ... 96 320 527	... ... 100 366 205	... ... 890 077 858

A 2ª coluna da esquerda é a dos valores naturais dos senos; os outros, indo para a direita, são sucessivamente os de log sin α; log tg α; log sec α ; log sin inverso α, ou seja, log (1 - cos x). Cada tipo de logaritmo leva um nome específico. Essa precaução deve-se ao fato de a álgebra retórica da época, ou seja, uma álgebra que exprime uma linguagem escrita que transcorre sem símbolos, para pedir recurso a um vocabulário rico e preciso, evitando parágrafos e as recordações de definições que encobrem esse texto já demasiado prolixo por natureza.

O cálculo não é tão complicado, porque todas as tábuas são precedidas por uma indicação precisa sobre o valor das unidades decimais utilizadas para as mantissas logarítmicas.

A leitura dessa tábua ensina-nos que

log sin 23º 12 ' = 95 954 322

enquanto,que os tratados atuais nos dão

log sin 23º 12 ' = **1**,595 432 2

é necessário entender que Cavalieri,

log sin 23º 12’ = 9,595 432 2

De fato, foi a partir dos estudos significativos de Cavaliere, que houve uma expansão dos logaritmos em diversos países e os estudos significativos sobre esse tema. Com o surgimento da álgebra e dos símbolos matemáticos, os logaritmos envolvendo relações trigonométricas foram perdendo essa característica, dando lugar à concepção algébrico-funcional dos logaritmos.

De acordo com Miguel e Miorim (2002, p. 84) “essa concepção só foi pertinente devido a Willian Gardiner, no seu livro Tables de logarithmos (Tábuas dos logaritmos), que forneceu a primeira exposição sistemática dos logaritmos concebidos como expoentes”.

Nessa obra, Gardiner define o logaritmo comum de um número como o índice ou expoente de potências de 10 que é igual a esse número. Desse modo, foram transcorridos cerca de 140 anos, a partir do momento em que os logaritmos foram originalmente concebidos por Napier, antes da elaboração explícita de uma concepção estritamente algébrica dos mesmos como expoentes. De fato, essa caracterização dos logaritmos não sofreu alteração quanto ao uso específico do seu significado etimológico, variando apenas o modo como era explorado.

O avanço da álgebra e o desenvolvimento da simbologia matemática do século XVII e do cálculo infinitesimal proposto por Newton foram incisivos para que

Leonard Euler (1707 – 1783) caracterizasse o logaritmo e demonstrasse o sistema de logaritmos realizado por Napier em termos algébricos.

Foi a partir do uso proposto por Euler que os logaritmos receberam uma nova caracterização lógica, principalmente, no que se refere à sua fundamentação conceitual que ficaram reconhecidos como Número de Euler ou número **e** em homenagem a Euler. Consequentemente, o desenvolvimento dessas novas tábuas foi aparecendo, seguindo a mesma ideia sugerida por Napier e Briggs, tomando como referência um número reduzido de casas decimais.

Assim, de acordo com o que tem sido abordado até agora sobre a história dos logaritmos, da sua origem até a sua implementação nos livros didáticos, procurarei enfocar as três concepções básicas: a geométrica, a aritmética e a algébrico-funcional. Desse modo, pretendo enfatizar como funciona e como é definida cada uma dessas concepções:

- A concepção geométrica dos logaritmos é definida através de uma experiência prática de Napier conforme comentamos anteriormente. Recebe esse nome porque ele definiu os logaritmos em termos de medidas envolvendo duas semi-retas.
- A concepção aritmética dos logaritmos é definida da análise comparativa entre duas progressões. Inicialmente essa ideia é um dos meios mais adequados para se entender o conceito de logaritmos e suas devidas condições de existência porque foi o primeiro recurso utilizado pelos estudiosos do século XVII para definir os logaritmos.
- A concepção algébrico-funcional dos logaritmos é abordada através da ideia de potência e do estudo de funções exponenciais. Essa concepção é apresentada nos livros didáticos de Matemática do século XX. Esse recurso foi devido ao surgimento da álgebra e de algumas reformas na educação. Tal concepção explora os logaritmos em termos de duas variáveis (incógnitas) sendo definidas ainda em termos exponenciais e representadas graficamente pelo estudo de função que recebe o nome de função logarítmica.

Neste capítulo, apresentei um estudo histórico-epistemológico dos logaritmos, destacando como Napier, Briggs e Burgi criaram os logaritmos. Baseado nesse estudo investigativo procurei proporcionar um maior aprofundamento do conceito de logaritmo e de suas propriedades para o professor, para que amplie e complemente no uso do livro didático em sala de aula e também possam ser usados como sugestões de atividades para a sala de aula.

No capítulo 1, propus a problemática da pesquisa seguida de algumas questões a serem respondidas, dentre as quais constam duas, iniciais: como os logaritmos são abordados nos livros didáticos do Ensino de Matemática mais utilizados em Natal no século XX atualmente? Quais os aspectos conceituais que estão ausentes nesses livros? No próximo capítulo, descrevo as maneiras como são apresentados os logaritmos nos livros didáticos utilizados nas escolas de Natal-RN, tendo em vista apontar como os livros do século XIX e XX implementaram os logaritmos.

Desse modo, somente a partir desse diagnóstico tornou-se possível investigar aspectos conceituais presentes no desenvolvimento histórico e epistemológico dos logaritmos e assim incluí-los em uma proposta didática a ser implementada na escola.

No próximo capítulo abordarei os aspectos fundamentais acerca da presença dos logaritmos nos livros didáticos utilizados nas escolas estaduais de Natal, que foram essenciais para o desenvolvimento dessa pesquisa.

3 OS LOGARITMOS EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS USADOS ATUALMENTE

Neste capítulo, menciono como os logaritmos aparecem nos livros didáticos, tomando como parâmetro a pesquisa realizada em alguns livros didáticos adotados pelos professores nas escolas estaduais do município de Natal atualmente buscando ainda como os logaritmos foram implementados nos livros de Matemática nos séculos XIX e XX.

3.1 OS LOGARITMOS NOS LIVROS DIDÁTICOS NO SÉCULO XIX E XX

Os livros didáticos de Matemática brasileiros que apareceram no final do século XIX e no começo do século XX focalizam a presença de elementos matemáticos significativos. Para Bittencourt (1993):

> Os livros didáticos brasileiros, em meados do século XIX, eram instrumentos fundamentais para suprir os problemas relacionados à formação dos professores. Ao mesmo tempo em que orientavam os professores com relação ao "conteúdo básico a ser transmitido aos alunos", os livros didáticos garantiriam "a ideologia desejada pelo sistema de ensino" (BITTENCOURT, 1993, p. 25).

Durante o século XIX, boa parte dos livros que surgiram era explorada em termos aritméticos e trigonométricos, de modo que suprisse os problemas relacionados à formação de professores e idealizasse o sistema de ensino. O sistema de ensino era subdividido em duas etapas: ensino primário e ensino secundário. Todos os livros escritos ou compilações tinham como aderência esse ensino. De acordo com Talavera (2008, p. 19), "nesse período os livros-textos do Brasil do século XIX na disciplina de Matemática não existiam. Eram ensinadas a geometria, a álgebra e a aritmética, conforme os modelos de autores franceses".

De acordo com Miorim (2005, p. 1) quanto aos autores de livros didáticos, os compêndios, dirigidos ao ensino secundário poderiam ser tanto de intelectuais destacados, como de professores ou qualquer pessoa que escrevesse uma obra didática que fosse aprovada pelas autoridades. Desde a segunda metade do século XIX, no entanto, seria ampliada a participação de professores, que não tinham uma formação específica, na produção dessas obras. A produção desses compêndios, que deveriam conter todo o conhecimento considerado fundamental a uma determinada disciplina escolar, exigia do autor o conhecimento de obras da disciplina específica, de obras históricas e de outras obras didáticas produzidas por autores nacionais ou estrangeiros. Muitas vezes essas obras eram mencionadas para legitimar a opção metodológica do autor.

Ainda com relação aos livros didáticos, Metz (2008) enfatiza que nas primeiras décadas do século XX, os livros didáticos de Matemática, relacionados ao ensino secundário em uso nas escolas técnicas eram intensificados por quatro disciplinas que compunham a sua formação: Aritmética, Geometria, Trigonometria e Álgebra. “Muitos dos autores relacionados aos livros didáticos são brasileiros”. (METZ, 2008, p. 30)

Segundo Miorim (2005, p. 3) referente à parte física desses livros didáticos, vale salientar que eram de capa dura, e possuíam dimensões variadas. A quantidade de páginas estava estimada em torno de 200 a 400, apenas a cor preta era utilizada tanto nos escritos da capa quanto nos textos internos e nas poucas ilustrações que existiam.

De acordo com Miguel e Miorim (2002), a teoria dos logaritmos se apresentava nos programas oficiais brasileiros e nos livros didáticos de Matemática para o curso secundário. Diante disso, duas concepções são abordadas: a aritmética e a algébrico-funcional. Essas duas concepções, referentes à teoria dos logaritmos, estendem-se por dois períodos: 1856 a 1912, prevalecendo em termos aritméticos; 1893 a 1912, o tema logaritmos passaria a ser tratado tanto no campo da aritmética quanto no da álgebra e, posteriormente, em 1912 em termos algébricos.

A inserção dos logaritmos entre os tópicos algébricos está associada com a Reforma da Educação Brasileira[5] proposta por Benjamin Constant, no Decreto n.891 de 8 de novembro de 1890. Foi a partir dessa nova reforma de 1890 que aparece explicitamente a teoria algébrica dos logaritmos, tornando-se oficial em 1912, sendo abordada em alguns livros didáticos de Matemática. Expõem-se, a seguir, quais eram os principais livros adotados nesses programas para o estudo dos logaritmos:

- No período 1878 – 1882, o livro indicado era o Tratado de Aritmética de J. A. Coqueiro. Nesse livro, a concepção dos logaritmos era desenvolvida por meio de progressões aritméticas.
- No período 1879 – 1892, os livros indicados são Elementos de Álgebra de Cristiano Benedito Ottoni e Tratado de Álgebra Elementar de José Adelino

[5] Reforma criada no período colonial pelo o governo para melhorar a Educação e o Ensino no Brasil.

Serrasqueiro. Em ambas as obras, os logaritmos são, pela primeira vez, trabalhados entre tópicos algébricos.

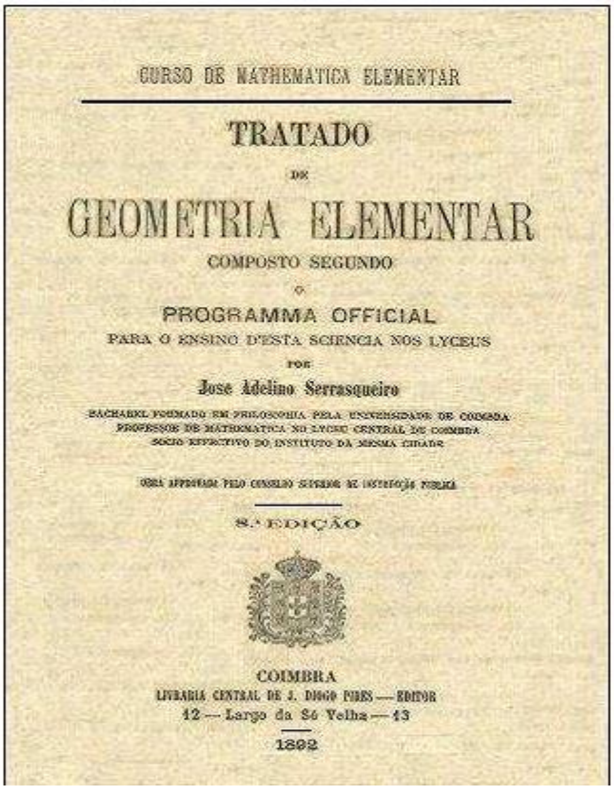


Figura 13: Capa da oitava edição do livro de Serrasqueiro (1892).

No período de 1893-1912, os livros indicados para o desenvolvimento dos logaritmos eram Elementos de Arithmética de João José Luiz Vianna e Arithmetica de Aarão e Luciano Reis, conforme denotam as figuras 14 e 15. Em ambas as obras, o tema logaritmos passaria a ser tratado tanto no campo aritmético quanto no algébrico.

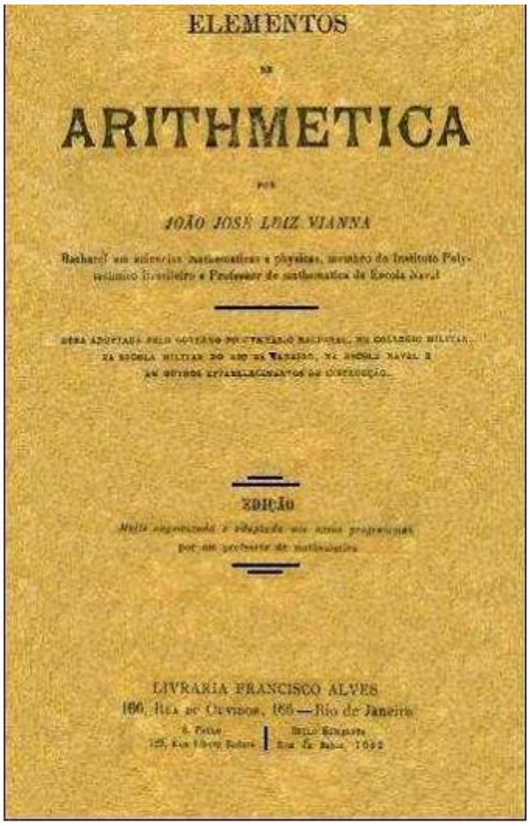


Figura 14: Capa do livro “Elementos de Arithmética” de Vianna (1926)

Figura 15: Capa de um livro “Elementos de Atithmética” da FTD (s/d)

No período de 1856 a 1912 prevalecia a concepção aritmética do logaritmo. Para caracterização de tal concepção, é importante verificar como aparecem algumas das definições de logaritmos encontradas em livros desse período, segundo Miguel e Miorim (2002):

- logaritmos são números em progressão por diferenças, correspondendo termo a termo a outros números em progressão por quocientes; havendo sempre uma progressão por diferenças um termo zero, que corresponda a um termo igual a um na progressão por quocientes (VIANNA, 1897, p. 231 apud MIGUEL; MIORIM, 2002, p. 28).
- logaritmos de um número é o termo de uma progressão por diferença correspondente a esse número numa progressão por quociente, quando os termos zero e 1 se correspondem nas duas progressões.(PERES; MARIN, 1909, p. 318 apud MIGUEL; MIORIM, 2002, p. 28).
- logaritmos são os termos de uma progressão arithmética começando por zero, correspondentes aos termos de uma progressão geométrica começando pela unidade. (SERRASQUEIRO, 1900, p. 320 apud MIGUEL; MIORIM, 2002, p. 28).

De acordo com o que foi mencionado nas definições apresentadas, os logaritmos são concebidos dentro de um cenário de números sequenciados aritmeticamente que estão em correspondência com outras classes de números sequenciadas geometricamente.

No entanto, as definições referidas correspondem à sequência de números denominada de progressões por diferenças e progressões por quociente, às quais correspondem às expressões aritméticas e geométricas. Essa definição de logaritmos está associada ao uso de progressões, como foi utilizado por Napier a fim de obter os logaritmos.

A justificativa para o uso específico dessas expressões conforme Peres y Marin (1909), veio pelo seguinte geômetra:

> Euclides, notável geômetra grego do século III A.C. (480-380), estabeleceu a teoria das proporções em seus famosos Elementos, pela representação linear das quantidades. Por esse motivo, e talvez também pela frequente aplicação que das proporções se faz geometria, deu-se-lhes a denominação imprópria de proporções geométricas. Como o uso sancionou essa denominação, apesar de sua impropriedade, as progressões por quociente, compostas por sua vez de proporções contínuas sucessivas, receberam também o nome de progressões geométricas (PERES Y MARIN, 1909, p. 302 e p. 308 apud MIGUEL; MIORIM, 2002, p. 29).

Observa-se que o autor pretende estabelecer uma conexão entre progressões por quocientes e proporções contínuas sucessivas. Embora essa conexão tenha sido estabelecida apenas para explicar a teoria das razões e proporções que era utilizada por progressões.

O tema - Abordagens por quocientes e proporções contínuas - chega ao conhecimento de Cavalieri por meio dos tratados de Euclides para descrever o estudo dos logaritmos e propor uma definição para esse instrumento de cálculo no século XVII, conforme descrito anteriormente.

A partir daí, a caracterização dos logaritmos segue esse método das progressões e das proporções contínuas, que são relacionadas por meio de progressões geométricas e aritméticas para a determinação e compreensão do conceito de logaritmos que estão presentes em diversos livros didáticos de Matemática do século XX.

Conforme foi visto, de 1893 a 1912, o tema logaritmos foi tratado nos programas oficiais, tanto no campo da aritmética quanto no da álgebra. No entanto, devido à evolução da implementação do estudo de equações exponenciais antes do tema logaritmos nos programas oficiais foram importantes para que os logaritmos configurassem no terreno da álgebra.

Para isso, devem-se tomar algumas definições presentes nos livros didáticos de álgebra do período em foco:

> [...] chama-se logaritmo de um número **o expoente a que é necessário elevar um número invariável para formar o proposto.** Colocados em uma tábua todos os números inteiros e à direita de cada um o seu logaritmo, isto é o expoente **a** que preciso elevar um número constante **a** para formar os mesmos números inteiros, ter-se-á uma tábua de logaritmos. O número invariável recebe o nome de base do sistema de logaritmos. (OTTONI, 1887, p. 216 apud MIGUEL; MIORIM, 2002, p. 97).

> **logaritmo de um número** é o expoente da potência **a** que é necessário elevar uma quantidade positiva, chamada de base, para produzir esse número. Assim, sendo x = log y (base a), por definição teremos $y = a^x$. **sistema de logaritmos** é a série dos logaritmos de todos os números, calculados para um valor particular da base. É como se base pudesse encontrar uma infinidade de valores, segue-se que há uma infinidade de sistemas logaritmos. (SERRASQUEIRO, 1900, p. 325 apud MIGUEL; MIORIM, 2002, p. 97).

> Os logaritmos podem originar-se no cálculo dos valores, onde eles derivam de duas progressões, sendo uma geométrica e outra aritmética, ou na **álgebra,** onde eles são considerados como expoentes **a** que é necessário elevar uma certa base para obter todos os números possíveis. (ALVES, 1918, p. 339 apud MIGUEL; MIORIM, 2002, p. 97).

A análise de tais definições permite mostrar que o elemento caracterizador dessa nova concepção de logaritmo algébrico-funcional é definido como o expoente de uma equação ou função exponencial sem representar quaisquer relações entre progressões.

De acordo com Miguel e Miorim (2004), os autores de livros didáticos dessa época, embora manifestassem clareza a essa concepção, eles ainda mantinham certa equivalência entre ambos os tratamentos, tanto no aritmético quanto no algébrico-funcional e ainda insistiam em apresentar a teoria dos logaritmos, segundo esses dois enfoques. A partir de 1915, essas duas concepções aparecem apenas no terreno da álgebra.

