HTEM

História e Tecnologia no Ensino da Matemática

VOLUME 1

realização

IME-UERJ / IM-UFRJ

organizadores

Luiz Mariano Carvalho

Luiz Carlos Guimarães

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

H673

História e tecnologia no ensino da matemática: v. 1 / organizadores, Luiz Mariano Carvalho, Luiz Carlos Guimarães. Rio de Janeiro : IME-UERJ, 2002.
1 disco a laser para computador; 4 ¾ pol.

Exigências do sistema: Leitor de CD-ROM.

"Palestras apresentadas no 1º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática (IHTEM)"

Realização IME/UERJ/IM/UFRJ

ISBN 85-89498-01

1. Matemática – Estudo e ensino (Superior). 2. Matemática – História. I. Carvalho, Luiz Mariano. II. Guimarães, Luiz Carlos. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática.

CDU 51.07(075.8)

História e Tecnologia no Ensa Matemática, volume 1,
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01-** © 2002, Editora IME-UERJ.

Este livro dá seguimento às palestras apresentadas no **1º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática** (IHTEM).

O Colóquio se propõe como um espaço de discussões acerca do papel das novas tecnologias, particularmente de instrumentos computacionais e de comunicação digital, e sua possível combinação com o uso da História da Matemática no ensino de Matemática. As diferentes vertentes desse Colóquio - História, Tecnologia, Ensino e Matemática - têm sido discutidas em várias conferências específicas, mas um grupo de pesquisadores sentiu a necessidade de permitir uma maior e melhor integração entre as diversas e múltiplas discussões acerca desses temas em um fórum comum.

Reunimos, portanto, trinta artigos, que apresentam um panorama parcial do trabalho de pesquisa de vários grupos nacionais. A publicação deste volume representa um esforço para iniciar a discussão dessa temática em escala mais ampla, e um convite para que outros grupos e pessoas se juntem a nós no esforço de consolidar essa área de investigação.

O IHTEM foi organizado pela UERJ, UFMG, UFOP e UFRJ, e realizou-se no campus Maracanã da UERJ, entre os dias 21 e 23 de fevereiro de 2002.

O comitê científico do Colóquio foi composto por:
David Tall (University of Warwick),
Eduardo Sebastiani (UFOP),
Joao B. Pitombeira (PUC-RJ),
Luiz Carlos Guimarães (UFRJ),
Luiz Mariano Carvalho (UERJ),
Márcia Fusaro Pinto (UFMG),
Rubens Sampaio (PUC-RJ, SBMAC),
Sérgio Nobre (UNESP, SBHMat).

O evento contou com o apoio institucional da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), e da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, seção Rio de Janeiro, (SBEM-RJ). Tivemos o apoio financeiro do IME-UERJ, da FAPERJ, da CAPES, e do CNPq. O evento reuniu trabalhos de pesquisadores das seguintes instituições: CAP-UERJ, CEDERJ, FGV, IMPA, PUC-RJ, PUC-RS, PUC-SP, UERJ, UFES, UFF, UFMG, UFOP, UFPE, UFRJ, UFRGS, UFRN, UFSCAR, UNESP, UNICAMP, UNIG, UNIRIO, UNISINOS e USP; além de pesquisadores estrangeiros do RHSEIS (França) e da Universidade de Warwick (Inglaterra). Contou também com a participação de alunos de graduação e de pós-graduação de várias instituições públicas e privadas do Rio de Janeiro, São Paulo, Pernambuco e Minas Gerais.

Alguns números do Colóquio:

- 153 participantes,
- 42 comunicações científicas, em sessões individuais com a duração de 50min cada,
- quatro mesas-redondas,
- uma conferência plenária,
- um fórum de debates, com todos os participantes.

Na plenária, o Professor David Tall apresentou a palestra: “Using Technology To Support An Embodied Approach To Learning Concepts In Mathematics”, que faz parte deste livro.

O grau de aprofundamento das discussões, a atualidade e importância dos temas tratados, entre outras razões, levaram os participantes a decidir tornar o evento perene, com periodicidade bianual. A segunda rodada (IIHTEM) será realizada em 2004, novamente na UERJ.

Esse trabalho contou com a valiosa contribuição de vários colegas, no trabalho de julgamento e revisão dos artigos enviados. Seus nomes estão registrados na página v dessa introdução, e a eles dirigimos os nossos mais sinceros agradecimentos.

Luiz Mariano Carvalho e Luiz Carlos Guimarães
Organizadores

SUMÁRIO

PARECERISTAS

1. Antonio Carlos Brolezzi (USP).
2. Carlile Campos Lavor (UERJ).
3. Carlos A. de Moura (UERJ).
4. Elizabeth Belfort (UERJ).
5. Gilda de La Rocque Palis (PUC-Rio).
6. John A. Fossa (UFRN).
7. José Paulo Quinhões Carneiro (UERJ).
8. Leônidas de Oliveira Brandão (USP).
9. Luiz Carlos Guimarães (UFRJ).
10. Luiz Mariano Carvalho (UERJ).
11. Márcia M. Fusaro Pinto (UFMG).
12. Rosa Maria Videira Figueiredo (UERJ).
13. Sandra Augusta Santos (UNICAMP).
14. Tatiana Roque (UFRJ).
15. Victor Giraldo (UFRJ).
16. Virgínia Maurell Lobo Pereira (USU).
17. Yuriko Yamamoto Baldin (UFSCar).

CAPÍTULO 1

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 1:28.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

USING TECHNOLOGY TO SUPPORT AN EMBODIED APPROACH TO LEARNING CONCEPTS IN MATHEMATICS[1]

David Tall

Mathematics Education Research Centre
University of Warwick
CV4 7AL, UK
e-mail: david.tall@warwick.ac.uk

Abstract *- In this paper I will explain what I mean by an 'embodied approach' to mathematics. I shall contrast and compare it with two other modes: the 'proceptual' (manipulating symbols as process and concept) and the 'axiomatic' based on formal definitions and formal proof. Each of these has its own standard of 'truth'. I argue that the embodied mode, though it lacks mathematical proof when used alone, can provide a fundamental human basis for meaning in mathematics. I shall give examples of an embodied approach in mathematics, particularly in the calculus, using technology that makes explicit use of a visual and enactive interface.*

Key words: *Procept, Axiomatic, Embodied Approach, Calculus, Technology*

1. PHYSICAL AND MENTAL TOOLS FOR THINKING

In his work over thirty years ago, long before the development of modern computers, Bruner (1966) focused on *homo sapiens* as a tool-using species.

> Man's use of mind is dependent upon his ability to develop and use "tools" or "instruments" or "technologies" that make it possible to express and amplify his powers. His very evolution as a species speaks to this point. It was consequent upon the development of bipedalism and the use of spontaneous pebble tools that man's brain and particularly his cortex developed. It was not a large-brained hominid that developed the technical-social life of the human; rather it was the tool-using, cooperative pattern that gradually changed man's morphology by favouring the survival of those who could link themselves with tool systems and disfa-

[1] This paper consists of two parts: the first is a developing theory of three modes of thinking: embodied/proceptual/formal. The second part builds on long-established material from Tall (2000).

> vouring those who tried to do it on big jaws, heavy dentition, or superior weight. What evolved as a human nervous system was something, then, that required outside devices for expressing its potential.
>
> (Bruner, *Education as Social Invention*, 1966, p. 25.)

In his essay “Patterns of Growth”, Bruner (1966) distinguished three modes of mental representation – the *sensori-motor*, the *iconic* and the *symbolic*.

> What does it mean to translate experience into a model of the world. Let me suggest there are probably three ways in which human beings accomplish this feat. The first is through action. […] There is a second system of representation that depends upon visual or other sensory organization and upon the use of summarizing images. […] We have come to talk about the first form of representation as **enactive**, the second is **iconic**. […] Finally, there is a representation in words or language. Its hallmark is that it is **symbolic** in nature. Bruner, 1966, pp. 10–11.

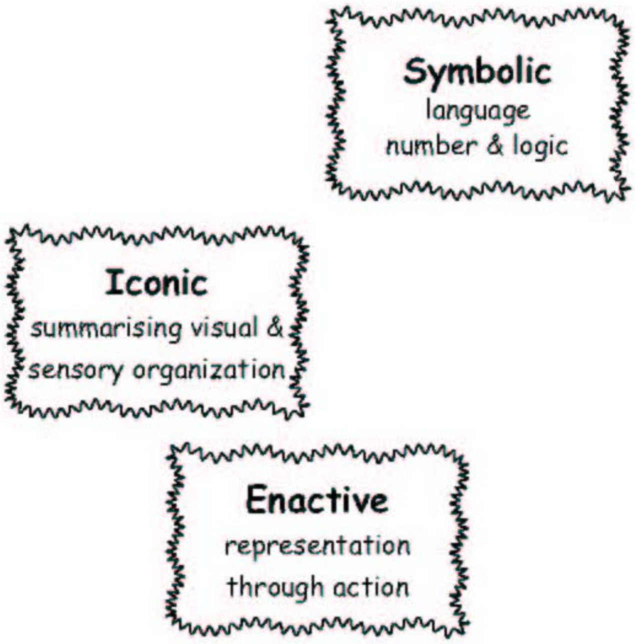


Figure 1: Bruner’s three modes of representation

Bruner considered that these representations grow in sequence in the cognitive growth of the individual, first enactive, then iconic and finally the capacity for symbolic representation. He hypothesised that “any idea or problem or body of knowledge can be presented in a form simple enough so that any particular learner can understand it in recognizable form” (ibid. p. 44).

The development of modern computer interfaces show something of Bruner’s philosophy in the underlying use of:

- Enactive interface,
- Icons as summarizing images to represent selectable options,

- Symbolism through keyboard input and internal processing.

When representations in mathematics are considered, clearly the single category of 'symbolism'—including both language and mathematical symbols—requires subdivision. Bruner (1966, pp. 18, 19) hinted at such a formulation in saying that that symbolism includes both "language in its natural form" and the two "artificial languages of number and logic." To these categories we must add not just number, but algebraic and other functional symbolism (e.g. trigonometric, exponential, logarithmic) and the wider symbolism of axiomatic mathematics.

The Reform movement in the calculus—for example the Harvard Calculus—focused initially on three representations: *graphic*, *numeric* and *symbolic* (or *analytic*):

> One of the guiding principles is the 'Rule of Three,' which says that wherever possible topics should be taught graphically and numerically, as well as analytically. The aim is to produce a course where the three points of view are balanced, and where students see each major idea from several angles. (Hughes Hallett 1991, p. 121)

The 'Rule of Three' later became the 'Rule of Four', extending the representations to include the *verbal*, giving four basic modes:

- verbal,
- graphic,
- numeric,
- symbolic (or analytic).

Several points are interesting here:

i) The enactive mode is completely omitted,

ii) The "verbal" mode was not seen initially as being important,

iii) Formal-axiomatic formulation using logical deduction is absent.