A implementação algébrica dos logaritmos foram dando lugar aos métodos propostos pela aritmética básica que envolvia progressões como uma alternativa para explicar o conceito de logaritmos. Devido ao avanço da álgebra e do conhecimento amplo da Matemática do século XIX, os livros didáticos brasileiros foram adotando a concepção algébrico-funcional dos logaritmos de acordo com as novas reformas educacionais que foram emergindo apenas no campo da álgebra.

As referências das obras didáticas produzidas por autores brasileiros, em finais do século XIX e começo do século XX, trouxeram uma manifestação acerca da história da Matemática nos livros didáticos. Essa manifestação traria métodos produzidos historicamente sob uma linguagem atualizada e integrados pelos textos didáticos.

3.2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO LIVRO DIDÁTICO

De acordo com Miguel e Miorim (2004, p. 33),

> o recurso à História como uma tentativa de dar significado ao ensino da Matemática aparece nos livros didáticos brasileiros de Matemática do final do século XIX e começo do XX, a exemplo do que já ocorria na Europa um século antes, com a publicação da obra *Elements de géométrie*, de Aléxis Claude Clairaut, em 1741. Era manifestado pela apresentação de métodos produzidos historicamente ou de observações sobre temas e personagens da história da Matemática que tenha sofrido forte influência positivista, ao mesmo tempo em que utilizavam uma versão do princípio genético para o ensino da Matemática.

Ainda segundo Miguel e Miorim (2004) a influência do positivismo no Brasil, particularmente entre finais do século XIX e começos do XX, seria um fator decisivo e reforçador de várias formas de participação da história em livros didáticos e propostas oficiais brasileiras.

Observe-se como Auguste Conte (1798 – 1857) se manifesta na primeira lição de seu curso de filosofia positiva relacionado à matemática escolar:

> [...] toda ciência pode ser exposta mediante dois caminhos essencialmente distintos: o caminho histórico e o caminho dogmático. Qualquer outro modo de exposição não será mais do que a combinação desses caminhos. Pelo primeiro procedimento, expomos sucessivamente os conhecimentos na mesma ordem efetiva segundo a qual o espírito os obteve realmente, adotando, tanto quanto possível, as mesmas vias. Pelo segundo, apresentamos o sistema de ideias tal como poderia ser concebido hoje por um único espírito que, colocado numa perspectiva conveniente e provida de conhecimentos suficientes, ocupar-se-ia de refazer a ciência em conjunto. O primeiro modo é evidentemente aquele pelo qual começa, com toda necessidade, o estudo de cada ciência nascente, pois apresenta a propriedade de não exigir, para a exposição dos conhecimentos, nenhum novo trabalho distinto daquele de sua formação. Toda didática se resume, então, em estudar, sucessivamente, na ordem cronológica, as diversas obras originais que contribuíram para o progresso da ciência. (CONTE, 1978, p. 27 apud MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 38).

A presença da história da Matemática nos livros didáticos estabelece metas para um novo aprendizado, abrangendo possibilidades para o crescimento do ensino escolar. Assim, pela Reforma Campos[6], os livros didáticos de Matemática refletem a história em suas principais obras. Neles estão presentes figuras que remetem diretamente à matemática dos egípcios e dos gregos, além de proporem problemas significativos para a aprendizagem. Desse modo, "o desenvolvimento da história da Matemática nos livros didáticos foi essencialmente importante para o crescimento educacional" (MIORIM, 1998, p. 110).

Houve várias reformas do ensino de Matemática no Brasil e entre essas reformas a que ficou mais conhecida foi o Movimento da Matemática Moderna[7]. A Matemática Moderna não foi implantada por um decreto, mas isso não impediu que ela fosse divulgada e adotada em todo o Brasil. Provavelmente uma das razões que a fizeram tão conhecida no Brasil foi o fato de ela também ter sido adotada em vários países do mundo.

Sobre o assunto, Kline (1976 apud LIAO, 2004, p. 4) enfatiza que esse movimento procurou usar conceitos e processos unificadores para reestruturar os diversos tópicos escolares de modo mais coerente nas novas aplicações desta linguagem e eliminar alguns dos tópicos tradicionais considerados obsoletos. Pretendia-se, desse modo, proporcionar aos alunos uma melhor compreensão das ideias matemáticas e, ao mesmo tempo, melhorar suas competências do cálculo. O estudo das estruturas unificadoras e o uso de uma linguagem comum poderiam ter, nesta perspectiva, uma influência benéfica no próprio domínio do cálculo.

De maneira geral, podemos considerar a existência de dois tipos de opinião com relação ao Movimento da Matemática Moderna:

- A implantação da Matemática Moderna como parte do currículo escolar não se mostrou eficaz no combate aos problemas que o ensino já apresentava. Sua adoção foi feita sem o planejamento necessário e sem a devida preparação dos professores.

---

[6] Reforma conhecida por Francisco Campos de 1931. Essa reforma criava um Ensino Secundário com dois ciclos. O primeiro ciclo era de cinco anos, que era chamado de Curso Fundamental e o segundo ciclo era de dois anos, chamado de Curso Complementar e obrigatório para candidatos a matrícula em determinados institutos de Ensino Superior.

[7] Movimento de Matemática desenvolvido no Brasil no final da década de 1950 e início de 1960. Esse movimento buscava mudanças significativas nas práticas escolares.

- Considera a Matemática Moderna como um marco para o início de uma nova fase no ensino de matemática no Brasil.

De acordo com Kline (1976 apud LIAO, 2004, p. 5) “o simbolismo e a ênfase das estruturas abstratas dificultavam o aluno de compreender os conteúdos matemáticos”. A preocupação com o rigor da linguagem dava origem a novos tipos de exercícios muitas vezes estéreis e irrelevantes. Isso dificultava o raciocínio do aluno na resolução de problemas e domínio do cálculo bem como desenvolvimento lógico da Matemática.

Conforme Miguel e Miorim (2004), foi a partir de finais da década de 1980, que se intensificam as críticas referentes à proposta do movimento da Matemática Moderna – com crescentes manifestações da participação da história em textos dirigidos à prática pedagógica de Matemática. Essa “retomada” da participação da história pode ser percebida, por exemplo, na *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática - 1^0 grau*, do Estado de São Paulo, produzida na última metade da década de 1980, em substituição aos *Guias Curriculares propostos para as matérias do núcleo comum do ensino de 1^0 grau*.

Esse movimento tornou-se o marco inicial para que houvesse uma ampliação de manifestações de participação da história em textos dirigidos à prática pedagógica da Matemática. Então, o livro didático além de seguir uma proposta intensificada pelo Movimento da Matemática Moderna teria que associar esse conteúdo a uma abordagem histórica ligada à prática pedagógica.

3.3 PNLD E O ENSINO DE MATEMÁTICA

Com a respectiva mudança nas Propostas Curriculares para o Ensino de Matemática ocorrida no século XX e a ampliação do ensino de Matemática nas diversas escolas, os livros didáticos tornaram-se alguns dos principais guias ou recurso didático do professor de Matemática. Segundo o Programa Nacional do Livro didático (PNLD), que executa a função de guia do livro didático, os seus representantes afirmam que:

> Um livro didático deve oferecer informações e explicações sobre o conhecimento matemático que interfere e sofre interferências das práticas sociais do mundo contemporâneo e do passado. Também deve conter uma proposta pedagógica que leve em conta o conhecimento prévio e o nível de escolaridade do aluno e que ofereça atividades que o incentivem a participar ativamente de sua aprendizagem e a interagir com seus colegas.

> Além disso, o livro precisa assumir a função de texto de referência tanto para o aluno, quanto para o docente. (BRASIL, 2008, p. 9).

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), implementado desde o ano de 1997, traz algumas importantes funções que os livros didáticos desempenham no que diz respeito ao trabalho do professor:

> - Auxilia no planejamento e na gestão das aulas, seja pela explanação de conteúdos curriculares, seja pelas atividades, exercícios e trabalhos propostos;
> - Favorece a aquisição dos conhecimentos, assumindo o papel de texto de referência;
> - Favorece a formação didático-pedagógica;
> - Auxilia na avaliação da aprendizagem do aluno. (BRASIL, 2008, p. 12).

Referente ao livro didático usado no Ensino Médio, o Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM), destacam que existem múltiplos papéis, dentre os quais, tem-se:

> - Favorecer a ampliação dos conhecimentos adquiridos ao longo do ensino fundamental;
> - Oferecer informações capazes de contribuir para a inserção dos alunos no mercado de trabalho, o que implica a capacidade de buscar novos conhecimentos de forma autônoma e reflexiva;
> - Oferecer informações atualizadas, de forma a apoiar a formação continuada do professores, na maioria das vezes, impossibilitados, pela demanda de trabalho, de atualizar-se em sua área específica (BRASIL, 2009, p. 19).

No que concerne à abordagem dos conteúdos em Matemática, o Programa Nacional do Livro didático (PNLD) e o Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM), registram como são trabalhados, distribuídos e selecionados nos campos da matemática (Geometria, Álgebra, Trigonometria e Aritmética).

Seguindo como referência a abrangência dos conteúdos em Matemática adotados pelos livros didáticos, estes são fundamentados “por modelos matemáticos que incluem conceitos, relações entre conceitos, procedimentos e representações simbólicas que, num processo contínuo, passam de instrumento de resolução a objeto próprio do conhecimento”. (BRASIL, 2009, p. 20).

Os livros didáticos de Matemática são essenciais para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Contudo, em alguns momentos, alguns não ajudam tanto no processo de ensino da referida disciplina. Os recursos metodológicos, o grau de abstração e a forma como é abordado o conteúdo não constitui um objeto que auxilie o aluno no processo de aprendizagem da Matemática, pelo contrário, dificulta-lhe a compreensão do conteúdo e a sua abordagem crítica. A seguir, procedo a uma análise da abordagem dos logaritmos presentes nos livros didáticos atuais, tendo em vista, especialmente, como é abordado o conceito, suas propriedades e aplicações.

3.4 ABORDAGENS DOS LOGARITMOS NOS LIVROS DIDÁTICOS PESQUISADOS

Tomando como base os livros didáticos usados nas principais escolas públicas de Natal, no Estado do Rio Grande do Norte, procurei identificar como os logaritmos são abordados nesses livros didáticos. Os livros escolhidos para abordagem dos logaritmos utilizados no ensino de Matemática foram os seguintes:

- Matemática aula por aula (Benigno Barreto Filho e Claúdio Xavier da Silva, 2003)
- Matemática: Uma nova abordagem (José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno, 2000)
- Matemática, Ciências e aplicações (Gelson Iezzi, 2004)
- Componente Curricular: Matemática (Edwaldo Bianchini, 2004)
- Matemática (Manoel Paiva, 2005)

Seguindo a análise buscou-se, a priori, identificar como os autores abordam o conceito de logaritmos. Existem normalmente três princípios básicos para abordagem conceitual de logaritmos que são: *o geométrico, o aritmético e o algébrico-funcional.* Investiga-se nesses livros didáticos como eles abordam o conceito de logaritmos seguindo como referência essas perspectivas.

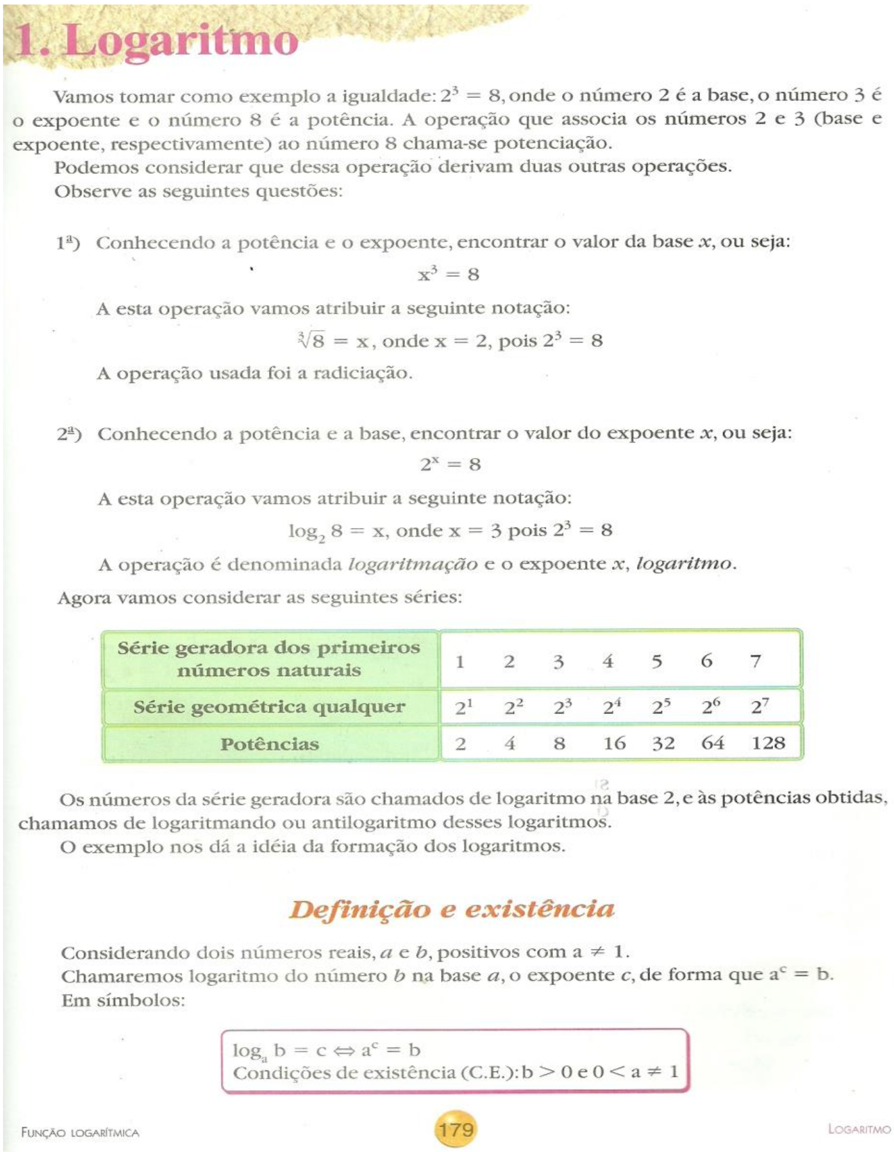
Observe-se como esses autores apresentam o conceito de logaritmos:

O livro: Matemática aula por aula

Figura 16: Capa extraída do livro Matemática aula por aula, Barreto Filho e Silva (2003)

O livro procura inicialmente interligar a utilidade dos logaritmos na resolução de alguns estudos da época. Desse modo, os autores procuram relacionar a ideia de logaritmo com a simplificação do cálculo. Para isso, esclarecem periodicamente que os logaritmos originaram-se de um processo de simplificação de cálculos que consistia em transformar produtos em somas, e divisões em subtrações. Sem mais explicações, eles afirmam que essas aplicações não estavam apenas restritas às suas causas originais e foram de enorme utilidade para o desenvolvimento das ciências. No prefácio inicial que sucede a abordagem dos logaritmos, os autores relatam uma pequena história dos logaritmos nas grandes navegações e uso desse instrumento de cálculo – logaritmos, nas simplificações dos cálculos. Relatam-nos ainda, de forma sucinta, como surgiram os logaritmos e quem desvendou esse mistério e suas primeiras publicações.

Deve-se notar como esses autores esclarecem o conceito de logaritmo, conforme mostra a figura 17, a seguir:



1. Logaritmo

Vamos tomar como exemplo a igualdade: $2^3 = 8$, onde o número 2 é a base, o número 3 é o expoente e o número 8 é a potência. A operação que associa os números 2 e 3 (base e expoente, respectivamente) ao número 8 chama-se potenciação.

Podemos considerar que dessa operação derivam duas outras operações.

Observe as seguintes questões:

1ª) Conhecendo a potência e o expoente, encontrar o valor da base *x*, ou seja:

$$x^3 = 8$$

A esta operação vamos atribuir a seguinte notação:

$$\sqrt[3]{8} = x, \text{ onde } x = 2, \text{ pois } 2^3 = 8$$

A operação usada foi a radiciação.

2ª) Conhecendo a potência e a base, encontrar o valor do expoente *x*, ou seja:

$$2^x = 8$$

A esta operação vamos atribuir a seguinte notação:

$$\log_2 8 = x, \text{ onde } x = 3 \text{ pois } 2^3 = 8$$

A operação é denominada *logaritmação* e o expoente *x*, *logaritmo*.

Agora vamos considerar as seguintes séries:

Série geradora dos primeiros números naturais	1	2	3	4	5	6	7
Série geométrica qualquer	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
Potências	2	4	8	16	32	64	128

Os números da série geradora são chamados de logaritmo na base 2, e às potências obtidas, chamamos de logaritmando ou antilogaritmo desses logaritmos.

O exemplo nos dá a idéia da formação dos logaritmos.

Definição e existência

Considerando dois números reais, *a* e *b*, positivos com $a \neq 1$.

Chamaremos logaritmo do número *b* na base *a*, o expoente *c*, de forma que $a^c = b$.

Em símbolos:

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$
Condições de existência (C.E.): $b > 0$ e $0 < a \neq 1$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA 179 LOGARITMO

Figura 17: Ilustração extraída do livro "Matemática aula por aula", Barreto Filho e Silva (2003, p. 179).

Baseado no exemplo de exponenciação, eles tentam esclarecer o que sejam os logaritmos. No entanto, não são tão claros na explicação. Uma melhor interpretação para esse conceito, tomando esse exemplo, seria que: partindo da ideia do que seja uma potência, exemplo: $2^3 = 8$, o logaritmo seria o número que elevado à base 2 acharíamos como resposta 8, ou seja, encontrar um x, tal que $2^x = 8$. Com isso, o valor x = 3 seria o logaritmo de 8 na base 2. Escrevendo numa linguagem matemática, teríamos: $\log_2 8 = 3 \Rightarrow 2^3 = 8$, onde 2 é a base 8 é o logaritimando e 3 é o logaritmo. Em termos algébricos teríamos: $\log_2 8 = x \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$.

Pode observar-se que todo este procedimento é para explicar como consiste a ideia de logaritmos e quais suas operações usadas. A proposição dos autores é usufruir de algum método significativo para explicar o que venha ser o logaritmo. Dessa maneira, a concepção usada é o algébrico-funcional.

Essa série geradora, conforme mostra a figura 17, foi uma boa escolha do autor para propiciar a ideia formal dos logaritmos. Inicialmente essa abordagem por séries geradoras envolve a concepção aritmética dos logaritmos, mas não chega a abordar o logaritmo nesse sentido. Apenas descreve que os números da série são chamados de logaritmo na base 2, e as potências obtidas, chamam de logaritmando ou antilogaritmos desses logaritmos. Não traz nenhum comentário que essas séries geradoras formam duas progressões, uma aritmética e outra geométrica e que a comparação entre as duas geram o conceito de logaritmos, conforme realizei no capítulo 2. Como consequência dessa forma de relação entre as séries geradoras, os autores definem em termos algébricos e formais os logaritmos, conforme mostra a figura 17. Como consequência dessa definição o autor explora uma série de atividades para explicar como funciona o logaritmo mecanicamente.

Sobre o sistema de logaritmos, os autores comentam superficialmente, conforme mostra a figura 18, mostrando sua notação, mas não explorando inicialmente quem inventou esse método. Consequentemente, no sistema de logaritmos neperianos, eles afirmam que o neperiano é a base do logaritmo natural e sem propor nenhum comentário desenvolvem alguns exemplos.

Sistemas de logaritmos

Chama-se sistema de logaritmos de base a $(1 \neq a > 0)$ o conjunto dos logaritmos de todos os números reais positivos na base a.

Dois sistemas de logaritmos destacam-se pelo seu importante papel no campo das Ciências, são eles: sistema de logaritmos decimais (ou sistema de logaritmos de Briggs) e sistema de logaritmos neperianos (ou sistema de logaritmos naturais).

Sistema de logaritmos decimais

É um sistema de logaritmos no qual se adota a base 10, o que vem simplificar cálculos no campo da Matemática.

Para esse sistema de logaritmos, na notação iremos omitir a base.

Exemplos:

a) $\log_{10} 2 = \log 2$ b) $\log_{10} x = \log x$

Sistema de logaritmos neperianos

É o sistema de logaritmos de base **e** (e = 2,718 ..., denominado número de Euler), e é apresentado escrevendo-se uma das formas: $\log_e$ ou 1n.

Exemplos:

a) $\log_e 7 = 1n\,7$ b) $\log_e 10 = 1n\,10$ c) $\log_e 35 = 1n\,35$

Figura 18: Imagem extraída do livro "Matemática aula por aula", Barreto Filho e Silva (2003, p. 182).

No capítulo 2 desenvolvi como sucedeu esses sistemas de logaritmos de forma que auxilie o professor no processo de ensino.

Dessa maneira, os autores descrevem as propriedades dos logaritmos algebricamente, informando de forma precisa que o produto transforma-se em soma e que a divisão subtrai e que a potência multiplica o respectivo logaritmo. No final do capítulo, os autores voltam a comentar sobre os logaritmos decimais e que esse sistema logarítmico é escrito como uma potência de 10. Em seguida, mostram alguns exemplos sobre os logaritmos decimais usando o método por aproximação para explicar como sucedeu o processo de mantissa[8]. Ao finalizar o capítulo propõem superficialmente, algumas atividades contextualizadas sobre os logaritmos.

[8] Parte decimal dos logaritmos.

O livro: Matemática: Uma nova abordagem

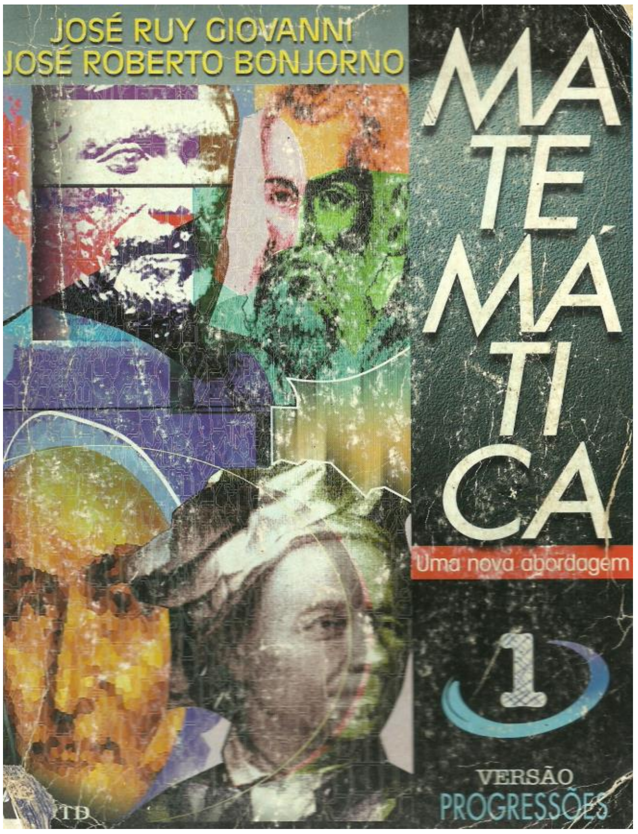
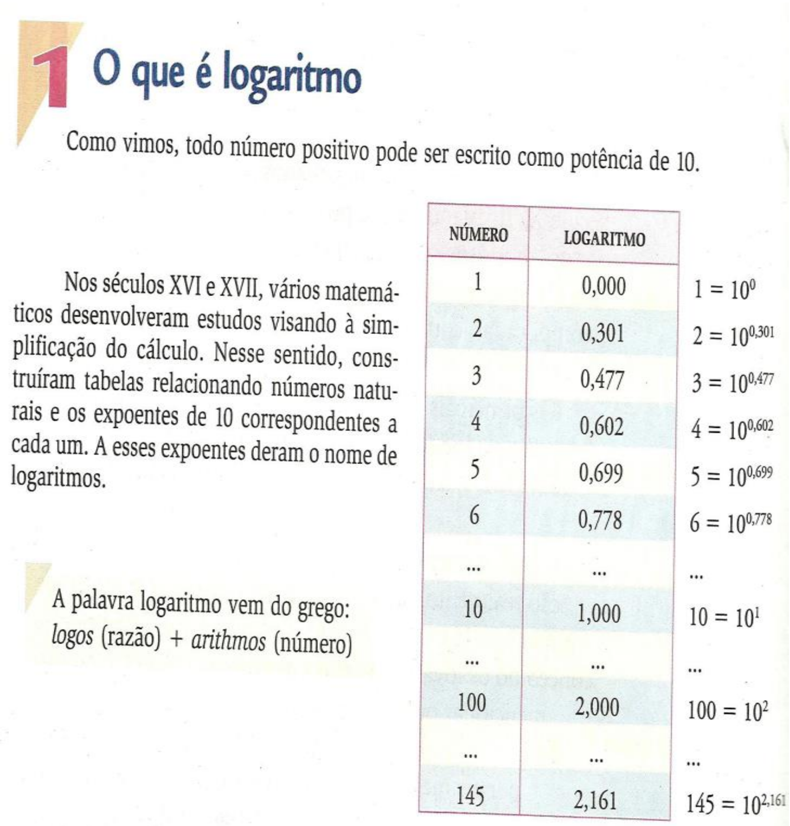


Figura 19: Capa extraída do livro “Matemática”, Giovanni e Bonjorno (2000).

Nesse livro, os autores trazem no prefácio um comentário superficial sobre como foram desenvolvidos os logaritmos, e que essa descoberta foi importante para a Astronomia e a Navegação sendo premente nos laboriosos cálculos trigonométricos e multiplicativos. Inicialmente, para definir o que sejam os logaritmos, os autores se apropriam de algumas relações aritméticas de potência de base 10, conforme mostra a figura 20.



1 O que é logaritmo

Como vimos, todo número positivo pode ser escrito como potência de 10.

Nos séculos XVI e XVII, vários matemáticos desenvolveram estudos visando à simplificação do cálculo. Nesse sentido, construíram tabelas relacionando números naturais e os expoentes de 10 correspondentes a cada um. A esses expoentes deram o nome de logaritmos.

A palavra logaritmo vem do grego: *logos* (razão) + *arithmos* (número)

NÚMERO	LOGARITMO	
1	0,000	$1 = 10^{0}$
2	0,301	$2 = 10^{0,301}$
3	0,477	$3 = 10^{0,477}$
4	0,602	$4 = 10^{0,602}$
5	0,699	$5 = 10^{0,699}$
6	0,778	$6 = 10^{0,778}$
...	...	...
10	1,000	$10 = 10^{1}$
...	...	...
100	2,000	$100 = 10^{2}$
...	...	...
145	2,161	$145 = 10^{2,161}$

Figura 20: Imagem extraída do livro “Matemática”, Giovanni e Bonjorno (2000, p. 264).

Neste processo, os autores mostram que essas tabelas foram chamadas de tábuas de logaritmos decimais porque os números são representados como potências de base 10. Eles não mencionam como chegaram a essa relação e, ao concluir essa tábua, apenas utilizam-na para expressar o que seja o logaritmo a fim de que o aluno entenda como se comportam esse instrumento de cálculo.

Antes de definir e escrevê-lo em termos matemáticos, os autores designam de onde se origina esta palavra. A palavra logaritmo vem do latim logos (razão) + arethmos (número). A combinação entre as duas proporciona o significado de número de razões. Mas não comentam qual era essa razão e como chegaram a essa razão.

Apropriando-se da tabela anterior, conforme mostra a figura 20, os autores estabelecem uma relação conforme mostra a figura 21, adiante. Baseados nesses cálculos relacionados pelo uso dos valores exponenciais propostos na tabela, os autores concluem que o logaritmo é válido para qualquer número, definindo o logaritmo em termos algébricos e formais bem como suas condições de existência, conforme vê-se na figura 20. Dessa maneira, definem que todos os conjuntos e expressões exponenciais com potência de 10, sugeridos na tabela, são chamados de tábuas de logaritmos decimais.

Assim, o número 0,301 é chamado logaritmo de 2 na base 10.

Indica-se: $\log_{10} 2 = 0{,}301$, ou seja, $2 = 10^{0{,}301}$.

O número 0,778 é chamado logaritmo de 6 na base 10.

Indica-se: $\log_{10} 6 = 0{,}778$, ou seja, $6 = 10^{0{,}778}$.

Essas tabelas foram chamadas de *tábuas de logaritmos decimais* porque os números são representados como potências de base 10.

Entretanto, os logaritmos podem ser escritos em qualquer base positiva diferente de 1. Observe:

- $\log_7 2 = 0{,}356$, porque $2 = 7^{0{,}356}$
- $\log_5 125 = 3$, porque $125 = 5^3$
- $\log_8 47 = 1{,}852$, porque $47 = 8^{1{,}852}$

Dizemos que o logaritmo de um número positivo *b*, na base *a*, positiva e diferente de 1, é o expoente *x* ao qual se deve elevar *a* para se obter *b*.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x, \text{ com } b > 0,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Se a base do logaritmo for 10, costuma-se omiti-la na sua representação.

$$\log_{10} b = \log b \quad (\log \rightarrow \text{logaritmo decimal})$$

O conjunto dos logaritmos na base 10 de todos os números reais positivos é chamado de *sistema de logaritmos decimais* ou de *Briggs*.

FUNÇÃO LOGARÍTMICA 264

Figura 21: Ilustração extraída do livro Matemática, Giovanni e Bonjorno (2000, p. 264)

Todo esse processo caracteriza a concepção algébrico-funcional, pois relaciona duas variáveis **a** e **b** em termos funcionais, definindo-os na forma de expoentes ou funções exponenciais. Então, como consequência dessa definição, exploram uma série de exercícios repetitivos com nenhuma procedência relacional.

Pela facilidade do seu uso, esse sistema é especialmente empregado para realizar cálculos numéricos.

Há, ainda, o sistema de logaritmos *neperianos* (o nome foi dado em homenagem a John Napier). A base desses logaritmos é o número irracional e = 2,71828...

Esse sistema também é conhecido como sistema de logaritmos naturais e tem grande aplicação no estudo de diversos fenômenos da natureza.

$$\log_e b = \ln b \quad (\ln \rightarrow \text{logaritmo natural})$$

A operação por meio da qual obtemos x na igualdade $x = \log_a b$ é chamada *logaritmação*.

OPERAÇÃO / ELEMENTOS	POTENCIAÇÃO	LOGARITMAÇÃO
a	base	base do logaritmo
b	potência	logaritmando ou antilogaritmo
x	expoente	logaritmo

Note que a logaritmação e a potenciação são operações que se relacionam.

O número *e*

Entre tantos números fascinantes, temos o número *e*, base dos logaritmos neperianos, também chamados de logaritmos naturais.

Quem o designou foi o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), que provou ser esse número o limite de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ quando x cresce infinitamente.

O valor aproximado de *e* (com 9 casas decimais!), pode ser memorizado facilmente, quando usamos um artifício: $e = 2{,}7\ 1828\ 1828...$

Figura 22: Figura extraída do livro Matemática, Giovanni e Bonjorno (2000, p. 265)

Os autores ainda se apropriam do sistema de logaritmos neperianos (o nome foi dado em homenagem a Euler). Contam-nos que a base desses logaritmos é o número irracional e = 2,71828. Esse também é conhecido como sistema de logaritmos naturais e tem grande aplicação no estudo de diversos fenômenos naturais, conforme mostrou a figura 22, anteriormente. Eles não aprofundam nessa ideia de sistema de logaritmo neperiano, apenas advogam que o matemático suíço Leonhard Euler demonstrou através de uma sequência quando o limite de x cresce infinitamente, conforme vimos no capítulo 2.

No final do capítulo, os autores fazem um resumo da invenção dos logaritmos decimais e como esse tema foi importante na aplicação do cálculo sendo difundido por toda a Europa esse sistema de logaritmos. Mas, não exploram em termos práticos esse sistema de base **e**. No resumo proposto pelos autores, estes incentivam o leitor a usar a calculadora científica para realizar os cálculos desses logaritmos para que entenda o significado das mantissas. Além do mais, concebe algebricamente e demonstrativamente as propriedades logarítmicas sem relacioná-las de forma prática. Eles ainda buscam oferecer ao professor como se constrói uma tábua de logaritmos baseado nos logaritmos decimais. Ao finalizar, propõe um simples comentário sobre o uso dos logaritmos no estudo de fenômeno naturais.

O livro: Matemática ciências e aplicações

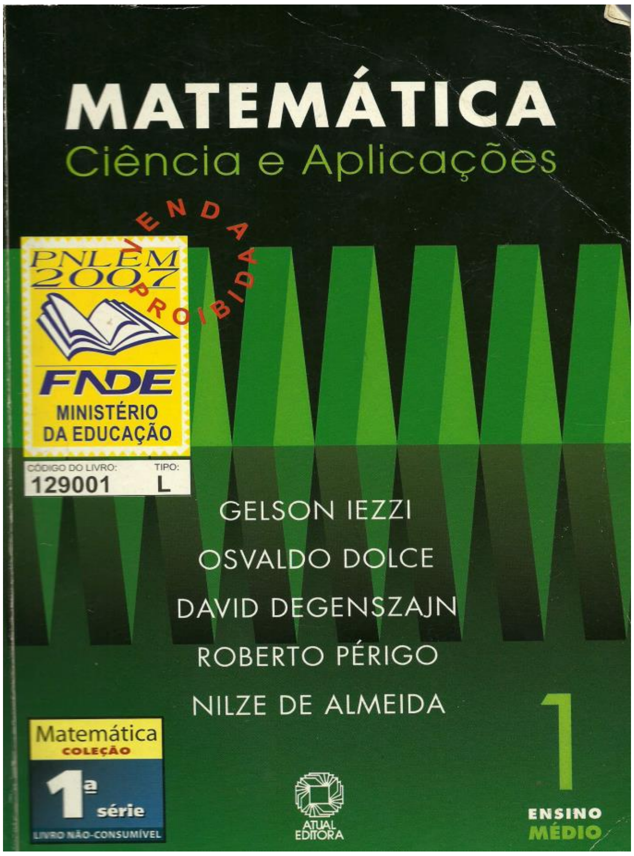


Figura 23: Capa extraída do livro “Matemática Ciências e aplicações” Iezzi (2004)

Inicialmente, os autores buscam introduzir o conceito usando uma revisão sobre o estudo de função exponencial. Para chegar a uma definição precisa, eles se apropriam de uma situação-problema no intuito de entender como funciona o logaritmo. Essa situação-problema o autor leva a descrever uma função exponencial e, consequentemente, o logaritmo em termos característicos e formais, conforme mostra a figura 24.

Definição

Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se *logaritmo de **b** na base **a*** o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b.

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Na expressão $\log_a b = x$, temos:

- a é a base do logaritmo;
- b é o logaritmando;
- x é o logaritmo.

Vejamos alguns exemplos de logaritmos:

$\log_2 4 = 2$, pois $2^2 = 4$

$\log_3 81 = 4$, pois $3^4 = 81$

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, pois $2^{-3} = \frac{1}{8}$

$\log_7 7 = 1$, pois $7^1 = 7$

$\log_5 1 = 0$, pois $5^0 = 1$

$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, pois $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$, pois $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$

Exemplo

Vamos agora calcular, através da definição:

a) $\log_{\sqrt[3]{9}} 3$

b) $\log_{16} 0{,}25$

a) Façamos $\log_{\sqrt[3]{9}} 3 = x$. Temos:

$$\left(\sqrt[3]{9}\right)^x = 3 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{3^2}\right)^x = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{3^{2x}} = 3 \Rightarrow 3^{\frac{2x}{3}} = 3 \Rightarrow \frac{2x}{3} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

b) Façamos $\log_{16} 0{,}25 = y$. Temos:

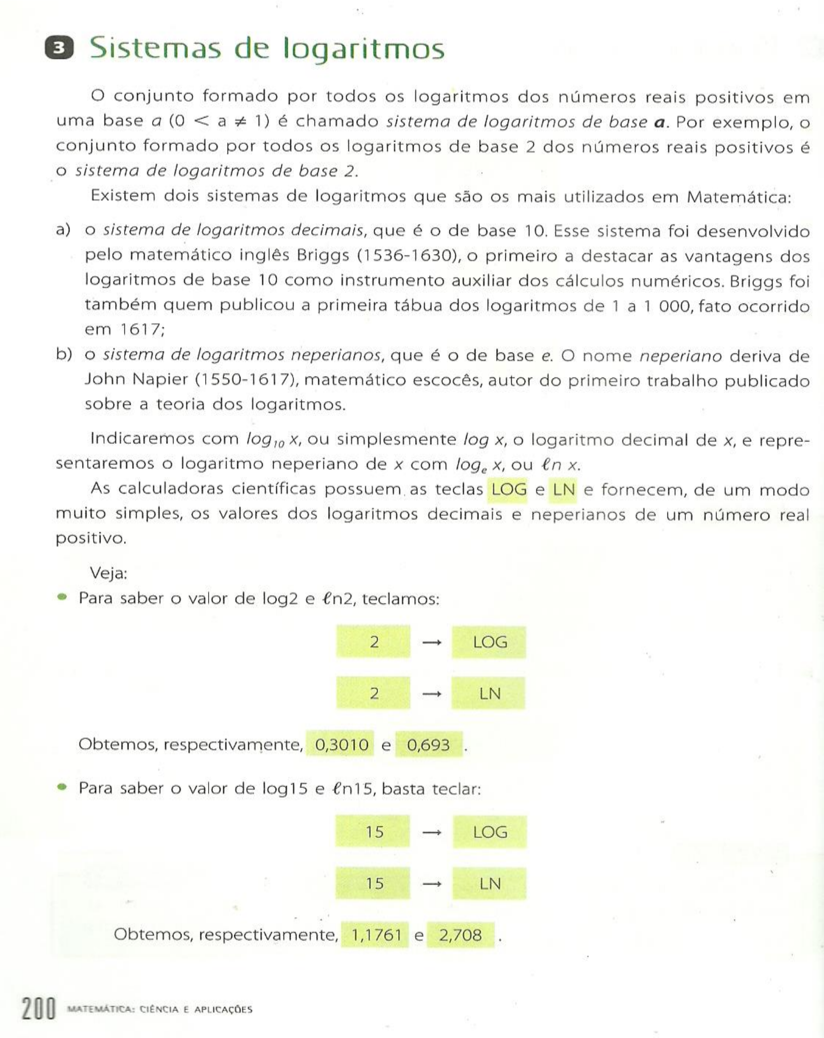
$$16^y = 0{,}25 \Rightarrow (2^4)^y = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{4y} = 2^{-2} \Rightarrow 4y = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Observação

As restrições para a ($0 < a \neq 1$) e para b ($b > 0$), colocadas na definição, garantem a existência e a unicidade de $\log_a b$.