Each of these aspects is significant. The omission of the enactive mode is presumably because it does not seem to be a central focus in the graphs and symbols of the calculus. As I found with my earlier work on Graphic Calculus (1985a), this omission is a serious one because the embodied aspects of the calculus help to give fundamental human meaning. The initial omission of the verbal category is interesting. My interpretation is that this is because the verbal category is a fundamental ingredient underpinning all the other modes of operation. It can be highlighted, as it is in the Harvard Calculus, but it is essentially ever-present. Finally the down-playing of formal considerations is an implicit admission that there is something essentially difficult about this mode of operation that is not part of the calculus and more appropriately postponed for a formal course in analysis.

Taking these observations into account, I decided to categorise the modes of representation into three fundamentally distinct ways of operation:

- **Embodied**: based on human perceptions and actions in a real-world context including but not limited to enactive and visual aspects.
- **Symbolic-proceptual**: combining the role of symbols in arithmetic, algebra and symbolic calculus, based on the theory of these symbols acting dually as both process and concept (procept). (See Tall et al, 2001).
- **Formal-axiomatic**: a formal approach starting from selected axioms and making logical deductions to prove theorems. (Figure 2.)

My solution involves making choices, but I hope to show that the choices made can be justified by the fact that each category operates in a distinct manner, each with its own world of meaning and distinct methods of justification.

The *embodied* world is the fundamental human mode of operation based on perception and action. The *symbolic-proceptual* world is a world of mathematical symbol-processing, and the *formal-axiomatic* world involves the further shift into formalism that proves so difficult for many of our students. Language operates throughout all three modes, enabling increasingly rich and sophisticated conceptions to be developed in each of them.

In using the term 'embodied', I am highly aware of the growing theories of 'embodied cognition' in cognitive science in the last two decades. In mathematics, a major contribution has been made by Lakoff and his colleagues. (Lakoff and Johnson, 1999, Lakoff and Nunez, 2000, Nunez et al 1999.) Embodied cognition focuses on the bodily/biological mechanisms underlying cognition and my work lies squarely in this broad scheme of ideas. However, Lakoff uses terms in a different way by asserting that *all* mathematics is embodied, meaning that it depends on constructions in human minds and shared meanings in mathematical cultures. I agree with this position. However, it reduces the power of the word 'embodied' because it refers to *all* mathematical thinking. I prefer to use the term 'embodied' to refer to thought built fundamentally on sensory perception as opposed to symbolic operation and logical deduction. This gives the term 'embodied' a more focused meaning in mathematical thinking.

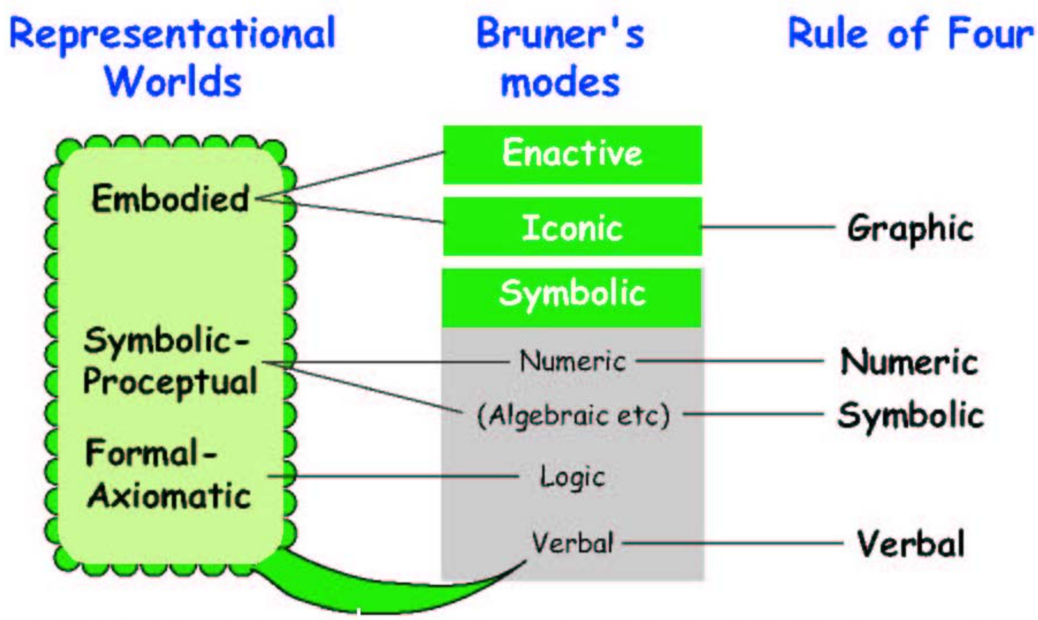


Figure 2: Three representational worlds and their links with other viewpoints

Each world of operation incorporates a range of different aspects. The embodied mode includes enactive and iconic, and encompasses an increasingly subtle use of visual and spatial imagery. The proceptual mode contains several distinct stages (see Tall *et al* 2001). These include arithmetic calculations, algebraic manipulations and the potentially infinite notion of the limit concept with significant cognitive reconstructions necessary to cope with each successively sophisticated topic. The formal mode begins with an initial deductive stage based on embodied experience (for instance in Euclidean geometry) prior to building a full-blown systematic axiomatic theory.

Relationships with other theories

The subdivision into these three worlds of operation has links with a number of other theories. Piaget's stage theory incorporating

sensori-motor / preconceptual / concrete operational / formal

has a similar structure, though his theory is primarily developmental in origin.

The SOLO taxonomy (Structure of Observed Learning Outcomes) of Biggs and Collis (1982) formulated a subtly different view incorporating Bruner's ideas in terms of the following successive modes of operation:

sensori-motor / ikonic / concrete operational / formal / post-formal.

The SOLO taxonomy differs from that of Piaget, in that it is intended in to provide a template for *assessment*. Within each mode, the development of a specific concept is assessed as to whether the student's response is:

- *pre-structural* (lacking knowledge of the assessed component)
- *unstructured* (focusing on a single aspect)
- *multi-structural* (focussing on several separate aspects)
- *relational* (relating different aspects together)
- *extended abstract* (seeing the concept from an overall viewpoint).

Each mode, therefore, is not a single level of cognitive operation. It grows within the individual and, as each successive mode comes on stream sequentially in cognitive development, earlier modes continue to be available.

At a time when a student is learning mathematics, the sensori-motor and ikonic modes will already be available together and I have essentially combined them to give the *embodied mode*. Formal aspects of thinking in mathematics I have combined into the *formal-axiomatic mode*. This begins with local deduction (meaning 'if I know something … then I can deduce something else') and develops into global systems of axioms and formal proof.

Why *Three* Worlds of Operation?

The highly complex thinking processes in mathematics can be categorised in many ways. My choice of three categories puts together those aspects which have a natural relationship between them whilst allowing sufficient distinction to be of value. The embodied mode, for example, lies at the base of mathematical thinking. It does not stay at a low level of sensori-motor operation in the sense of the first stage of Piagetian development. It becomes more sophisticated as the individual becomes more experienced, while remaining linked, even distantly, to the perception and action typical in human mental processing. A 'straight line', for instance, is sensed initially in an embodied manner through perception and conception of a straight line given by a physical drawing. However, an embodied conception of a straight line may become more subtly sophisticated to cover the idea that a line has length but no breadth, which is a fundamental concept in Euclidean geometry. What matters here is that the conception of a 'straight line' remains linked to a perceptual idea even though experience endows it with more sophisticated verbal undertones.

The *proceptual* mode (beginning with Piaget's concrete operational or SOLO's concrete symbolic) is based on symbolic manipulation found in arithmetic, algebra and symbolic calculus. It could easily be subdivided, and often is. Research by my colleagues and myself suggest that there are a range of transitional difficulties that occur in moving through proceptual thinking to new kinds of proceptual symbolism (figure 3).

The symbols in arithmetic are *operational*, that is there is an algorithm for calculating the desired process. For instance, the symbol 3+2 is asking for the process of adding 3 and 2, which can be carried out, for example, by starting at 3 and counting on two more. There are several subtle difficulties that occur in handling broader number systems, such as integers (where adding a negative number will now make the result *smaller*, contrary to all experience with counting numbers) or fractions, with the difficulties of equivalence and the arithmetic of fractions.

Algebra has a new kind of symbol, such as $3+2x$, which is no longer *operational*; the desired sum cannot be carried out until x is known, and so the process of evaluation is only *potential*. Yet students are asked to manipulate expressions that have processes that they cannot carry out. No wonder students find the initial contact with algebra so confusing!

Other subtle difficulties occur in later algebraic developments. For instance, the meaning of x^2 as two lots of x multiplied together is evident, but $x^{1/2}$ has no corresponding meaning. (How can we have 'half a lot of x multiplied together?)

The introduction of the limit concept brings a procept whose calculation is now *potentially infinite*, so that most students believe that such a phenomenon 'goes on forever', without every quite reaching the limiting value. Again this provokes universal difficulties for students. It is with some relief that they find the 'rules of calculus' being *operational* again, albeit with symbolic rather than numerical input and output.

The development of number, algebra and limit are littered with cognitive transitions that require considerable effort for learners and often act as considerable barriers to progress. It is my belief therefore that it is more natural to put all of these numeric and symbolic manipulations together and to subdivide them into smaller categories wherever this is appropriate, taking into account natural transitions that occur in sense-making in developing meaning for symbolism in these branches of mathematics.

The final *axiomatic* category also includes a range of approaches. The earlier modes of thought already have their own proof structures. The embodied mode already sup-