Figura 24: Imagem extraída do livro "Matemática Ciências e aplicações" Iezzi (2004, p. 198)

Em seguida, são dados alguns exemplos de como são explorados os logaritmos por essa lei e quais são as condições de existência referentes a esse estudo. Dessa maneira, os autores propõem um comentário sobre os sistemas de logaritmos, conforme mostra a figura 25.



3 Sistemas de logaritmos

O conjunto formado por todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base a ($0 < a \neq 1$) é chamado *sistema de logaritmos de base* ***a***. Por exemplo, o conjunto formado por todos os logaritmos de base 2 dos números reais positivos é o *sistema de logaritmos de base 2*.

Existem dois sistemas de logaritmos que são os mais utilizados em Matemática:

a) o *sistema de logaritmos decimais*, que é o de base 10. Esse sistema foi desenvolvido pelo matemático inglês Briggs (1536-1630), o primeiro a destacar as vantagens dos logaritmos de base 10 como instrumento auxiliar dos cálculos numéricos. Briggs foi também quem publicou a primeira tábua dos logaritmos de 1 a 1 000, fato ocorrido em 1617;

b) o *sistema de logaritmos neperianos*, que é o de base e. O nome *neperiano* deriva de John Napier (1550-1617), matemático escocês, autor do primeiro trabalho publicado sobre a teoria dos logaritmos.

Indicaremos com $log_{10}\, x$, ou simplesmente $log\, x$, o logaritmo decimal de x, e representaremos o logaritmo neperiano de x com $log_e\, x$, ou $\ell n\, x$.

As calculadoras científicas possuem as teclas LOG e LN e fornecem, de um modo muito simples, os valores dos logaritmos decimais e neperianos de um número real positivo.

Veja:

- Para saber o valor de log2 e ℓn2, teclamos:

2 → LOG

2 → LN

Obtemos, respectivamente, 0,3010 e 0,693 .

- Para saber o valor de log15 e ℓn15, basta teclar:

15 → LOG

15 → LN

Obtemos, respectivamente, 1,1761 e 2,708 .

200 MATEMÁTICA: CIÊNCIA E APLICAÇÕES

Figura 25: Ilustração extraída do livro Matemática ciências e aplicações, Iezzi (2004, p. 200).

Referente ao sistema de logaritmos, os autores fazem uma análise sucinta dos logaritmos de Briggs e Napier. Eles comentam que os logaritmos de Briggs são conhecidos como logaritmos decimais que é o de base 10, mas não exploram tanto essa ideia em termos de exercícios. No entanto, no sistema de logaritmo neperiano, eles afirmam que é o de base **e**. Contudo, não mostram como funcionam esses logaritmos, apenas descrevem que o número **e** é a base do logaritmo natural.

No final do capítulo, os autores traçam um perfil histórico de como Napier concluiu os seus estudos a respeito dos logaritmos e como esse assunto foi importante no progresso científico da matemática e de outras ciências. A concepção que este livro aborda é algébrico-funcional, sem nenhuma procedência relacional aritmética. A abordagem das propriedades logarítmicas é realizada formalmente, sem o uso da forma prática. Ao finalizar, os autores caracterizam algumas implicações dos logaritmos, de forma que desperte o interesse do professor pelo estudo significativo desse tema.

O livro: Matemática

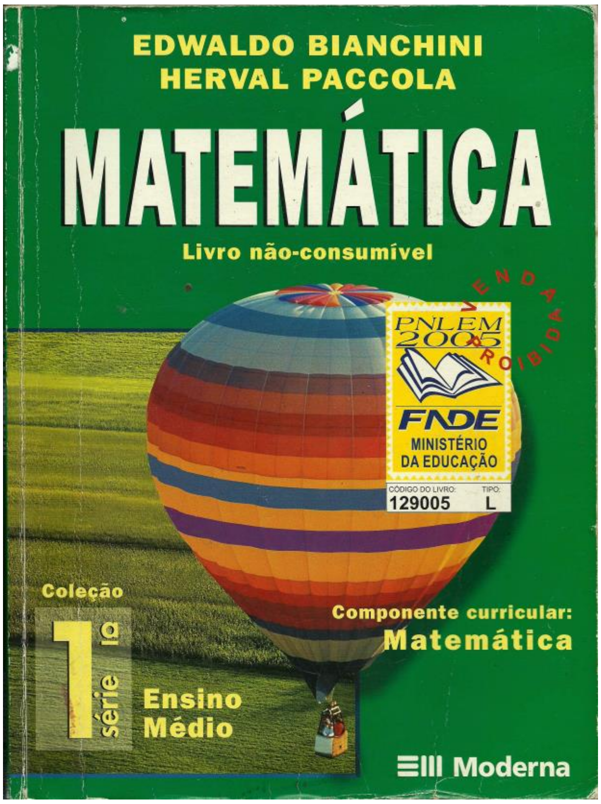


Figura 26: Capa extraída do livro Matemática, Bianchini e Paccola (2004).

Nesse livro, o autor inicialmente comenta como surgiram os logaritmos em termos históricos. A história serve apenas como auxílio para identificar por quem foi descoberto e quais foram as contribuições desse conteúdo na sociedade da época. Ele começa a explorar o conceito de logaritmo por dois processos: situação-problema e um exemplo de potenciação, a fim de que o leitor entenda o que seja logaritmo. Dessa maneira, o autor chega a uma definição formal, conforme mostram a figura 27 e a figura 28:

1. Logaritmos

Considere a situação a seguir.

Numa cidade do interior, um médico pediatra, após registrar por vários anos o crescimento de pacientes com idades entre 1 e 12 anos, chegou à seguinte fórmula que indica a altura média das crianças: $10^{h-0,7} = \sqrt{i}$

Nessa fórmula, *h* representa a altura em metros e *i*, a idade em anos. Assim, para calcular a altura média que uma criança de 10 anos deverá ter, o médico substitui, na fórmula, *i* por 10, obtendo a equação exponencial:

$$10^{h-0,7} = \sqrt{10} \Rightarrow 10^{h-0,7} = 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h - 0,7 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2h - 1,4 = 1 \Rightarrow 2h = 2,4 \Rightarrow h = 1,2$$

Logo, no exemplo a altura média é 1,2 m.

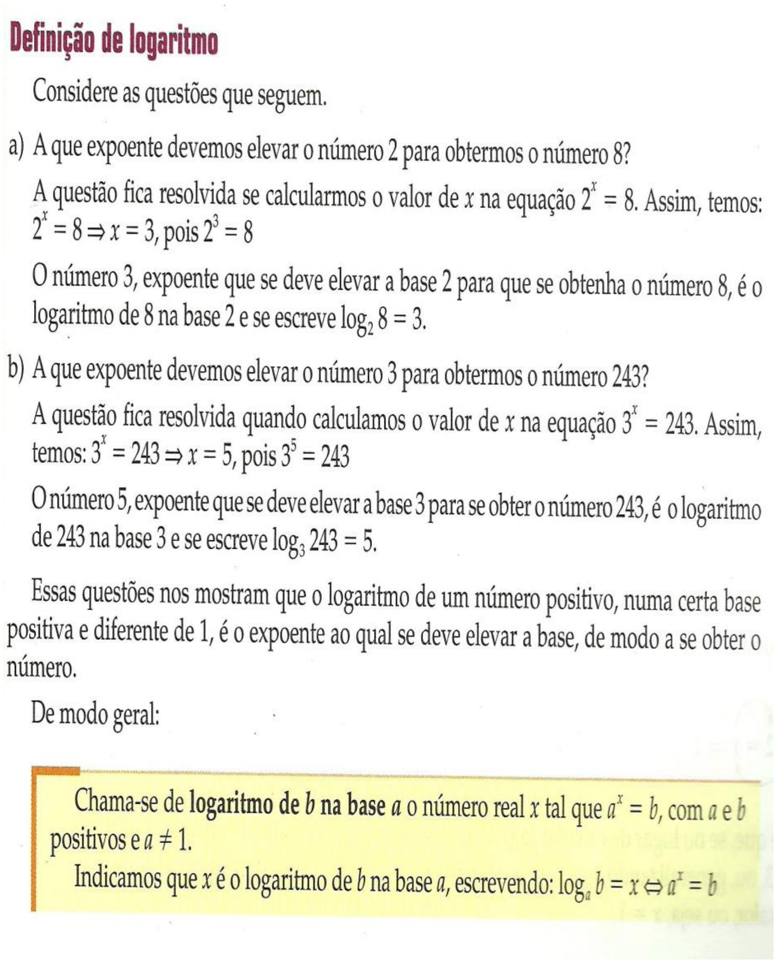
No entanto, se quisermos calcular, por exemplo, a altura média de uma criança de 8 anos obteremos a equação:

$$10^{h-0,7} = \sqrt{8} \Rightarrow 10^{h-0,7} = 8^{\frac{1}{2}}$$

Trata-se de uma equação exponencial, mas não é possível escrever os dois membros da equação numa mesma base.

É possível calcular o valor aproximado de *h* na equação acima, mas, para isso, é necessário o conhecimento de um novo conceito matemático: o **logaritmo**.

Figura 27: Imagem extraída do livro Matemática, Bianchini e Paccola (2004, p. 143).



Definição de logaritmo

Considere as questões que seguem.

a) A que expoente devemos elevar o número 2 para obtermos o número 8?

A questão fica resolvida se calcularmos o valor de x na equação $2^x = 8$. Assim, temos:
$2^x = 8 \Rightarrow x = 3$, pois $2^3 = 8$

O número 3, expoente que se deve elevar a base 2 para que se obtenha o número 8, é o logaritmo de 8 na base 2 e se escreve $\log_2 8 = 3$.

b) A que expoente devemos elevar o número 3 para obtermos o número 243?

A questão fica resolvida quando calculamos o valor de x na equação $3^x = 243$. Assim, temos: $3^x = 243 \Rightarrow x = 5$, pois $3^5 = 243$

O número 5, expoente que se deve elevar a base 3 para se obter o número 243, é o logaritmo de 243 na base 3 e se escreve $\log_3 243 = 5$.

Essas questões nos mostram que o logaritmo de um número positivo, numa certa base positiva e diferente de 1, é o expoente ao qual se deve elevar a base, de modo a se obter o número.

De modo geral:

Chama-se de **logaritmo de b na base a** o número real x tal que $a^x = b$, com a e b positivos e $a \neq 1$.

Indicamos que x é o logaritmo de b na base a, escrevendo: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

Figura 28: Ilustração extraída do livro Matemática, Bianchini e Paccola (2004, p. 143).

Como consequência dessa definição, apresenta-se uma série de exercícios que são explorados de forma mecânica sem apresentar nenhuma relação prática. É proposto pelo autor um comentário sobre dois sistemas de logaritmos: logaritmos decimais e logaritmos neperianos, conforme mostra a figura 29.

7. Sistema de logaritmos

Dado a real positivo e diferente de 1, chamamos de **sistema de logaritmos de base a** ao conjunto dos logaritmos, na base a, de todos os números reais positivos.

Dessa forma, existem infinitos sistemas de logaritmos, um para cada base. No entanto, como já conhecemos a lei de mudança de base, podemos escolher um sistema que seja mais conveniente e trabalhar sempre nele.

Pela simplicidade e pelas aplicações práticas, dois são os sistemas de logaritmos mais usados:

- **Sistema de base 10:** que também é chamado de **sistema de logaritmos decimais**.
- **Sistema de base e:** o número e é um número irracional, aproximadamente igual a 2,71828... . Os logaritmos de base e são também chamados de **logaritmos neperianos** ou **logaritmos naturais**. Vamos indicá-los por $\ell n\, x$.

Vejamos um exemplo de aplicação dos logaritmos neperianos.

A massa de uma substância radioativa que se desintegra segundo uma taxa de 2% ao ano é dada por $M = M_0 e^{-it}$, onde M_0 é a massa no instante $t = 0$, t é dado em anos e i é a taxa anual de desintegração. Nessas condições, vamos determinar em quanto tempo uma massa M_0 estará reduzida à metade. (Dado $\ell n\, 2 = 0{,}69$.)

Temos: $M = M_0 e^{-it}$, $i = 2\% = 0{,}02$ ao ano e M_0 = massa inicial

Devemos ter: $\frac{1}{2} M_0 = M_0 e^{-0{,}02t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-0{,}02t}$

Aplicando logaritmo neperiano nos dois membros, temos:

$$\ell n \frac{1}{2} = \ell n\, e^{-0{,}02t} \Rightarrow \ell n\, 1 - \ell n\, 2 = -0{,}02 \cdot t \cdot \ell n\, e \Rightarrow 0 - 0{,}69 = -0{,}02 \cdot t \cdot 1 \Rightarrow t = \frac{0{,}69}{0{,}02} = 34{,}5$$

Logo: $t = 34{,}5$ anos

Observe que o tempo não depende da massa inicial dessa substância.

Figura 29: Figura extraída do livro Matemática, Bianchini e Paccola (2004, p. 159).

O autor explica que existem infinitos sistemas de logaritmos, sendo um para cada base. Porém, ele só comenta sobre dois sistemas: os logaritmos decimais e os logaritmos de base **e**. Sendo esses dois sistemas os mais usados nas aplicações práticas. Ainda é proposto pelo autor um exemplo, mostrando a principal utilidade do logaritmo de base **e,** conforme mostra a figura 28, anteriormente.

A concepção logarítmica abordada nesse livro é algébrico-funcional. A abordagem das propriedades dos logaritmos é fundamentada pelo uso algébrico e formal sem relacioná-la praticamente. Ao finalizar, o autor propõe um estudo dos logaritmos no caso de fenômenos naturais através de terremotos e como estes são calculados pela escala Richter, através do auxílio dos logaritmos.

O livro: Matemática

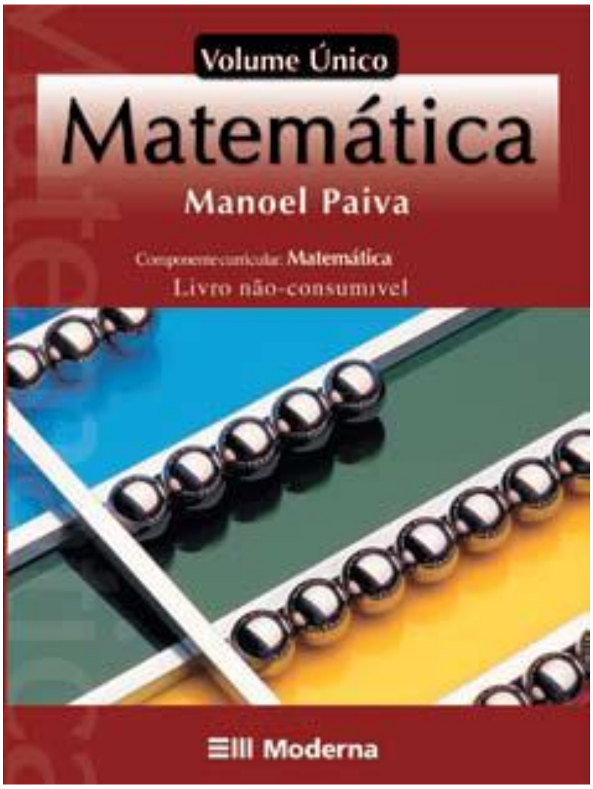
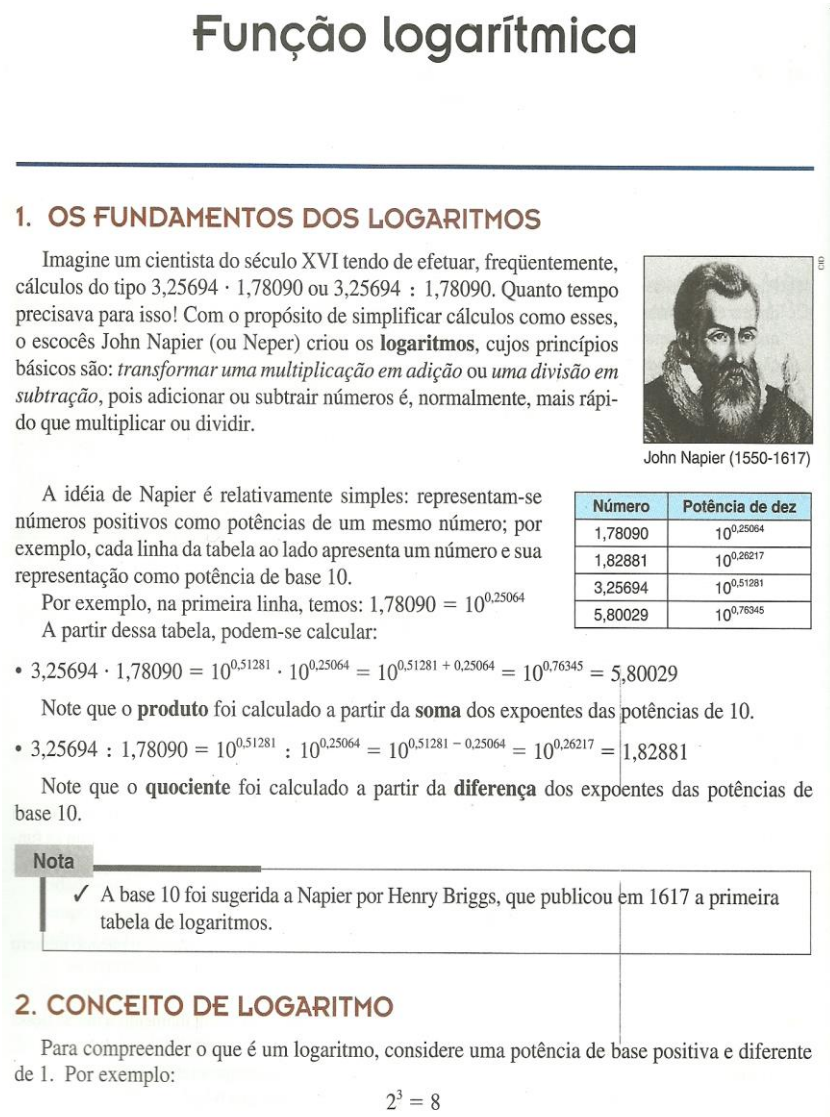


Figura 30: Capa extraída do livro Matemática, Paiva (2005).

Neste livro, o autor procura esclarecer o que seja logaritmo usando potências de 10. Não obstante, apresenta um simples comentário de como surgiram os logaritmos e quem inventou este instrumento de cálculo, e baseado no princípio básico de transformar uma multiplicação em adição ou uma divisão em subtração, ele explora em termos de potência de 10 os logaritmos.

Então, comenta ainda como o produto foi calculado a partir da soma dos expoentes das potências de 10 e como o quociente foi calculado pela diferença dos expoentes das potências de base 10, tomando inicialmente uma aproximação dessas potências de dez. Salienta ainda que, base 10, foi sugerido por Napier e Briggs, que publicaram em 1617 a primeira tábua desses logaritmos, conforme mostra a figura 31.



Função logarítmica

1. OS FUNDAMENTOS DOS LOGARITMOS

Imagine um cientista do século XVI tendo de efetuar, freqüentemente, cálculos do tipo 3,25694 · 1,78090 ou 3,25694 : 1,78090. Quanto tempo precisava para isso! Com o propósito de simplificar cálculos como esses, o escocês John Napier (ou Neper) criou os **logaritmos**, cujos princípios básicos são: *transformar uma multiplicação em adição* ou *uma divisão em subtração*, pois adicionar ou subtrair números é, normalmente, mais rápido que multiplicar ou dividir.

John Napier (1550-1617)

A idéia de Napier é relativamente simples: representam-se números positivos como potências de um mesmo número; por exemplo, cada linha da tabela ao lado apresenta um número e sua representação como potência de base 10.

Número	Potência de dez
1,78090	$10^{0,25064}$
1,82881	$10^{0,26217}$
3,25694	$10^{0,51281}$
5,80029	$10^{0,76345}$

Por exemplo, na primeira linha, temos: $1,78090 = 10^{0,25064}$

A partir dessa tabela, podem-se calcular:

- $3,25694 \cdot 1,78090 = 10^{0,51281} \cdot 10^{0,25064} = 10^{0,51281 + 0,25064} = 10^{0,76345} = 5,80029$

Note que o **produto** foi calculado a partir da **soma** dos expoentes das potências de 10.

- $3,25694 : 1,78090 = 10^{0,51281} : 10^{0,25064} = 10^{0,51281 - 0,25064} = 10^{0,26217} = 1,82881$

Note que o **quociente** foi calculado a partir da **diferença** dos expoentes das potências de base 10.

Nota

✓ A base 10 foi sugerida a Napier por Henry Briggs, que publicou em 1617 a primeira tabela de logaritmos.

2. CONCEITO DE LOGARITMO

Para compreender o que é um logaritmo, considere uma potência de base positiva e diferente de 1. Por exemplo:

$$2^3 = 8$$

Figura 31: Imagem extraída do livro Matemática, Paiva (2005, p. 166).

Antes de definir os logaritmos, o autor apresenta alguns exemplos de potenciação para que o aluno entenda como se comportam os logaritmos. Baseado nisso, Paiva (2005) define logaritmo conforme mostra a figura 32.

Ao expoente dessa potência damos o nome de **logaritmo**. Dizemos que 3 é o logaritmo de 8 na base 2. Em símbolos:

$$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$$

Exemplos

a) $5^2 = 25 \Leftrightarrow \log_5 25 = 2$

b) $3^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$

Sejam a e b números reais positivos e $b \neq 1$. Chama-se **logaritmo** de a na base b o expoente x tal que $b^x = a$.

Em símbolos: $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

Nomenclatura

Na sentença $\log_b a = x$:

- a é chamado de logaritmando
- b é chamado de base do logaritmo
- x é chamado de logaritmo de a na base b

Exemplos

a) $\log_2 16$ é o expoente x tal que $2^x = 16$

Temos: $2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$

Assim: $\log_2 16 = 4$

b) $\log_5 \frac{1}{25}$ é o expoente x tal que $5^x = \frac{1}{25}$

Temos: $5^x = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^x = 5^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

Assim: $\log_5 \frac{1}{25} = -2$

c) $\log_7 1$ é o expoente x tal que $7^x = 1$

Temos: $7^x = 1 \Leftrightarrow 7^x = 7^0 \Leftrightarrow x = 0$

Assim: $\log_7 1 = 0$

d) $\log_5 \sqrt[3]{5}$ é o expoente x tal que $5^x = \sqrt[3]{5}$

Temos: $5^x = \sqrt[3]{5} \Leftrightarrow 5^x = 5^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Assim: $\log_5 \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3}$

Logaritmo decimal

Chama-se **logaritmo decimal** aquele de base 10. Indica-se o logaritmo decimal de um número a simplesmente por $\log a$ (a base 10 fica subentendida).

Figura 32: Ilustração extraída do livro Matemática, Paiva (2005, p. 167).

De acordo com a definição, o autor propõe uma série de exercícios que são explorados como conseqüência da definição, sem apresentar nenhuma relação prática. A concepção logarítmica abordada nesse livro é algébrico-funcional. Não existe, por parte do autor, nenhuma preocupação em fazer uma relação desse conteúdo com a prática. Pouco adverte a respeito dos sistemas de logaritmo de bases dez e neperiano. Apenas apresenta um comentário resumido sobre o logaritmo decimal, e sobre o logaritmo neperiano não faz nenhum comentário.

As propriedades são exploradas em termos algébricos sem relacionar a como chegaram a essa conclusão. O autor propõe uma demonstração algébrica dessas propriedades, orienta que o produto transforma em soma e a divisão em subtração e a potência multiplica o respectivo logaritmo. Ao finalizar, o autor sugere algumas atividades mostrando como deve se usar esse instrumento de cálculo.

Nesse contexto, a análise desses livros didáticos segue uma mesma concepção adotada, a algébrico-funcional, sendo os logaritmos explorados em termos de funções exponenciais como mostra cada definição apresentada nos livros abordados anteriormente. Para caracterizar o conceito de logaritmos, todos seguem o mesmo modelo que é fundamentado pelo exemplo seguido de uma generalização conceitual algébrica e simbólica. Dessa maneira, explora-se de forma mecânica através de vários exercícios, seguindo o mesmo modelo conceitual apresentado.

A história retratada nos livros didáticos pesquisados aparece apenas como uma biografia para os autores atualizarem sobre quem inventou e como usavam esse instrumento de cálculo - logaritmos.

Ao finalizar, não se procura contextualizar o desenvolvimento conceitual desse tópico matemático de modo a abranger de forma mais ampla os aspectos aritmético e algébrico-funcional dos logaritmos.

No próximo capítulo, passo a descrever algumas aplicações fundamentais dos logaritmos que são importantes no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Destaco, ainda, como o desenvolvimento desse conteúdo proporcionou o avanço significativo do cálculo, da ciência, além de outras disciplinas. Tratarei, também, de algumas aplicações dos logaritmos nas diversas práticas sociais e como estas se aproximam das Unidades Básicas de Problematização (UBP), bem como de algumas atividades sobre o referido tema.

4 IMPLICAÇÕES PARA A PRÁTICA DOCENTE

Nesse capítulo, abordo algumas aplicações dos logaritmos, tendo como meta apontar o seu caráter transversalizante e interdisciplinar. Nesse sentido, aponto como o professor pode usar algumas aplicações desse assunto, de forma que ajude no processo de ensino e aprendizagem em sala de aula. Descrevo como cada uma dessas aplicações pode servir de suporte para que o professor dê continuidade a essa proposta por meio de uma abordagem didática aproximada das Unidades Básicas de Problematização (UBPs)[9] defendidas por Miguel e Mendes (2010). Serão proporcionadas ainda para o professor algumas sugestões de atividades que podem ser utilizadas com seus alunos, de acordo com estudo desenvolvido sobre a investigação histórica, com vistas a auxiliar na compreensão e no estudo de logaritmos.

4.1 O PAPEL TRANSVERSALIZANTE E INTERDISCIPLINAR DOS LOGARITMOS

Diante das descobertas científicas realizadas sobre a ciência, os logaritmos foram uma das principais criações que revolucionou a Matemática do século XVII. O desenvolvimento desse conteúdo proporcionou o avanço significativo do cálculo, da ciência, além de outras áreas, tais como: a própria Matemática, a Física, a Biologia, a Geografia e a Química.

Segundo Ferreira e Bisognin (2007, p. 65), na atividade escolar, no que se refere ao estudo dos logaritmos e a aprendizagem do seu conceito e operações, “percebe-se que as dificuldades apresentadas devem-se ao fato de que, do ponto de vista da aquisição de um conhecimento, este não pode ser gerado a partir da definição algébrica, definição esta que muitas vezes é apenas memorizada”.

Apesar da importância do estudo dos logaritmos, muitos alunos saem do Ensino Médio sem entendê-los e nem sequer relacioná-los com aplicações práticas e conhecidas que historicamente o originaram, isto é, sem saber que a teoria dos logaritmos se aplica a muitos tipos de situações-problema, como por exemplo, a quantificação de níveis de intensidade sonora, a resolução de problemas envolvendo

[9] Termo usado por Miguel e Mendes (2010) publicado em seu trabalho Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices and discursive games. Neste trabalho, os autores, usam esse termo para designar atividades disciplinares e interdisciplinares desenvolvidas pelos professores que podem estar conectadas à história da Matemática, investigação histórica, cultura matemática, prática sociais, entre outros.

juros compostos, a medição do grau de acidez ou alcalinidade de uma solução química, o uso de medição da intensidade de terremotos, entre outros.

Além dessas aplicações, os logaritmos tornaram-se úteis no processo de ensino de algumas funções, além de contribuir, de imediato, para a simplificação de cálculos e o uso específico da calculadora. Pelo que se tem estudado a respeito desse tema, entende-se que a característica primordial dos logaritmos não se fundamenta apenas na definição lógica e abstrata, mas na sua utilidade prática e contextual que está além do que os livros didáticos de Matemática abordam.

Esse capítulo pretende auxiliar o professor de Matemática quanto ao processo significativo de abordagem dos logaritmos, tendo como foco o aspecto transversalizante e interdisciplinar dos logaritmos, de modo que auxilie na compreensão e na aprendizagem desse assunto. Dando sequência ao estudo sobre esse instrumento de cálculo, pretendo notificar o professor sobre o real significado desse tópico e assim ampliar suas opções didáticas para atuar no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Sabe-se que a Matemática é importante para o entendimento de vários aspectos da vida real, por isso, explorá-la com aplicações, de forma prática, envolvendo outras áreas do conhecimento, é um dos meios que se utiliza habitualmente nos últimos anos. A interdisciplinaridade é um dos processos utilizados para a discussão desse capítulo, de forma que se faça uma reestruturação nos métodos de ensino de logaritmos e proporcione ao professor de Matemática o sentido contextual desse conteúdo no Ensino Médio.

De fato, a interdisciplinaridade está além dos valores relacionais, compreende a busca constante de novos caminhos, outras realidades, novos desafios, a ousadia da busca e do construir. É ir além da mera observação, mesmo que as realidades do cotidiano nos coloquem perplexos e inseguros diante do desconhecido ou estimulando a indiferença para evitar maiores compromissos.

Para facilitar a compreensão e a construção do conhecimento, com base em estudos científicos, os seres humanos dividiram o conhecimento em vários compartimentos, comumente chamados de disciplinas: Comunicação e Expressão, Matemática, Ciências, Estudos Sociais, Artes, etc. - ou, alternativamente, Português, Matemática, Física, Química, Biologia, História, Geografia, Artes, Filosofia - para não mencionar Sociologia, Antropologia, Economia, entre outros. Essas formas de classificar o conhecimento são artificiais, pois raramente um problema se encaixa unicamente dentro dos limites de uma só disciplina.

Lenoir (1998, p. 48-49 apud SILVA et al, 2007, p. 4) apresenta a dupla visão interdisciplinar. A primeira se refere à perspectiva conceitual (tendência européia):

1. Objetivos - Construir um quadro conceitual global que poderia, em uma ótica de integração, unificar todo o saber científico;
2. Buscar a unidade do saber ;
3. Pesquisa de uma experiência; e
4. Preocupação fundamentalmente de ordem filosófica e epistemológica.

A segunda se refere à perspectiva instrumental (tendência anglo-saxônica):

1. Objetivos- Resolver problemas de existência cotidiana com base em práticas particulares e;
2. Recursos às questões e aos problemas sociais e contemporâneos atendendo aos anseios da sociedade.

Dessa maneira, pude me apoiar em algumas situações-problema sobre os logaritmos para notificar o quanto esse instrumento tornou-se um dos principais objetos de estudo no campo da ciência e de outras disciplinas aplicadas à Matemática em geral. Então, os logaritmos não só abrangem a visão disciplinar, mas outros fatores importantes que contribuem para o progresso científico e o avanço tecnológico. Por isso, os logaritmos não se resumem apenas ao modo como são abordados no Ensino Médio. Seu valor aplicativo excede a forma conceitual e teórica fundamentada pela memorização e resoluções de exercícios repetitivos encontrados nos livros didáticos de Matemática.

4.2 APLICAÇÕES PRÁTICAS DOS LOGARITMOS

A invenção dos logaritmos veio a ter um tremendo impacto sobre a estrutura da Matemática. Os logaritmos foram saudados alegremente por Kepler, não como uma contribuição às ideias, mas porque aumentava a capacidade de computação dos astrônomos. Viète (1540 – 1603) entre outros contemporâneos estava ocupado principalmente com aspectos práticos da Matemática.

Na verdade, os logaritmos foram alguns dos primeiros estudos que proporcionaram aos cientistas e astrônomos a resolução de cálculos enormes e difíceis de serem resolvidos antes da sua descoberta. Kepler confirma que se não fossem os logaritmos, os estudos e inovações realizados sobre a astronomia não teriam chegado a lugar nenhum.

Nesse sentido, propomos algumas aplicações dos logaritmos com a finalidade de mostrar como estes foram essenciais para o progresso científico da Matemática e para o avanço científico e tecnológico da ciência, tendo em si a busca de sugestões didáticas para o professor no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Algumas aplicações dos logaritmos merecem destaque:

- Escala ôhmica;
- Medição de intensidade dos terremotos;
- pH – Potencial Hidrogêniônico de Soluções;
- Problemas envolvendo juros compostos;
- Medição de Intensidade Sonora;
- Crescimento populacional.

Tais aplicações, no entanto, serão organizadas na tentativa de operacionalizar uma aproximação didática com a proposta de Miguel e Mendes (2010) no que se refere às Unidades Básicas de Problematização (UBPs).

4.3 SOBRE A APROXIMAÇÃO DAS UNIDADES BÁSICAS DE PROBLEMATIZAÇÃO

Buscamos, a priori, neste capítulo, fornecer ao professor informações sobre o uso dessas aplicações enquanto recurso didático para que aprendam como os logaritmos são essenciais nos diversos campos do conhecimento e como tais aplicações são propostas e discutidas por Miguel e Mendes (2010) em um artigo intitulado Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games (*Mobilizando histórias na formação do professor de Matemática: memórias, práticas sociais e jogos discursivos)***.**

Dessa maneira, cada uma dessas aplicações, conforme iremos estudá-las posteriormente, formam aproximadamente Unidades Básicas de Problematização (UBPs), que auxiliarão o professor no estudo dos logaritmos para que possa conectá-la ao ensino e aprendizagem da Matemática escolar do Ensino Médio, bem como na abordagem comentada nos livros didáticos quando caracterizam esses estudos ligados a fenômenos naturais (terremotos, intensidade sonora e entre outros) e na investigação científica dessas aplicações práticas nos campos de atividades humanas ligadas ao Ensino de Matemática.

De acordo com Miguel e Mendes (2010), o termo práticas sociais é usado em seu trabalho para articular e interpretar grupos de ações, não sobre qualquer ação ou conjunto de ações, mas ações que, mesmo quando realizadas por uma única pessoa, devem ser conectadas a diferentes tipos de atividade humana colocada em tempo e espaço para que seja definida e interpretada. Pode-se, dessa forma, falar sobre práticas de leitura, medida escrita dos cálculos, práticas de recolha de colheita, etc. Assim, as práticas concebidas como um conjunto de ações, não são sinônimo de atividades, embora possam ser realizadas em diferentes contextos da atividade humana.

Dessa forma, segundo Miguel e Mendes (2010):

> O termo *prática social*, aqui mencionada tem a intenção e coordenação de grupos de ações que, simultaneamente, mobiliza bens culturais, memória, afetos, valores e competências, gerando nas pessoas que realizam tais ações o sentimento, ainda que difusa, de pertencer a uma determinada comunidade. Essas ações não são caóticas ou aleatórias, precisamente porque reconhecemos nelas objetos culturais que têm uma história. Essa história é lembrada somente porque os objetos culturais que esta prática mobiliza ainda são avaliados de qualquer forma por uma comunidade que mantém essa memória viva por uma razão. Nesse sentido, uma prática social é cultural porque sempre mobiliza objetos culturais. Por outro lado, uma prática social é social porque mesmo quando é realizada por uma única pessoa é sempre ligada a atividades humanas desenvolvidas pelas comunidades socialmente organizadas. (MENDES; MIGUEL, 2010, p. 383) (Tradução Nossa).

Assim, as práticas sociais não só mobilizam afetos, valores e competências para que se possa constituir uma história, mas ainda estabelecem uma atividade, que nem sempre é explícita em relação assimétrica de poder entre os participantes da comunidade, bem como em ambientes heterogêneos e atividade diferencial de valorização ou de resistências entre os participantes da comunidade que utiliza tais práticas. O mesmo pode ocorrer quando mobilizamos algumas dessas práticas para a sala de aula. .

Tal prática pode, em algum momento dessa problematização, desconectar-se do campo de atividade humana em que foi sendo inicialmente problematizada para se conectar a outro campo de atividade (como por exemplo: o campo de atividade literária, o campo de atividade da formação dos educadores, um campo escolar de atividade de ensino, entre outros). Neste trabalho, refiro-me ao campo de atividade aplicativa dos logaritmos visando sugerir como o professor pode usar essas aplicações no Ensino de Matemática.

Conforme Miguel e Mendes (2010, p. 387-388), o conjunto de UBPs é produzido de modo a “problematizar a mobilização da escola em práticas da cultura matemática, contrastando com a maneira pela qual a cultura matemática possa ter sido (ou que tenha sido) mobilizada em outras atividades humanas”. Isso não significa, porém, que estas UBPs não possam ser alteradas e utilizadas para outros fins, especialmente, com o Ensino Superior ou Ensino Fundamental, ou até mesmo o Ensino Médio que é o nosso foco de estudo.

Como resultado, a UBP não traz pretensão detalhada sobre o conhecimento da Matemática que pode ser inicialmente discutido em sala de aula, embora a problematização da UBP, devido à sua natureza, seja sempre aberta para que possa atingir níveis imprevisíveis e elevados de sofisticação, complexidade, sutileza e originalidade.

De outra maneira, uma UBP também pode ser considerada uma atividade discursiva, mediadora de formação de professores. Na exposição da UBP, faz-se um esforço para que elementos de valor, que são normalmente considerados supérfluos ou irrelevantes, possam mobilizar práticas escolares de cultura matemática: contextos, historicidade, informalidade e simplicidade. A categorização da UBP é realizada normalmente de acordo com dois critérios básicos: a natureza dos campos de atividade que tem provavelmente motivado a criação e as transformações qualitativas dos objetos matemáticos que estão sendo investigadas, juntamente com o critério cronológico que ordena essas transformações qualitativas. O período cronológico envolvido é o da Pré-História até ao século XXI e as práticas em questão são, por exemplo, as que participaram da mobilização de objetos matemáticos em foco ao longo da história.

Conforme foi comentado, a UBP pode ser utilizada em diversos campos de atuações ligadas às práticas sociais. Nesse trabalho, a aproximação com o modelo teórico centrado nas UBPs está relacionado ao trabalho do professor formador e investigador, proporcionando um estudo significativo dessas aplicações práticas para que se compreenda o significado e aplicação dos logaritmos na sociedade contemporânea. Nesse contexto, busca-se fornecer ao professor informações de como esses estudos investigativos são importantes no processo de ensino-aprendizagem da Matemática Escolar do Ensino Médio.