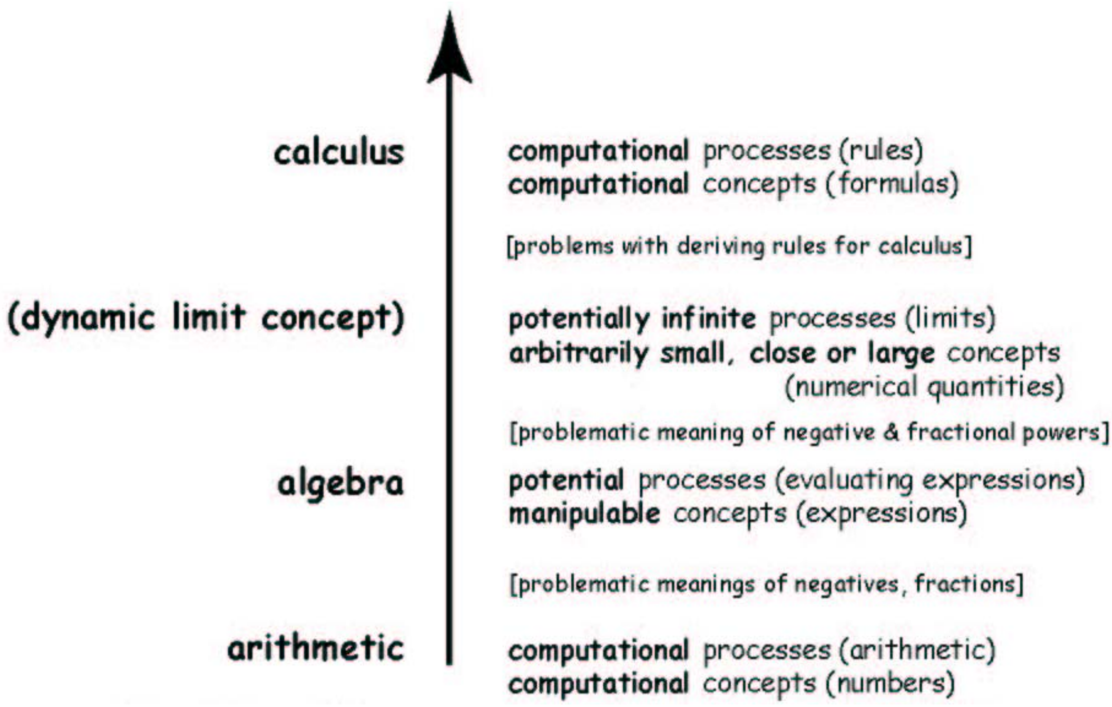


Figure 3: Some different types of procept in mathematics (Tall et al, 2001)

ports thought experiments where one imagines a situation occurring and thinks through the consequences. The proceptual mode allows a simple form of proof by checking calculations, or using algebraic symbolism to generalise ideas in arithmetic. In the axiomatic world, *formal* proof comes into play, first in terms of local deductions of the form ‘if I know this, then I know that.’ What distinguishes the formal mode is the use of formal definitions for concepts from which deductions are made. The formal world again grows in sophistication from local deductions based on definitions into the formulation and construction of axiomatic systems such as those in group theory, analysis, topology, etc. Even here there is a range of ways in which students can come to terms with the formalism. Pinto (1998) distinguishes between ‘natural’ thinking where the formalism is built by continual refinement of the concept image and ‘formal’ thinking which builds logically from definitions and formal deductions. In Tall (2002), I take these ideas further to show how ‘natural’ thought experiments based on imagery may suggest possible theorems which may then be deduced by ‘formal’ means. In the other direction, formal proof can produce significant *structure theorems* that state that a given formal system has certain structural properties; these can yield their own imagery which allows natural thinking to speculate once more in terms of thought experiment.

2. Differing Modes of Operation and Belief

The embodied, proceptual and formal modes have differing ways of justifying and proving which reveal them to operate as quite different worlds of experience. Let us consider this in a simple example:

Example: The sum of the first n whole numbers is $\frac{1}{2}n(n+1)$.

> *Proof 1: (embodied)*. Lay out rows of stones. Put 1 in the first row, 2 in the second row, 3 in the third, and so on. The picture is shown in the left hand part of figure 3. Now take an equal layout of pebbles, turn it round and fit the two together as in the right-hand picture. It can be seen that the two together make a rectangle size n by n+1, so there are $n(n+1)$ stones altogether, making $\frac{1}{2}n(n+1)$ in the original shape. The validity of this proof is in the visual picture.

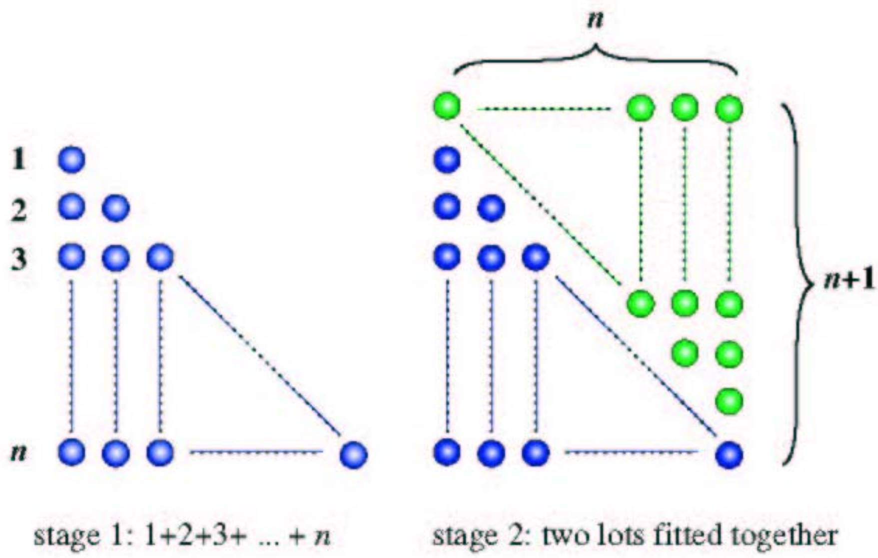


Figure 4: The embodied proof that the sum of the first *n* whole numbers is $\frac{1}{2}n(n+1)$

Proof 2: (proceptual). Write out the sum

$1+2+3+\ldots n$

backwards as

$n+\ldots+3+2+1$

and add the two together in order, pair by pair, to get

$(1+n)+(2+n-1)+\ldots+(n+1)$

to get n lots of $n+1$, i.e. $n(n+1)$, so, again, the original sum is half this, namely $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Proof 3: (*axiomatic*) By induction.

The embodied and proceptual proofs have clear human meaning, the first translating naturally into the second. The induction proof, on the other hand, often proves opaque to students, underlining the gap that occurs between the first two worlds and the formal world.

3. THE THREE DIFFERENT WORLDS OF THE CALCULUS

The term ‘calculus’ has its origins in the Latin word ‘calculus’ for ‘stone’, which was used as a physical tool during a process of calculation. In this context the theory of numbers has an underlying physical origin, for example in the notion of ‘triangular numbers’ or ‘square numbers’ which can be represented by triangular and square arrays of pebbles respectively. In the same way, calculus has a real world context in which the objects of study involve the rate of change of variable quantities (differentiation), the accumulation of growth (integration) and the relationship between them (the Fundamental Theorem).

The work of Newton and Leibniz moved us into a new realm by providing a mechanical method for calculating rates of change and cumulative growth. Thus calculus can be seen as operating in both a physical real-world sense, the source of our perceptions of change and growth, and in a symbolic sense, through problem-solving employing the algorithms of differentiation and integration. It is therefore a combination of the *embodied* and *proceptual* modes of operation.

In the last century, with the growth of mathematical analysis the formal-axiomatic mode of operation was developed in which numbers are no longer represented only as points on a number line, but are elements of an axiomatic structure, a complete ordered field. This gives a new *formal-axiomatic* framework for the calculus as part of the broader theory of mathematical analysis.

Traditional calculus teaching has focused on the graphical ideas of rate of change and cumulative growth, and the symbolic manipulation of the rules of calculus in differentiation and integration. The initial stages usually begin with informal ideas of the limit concept in geometric, numeric and symbolic form. It thus inhabits a combination of embodied and proceptual worlds, although the embodied world aspects are largely represented by static pictures rather than dynamic movement.

The arrival of the computer gives new possibilities: it has a graphical interface which allows the user to interact in a physical way by pointing, selecting and dragging objects onscreen to extend the embodied context of real-world calculus. Symbol manipulators such as Mathematica, Maple and Derive have the capacity to carry out the algorithms of the calculus on behalf of the user. However, these applications have a largely symbolic interface, producing graphic output on the screen, but with little embodied input. I contend that to give the calculus a physical human meaning, we should take advantage of an enactive interface which is now possible, and rethink the calculus to expand the standard graphic and symbolic modes of thought to take advantage of the full embodied mode on the one hand and to consider how this can lay the basis of a formal mode of thought for those students who will benefit from further study. Each mode brings its own viewpoint and its own mechanism for establishing truth and we continue our quest by considering each of these in turn.

4. Different Warrants for Truth in Each World

The three worlds of meaning have quite different ways of establishing truth. The **embodied world** is a world of *sensory* meaning. Its warrant for truth is that things behave predictably in an expected way.

The **proceptual world** is the familiar traditional world of calculus where calculations can be made (both arithmetic and algebraic). A graph has a slope (derivative) or an area (integral) because you can *calculate* it.

The **axiomatic world** is a world where explicit axioms are assumed to hold and definitions are given formally in terms of quantified set-theoretic statements. A function has derivative or integral because you can *prove* it.

If a computer is used, then the software can be programmed in a manner that supports these various modes. For instance, the *Visual Calculus* software programmed by Teresinha Kawasaki enables a graph to be magnified and moved under enactive control so that the user may zoom in to *see* the graph is *locally straight* and move the window along the graph to *feel* the changing slope of the graph (figure 5).

The embodied mode does not *prove* things are true in a mathematical sense, but it has the potential of building meaning far beyond traditional symbolic calculus. It is my belief that calculus software should be programmed to enable the user to explore not just nice smooth graphs, but graphs with corners, or more wrinkled graphs where the

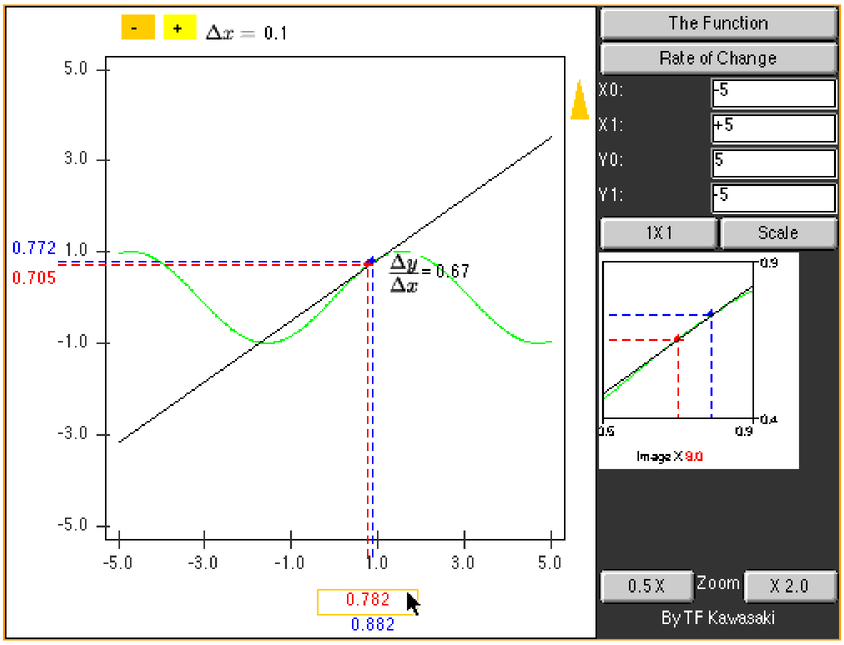


Figure 5: Dragging the view-point along the graph to see the changing slope of a locally straight graph.

slope varies wildly. In this way an embodied approach can give a meaningful foundation for the most subtle of ideas of analysis. These ideas are currently omitted from most current calculus reform courses, which focuses mainly on the workings of regular functions. I ask how students can be expected to see the need for *proof* in a formal sense when they have no experience of what can go wrong in a meaningful context. My method allows students to *see* functions that are clearly *nowhere* locally straight, when classically trained students have no mental image as to what it means for a function to be non-differentiable.