A seguir, procedo a uma descrição sucinta das principais aplicações dos logaritmos para que o professor possa entender como os logaritmos são úteis nos diversos campos de ações disciplinares. Desse modo, essa apresentação apenas auxiliará o professor no estudo dessas práticas para que o mesmo dê continuidade a essa investigação e ao estudo significativo dessas aplicações logarítmicas.

4.4 EXEMPLOS DE ABORDAGEM PARA OS LOGARITMOS COM BASE NAS UBPs

A seguir mencionarei alguns exemplos de abordagem para os logaritmos com aproximação das UBPs, que considero importantes para o professor compreender como as aplicações práticas dos logaritmos são úteis nos diversos campos da ciência e como elas estão conectadas ao ensino e aprendizagem da Matemática do Ensino Médio. Cada exemplo apresentado está composto por atividades que de certa forma ajudarão a esclarecer o estudo investigativo dessas problematizações, podendo o mesmo entender de forma prática como elas estão conectas ao ensino de Matemática.

4.4.1 A escala Ôhmica

Descobridor dos fundamentos da eletrocinética, que estuda as correntes elétricas em movimento, o físico alemão Georg Simon Ohm (1787 – 1854) fixou a lei conhecida por seu nome, e em sua homenagem denominou a unidade de resistência elétrica no sistema de unidades físicas CGS centímetro-grama-segundo).

A lei de Ohm refere-se a correntes estacionárias e combina as três quantidades básicas consideradas num circuito: a força eletromotriz total E, a intensidade I da corrente (quantidade que flui na unidade de tempo) e a resistência total R do circuito, que compreende a resistência interna do gerador elétrico. Ohm demonstrou que, num circuito, a corrente é diretamente proporcional à força eletromotriz total do circuito e inversamente proporcional à resistência total do mesmo: $I=E/R$ ou $E=RI$. A lei indica a perda ou queda ôhmica de potencial, perda de calor ou de diferença de potencial produzida pela passagem de corrente elétrica por uma resistência. Essa perda é representada por $V=RI$.

No campo da Física, os logaritmos foram fundamentais no processo de medição da resistência elétrica. Conforme vimos, que a resistência elétrica de um elemento passivo dum circuito no qual circula uma corrente elétrica invariável de um ampère quando existe uma diferença de potencial constante de um volt entre seus terminais, é dada pela seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{R = \frac{V}{I}}$$

onde V => volts; I => ampères R => Ohms

No aparelho para medir a resistência elétrica, ohmímetro, como mostra a figura 33 a seguir, a escala é inversa. A diferença de potencial, em volts, é constante e é fornecida pela bateria. Quando os dois terminais estão abertos (sem contato) o aparelho indica infinito, pois a corrente tende para zero; quando os terminais estão conectados um no outro o aparelho indica zero, pois a corrente tende para o infinito (corrente de curto circuito).

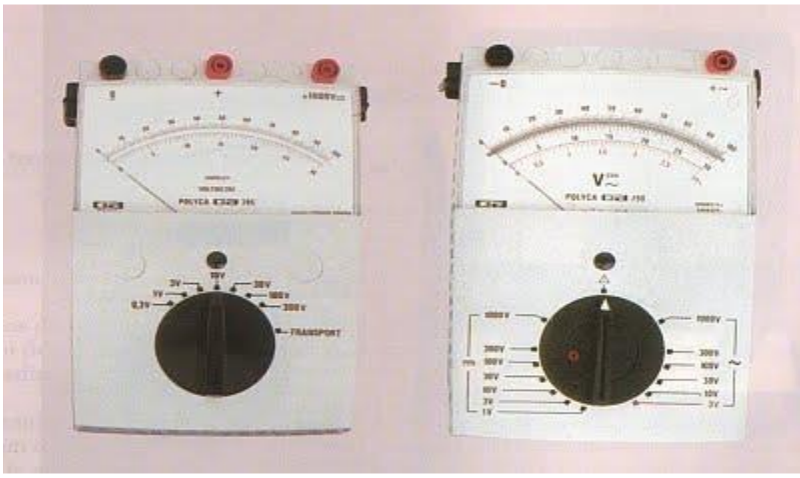


Figura 33: Imagem extraída de aparelhos de medidas

De acordo com Magalhães (2003, p. 55) a escala é inversa: "começa do infinito e termina em zero. O infinito fica na dependência da escala. Esta escala é logarítmica devido ao ponteiro sofrer uma torção cujo princípio depende de valores logarítmicos".

Assim, o ohmímetro é um instrumento utilizado para fins de medidas de resistência elétrica. Normalmente sua escala apresenta característica logarítmica e na sua chave seletora encontram-se as posições x1, x10, x100, x1000, obtendo o resultado em ohms (Ω). Para efetuar uma medida deve-se fazer o ajuste do zero, portanto, provoca-se um curto-circuito nas suas pontas de prova deflexionando o ponteiro até à região próxima ao zero da escala de ohms. A seguir, movimenta-se o controle de ajuste (botão) até o ponteiro coincidir com o traço referente ao zero. Esse ajuste deve ser repetido toda vez que se muda a posição da chave seletora, sendo também responsável pela precisão da medida. Feito o ajuste, colocam-se as pontas de prova em contato com os terminais do componente a ser medido, observando que se deve escolher uma posição para a chave seletora, de maneira a ter uma leitura em região com boa definição.

Atividade

Conforme comentado anteriormente, o ohmímetro é um instrumento utilizado para fins de medidas de resistência elétrica. A escala apresenta uma característica logarítmica como ilustra a figura 34 e figura 35 a seguir.

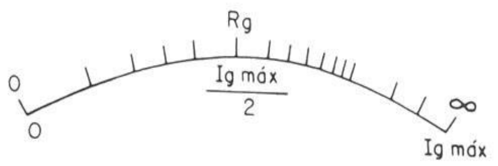


Figura 34: Imagem extraída do texto Física Geral Experimental.

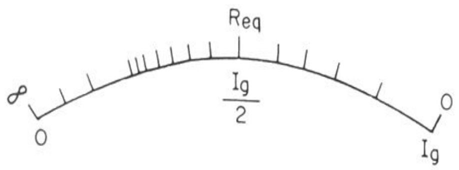


Figura 35: Ilustração extraída do texto Física Geral Experimental.

Na chave seletora, encontram-se as posições x1, x10, x100 e x 1k, as quais, respectivamente, multiplicam o valor impresso na escala por 1, 10, 100 e 1000 obtendo o resultado em ohms (W). Baseado nisso, questiona-se:

a) Qual o valor máximo e mínimo de um ohmímetro alcançado pelos seus ponteiros?
b) Existe alguma relação dos valores desses ponteiros com os logaritmos de Briggs? Justifique.

4.4.2 Medição da intensidade dos terremotos

No que concerne à medição de terremotos, os logaritmos foram fundamentais para medir a amplitude e a energia liberada pela colisão entre as placas tectônicas. Descreve-se a seguir como é realizada a medição da magnitude dos terremotos usando os logaritmos.

Terremotos

De acordo com Henrique (2006, p. 4-8), com o lento movimento das placas litosféricas, da ordem de alguns centímetros por ano, tensões vão se acumulando em vários pontos, principalmente perto de suas bordas. As tensões acumuladas podem ser compressivas ou distensivas, dependendo da direção de movimentação relativa entre as placas. Quando essas tensões atingem o limite de resistência das rochas, ocorre uma ruptura e o movimento repentino entre os blocos de cada lado da ruptura gera vibrações que se propagam em todas as direções. O plano de ruptura forma o que se chama de falha geológica.

Os terremotos podem ocorrer no contato entre duas placas litosféricas (caso mais frequente) ou no interior de uma delas, como indicado no exemplo da figura 36, sem que a ruptura atinja a superfície. O ponto onde se inicia a ruptura e a liberação das tensões acumuladas é chamado de hipocentro ou foco. Sua projeção na superfície é o epicentro, e a distância do foco à superfície é a profundidade focal.

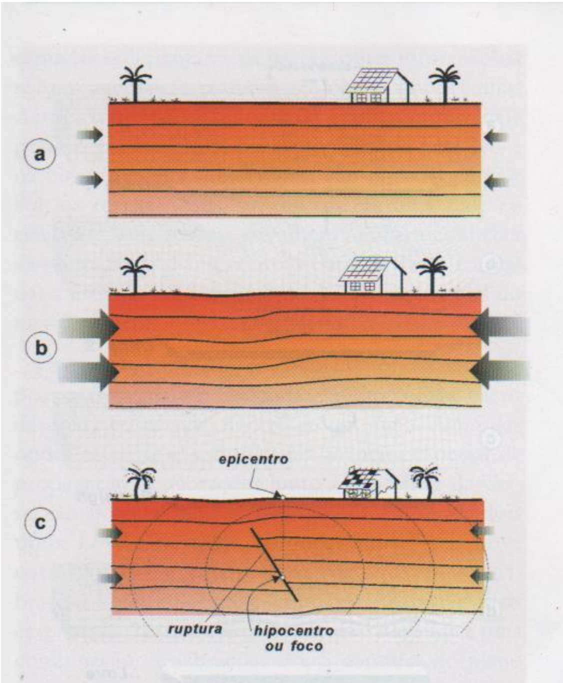


Figura 36: Imagem extraída do artigo científico de Henrique (2006).

Embora a palavra terremoto seja mais utilizada para os grandes eventos destrutivos, enquanto os menores geralmente são chamados de abalos ou tremores de terra, todos são resultados do mesmo processo geológico de acúmulo lento e liberação rápida de tensões. A diferença principal entre os grandes terremotos e os pequenos tremores é o tamanho da área de ruptura, o que determina a intensidade das vibrações emitidas.

O que são abalos sísmicos e terremotos?

Um terremoto é um tremor de terra que pode durar segundos, ou minutos. Ele é provocado por movimentos na crosta terrestre, composta por enormes placas de rocha (as placas tectônicas). O tremor de terra ocasionado por esses movimentos é também chamado de *abalo sísmico*.

Essas placas se movimentam lenta e continuamente sobre uma camada de rocha parcialmente derretida, ocasionando um contínuo processo de pressão e deformação nas grandes massas de rocha.

Quando duas placas se chocam ou se raspam, elas geram um acúmulo de pressão que provoca um movimento brusco. Há três tipos de movimentos: convergente ou normal (quando duas se chocam), divergente ou transcorrente (quando se movimentam em direções contrárias) e transformante ou reversa (separa placas que estão se deslocando lateralmente.

Ondas Sísmicas:

Uma onda sísmica é uma onda que se propaga através da terra, geralmente como consequência de um sismo, ou devido a uma explosão. Estas ondas são estudadas pelos sismólogos e medidas por sismógrafos.

O Sismógrafo

Segundo Magalhães (2003, p. 74 e 75), o mesmo define sismógrafo como: “Instrumento para detectar e medir as vibrações causadas por terremotos”. Ou ainda, “para medir os efeitos qualitativamente, verificando os estragos causados na superfície da terra ou podem fazer medições quantitativas da energia liberada pela terra durante o deslocamento de placas tectônicas”.

Ainda de acordo com Magalhães (2003) foram inventados três tipos de sismógrafos:

- O primeiro sismógrafo foi construído no ano 132 pelo astrônomo chinês Chang Heng, continha bolas de ferro cuidadosamente equilibradas, que caíam quando o chão estremecia.
- O segundo foi muito utilizado na Europa, construído por Giuseppe Mercalli em 1902. Esse sismógrafo media os efeitos dos terremotos em termos qualitativos.
- O terceiro foi construído pelo norteamericano Charles Francis Ritchter, em 1935. Esse foi o primeiro sismógrafo a ser construído em escala logarítmica que recebeu o seu nome em homenagem ao criador.

Escala Richter e Intensidade de terremotos

A escala de Richter foi desenvolvida para representar a energia sísmica liberada durante o terremoto e se baseia em registros sismográficos. A escala logarítmica desse sismógrafo vai de zero a nove. Ela toma como base o valor de um terremoto hipotético situado a 100 km do epicentro e que determina uma elongação máxima num determinado sismógrafo padronizado.

A escala Richter aumenta de forma logarítmica, de maneira que cada ponto de aumento significa um aumento 10 vezes maior. Dessa forma, um sismo de magnitude 4 é 100 vezes maior que um de magnitude 2.

A Escala Richter mede a magnitude de um terremoto. Os terremotos originam-se dos movimentos das placas tectônicas. O atrito de uma placa contra outra, forma ondas que são responsáveis pelas vibrações que causam o terremoto.

O sismógrafo mede a amplitude e a frequência destas vibrações. Utilizando-se uma equação logarítmica, pode-se calcular a magnitude do terremoto. A amplitude está associada à altura (tamanho) da onda, e a frequência com a quantidade de ondas num determinado intervalo de tempo. A magnitude do terremoto pode ser calculada pela equação logarítmica:

$$M = \log_{10} A + 3 \cdot \log_{10} (8\,\Delta t) - 2{,}92$$

Δ**t** variação do tempo

A amplitude do movimento da onda na Escala Richter

M magnitude do terremoto registrada no sismógrafo (em µm)

Para entender como funciona essa equação, observe-se um exemplo: tomando o terremoto ocorrido na Ilha de Sumatra como exemplo, que teve magnitude (M) de 9,0 graus e uma variação de tempo (Δt) de 600 segundos, pode-se calcular sua amplitude da seguinte forma:

$M = \log_{10} A + 3 \cdot \log_{10} (8\,\Delta t) - 2{,}92$

$9{,}0 = \log_{10} A + 3. \log_{10} (8.\ 600) - 2{,}92$

$9{,}0 = \log_{10} A + 3.\ 3{,}68 - 2{,}92$

$9{,}0 = \log_{10} A + 11{,}\ 04 - 2{,}92$

$9{,}0 = \log_{10} A + 8{,}12$

$\log_{10} A = 0{,}87$

Usando a definição apresentada no capítulo 3, tem-se $10^{0,87} = A$. O que resulta numa amplitude de aproximadamente 7,4 mm.

Tabela com efeitos dos terremotos e medição de sua magnitude, na escala Richter:

Magnitude Richter	**Efeitos**
Menor que 3,5	Geralmente não sentido, mas gravado.
Entre 3,5 e 5,4	Ás vezes sentido, mas raramente causa danos.
Entre 5,5 e 6,0	No máximo causa pequenos danos a prédios bem construídos, mas pode danificar seriamente casas mal construídas em regiões próximas.
Entre 6,1 e 6,9	Pode ser destrutivo em áreas em torno de até 100 km do epicentro.
Entre 7,0 e 7,9	Grande terremoto, podendo causar sérios danos numa grande faixa de área.
8,0 ou mais	Enorme terremoto, podendo causar grandes danos em muitas áreas, mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

Atividade 1

A escala de Richter mede a intensidade dos terremotos. A energia M liberada por um terremoto, sob forma de ondas na crosta terrestre, é medida por:

$$R_1 – R_2 = \log (M_1/M_2).$$

A escala Richter assinalou $R_1 = 8$ e $R_2 = 6$ para a intensidade de dois terremotos.

a) Determine a energia liberada.

b) Quem liberou mais energia nesses terremotos?

(Atividade baseada em FLORIANI (1999), Função logaritmica, p.60-61)

Atividade 2

A distância focal dos sismos, em termos de tempo entre as chegadas das ondas situadas por um dos terremotos, é de 24 s. A amplitude máxima é de 32 mm. Responda:

a) Qual a Magnitude desse terremoto?

b) Qual o efeito causado por esse terremoto de acordo com a tabela anterior?

4.4.3 PH – Potencial Hidrogênico-iônico de soluções

No campo da Química, os logaritmos foram essenciais para calcular o potencial de hidrogênio (PH) de uma substância ou de um composto, permitindo verificar se a substancia é neutra, básica ou ácida. Sendo assim, o químico Sorense definiu o pH de uma solução como sendo:

$$PH = \text{colog } [H^+], \text{ onde}$$

PH – Potencial hidrogênio-iônico;

H^+ é a concentração molar hidrogênio-iônico(em íons-grama de hidrogênio por litro de solução).

MEDIDA DO PH

A determinação do PH é feita eletrometricamente com a utilização de um potenciômetro e eletrodos. O princípio da medição eletrométrica do PH é a determinação da atividade iônica do hidrogênio utilizando o eletrodo padrão de hidrogênio, que consiste de uma haste de platina sobre a qual o gás hidrogênio flui a uma pressão de 101 kPa, conforme mostra a figura 37 O eletrodo de hidrogênio, no entanto, não é bem adaptado para uso universal, especialmente em trabalho de campo ou em soluções contendo espécies químicas contaminantes do eletrodo.

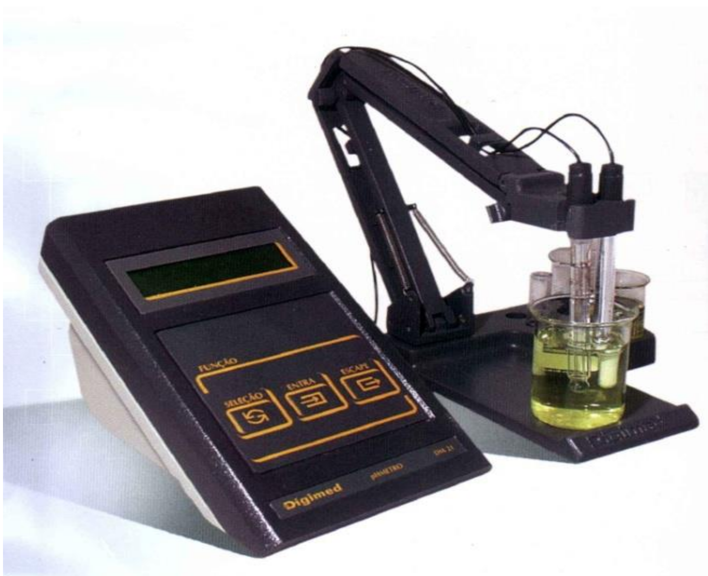


Figura 37: Imagem extraída de PH e POH

Então, o PH é o cologaritmo da concentração de íons numa solução que permite uma avaliação do seu caráter ácido, neutro ou básico. Lembrete:

$$\text{colog } b = \log \frac{1}{b}$$

Colog b = -log b.

Quanto menor o PH, mais ácido é a solução. Sendo que o pH não é negativo. Portanto, a caracterização da solução do PH funciona da seguinte maneira:

- Uma solução com pH < 7, a solução é ácida;
- Uma solução com pH = 7, a solução é neutra;
- Uma solução com pH > 7, a solução é básica.

O máximo, teoricamente, que uma solução pode ter é pH= 14. Entenda-se o pH de algumas substâncias:

- O pH da água pura (isenta de qualquer substância, inclusive sais minerais) é 7.
- O pH do sangue normal deve estar entre 7,35 e 7,45.
- O pH intestinal está no intervalo entre 8 e 9. É uma solução básica.
- O pH do suco gástrico humano normalmente está no intervalo entre 1,8 e 2,2. É um pH bastante ácido.
- O pH dos solos se situa entre 3,5 e 9,5; dependendo da região.