5. AN EMBODIED APPROACH TO THE CALCULUS

An embodied approach to the calculus focuses on fundamental perceptual ideas before introducing any symbolism. It is *not* an approach that begins with formal ideas of limits, but with embodied ideas of graphical representations of functions. Nor is it an approach based *solely* on real-world applications although these are natural components of the total picture. It must encompass sensory ideas of the *mathematics* as well as sensory ideas of the applications. Each real world application involving say length, area, velocity, acceleration, density, weight etc has specific sensory perceptions that are *in addition* to the ideas of the calculus and these may cloud the underlying mathematics. For instance, if we build on the idea that the slope of a time-distance graph is a velocity, and the slope of a time-velocity graph is an acceleration, then we focus on the embodied senses of distance, velocity and acceleration rather than on the simpler underlying mathematics that each is obtained from the previous one as the slope of its graph.

The central idea of an embodied approach to the calculus builds on interaction with the physical picture of the graph of a function. It is important to emphasise that these functions involve variables that are *numbers*. The slope of such a graph is a variable *number*, the area under the graph is a *number* and slopes and areas themselves have graphs that are numerical quantities. Thus we may plot the graphs of the derivatives and ant-derivatives *on the same axes* if we so desire. In this way we may, for example, study the graphs of 2^x and 3^x to see how they have the same shape as their slope functions and seek a number *e* such that the slope of e^x is again e^x.

An embodied approach to the calculus is at its best when it links into the related world of symbolism, with its numeric calculations and algebraic manipulations to give the symbolic procedures of differentiation to calculate the slope of a graph. The derivative of a function is again a function, and (if this derivative is also locally straight) it can be differentiated again and again.

Where appropriate, I seek to motivate ideas in ways that can later be turned into axiomatic proofs. However, I see the theory of calculus fundamentally living in the two worlds of embodiment and proceptual symbolism.

In the remainder of this paper, I draw heavily on examples from my plenary lecture to the *Fifth Asian Technology Conference in Mathematics* (Tall, 2000).

6. COMPUTER ENVIRONMENTS FOR COGNITIVE DEVELOPMENT

Two concepts are useful in building an embodied approach to mathematics:

- a *generic organiser* is an environment (or microworld) which enables the learner to manipulate *examples* and (if possible) *non-examples* of a specific mathematical concept or a related system of concepts. (Tall, 1989.)

- a *cognitive root* (Tall,1989) is a concept which is (potentially) meaningful to the student at the time, yet contain the seeds of cognitive expansion to formal definitions and later theoretical development.

A cognitive root is usually an embodied concept. For instance, the notion of local straightness is a cognitive root for differentiation. This was first demonstrated in the program *Magnify* shown in figure 6 (Tall, 1985b), an early pre-cursor of the much more enactive *Visual Calculus* software of Kawasaki.

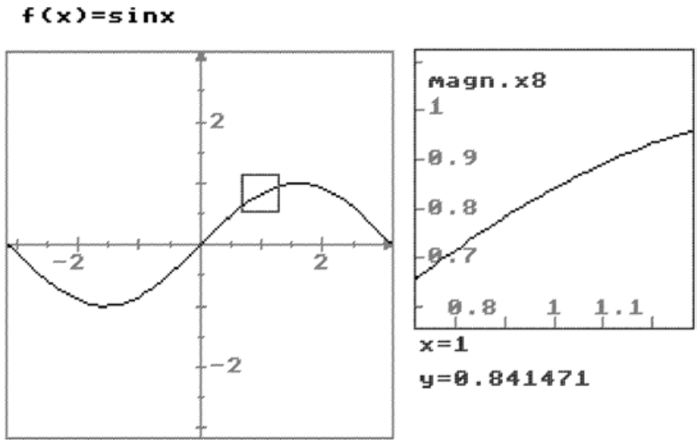


Figure 6: magnifying a graph that looks less curved when magnified and, highly magnified looks 'locally straight'

The program *Magnify* is a generic organizer for the notion of local straightness. However, unlike almost all approaches to the calculus, which deal only with formulae for functions that are differentiable, this includes functions such as the *blancmange function* (figure 7), which is *nowhere* locally straight, thus fulfilling the need for a generic organizer to focus on *non-examples* as well as examples.

The blancmange function $bl(x)$ is the sum of saw-teeth:

$s(x) = \min(d(x), 1 - d(x))$, where $d(x) = x - \mathrm{INT}x$ is the decimal part of x,

$s_n(x) = s(2^{n-1}x) / 2^{n-1}$,

and the function itself is:

$bl(x) = s_1(x) + s_2(x) + s_3(x) + \ldots$

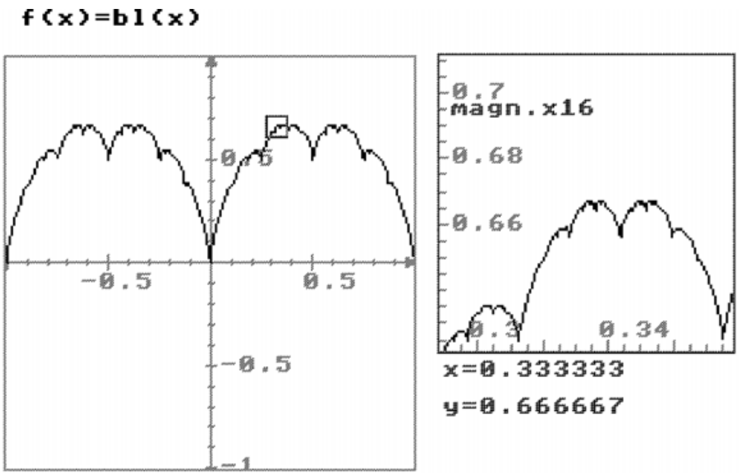


Figure 7: a graph which nowhere looks straight

If we consider the 'nasty' function:

$n(x)=bl(1000x)/1000$

then it is a tiny blancmange which is everywhere smaller than $\frac{1}{1000}$. The two graphs $g(x) = \sin x$ and $f(x) = \sin x + n(x)$ differ by less than $\frac{1}{1000}$ and yet one is locally straight everywhere and one is locally straight nowhere! (Figure 8.)

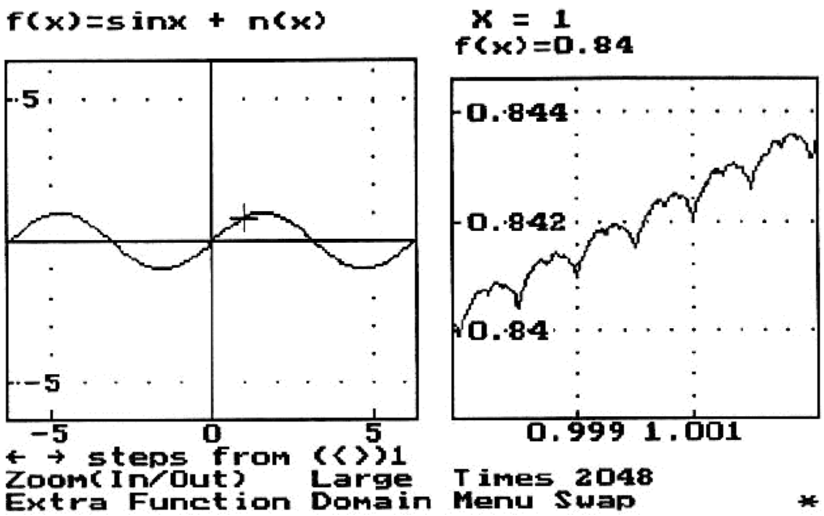


Figure 8. A 'smooth-looking curve' that magnifies 'rough'.

This simple picture has an amazing consequence. If $f(x)$ is any differentiable function, then $f(x)+n(x)$ is *nowhere* differentiable, but looks exactly the same at one scale. The distinction only appears under higher magnification. Thus the software reveals its own limitations. A function may *look* straight in a given picture. What matters is that it must look straight at *all* magnifications. In this sense the generic organiser *Magnify* contains within it the visible evidence of its own limitations. It therefore has the potential to focus on the need for a more sophisticated mathematical theory.

7. EMBODIED LOCAL STRAIGHTNESS

Having stated categorically that I think that the formal limit notion is an entirely wrong place to begin the calculus (although it is precisely the right place to begin an axiomatic development in analysis), it is necessary to explain in what way a 'locally straight; approach to the calculus should begin.

Using appropriate software, a range of experiences can be arranged which lead to an embodied insight into calculus concepts. These include:

a) zoom in under enactive control to sense the lessening curvature and establish local straightness by sensing it 'happen'.

b) drag a magnification window along a locally straight graph to see its changing slope.

c) explore 'corners' (with different left and right slopes) and more general 'wrinkled' curves to sense that not all graphs are locally straight.

d) use software to draw the slope function to establish visual relationship between a locally straight function and its slope expressed symbolically.

e) Consider visual slope functions of sin*x*, cos*x*, and 'explore' the minus sign that arises in the derivative of cosx, which is –sin*x* and is visibly the graph of sin*x* reflected in the *x*-axis.

f) Explore 2^x, 3^x and vary the parameter k in k^x to find a value of k such that the slope of k^x is again k^x.

8. EMBODIED LOCAL STRAIGHTNESS AND MATHEMATICAL LOCAL LINEARITY

There are great cognitive and mathematical differences between local straightness and local linearity. 'Local straightness' is a primitive human perception of the visual aspects of a graph. It has global implications as the individual looks *along* the graph and sees the changes in gradient, so that the gradient of the whole graph is seen *as a global entity*.

Local linearity is a *symbolic linear approximation* to the slope *at a single point* on the graph, having a linear *function* approximating the graph at that point. It is a *mathematical* formulation of slope, taken first as a limit at a point *x*, and only then varying *x* to give the formal derivative as a function. Local straightness *remains at an embodied level* and links readily to visualising the slope of a given graph. Local linearity focuses on the 'best' local linear approximation expressed symbolically.

For instance, the derivative of cos$x$ is seen to be equal to –sin$x$ in the embodied mode because ‘it is the graph of sin$x$ upside down’ (figure 9). This does not mean that this is a *proof* in a formal sense. However, the symbolic proof of the derivative by finding the limit of (cos(x+h)–cos$x$)/h as h tends to zero is rarely convincing to students in my experience. In practice, it is based on the use of trigonometric formulae which are not ‘proved’ symbolically at this stage and on an *ad hoc* argument (usually presented

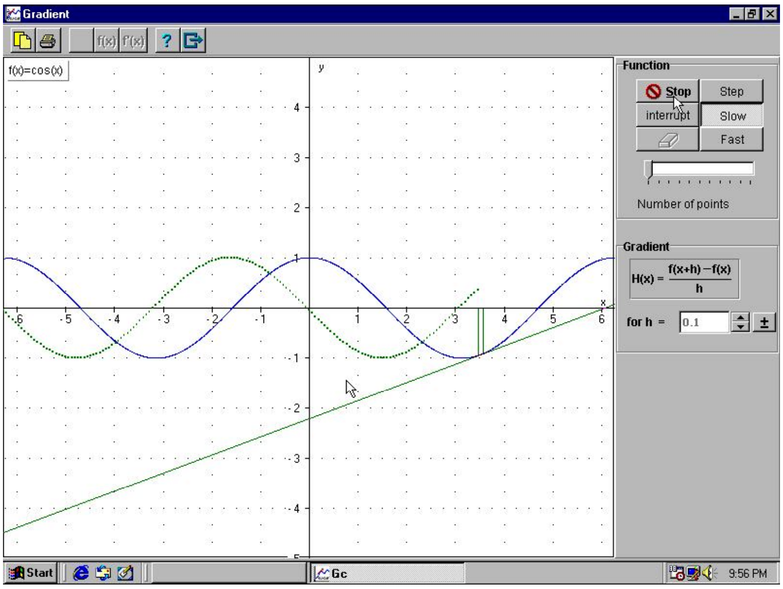


Figure 9: The gradient of cos*x* (drawn with Blokland et al, 2000).

visually) that sin$x$/x tends to 1 as x tends to zero. I would contend that an embodied experience with meaning is more appropriate at this point. The time for the more manipulative and formal aspects can come at a later stage when they have more chance of making sense.

My own belief is that a locally straight approach is an option that is appropriate for the widest spectrum of students. It is:

- an ‘embodied approach’ which can be supported by enactive software to give it a human meaning.
- it can be linked directly to the usual numeric and graphic derivatives.
- it fits exactly with the notion of local straightness, which can be linked to local linearity (for those for whom it is important).
- it involves visual and symbolic ideas which can later be linked to formal analysis in either standard, or non-standard, form.

9. LOCAL LINEARITY AND THE SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

As an example of the distinction between the embodied notion of local linearity and the symbolic-proceptual notion of local straightness, consider the inverse problem to the finding of a derivative. Mathematicians for many generations have used the fundamental theorem of the calculus to declare that the inverse of differentiation is integration. This is a conceptual blunder. The inverse of finding the slope of a function is to be given the slope of a function and to be asked how to find a function with this slope. The inverse of differentiation is *anti-differentiation*: given the derivative, find the function. In traditional calculus this is given in terms of linear differential equations in the form

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y).$$

In traditional symbolic calculus this is attacked by a rag-bag of specific techniques suitable for a small number of types of differential equation. The meaning is (usually) lost. But the *embodied* meaning is plain. It is this:

> If I point my finger at any point (x,y) in the plane, then I can calculate the slope of the solution curve at that point as $m = F(x,y)$ and draw a short line segment of gradient *m* through the point (x,y).

This is a perfect opportunity to design a generic organiser on the computer. Simply write a piece of software so that when the mouse points at a point in the plane, a short line segment of the appropriate gradient is drawn, and as the mouse moves, the line segment moves, changing its gradient as it goes. As the solution curve is locally straight—it has a slope given by the equation—this line segment is *part* of the solution (at least, it *approximates* to part of a solution). The software allows the segment to be left in position by clicking the mouse. Hence by pointing and clicking, then moving the line segment until it fits with the end of the curve drawn so far, an approximate solution curve can be constructed by sight and hand-movement—an embodied link between a first order differential equation and its solution. (See Figure 10.)

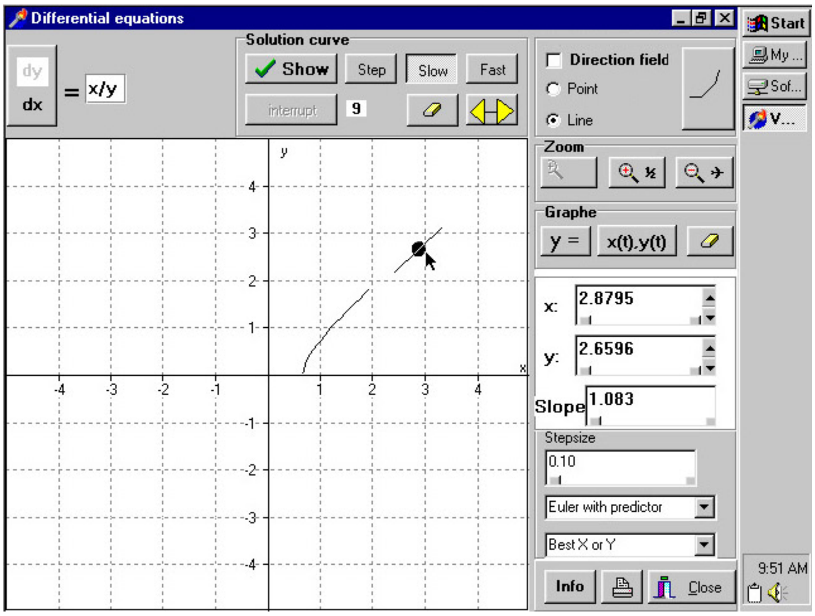


Figure 10: A generic organiser to build a solution of a first order differential equation by hand, (Blokland *et al*, 2000).

10. CONTINUITY

Tall (1985a) showed how the notion of continuity can be illustrated for a real function. All that is required is to stretch the graph much more horizontally than vertically. In

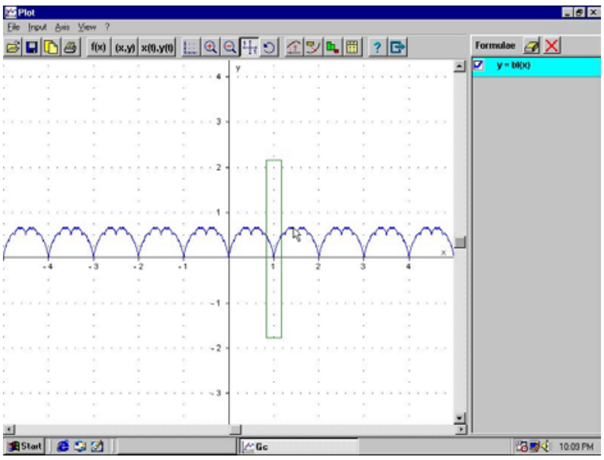


Figure 11: The blancmange graph and a rectangle to be stretched to fill the screen

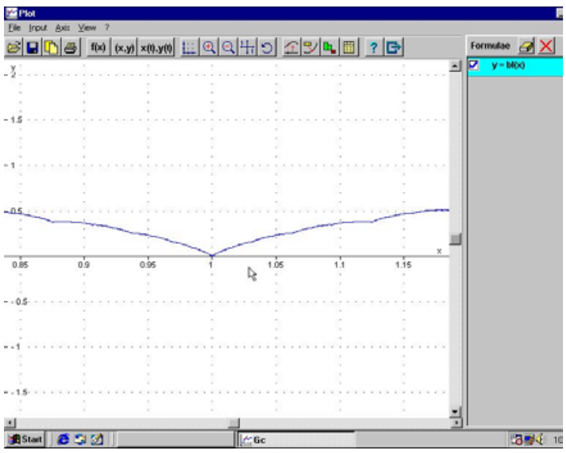


Figure 12: The blancmange function being stretched horizontally.

figure 11 we see the blancmange function with a rectangle that is tall and thin. This is stretched to give the picture in figure 12. It can be seen that the graph 'pulls flat' and that further stretching will flatten it horizontally. The translation from this embodied notion of continuity to the formal definition is not very far. Imagine the graph is drawn in a window with $(x_0, f(x_0))$ in the centre of the picture, in the centre of a pixel height 2ε. Suppose it 'pulls flat". Then the graph lies in a horizontal row of pixels and if the window is now of width 2δ, we have: $|x - x_0| < \delta$ implies $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ [QED].

11. THE EMBODIED NOTION OF AREA

In the embodied world, the area under a continuous curve can be *seen* and calculated approximately by covering the area with squares and counting them. (Figure 13.)

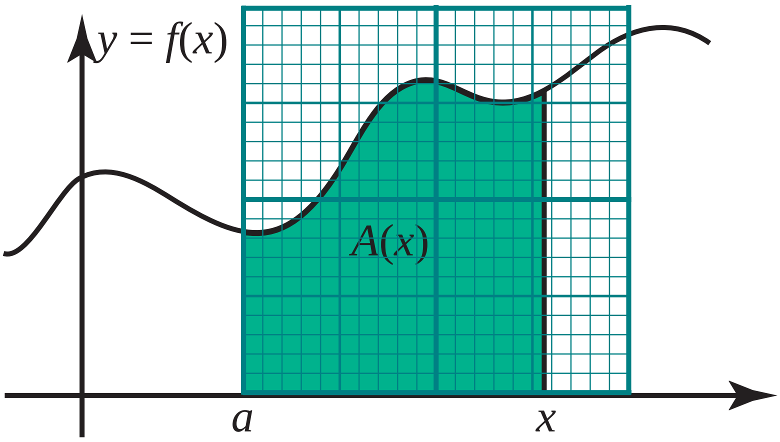


Figure 13: Measuring the area under a graph with a grid

The area from a to x under the graph is a function $A(x)$ called the 'area-so-far' function. In the practical embodied world of physical measurement, by using small enough squares, a numerical value of the area can be found to a degree of accuracy limited only by the accuracy of drawing and measuring.

Just as the cognitive root of 'local straightness' can be used to lead to more sophisticated theory, so the embodied notions of 'area' and 'area-so-far' can support Riemann and even Lebesgue integration. The use of technology to draw strips under graphs and calculate the numerical area is widely used. With a little imagination, and well-planned software, it can be used to give insight into such things as the sign of the area (taking positive and negative steps as well as positive and negative ordinates) and to consider ideas such as how the notion of continuity relates to the notion of integration. For instance, figure 14 shows the area under sin$x$ from 1 to 1.001 with the graph stretched horizontally. It shows that the increase in area is approximately f(x) times the change in x. Thus the ratio of change in area to change in x approximates to f(x), which gives insight into the fundamental theorem of calculus that the rate of change of area is the original function.