Observe-se um exemplo para entender como se calcula o pH de uma solução envolvendo logaritmo.

Exemplo: Conhecendo-se a concentração de hidrogênio, em íons por litro, de uma solução, $[H^+] = 10^{-8}$. É o PH desta solução.

Como se sabe que o PH = colog $[H^+]$, tem-se:

$$PH = \text{colog } 10^{-8} = -\log 10^{-8} = -(-8) = 8$$

portanto,

$$PH = 8$$

Pelo que se viu, essa substância possui uma solução básica.

Atividade

O logaritmo é bastante usado na química. Sua função ajuda no cálculo do PH. Então, o pH é o cologaritmo da concentração de íons numa solução que permite uma avaliação do seu caráter ácido, neutro ou básico, conforme a categorização ou caracterização do PH, citada anteriormente. Desse modo, dada a tabela abaixo:

Líquidos	$[H^+]$
Leite	10^{-7}
Água do mar	10^{-8}
Coca-cola	10^{-3}
Café preparado	10^{-5}
Lágrima	10^{-7}
Água de lavanderia	10^{-12}

Responda:

a) Entre os líquidos da tabela, quais os que têm caráter ácido?

b) Entre os líquidos da tabela, quais os que têm caráter neutro?

c) Entre os líquidos da tabela, quais os que têm caráter básico?

Sugestão: Use o Colog $[H^+]$ = -log $[H^+]$ para a realização dos seus cálculos.

(Atividade baseada em MAGALHÃES (2003), Trabalho monográfico sobre os logaritmos, p. 71-72)

4.4.4 Cálculo de juros compostos

De acordo com Floriani (1999, p.56), os bancos, desde seu início, computavam os juros anualmente, talvez devido à safra de produtos agrícolas ser anual, mas perceberam que se os juros fossem computados mensalmente os seus rendimentos seriam maiores. Com o surgimento do logaritmo foi possível computar o juro instantaneamente.

A matemática financeira é um ramo da matemática aplicada. Mais precisamente, estuda o comportamento do dinheiro no tempo. Todo comprador sabe que numa compra a prazo o preço aumenta. Ou seja, na verdade está se emprestando a um acréscimo de juros referente ao seu aluguel. Quando este juro é calculado sobre o montante de capital, chama-se de juros simples. Quando existe um juro periódico, vencido e não pago sendo somado ao capital emprestado, formando um montante sobre o qual é calculado o juro seguinte (juros sobre juros), chama-se de juro composto.

Assim, os logaritmos são imprescindíveis para o cálculo do tempo ou da taxa aplicada a um montante num sistema de juros compostos. Devido ao uso específico dos logaritmos e da calculadora científica é possível realizar qualquer cálculo no sistema de juros compostos.

Tomemos como exemplo:

1ª) Marcelo financiou R$10 000,00 em uma financeira pagando um montante de R$13536,00 a uma taxa de 11% ao ano. Quanto tempo durou o financiamento?

Resolução utilizando Logaritmo:

$$M = C(1+ i)^t$$
$$13536 = 10000(1 + 0,11)^t$$
$$(1 + 0,11)^t = 13.536/10000$$
$$(1 + 0,11)^t = 1,\ 3536$$
$$\log (1,11)^t = \log 1,3536$$
$$t \,.\, \log 1,11 = \log 1,3536$$
$$t.\ 0,04532 = 0,13149$$
$$t = 0,13149/0,04532$$
$$t = 2,9 \text{ anos}$$

Outro procedimento para o cálculo de juros compostos envolvendo o Neperiano para a resolução do montante é:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \mathbf{e}$$

$$\text{Então o } M = C \left[\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n \right]^{n\,i} \Rightarrow M = C.\mathbf{e}^{\mathbf{ni}}$$

Onde,

C é o capital inicial
n é o período de tempo
i é a taxa
M é o montante inicial.

Vejamos este exemplo:

Calcular o montante inicial no sistema de juros compostos, dado um capital de 1000,00 a uma taxa de 12% a.a no período de 1 ano.

Resolução:

M = C.$\mathbf{e}^{\mathbf{ni}}$ => M = 1000 . $2{,}71^{0{,}12\ .\ 1}$ = $1000.2{,}71^{0{,}12}$ = 1.000 x 1,127 = 1.127,00

Este resultado só pode ser expresso utilizando a calculadora científica. Logo, M = 1.127,00.

Atividade 1

Supondo um capital de 100 reais em uma aplicação que rende 30% ao mês (ou taxa de acréscimo de 30%). Calcule o tempo necessário para que o capital atinja 1090 =(100 x 9,9 + 100) a juros simples.

Sugestão: Use a calculadora para ajudar na solução do problema.

(Atividade baseada em FLORIANI(1999), função logaritmica, p.56)

Atividade 2

Uma pessoa aplicou a importância de R$ 500,00 numa instituição bancária que paga juros mensais de 4% no regime de juros compostos. Quanto tempo após a aplicação o montante será de R$ 4.000,00?

4.4.5 Medição da intensidade Sonora

Para se medir a intensidade sonora, o padrão de comparação foi tomado como a intensidade do som em Watts de potência que atingem um cm² de qualquer superfície, como a superfície do tímpano auditivo.

O decibel é uma unidade de sensação que permite medir o nível de intensidade sonora de forma mais prática: uma aplicação direta da escala linear (em Pa) para medição da pressão sonora leva-nos a utilizar número enorme. Assim é mais prático expressar os parâmetros acústicos numa proporção logarítmica entre os valores medidos e um valor referente. Esta proporção logarítmica é chamada de decibel ou db. É mais fácil falar em 20 decibéis do que em 10^{-10} W/m². O nível de intensidade de um determinado ponto a uma dada distância da fonte sonora pode ser expresso em db, comparando com uma intensidade de referência. Então, o **decibel** é aproximadamente igual a menor variação de som que o ser humano pode perceber.

De acordo com Magalhães (2003, p.63 – 65), “a relação entre a amplitude da onda sonora e sua potencia, em W/ cm², necessária para transmitir é dada por $y = 10^{x}$”. Tem-se, assim, uma equação exponencial. Por isso, a unidade de intensidade sonora é uma relação logarítmica.

Decibel – deci ou décimo é a décima parte do bel. Bel é uma homenagem a Alexandre Graham Bell, inventor do telefone. O decibel – db é dado pela relação:

$$db = 10 \times \log p_1 / \log p_2$$

onde p_1 é a potência medida; p_2 é a potência padrão (no caso de ouvido humano 10^{-16} W / cm².

O comprimento da onda e a frequência são formados por uma função senoidal, conforme mostra a figura 38.

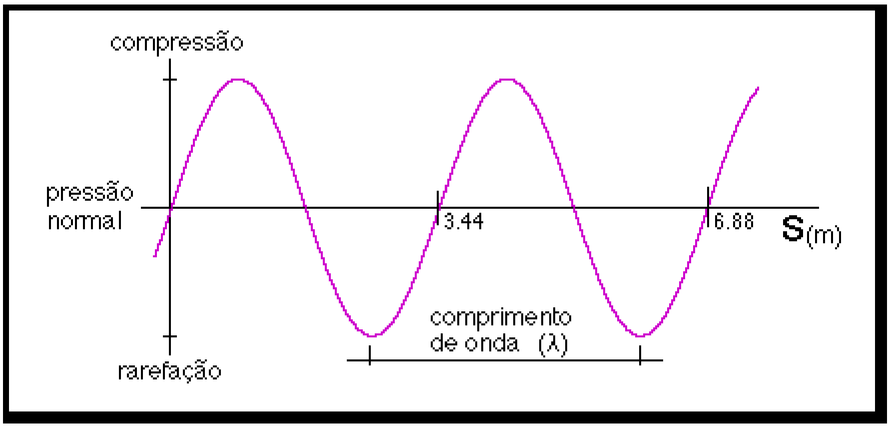


Figura 38: Imagem extraída de ondas estacionárias

Para se calcular os decibéis é sempre necessária uma comparação com a medida padrão, por isso o db é um número adimensional.

Observe: O db é definido como uma relação os logaritmos de duas potências. Toma-se como potência padrão:

$$10^{-16} = 0{,}00000000000000010 \text{ W/cm}^2.$$

O silêncio quase absoluto representado por zero decibel só pode ser obtido em câmara sem eco. Acima de 120 decibéis, conforme mostra a tabela, o ruído é tão intenso que pode ser sentido como uma sensação angustiante no ouvido. Além de 130 decibéis, a sensação se transforma em dor e pode lesar o ouvido desprotegido.

Decibéis	Fenômeno Físico	Potência (W/cm²)
0	Limiar do silêncio	10^{-16}
1	Unidade da Intensidade Sonora	$10^{-15,9}$
10 a 20	Cochichos, farfalhar de folhas	10^{-15} a 10^{-14}
30 a 40	Centro urbano à noite	10^{-13} a 10^{-12}
50 a 60	Conversa normal entre pessoas	10^{-11} a 10^{-10}
70 a 80	Martelo pneumático	10^{-9} a 10^{-8}
85	Nível máximo para expor uma pessoa por mais de 5 horas sem proteção auricular	$10^{-7,5}$
90 a 100	Buzina de carro acerca de 7m de quem ouve	10^{-7} a 10^{-6}
120	Limite de audição humana	10^{-4}
120	Avião a hélice na decolagem	10^{-4}
130	Fogo de metralhadora a curta distância	10^{-3}
140	Jato militar na decolagem	10^{-2}
160	Túnel aerodinâmico	$10^{1} = 10$
175	Foguete espacial na decolagem	$10^{1,5}$

Decibel Eletrônico

Em eletrônica o db é a unidade de medida prática do ganho de um amplificador, ou da atenuação de uma linha, dos níveis de potência, etc.

No caso das potências, o número de decibéis indica a relação entre dois valores de potência (geralmente a potência de saída p_u de um determinado circuito ou linha, e a entrada p_i, e vale dez vezes o logaritmo de base 10 da relação das potências).

Atividade

Pelo exposto, o decibel é um instrumento responsável pela medição da intensidade do som. A quantidade da medição da intensidade sonora é calculada com o uso dos logaritmos relacionada pela seguinte fórmula:

$$db = 10 \times \log p_1 / \log p_2$$

onde p_1 é a potência medida; p_2 é a potencia padrão (no caso de ouvido humano 10^{-16} W / cm²). Neste caso, determine:

a) Qual é a variação de potência do ouvido de 5 db? E de 10 db?
b) Uma cidade baixou a poluição sonora de $10^{-7,8}$ para 10^{-9} W/cm². Quantos decibéis foram abaixados?

(Atividade baseada em MAGALHÃES (2003), Trabalho monográfico sobre os logaritmos, p. 68)

4.4.6 Crescimento Populacional

O crescimento populacional é a mudança positiva do número de indivíduos de uma população dividida por uma unidade de tempo. O termo *população* pode ser aplicado a qualquer espécie viva, seja animal ou humano. Para entender o comportamento das populações de um ecossistema, é necessário fazer o estudo do crescimento populacional. Quando se faz a medição do tamanho da população de tempos em tempos, pode-se ter uma ideia se ela está aumentando ou diminuindo, podendo correlacionar com outros fatores como clima, alimento, etc.

A taxa de crescimento de uma população é a variação do número de indivíduos num determinado espaço de tempo. Quando se leva em conta apenas a variação do número de indivíduos em um determinado período, está se falando de taxa de crescimento absoluto, que é calculada da seguinte forma: taxa de crescimento absoluto = (Nf – Ni) / t.

Onde:

Ni = número de indivíduos no início do período considerado.

Nf = número de indivíduos no final do período considerado t = duração do período considerado. Desse modo, no campo da geografia, os logaritmos são essenciais para calcular a taxa de crescimento populacional de uma determinada cidade. Observe-se no exemplo abaixo:

Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

População do ano-base = P0

População após um ano = P0 * (1,03) = P1

População após dois anos = P0 * $(1{,}03)^2$= P2

População após x anos = P0 * $(1{,}03)^x$ = Px

Supondo que a população dobrará em relação ao ano-base após x anos, sendo assim, temos:

Px = 2*P0

P0 * $(1{,}03)^x$ = 2 * P0

$1{,}03^x$ = 2, aplicando logaritmo

log $1{,}03^x$ = log 2

x * log 1,03 = log2

x * 0,0128 = 0,3010

x = 0,3010 / 0,0128

x = 23,5

A população dobrará em aproximadamente 23,5 anos.

Atividade

Uma população N de micróbios cresce exponencialmente de acordo com a expressão N = 5 000 · 3^t (*t* em horas). Indique o valor de *t* para o qual se tem:

a) N = 10 000 b) N = 25 000 c) N = 200 000 d) N = 350 000.

Sugestão: Para resolução desse problema use os logaritmos de base dez.

4.5 SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA A SALA DE AULA

No capítulo 2 proporcionou-se a compreensão do número **e**, do seu inverso que é a base dos logaritmos de Napier, do conceito de logaritmos, do logaritmos de base 10, das propriedades dos logaritmos, bem como de sua utilidade. Todas essas proposições podem ser utilizadas como sugestões de atividades para a sala de aula. Dessa maneira, pretende-se informar que as devidas sugestões de atividades podem ser usadas como guia ou recurso didático pelo professor a fim de complementar e ampliar a abordagem desse conteúdo nos livros didáticos, para despertar no aluno o interesse pelo estudo significativo desse conteúdo.

Desse modo, sugere-se a forma como professores e alunos podem usá-la. Para a compreensão do número **e** e o seu inverso, o professor pode usar o dispositivo prático de Napier e sua demonstração. No entanto, para que o aluno possa compreender de maneira clara e objetiva, deverá atribuir valores à sequência, pois sua demonstração requer uma compreensão e domínio referente ao cálculo diferencial e integral. Para compreender o conceito de logaritmo, usa-se nesse trabalho a concepção aritmética dos logaritmos que pode ser usada por ambos. Para a caracterização de suas propriedades e de seu uso específico é necessário que tanto professor quanto aluno entendam como foram desenvolvidos os logaritmos de base 10.

As atividades apresentadas a seguir buscam interligar o estudo significativo sugerido sobre o desenvolvimento histórico dos logaritmos para que auxilie o professor no desenvolvimento conceitual e prático desse objeto de estudo, bem como na abordagem didática do uso dos logaritmos nos livros didáticos referidos no capítulo 2, ou preferencialmente outros que sejam utilizados. Espera-se que os professores procurem explorar no que for possível essas atividades, pois podem enriquecê-los tornando-se úteis no processo de ensino e aprendizagem da Matemática escolar do Ensino Médio. Pela definição de logaritmos apresentada, e utilizando-se o que foi proposto nos capítulos anteriores, sugere-se, a seguir, uma sequência de atividades:

Atividade 1 - Fechar a tabela dos logaritmos decimais até dez.

A partir da análise construtiva dos logaritmos e do estudo significativo realizado sobre os logaritmos decimais de Briggs, bem como das propriedades dos logaritmos e sabendo que:

$\log 2 = 0{,}30$

$\log 3 = 0{,}48$

$\log 4 = 0.60$

$\log 5 = 0{,}70$

a) Calcular o $\log 6 = ?$

b) Calcular o $\log 7 = ?$

c) Calcular o $\log 8 = ?$

d) Calcular o $\log 9 = ?$

Sugestão!

Para determinar o valor log 7, utilize o método de aproximação. Para isso, use $7^5 \cong 16.000$.

Informação Importante: Pelo que foi apresentado, justifique matematicamente por que log 1 = 0 e log 10 = 1.

Atividade 2 – Resolvendo logaritmo por meio de progressões

No capítulo 2 definem-se logaritmos da seguinte maneira: logaritmos são termos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é zero, correspondente aos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é a unidade. Desse modo:

a) Construa uma (PA) cujo primeiro termo seja 0 e razão 1; e uma (PG) cujo primeiro termo seja 1 e razão seja 3 que satisfaça as condições da definição acima.

b) De acordo com a definição dada, diga qual é o logaritmo do sexto termo da PG criada.

c) Diga em que base estão sendo calculados os logaritmos de cada um dos termos da PG que você criou e explique por quê.

d) Seria correto afirmar que, de acordo com a definição acima, a base dos logaritmos dos números que se quer determinar é sempre igual à razão da PG? Em caso contrário, diga como se pode determinar essa base.

e) Decida e justifique se a definição dada é uma definição correta de logaritmo e, caso não o seja, tente ajustá-la de modo a tornar-se correta.

f) Suponha que você queira obter os logaritmos decimais de certos números naturais, utilizando a definição acima. Construa uma PA e uma PG que permita fazer isso.

g) A definição anterior seria correta caso o primeiro termo da PG fosse diferente de 1? Justifique.

(Atividade baseada em MIGUEL, logaritmos, p.12-13).

Atividade 3 – Utilizando o método da média geométrica

O inglês Henry Briggs (1561-1632), professor de Geometria em Oxford, foi também uma outra pessoa que contribuiu para o desenvolvimento da teoria dos logaritmos. Em 1615, ele visitou Napier na Escócia, onde discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos. Briggs propôs o uso de potências de 10 e Napier disse que já tinha pensado nisso e concordou. A fim de evitar o uso de frações, ficou estabelecido entre os dois que log 1 = 0 e log 10^1 = 10, o que implicava que o logaritmo de 10 deveria ser 1. Como Napier veio a falecer em 1617, coube a Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos comuns ou Briggsianos dos números naturais de 1 a 1000, calculados com precisão até a 14ª casa decimal. Para isso, utilizou um trabalhoso processo de aproximações sucessivas baseado na ideia de média geométrica. 1. Explique como Briggs construiu sua tábua logarítmicas; Como se pode calcular o logaritmo de 5 usando a média geométrica conforme visto no capítulo 2.

Atividade 4 - O método da prostaférese

As operações aritméticas chegaram a ser classificadas, até uma determinada época, segundo seu grau de dificuldade, em duas espécies:

1. As de primeira espécie: adição e subtração;
2. As de segunda espécie: multiplicação e divisão;

Antes do surgimento dos logaritmos, para se resolver problemas semelhantes ao da atividade anterior, procurava-se um processo que permitisse reduzir cada operação de segunda ou terceira espécie a uma de espécie inferior e, portanto, mais simples. Para se obter o produto de dois números baseavam-se em conhecimentos algébricos ou trigonométricos acompanhados do uso de tábuas trigonométricas e outras como a tábua do quadrado da metade de um número. Recorria-se, por exemplo, a identidades algébricas ou trigonométricas, ou a régua de cálculo.

a) Utilizando o método da prostaférese, mostre como naquela época podia ser efetuada a seguinte multiplicação: $0{,}8988 \times 0{,}9455$.