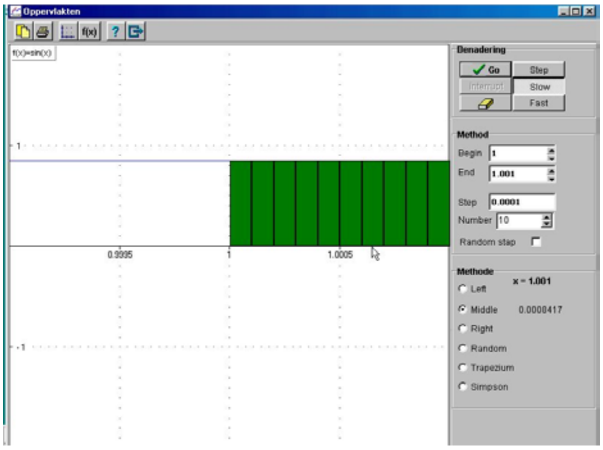


Figure 14: Area under sinx from 1 to 1.001 stretched horizontally

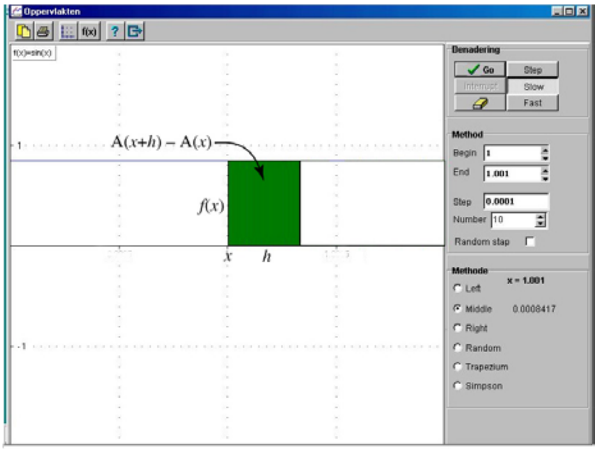


Figure 15: Towards the Fundamental Theorem of Calculus

12. FORMALIZING THE EMBODIMENT OF THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS

The embodied idea of continuity leads naturally to a formal proof of the Fundamental Theorem. Let $A(x)$ be the area under a continuous graph over a closed interval $[a,b]$ from a to a variable point x. In the embodied mode, the area 'exists' because it can be seen and calculated as accurately as required. Continuity means the graph 'may be stretched horizontally to "look flat".'. (Figure 15.) This means that:

> Given an $\varepsilon > 0$, and a drawing in which the value $(x_0, f(x_0))$ lies in the centre of a practical line of thickness $f(x_0) \pm \varepsilon$, then a value $\delta > 0$ can be found so that the graph over the interval from $x_0 - \delta$ to $x_0 + \delta$ lies completely within the practical line.

Then (for $-\delta < h < \delta$), the area $A(x+h)-A(x)$ lies between $(f(x)-\varepsilon)h$ and $(f(x)+\varepsilon)h$, so (for $h \neq 0$),

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \text{ lies between } f(x)-\varepsilon \text{ and } f(x)+\varepsilon.$$

For $|h| < \delta$, we therefore have:

$$\left|\frac{A(x+h)-A(x)}{h}\right| < \varepsilon.$$

As ε is arbitrary, this shows that the embodied idea of continuity leads to a corresponding formal definition and to a formal proof of the Fundamental Theorem of Calculus.

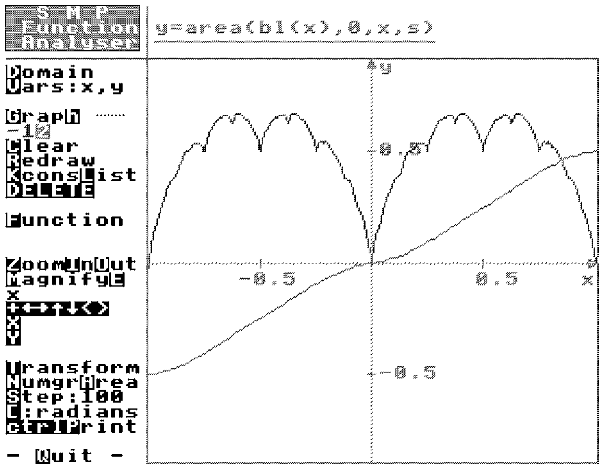


Figure 16: the area function of the blancmange and the derivative of this area (from Tall, 1991b)

13. Further Embodied Insight into Formal Theory

I conclude this paper by showing a few visual examples of various sophisticated concepts in mathematical analysis.

The blancmange function is continuous (Tall, 1982), and therefore its area function is differentiable. Figure16 shows the numerical area function for the blancmange and the *gradient of the area function*. This looks like the original graph. Of course it does, because the derivative of the area is the original function again.

Another much more interesting situation is to consider the 'area' under a function which has a number of discontinuities. The function *x*–int(*x)* is discontinuous at each integer and is continuous everywhere else. The area function is continuous everywhere

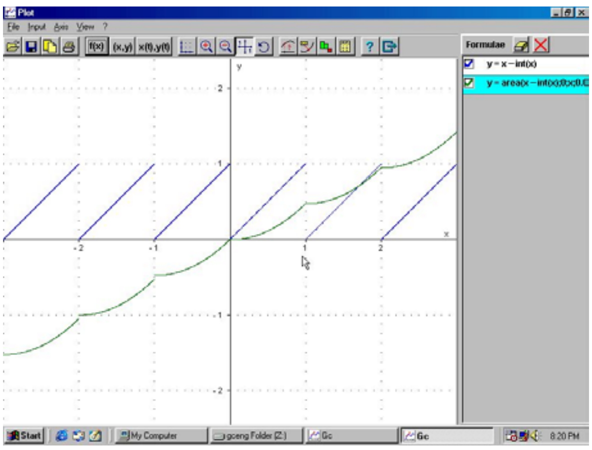


Figure 17: the area function for ***x–int*(*x*)**

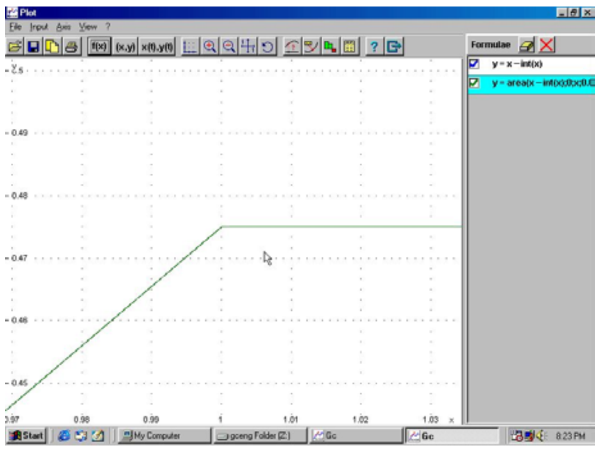


Figure 18: The area function magnified

and is also differentiable everywhere that the original function is continuous (figure 17).

However, at the integer points, if the graph of the area function is magnified, it can be seen to have a corner at each integer point, because here the area graph has different left and right gradients (figure 18). If you look at the change in the area under the function you may be able to *see* why this happens.

It was an ambition of mine to draw functions such as *f(x)=x for x rational, f(x)=1–x for x irrational.* The fact that this was impossible for numerical calculations on a computer (which are all rational) did not deter me. In Tall (1993), I found a method that enabled me to make such a model.

The Ancient Greeks used an algorithm to represent any (real) number x in terms of rational approximations. It begins by finding the integer part n, and decimal part d:

$$x = n + d \quad (\text{where } 0 \le d < 1).$$

If d=0, then x is a (rational) integer. If not, the subtle part is to note that its reciprocal $1/d$ is greater than 1, so we can take the integer part again and write

$$1/d = n_2 + d_2 \ (\text{where } 0 \le d_2 < 1).$$

By continuing this process, the equations can be unravelled to give closer and closer rational approximations to any number x. For instance,

$$\pi = 3 + d \ (\text{where } d = 0.14159...)$$
$$1/d = 7.0626...$$

and so a good approximation to π is

$$\pi = 3\tfrac{1}{7} = \tfrac{22}{7}.$$

If the process is applied to a rational number such as $\tfrac{22}{7}$, then the remainder eventually becomes zero:

$$\tfrac{22}{7} = 3 + \tfrac{1}{7}$$
$$1/(\tfrac{1}{7}) = 7+0$$

and the process terminates.

The process gives a sequence of fractions, r_1, r_2, ... which tend to the real number x. If x is rational, the sequence is eventually constant, equalling x expressed in lowest terms. If x is irrational, it is easy to see that the numerators and denominators of r_n must grow without limit. (For if the denominators were all less than an integer N, then the sequence $N!r_n$ would be a sequence of *integers* tending to $N!x$, so the terms must eventually be a fixed integer, implying $N!x$ is an integer, contradicting the fact that x is irrational.)

This gives a method of distinguishing between rationals and irrationals:

> Compute the continued fraction expansion of a number x, and if the rational approximations have denominators that grow without limit, then x is irrational, otherwise it is rational.

Working in the practical world of computers there are technical difficulties. Since the process involves taking reciprocals, if d is small, then $1/d$ is huge. If d should be zero, but errors make it tiny, then taking the reciprocal causes the method to blow up. The practical way out is to cease when the process gives a decimal part smaller than a specified error *e*, and check if the size of the denominator of the approximating fraction is bigger than a specified (large) number *K*.

I therefore formulated the following technical definition to simulate the notions of rational and irrational in a finite computer world:

> **Definition**: A real number *x* is said to be *(e,K)-rational* if, on computing the continued fraction approximation to *x*, the first rational approximation within *e* of *x* has denominator less than *K*, otherwise *x* is said to be *(e,K)-irrational*.

The pseudo-code, returning TRUE for pseudo-rationals and FALSE for pseudo-irrationals, translates easily to most computer languages, is as follows:

```
DEFINITION rational(x,e,K)
r=x : a1=0 : b1=1 : a2=1 : b2=0
REPEAT
        n=INTr : d=r–n : a=n*a2+a1 : b=n*b2+b1
        IF d<>0 THEN r=1/d : a1=a2 : b1=b2 :a2=a : b2=b
UNTIL ABS(a/b–x)<e
IF b<K THEN return TRUE ELSE return FALSE
```

Sensible values for *e* and *K* are, say, $\square = 10^{-8}$, $K = 10^{\square}$ for single precision arithmetic, or $\square = 10^{-16}$, $N = 10^{\square}$ for double precision.

Such an algorithm allows us to subdivide numbers into two disjoint sets numerically, which I called ‘pseudo-rational’ and ‘pseudo-irrational’. In Tall (1991) I programmed a routine plotting random points, which were mainly ‘pseudo irrational’ and a second routine that plotted mainly ‘pseudo-rationals’.

Figure 19 shows pictures of the function which is *x* on the rationals and $1–x$ on irrationals together with a graph for the area ‘under the graph’ from 0 to *x*. This uses the mid-ordinate rule with a fixed with (rational) step. It encounters mainly (pseudo-) rationals where $f(x)=x$, so the resulting area function approximates to $x^2/2$. When the area is calculated using a random step-length and a random point in the strip to calculate the area, it encounters mainly (pseudo-) irrationals where the function has values $f(x) = 1–x$. The area function drawn in this case reflects the latter formula (figure 20). (Here I have drawn several plots of the area curve. Because of the errors calculating pseudo-rationals and irrationals, there are small discrepancies with the random area that is slightly different each time.)

I used this software to discuss the area under such graphs (Tall, 1993). Students who were not mathematics majors and who would normally not cope very well in an analysis course were able to discuss this example intelligently, noting that ‘a random decimal is highly unlikely to repeat, so random decimals are almost certainly irrational’. This led to a highly interesting discussion on the ‘area’ under ‘peculiar’ graphs which began to move the thinking on from Riemann integration to Lebesgue integration. It was only a glimpse of the ideas for these students, but it was a glimpse that they could empathise with. It shows how the mathematical mind can gain insights from visuo-spatial ideas in areas where the formal theory would be far too abstruse. But, for some of those who later do go on to the formal theory, visualization can provide a powerful cognitive foundation.

14. REFLECTIONS

In a recent review of the use of technology in calculus, Tall, Smith and Piez (in press) found that many projects (such as the *Harvard Calculus* and *ProjectCalc*) based their ideas on the use of computer representations with various graph programmes and symbol manipulators. However, as we saw earlier, such curricula did not in general consider the underlying embodied ideas of the type presented here. One might wonder why. In my plenary talk to the International Congress of Mathematics Education in 1996 (Tall, 1998), I noted that the sequence in which technology developed caused the pioneers to switch successively to new facilities. The sequence included:

- Programming numerical algorithms: (pre-1980),
- Graphics: (early 1980s), e.g. using graph-plotting programs,
- Enactive control (1984) allowing interactive exploration (e.g. Cabri),
- Computer algebra systems (early 80s, generally available in the late 80s),
- Personal portable tools (1990s) (e.g. TI-92, PDAs, portables, iBooks with wireless etc),
- Multi-media (1990s),
- The World Wide Web (1990s).

Constant innovation caused new ideas to be implemented. Mathematicians naturally wanted the latest and “best” tools. Thus new tools took over before the use of earlier tools had been fully worked out. The fledgling use of numeric programming and graphic visualisation was overtaken by the power of computer algebra systems at a time when the power of an enactive interface was still to be fully understood. Now we have had time for reflection I suggest that an embodied approach provides a particularly human foundation for ideas in calculus and analysis that can be a study in itself but can lead on naturally to proceptual-symbolic calculus and formal-axiomatic analysis.

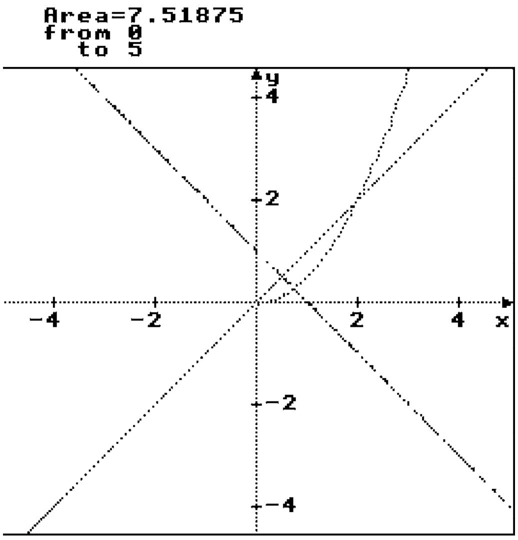


Figure 19: The (pseudo-) rational area

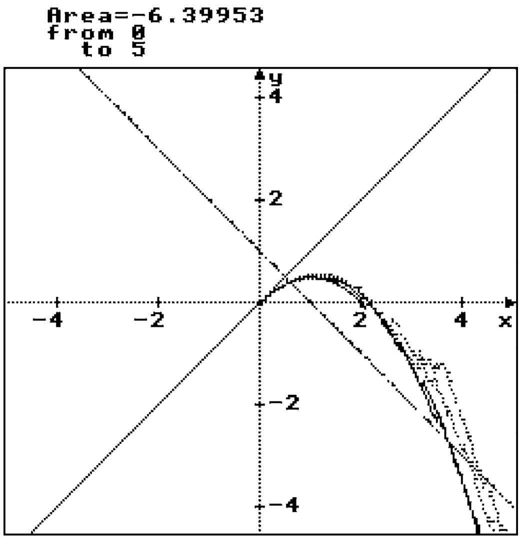


Figure 20: The (pseudo-) irrational area

15. SUMMARY

In this presentation I have described three distinct worlds of human operation, the embodied mode based on human perception and sensation, enhanced by verbal theorising and communication, the proceptual-symbolic world of arithmetic, algebra and functions in calculus, and the formal world of mathematical analysis. I have made the case that a combination of embodied and proceptual operation is appropriate for the calculus and the formal mode can be postponed to a later study of analysis. However, I have also been able to show that extremely deep ideas in mathematical analysis have a cognitive foundation in the embodied mode in a manner which is meaningful to a much broader spectrum of students.

I reported how the use of local straightness and visual ideas of area can be cognitive roots that are foundational in building an embodied understanding of the calculus, but have the potential to grow naturally into the formal theory of analysis.

In particular, I have presented arguments in support of the following hypotheses:

- Local straightness is an embodied foundation (cognitive root) for the calculus.
- The local slope of the graph as rate of change is an embodied foundation (cognitive root) for the slope function (derivative).
- Finding a graph given its slope is an embodied foundation (cognitive root) for differential equations. This is the true inverse operation to differentiation.
- The notion of area under a graph is an embodied notion that can be calculated to suitable accuracy by embodied methods.
- Local flatness (stretching a graph horizontally) is a cognitive foundation for continuity.
- The embodied notion of continuity leads naturally to both an embodied idea and a formal proof of the fundamental theorem of calculus showing that the derivative of the area-so-far function is the original function.

In short, an embodied approach to the notion of change and rate-of-change of quantities represented by graphs has the necessary conceptual power to lead to a potentially meaningful theory of:

- proceptual symbolism in calculus **and**
- *axiomatic proof in analysis.*

References

BIGGS, J. & COLLIS, K. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: the SOLO Taxonomy*. New York: Academic Press.

BLOKLAND, P., GIESSEN, C, & Tall, D. O. (2000). *Graphic Calculus for Windows*. (see www.vusoft.nl.)

BRUNER, J. S. (1966). *Towards a Theory of Instruction*. Cambridge: Harvard.

HUGHES HALLETT, D. (1991). 'Visualization and Calculus Reform'. In W. Zimmermann & S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, MAA Notes No. 19, 121-126.

LAKOFF, G. and JOHNSON, M. (1999). *Philosophy in the Flesh*. New York: Basic Books.

LAKOFF, G. and NÚÑEZ, R. E. (2000). *Where Mathematics Comes From*. New York: Basic Books.

NÚÑEZ, R. E., EDWARDS L. D, & MATOS, J. F., (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics* 39, 45–65, 1999.

PINTO, M. M. F. (1998).

TALL, D. O., (1982). The blancmange function, continuous everywhere but differentiable nowhere, *Mathematical Gazette*, 66, 11–22.

TALL, D. O. (1985a). Understanding the calculus, *Mathematics Teaching*, 110, 49–53.

TALL, D. O. (1985b). *Graphic Calculus* (for the BBC Computer, now superseded by Blokland et al (2000) for windows, above.

TALL, D. O. (1989). Concept Images, Generic Organizers, Computers & Curriculum Change, *For the Learning of Mathematics*, 9,3, 37–42.

TALL, D. O. (1991). *Function Analyser*. Cambridge University Press. (Software for the Archimedes computer, now superseded by Blokland et al (2000) for PC.)

TALL, D. O. (1993). Real Mathematics, Rational Computers and Complex People. In Lum, L. (ed.), *Proceedings of the Fifth Annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching*, 243–258.

TALL, D. O. (1998). Information Technology and Mathematics Education: Enthusiasms, Possibilities & Realities. In C. Alsina, J. M. Alvarez, M. Niss, A. Perez, L.

Rico, A. Sfard (Eds), *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education*, Seville: SAEM Thales, 65-82.

TALL, D. O. (2000). Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, Jen-Chung Chuan (Eds), *Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics*, Chiang Mai, Thailand (pp. 3–20). ATCM Inc, Blackwood VA..

TALL, D. O. (2002). Natural and Formal Infinities. *Educational Studies in Mathematics* (in press).

TALL, D. O, GRAY, E M., ALI, M., CROWLEY, L., DEMAROIS, P., MCGOWEN, M., PITTA, D., PINTO, M., THOMAS, M., &D YUSOF, Y. (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 1, 80–104.

CAPÍTULO 2

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 29:38.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

UTILIZAÇÕES DIFERENCIADAS DE RECURSOS COMPUTACIONAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA (CAS, DGS E CALCULADORAS GRÁFICAS)

Yuriko Yamamoto Baldin

Departamento de Matemática
Universidade Federal de São Carlos
13565-905, São Carlos, SP
endereço eletrônico: dyyb@power.ufscar.br

Resumo: *Apresentamos neste artigo uma proposta de classificação de utilização de recursos computacionais nas salas de aula de matemática, e citamos alguns exemplos de uso de tecnologia como recurso didático, distinguindo os programas de computação algébrica, de geometria dinâmica e calculadoras gráficas. O objetivo é apontar diferentes maneiras de utilizar programas computacionais numa sala de aula, para auxiliar um professor na escolha de atividades e de programas ao planejar uma aula com a utilização de informática, assim como salientar a necessidade de sólido conhecimento matemático requerido ao planejar atividades com uso de informática.*

Palavras-chave: *Informática no Ensino, Novas Metodologias.*

Abstract: *In this article we propose a classification of different ways that computational technology can be used in the classrooms, describing some examples of didactical use of technology, distinguishing programs of computer algebra systems, of dynamic geometry and graphic calculators. The main objective of this paper is to point out different ways of use of educational software as a communication tool in a class, in order to help a teacher to choose right activities and programs suited to his/her teaching plans. Moreover, this paper aims to highlight the need of strong mathematical background in teacher preparation courses, for this is required when a teacher plans the classes with the use of technology.*

Key words: *Technology in Teaching, New Teaching Methodologies.*

1. INTRODUÇÃO

A possibilidade de introduzir recursos tecnológicos no cenário de ensino em vários níveis surgiu de maneira bastante rápida, e as alternativas de sua utilização são tão amplas que uma organização de sua utilização, assim como uma pesquisa de metodologias, se torna necessária para poder compreender a importância e as conseqüências no ensino, em particular de Matemática. Apesar das possibilidades, a dificuldade encontrada pelos usuários potenciais nas escolas é bastante grande por envolver mudanças radicais no sistema tradicional de ensino. Enquanto os avanços científicos estavam restritos ao ambiente acadêmico e a sociedade desfrutava do progresso apenas através de produtos resultantes dos avanços tecnológicos, não se imaginava uma possibilidade de mudança tão rápida do cenário de ensino, em que o professor e o aluno têm a oportunidade de colocar as mãos nos recursos computacionais para construir conhecimento. Isto torna a tarefa de formar novos profissionais uma grande responsabilidade para as escolas de licenciatura, assim como implica a necessidade de cursos de educação continuada para os professores na ativa.

Podemos citar como principais alternativas que os recursos de informática trazem aos sistemas tradicionais de ensino:

- ensino à distância, em que se incluem cursos-on-line, tele-cursos, internet;
- ensino interativo, em que se incluem teleconferências, cursos-on-line;
- ensino com informática nas salas de aula.

Dentre as alternativas acima, o ensino com informática nas salas de aula é o tema que abordamos aqui, por ser o mais importante nas mudanças do comportamento do professor e do aluno frente ao processo de ensino-aprendizagem. Não vamos analisar os recursos disponíveis através da rede de comunicações como televisão, rádio, vídeos e internet, por constituir outro tema e merecer discussão separada.