Sugestão: Para a solução deste problema deve-se adquirir apenas uma das fórmulas de Werner que foram relacionadas no capítulo 2 e usar a tabela trigonométrica para a obtenção de cada ângulo referente aos valores usados.

b) Dê um exemplo de problema associado às práticas náutico-astronômicas europeias dos séculos que antecederam o surgimento da teoria dos logaritmos, cuja solução envolvia a realização de operações aritméticas na época, consideradas de segunda espécie. Caracterize a operação envolvida e resolva-a através do uso de uma das fórmulas de prostaférese. Explique o significado da palavra prostaférese e diga que tipo de conexão poderia ser estabelecido sobre os logaritmos.

c) No capítulo 2 comentou-se sobre a régua de cálculo e como o seu uso foi importante no auxílio de cálculo. Baseado nisso, calcule o valor de 12 x 20 usando a régua com escala logarítmica.

d) Faça uma busca em programas curriculares oficiais e livros didáticos atuais a fim de verificar se e como o tópico fórmulas de prostaférese neles aparece, e que objetivos tal tópico procura contemplar. Dessa maneira, você acha que, de fato, o uso da prostaférese perdeu o valor com as novas tecnologias usadas para a realização dos cálculos dos logaritmos, tais como calculadora e a computação gráfica? Justifique sua resposta.

(Atividade baseada em MIGUEL, logaritmos, p.15-16)

Atividade 5 – Aplicando os logaritmos

De acordo com o que se viu no capítulo 4 a respeito de exemplos de UBPs que culminou sobre as principais implicações dos logaritmos na prática docente, explique a conexão existente entre os logaritmos e:

a) os terremotos;

b) os índices de intensidade sonora;

c) uso do PH;

d) crescimento populacional.

Atividade 6 – Propriedades dos logaritmos

O crescimento de um bando de pássaros é dado pela expressão: $P = 500 \times 3^{t/6}$, onde t é o tempo de meses, e P é o número de pássaros após t meses. Determine:

a) Número inicial de pássaros do bando.

b) Após quanto tempo o bando será de 12.000 pássaros?

(Atividade baseada em FLORIANI (1999), Função logaritmica, p.56-57)

Atividade 7- Utilizando o número **e**

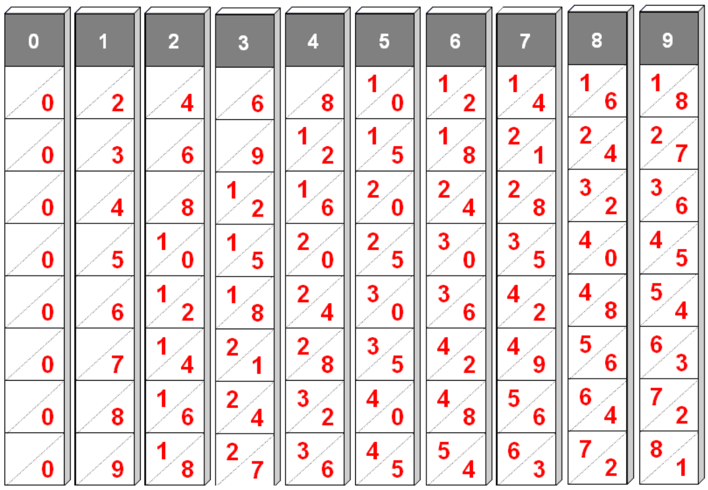
A descoberta do número **e** foi uma das principais revoluções da matemática do século XVIII. A invenção desse número ajudou no desenvolvimento do cálculo diferencial bem como no significado preciso e conceitual do que eram os logaritmos até um pouco desconhecidos no que se refere a sua caracterização formal. Além disso, diversas foram as contribuições desse número no campo da matemática, principalmente, na formulação dos números irracionais. Baseado nisso e no estudo desse número realizado no capítulo 2, responda:

a) O que você entende por número **e**?

b) Quais as principais relações desse número com os logaritmos naturais?

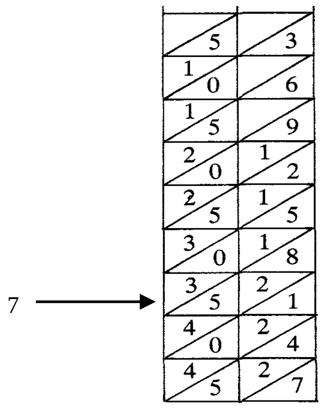
c) Sabendo que ln x = $\log_e$ x. Verifique se para cada um dos valores de x = 1; x = 3 e x = 4 a solução é verdadeira?

Atividade 8 – Usando as barras de Napier

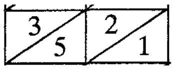


No final do século XVI, Napier, preocupado porque os cálculos eram grandes e difíceis, e freavam o progresso científico, concentrou todos os seus esforços em desenvolver métodos que pudessem simplificá-los. Com este fim, escreveu em sua *Rabdologia***,** onde descreve a utilização de barras e quadrinhos para efetuar somas de parcelas parciais. Os quadrinhos de Napier eram tábuas de multiplicações montadas sobre barras de secções quadradas (COLLETTE,1985).

53 x 7



Conforme a figura acima, suponha que queremos multiplicar 53 por 7. Colocamos primeiramente as barras dirigidas por 5 e por 3 de lado a lado de modo a formar o número 53. Em seguida verificamos qual é a sétima linha, que corresponde ao multiplicador. Nela localizamos os valores que devem ser somados de acordo com cada casa decimal. Assim, obteremos o resultado da multiplicação, ou seja:

 que significa 300 + 50 + 20 + 1 = 371.

Baseado nesse contexto histórico, no exemplo citado anteriormente e usando as barras de Napier:

1. Calcule:

a) 55 x 8 =

b) 60 x 32 =

c) 1037 x 35 =

2. Existe alguma relação entre as Barras de Napier e os logaritmos?
3. Quais as contribuições dessas Barras para a criação dos logaritmos?

Neste capítulo, caracterizamos nossa finalidade de elaboração e sugestão de atividades de ampliação dos aspectos presentes nos livros didáticos, investigados nesta dissertação, tal como havíamos previsto inicialmente e discutido ao longo do estudo aqui consolidado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste estudo utilizamos informações históricas para se entender e explicar como foram construídas epistemologicamente as noções, conceitos, propriedades e operações envolvendo logaritmos e suas aplicações práticas que são essenciais e significantes no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Partindo das dificuldades enfrentadas pelos alunos quando o tema abordado é logaritmo, este trabalho buscou apresentar, principalmente ao professor de Ensino Médio, sugestões para ampliar o ensino dos logaritmos, de modo que possa auxiliar para uma abordagem didática esclarecedora dos aspectos apresentados nos livros didáticos de Matemática pesquisados.

Para isso, o estudo apontou, de maneira geral, de que forma esse conteúdo deve ser trabalhado pelo professor no Ensino Médio para que o mesmo possa realizar um ensino com mais subsídios e que satisfaça o aprendizado do aluno. O professor assume nesse trabalho um papel fundamental capaz de não só direcionar o aluno para uma nova abordagem desse conteúdo como também prepará-lo para que entenda como os logaritmos são essenciais nos diversos campos do conhecimento.

Desse modo, a abordagem histórica dos logaritmos aqui apresentada contribui para o estudo contextualizado desse tópico matemático no Ensino Médio. Conforme mencionado, o que foi proposto nessa dissertação foi um estudo reflexivo sobre a abordagem conceitual de logaritmos, destacando, especialmente, três enfoques básicos: O aritmético, o geométrico e o algébrico funcional.

Essa forma de abordagem conceitual auxiliará o professor no estudo significativo dos logaritmos quando o mesmo utilizar o livro didático em sala de aula. Como foi discutido ao longo desse estudo que a abordagem dos logaritmos presente nos livros didáticos do século XX é bastante resumida, direcionando o estudo apenas sob o enfoque algébrico-funcional, então, as três concepções direcionadas neste trabalho, quando utilizadas em conexão, não só ajudarão ao professor a superar a ausência didática e esclarecedora dos livros didáticos sobre o assunto em questão, como também direcionarão para uma compreensão conceitual de logaritmos mais ampla.

No estudo realizado procurei delinear, ainda, como os logaritmos são úteis nos diversos campos de conhecimento. A princípio, procurando mostrar de uma forma geral como essas aplicações são úteis no processo interdisciplinar e no ensino de Matemática. Todas as implicações práticas sugeridas atuam como suporte para que o professor dê continuidade ao estudo realizado sobre as aplicações práticas e construa conhecimentos, junto ao aluno, por meio de uma abordagem didática aproximada das Unidades Básicas de Problematização (UBPs), conforme foi proposto por Miguel e Mendes (2010).

Sabemos que o estudo prático dos logaritmos não é tão explorado pelos livros didáticos, conforme já comentado ao longo deste trabalho. Alguns autores de livros didáticos apresentam, de maneira superficial, as aplicações dos logaritmos no que se refere ao estudo de fenômenos naturais, tais como: medição da intensidade dos terremotos e medição da intensidade sonora. Para a realização de um ensino que satisfaça o aperfeiçoamento desse tema em estudo, frente ao livro didático, as informações contidas no último capítulo sobre as práticas e implicações dos logaritmos buscam subsidiar o professor no que diz respeito à importância dos logaritmos em outros campos do saber que estão estritamente ligados à prática escolar.

Dessa forma, apresento uma série de atividades que, nesse contexto, procura ajudar o professor na orientação disciplinar do processo ensino-aprendizagem da matemática escolar de Ensino Médio. Essas atividades podem ser usadas pelos professores em sala de aula, pois as mesmas ajudam a compreender seu conceito, suas propriedades, além de proporcionar um estudo aplicativo deste conteúdo.

Contudo, a invenção dos logaritmos ficou marcada na história e nenhum homem teve mentalidade e método tão eficazes de desenvolver o logaritmo quanto Napier e posteriormente Burgi. Seus esforços e anseios foram constantes em busca de meios que ajudassem a sociedade intelectual da época. Não se importavam com tempo, pois passaram horas e horas em busca de seus objetivos. Enfrentaram dificuldades, mas foram capazes de superá-las. A construção desses logaritmos jamais será apagada da história porque deixaram para a época subsídios importantes para o crescimento científico.

Uma constatação sobre a evolução do conhecimento humano está no fato de que um grande matemático Henry Briggs (que trabalhou os conhecimentos iniciais da forma aritmética dos logaritmos), propondo tabelas com base 10, calculou durante mais de 30 (trinta) anos, conseguindo abranger os logaritmos de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. Atualmente, um computador e uma impressora, em questão de horas, imprimem todas as Tábuas de Logaritmos de 1 a 100.000. Isto mais por uma curiosidade, porque todas as calculadoras científicas possuem estas tabelas e até maiores para o acesso ou uso em frações de segundos.

Portanto, a abordagem histórica dos logaritmos realizada neste trabalho, busca proporcionar um maior aprofundamento acerca dos logaritmos, assim como é apresentada, ainda, uma proposta didática que pode ser usada pelo professor para o ensino-aprendizagem desse tópico no ensino de Matemática. Assim, esse estudo pretende ainda sugerir que os logaritmos possam ser trabalhados com outros tópicos importantes no Ensino Médio, tais como: interpretação de tabelas, gráficos e formulações das funções logarítmicas e trigonométricas e seus desdobramentos na análise de fenômenos naturais, sociais e culturais que podem ser abordados através da modelagem matemática.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, D. **Ondas estacionárias**, 2008. Disponível em: <http://www.somaovivo.mus.br/forum/viewtopic.php?f=21&t=2044>. Acesso em: 28 de Nov. de 2010.

ALVIM, R. B**. Georg Simon Ohm – Biografia**, [2010?]. Disponível em: http://pessoal.educacional.com.br/up/50280001/2756140/t1315.asp. Acesso em: 12 de Nov. 2010.

APARELHOS de medida. [S.l.: s.n.], [2010?]. Disponível em: <www.profelectro.info/?tag=aparelhos-de-medida>. Acesso em: 10 de Nov. 2010.

BARRETO FILHO, B.; SILVA, C. X da. **Matemática aula por aula**. São Paulo: FTD, 2003.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2004.

BITTENCOURT. C. M. F. **Livro didático e conhecimento histórico**: Uma História do saber escolar. Tese de Doutorado, São Paulo: USP, 1993.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF,1998. (Material em PDF).

BRASIL. Ministério da Educação. **Programa Nacional do Livro Didático.** Guia de livro didático. 5ª a 8ª séries. Matemática. Brasília: MEC/ PNLD, 2008. (Material em PDF).

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio.** Catálogo do Programa Nacional do Ensino Médio. Brasília: MEC/ SEB/ PNLEM, 2009. (Material em PDF).

BRIGGS, Henry. **Logarithmorum Chilias Prima.** Londres, 1617.

BRITO, A. de J. et al. **História da matemática em atividades didáticas.** Natal: EDUFRN, 2005.

BOOKER, G. **Insight from past solutions:** using the history of Mathematics in problem solving. **Anais** do 2º Congresso Latino-americano de História da Ciência e da tecnologia, São Paulo, p. 229-231,1988.

BOYER, C. **História da Matemática.** São Paulo: Editora da USP, 1974.

COLLETTE, J. P. **El Comienzo de las Matemáticas Modernas**. Espanha: Ed. Siglo XXI, 1985.

D'AMBROSIO, U. História da Matemática e Educação. In: FERREIRA, E. S. (Org.) **Cadernos CEDES 40**. Campinas: Papirus, 1996.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** São Paulo: Ed. da UNICAMP, 1997.

FERREIRA, R. L.; BISOGNIN, E. **O estudo de logaritmos por meio de uma sequência de Ensino:** A engenharia didática como apoio metodológico. Rio Grande do Sul: UNIFRA, 2007.

FERREIRA, R. L. **Uma sequencia de ensino para o estudo de logaritmos usando a Engenharia Didática.** 2006. Dissertação (Mestrado Profissionalizante) - Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Santa Maria, 2006, 149p.

FIORENTINO, D.; NACARATO, A. M. (Org.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática:** Investigando e teorizando a partir da prática. São Paulo: Musa; Campinas: GEPFPM – PRAPEM – FE/UNICAMP, 2005.

FLORIANI, J. V. **Função logarítmica.** Santa Catarina: Editora da FURB, 1999.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia.** Saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J. R. **Matemática completa**. São Paulo: FTD, 2000.

GONÇALVES, Fabiana Santos. **InfoEscola**, 2008. Disponível em: <http://www.infoescola.com/geografia/crescimento-populacional/>. Acesso em: 20 de nov. de 2010.

HASSLER, J. O. **The use of Mathematical History in teaching**. The Mathematics Teacher, março de 1929.

HENRIQUE, C. A. P. **Logaritmos e Terremotos:** aplicação da escala logarítmica nos abalos sísmicos**.** São Paulo: UNIMESP, 2006.

HORSBURGH, E. M. **Modern instruments and methods of calculation; a handbook of the Napier tercentenary exhibition.** Edinburg: Royal Society of Edinburgh, 1914.

HUMPHREYS, W. **Use of the History of Mathematics in the mathematics curriculum.** Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education. p. 5396-98. Birkhauser. Boston. U.S.A, 1980.

IEZZI, G. et al. **Matemática ciências e aplicações.** São Paulo: Atual, 2004, v. 1.

KNOTT, C. G. **Napier tercentenary memorial volume.** Edinburg: Royal Society of Edinburg, 1915.

LIAO, T. **Um estudo bibliográfico sobre a Concepção Mecanicista, o Movimento Bourbaki e a Matemática Moderna.** Revista online do CPPA, 2004.

LIBANEO, J. C. **Didática.** São Paulo: Cortez, 1994.

MAGALHÃES, G. N. **Trabalho monográfico sobre logaritmos.** Rio de Janeiro: Ed. Fundação Biblioteca Nacional, 2003.

MENDES, I. A.; SOARES, E. C. **A criação dos logaritmos nos fins do século XVI:** as contribuições de Napier, Briggs e Burgi. In: MENDES, I. A. (Org.). A matemática no século de Andrea Palladio. Natal: EDUFRN, 2008.

MENDES, I. A. et al. **A história como um agente de cognição na Educação Matemática.** Porto Alegre: Sulina, 2006.

MENDES, I. A. **Ensino da Matemática por atividades**: uma aliança entre o construtivismo e a história da Matemática. 2001.Tese (Doutorado) - Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2001a.

MENDES, I. A. **Investigação histórica no ensino da matemática.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

MENDES, I. A. **O uso da história no Ensino de Matemática:** reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA, 2001b.

MESERVE, B. **The History of Mathematics as a pedagogical tool.** Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education. Birkhauser Boston: Birkhauser, 1980, p. 398-400.

MENTZ, L. I. **O ensino de Matemática do secundário de uma escola confessional do Estado do Paraná entre 1940 e 1947**. 2008. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba, 2008.

MIGUEL, A.; MIORIM, A. M., **História na Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autentica, 2004.

MIGUEL, A.**Três estudos sobre a história e Educação Matemática**. 1993. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1993.

MIGUEL, A; MENDES, I. A.. **Mobilizing histories in mathematics teacher education:** memories, social practices, and discursive games. ZDM, nº 42, 2010, p. 381-392.

MIORIM. M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MIORIM, M. A. **Livros didáticos de Matemática do período de implantação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. V CIBEM**, Porto, 2005, p. 1-20.

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira.** Natal: SBHMat, 2002.

NAUX, C. **Historie des logarithmes de Neper a Euler.** Paris: Librairie scientifique et technique A. Blanchard, 1966, tome I.

NAUX, C. **Historie des logarithmes de Neper a Euler.** Paris: Librairie scientifique et technique A. Blanchard, 1971, tome II.

OLIVEIRA, A. J. de. **O Ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica.** 2005 Dissertação (Mestrado Profissionalizante) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2005.

OLIVEIRA, R. de; FERNANDES, C. **pH e pOH**, [2010?]. Disponível em: <http://www.profcupido.hpg.ig.com.br/ph_e_poh.htm>. Acesso em: 13 de Out. 2010

PAIS, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influencia francesa. Belo Horizonte: Autentica, 2002.

PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005, vol. único.

PERES Y MARIN, A. **Arithmetica teórico-prática.** [s.l]:[s e], 1909.

SERRASQUEIRO, J. A. **Tratado de Álgebra Elementar.** 7. ed. Coimbra: Livraria Central de J. Diogo Pires, 1900.

SILVA, M. F. N et al. **Importância do teorema fundamental do cálculo na contabilidade.** Rio Grande do Sul: UNIFRA, 2005.

SIMONS, L. G. **The place of the History and Recreations of Mathematics in teaching Algebra and Geometry.** The Mathematics Teacher, v. XVI, n^0 2, february 1923, p. 94 – 101.

SOARES, F. dos S. **Ensino da Matemática no Século XX da Reforma Campos à Matemática Moderna.** In: DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. da; São Paulo: Horizontes, 2004.

STIFEL, Michael. **Aritmética na Íntegra**. Holzdorf, 1544.

SWETZ, F. J.; KAO, T.I. **Was Pythagoras Chinese?:** An examination of right triangle theory in ancient China. The Pennsylvania State University Press, 1977.

TALAVERA, L. M. B. **Parábola e catenária:** história e aplicações. Dissertação (mestrado). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2008.

TOMASH, Ervin. **The History of computing.** Los Angels: Library, 1989.

VIANNA, J. J. L., **Elementos de Arithmetica.** 6. ed. Rio de Janeiro: Clássica de Alves, 1897.

WILTSHIRE, B. **History of Mathematics in the classroom**. Mathematics Teacher, v.5 XXIII. n. 8, December, 1930, p. 504-508.

WINGATE, Edmund. **Fragmentum Logarithmotechnicæ.** Londres, 1633.

WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. [S.l.: s.n.], [2010?]. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Crescimento_populacional>. Acesso em: 17 de Nov. de 2010.