Neste artigo, apresentamos uma classificação de utilização diferenciada de recursos computacionais na sala de aula de Matemática considerando a Informática como um veículo de comunicação, com o objetivo de esclarecer o professor, usuário da tecnologia, sobre o papel que os diferentes recursos podem exercer, para nortear a escolha de atividades e de recursos de informática. Como uma conseqüência natural, enfatizamos a necessidade de enaltecer o conteúdo matemático nos currículos de licenciatura de Matemática, para formar professores preparados para compreender o potencial e a limitação da tecnologia, e ser capazes de utilizar com sabedoria os novos recursos junto com os tradicionais.

2. A INFORMÁTICA E O PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Dentre as diferentes situações em que a Informática pode contribuir para o cenário de ensino, sua utilização no contexto de ensino de Matemática é particularmente motivada por algumas facilidades que a Informática pode trazer: capacidade computacional, visualização gráfica, cálculos algébricos, descoberta e confirmação de propriedades, possibilidades de executar experimentos com coleta de dados e modelagem de problemas, especulações, etc.

Alguns dos modernos recursos computacionais apresentam qualidades que os caracterizam como veículos de comunicação através de suas propriedades de visualização, capacidades de manipulação, de movimentação (animação), de indução de raciocínio lógico, de programação de algoritmos, etc.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (cf. [PCNEM], págs. 254 e 259) e também muitos documentos de diversos países destacam a necessidade de consolidar o perfil de um professor preparado para os tempos em que a tecnologia permeia a vida cotidiana. Por exemplo, podemos encontrar em [Cohen], que faz uma análise do documento The Mathematical Education of Teachers (MET) (cf. [MET]), uma lista de qualidades recomendadas para o perfil de um professor eficiente de Matemática (em nível básico): a) ser capaz de enxergar a matemática em questões matematicamente não sofisticadas; b) ser capaz de enxergar semelhança de estruturas em problemas aparentemente diferentes; c) saber trabalhar com representações diferentes de um problema; d) saber selecionar e usar modos apropriados de análise (mental, papel + lápis, tecnologia); e) disposição para aprender novos conteúdos e técnicas.

Sobre a importância da tecnologia no desenvolvimento profissional de professores, Oldknow (cf. [Oldknow]) diz que "... a utilização efetiva da tecnologia de computação pessoal como suporte ao currículo de matemática está nas mãos de professores. Eles precisam conhecer mais sobre a tecnologia do que contêm os manuais de programas, materiais didáticos ou outras fontes de informações".

Para que as recomendações sejam colocadas em prática, as mudanças metodológicas devem ser implementadas nas salas de aula e os cursos de formação de professores modernizados.

Observamos que cursos de treinamento de programas com exibição de exemplos executados apenas começam a tarefa de provocar mudanças, e eles não bastam para os professores se sentirem capazes de dominar a tecnologia como ferramenta didática.

3. Utilização Diferenciada de Recursos Computacionais

Para compreender como a informática pode ser utilizada como auxiliar de comunicação na tarefa de ensinar e aprender Matemática, apresentamos uma classificação da utilização de recursos computacionais no ensino de Matemática, conforme o papel exercido por professor e aluno como usuário da informática (cf. [Baldin, 2002]):

I) Numa aula expositiva tradicional: o *usuário ativo* da tecnologia é o <u>professor</u> que pode apresentar melhores exemplos, melhores ilustrações, modelagens de problemas com dados mais realistas;

II) Numa aula de laboratório: o *usuário ativo* é o <u>aluno</u>, e a tecnologia é auxiliar nos exercícios de fixação de conceitos, em atividades que enfatizam o raciocínio, que envolvem cálculos difíceis para lápis e papel, em atividades-experiências, modelagens e simulações, e também atividades de avaliação;

III) Numa aula diferenciada: os *usuários ativos* são ambos professor e aluno, desenvolvendo projetos, aulas interdisciplinares, trabalhos em equipe, jogos educativos, modelagens e simulações, resolução de problemas, verificações e demonstrações, etc.

A compreensão, propiciada pela tecnologia, das diferentes maneiras de comunicação entre o professor e aluno deverá auxiliar o planejamento de um professor que pretenda introduzir as ferramentas computacionais da sua escola nas suas aulas, em qualquer nível. Em [Baldin, 2002] apresentamos uma discussão mais detalhada de cada uma das categorias da classificação apresentada acima. No presente artigo iremos exemplificar o papel da tecnologia nesta classificação, através da descrição de uso de alguns programas computacionais numa aula de matemática.

Os chamados sistemas de computação algébrica (CAS) são programas que possuem a capacidade de efetuar com rapidez cálculos complicados e cálculos algébricos, construir gráficos bi e tridimensionais, e por conter funções ou pacotes de subprogramas que facilitam o estudo de vários tópicos, se tornam excelentes aliados para resolver equações difíceis para lápis e papel, enfrentar problemas não solúveis com métodos elementares, explorar com rapidez propriedades e visualizar gráficos de funções e objetos geométricos, etc. Alguns dos programas CAS mais conhecidos no Brasil são Maple, Mathematica e Derive. E recentemente as calculadoras gráficas como TI-92 estão começando a ser valorizadas por possuírem as propriedades de um CAS. No exterior estão sendo feitas muitas experiências que apontam para esta consideração. Por exemplo, a referência [Laughbaum (ed), 2000] apresenta uma coletânea de artigos selecionados sobre a tecnologia das calculadoras e a educação em ciências e matemática, sendo que o artigo [Waits-Demana] descreve com propriedade a transição do uso de CAS de computadores para calculadoras gráficas, no contexto de ensino. No Brasil, as experiências com calculadoras como ferramenta didática ainda não têm divulgação suficiente, mas os mini-cursos da autora sobre este tema, com as reações muito favoráveis do público, assim como as experiências bem sucedidas de utilização deste recurso nas salas de aula das escolas básicas que fizeram parte das atividades do Projeto Pró-Ciências (CAPES/FAPESP) da UFSCar no ano 2001, são indícios de que as calculadoras gráficas possuem potencial de CAS em nível básico. Confira também a referência [Baldin-Baldin]. A capacidade e as propriedades dos programas CAS foram responsáveis, em grande parte, pelo entusiasmo dos professores universitários em introduzir o computador como ferramenta didática nas salas de aula.

Comentaremos a seguir os programas dentro da classificação apresentada.

I - Utilização da tecnologia como auxiliar numa aula expositiva.

Os principais resultados sobre novas metodologias surgidas inicialmente, em função da presença da tecnologia, foram em grande parte devido a programas CAS utilizados como auxiliares nas aulas expositivas de Cálculo Diferencial e Integral, Equações Diferenciais, Geometria Analítica, Álgebra Linear, etc., sendo que a capacidade gráfica dos mesmos causou um salto de qualidade no desenvolvimento das teorias e interpretação de resultados na classe, assim como a possibilidade de apresentar e trabalhar a modelagem e a resolução de problemas com dados mais realistas. Exemplos de utilização neste sentido são as ilustrações clássicas de reta tangente ao gráfico, cálculos de integrais, gráficos de soluções e campo de direções de equações diferenciais, cálculos algébricos com matrizes, sistemas lineares e não lineares, estudo de aspectos geométricos de matrizes, ajuste de dados, etc. Entretanto, numa aula expositiva o principal usuário da tecnologia é o professor, que ganha satisfação com a melhoria de suas exposições e produção de material didático, e o aluno é um observador passivo do uso da tecnologia. Outro aspecto importante é o fato que, para produzir material didático com CAS para uma aula expositiva, o professor necessita conhecer a matemática para produzir os efeitos desejados, muitas vezes além do conteúdo do próprio tópico objeto da exposição. Isto traz em geral uma dificuldade adicional para a utilização de CAS por professores do nível médio, mas também torna clara a importância de certos tópicos de matemática nos cursos de licenciatura, como métodos numéricos, conceitos de matemática discreta, geometria de curvas e superfícies, representações paramétricas e implícitas de funções, linguagem de algoritmos, etc., para que o professor de ensino básico possa desfrutar das possibilidades de um CAS como recurso didático.

Logo, tornou-se claro a partir de diversas experiências que o uso eficiente da tecnologia no contexto de ensino é colocar a tecnologia nas mãos do aluno (cf. [Waits, Demana]).

II - Utilização da tecnologia pelo aluno.

Assim a segunda categoria se apresenta, com o desenvolvimento de novas metodologias em que o papel da tecnologia é o de facilitador nas atividades centradas no aluno. Neste caso, o aluno efetivamente manuseia a tecnologia, quer seja em atividades de exercício individual ou em grupo, atividades de trabalho em casa, etc.

As inovações que os programas CAS trouxeram nesta categoria incluem a *instrução programada através de hipertextos*, em que o aluno avança seu aprendizado sobre um tema através de atividades "passo a passo" com "links", como foi proposto em Módulos de Estudo de Álgebra Linear ([Baldin, 1998]); folhas de estudo interativos, os chamados "worksheet"; aulas-laboratório com modelagem, especulação e resolução de problemas que requerem o uso de tecnologia por utilizar dados reais; atividades de avaliação; trabalho em casa com exercícios que requerem o uso de tecnologia; etc.

Nesta segunda categoria, é o aluno que desfruta da satisfação de produzir as respostas e resultados dos problemas com o auxílio da tecnologia. O professor exerce o importante papel de orientar e supervisionar as atividades que, ao mesmo tempo em que permitem o acompanhamento personalizado do progresso de cada aluno, também podem se desviar rapidamente dos objetivos educacionais, se não houver o domínio do professor sobre a adequação da atividade. Novamente, o conhecimento de matemática do professor é essencial para discernir a matemática que precisa ser apreendida pelo aluno. Como um exemplo da necessidade de preparo do professor no uso de CAS, podemos considerar o mau efeito gráfico produzido com emprego errado do comando "`implicitplot`" do Maple para obter o gráfico de um cone definido implicitamente pela equação algébrica $x^2 + y^2 - z^2 =0$. Neste exemplo, a necessidade de conhecer as hipóteses e a interpretação geométrica do Teorema da Função Implícita é muito clara. O conhecimento do conceito de parametrizações é requerido para conseguir uma alternativa a este problema. Outros exemplos de mau efeito gráfico de curvas e superfícies podem surgir pela má escolha de parâmetros ou de domínios de funções, assim como o usuário pode enfrentar problemas de aproximações nos cálculos de raízes de polinômios, levando a reflexões sobre as limitações inerentes da tecnologia.

Os programas de Geometria Dinâmica (DGS), como Cabri-Géomètre II, Geometer's Sketchpad, Tabulae, Cinderela e iGeom (disponível no site www.matematica.br/igeom) possuem qualidades de visualização e de interatividade para explorar propriedades geométricas, e podem ser utilizados com eficiência como auxiliar na construção de raciocínio dedutivo e de capacidade especulativa, assim como podem ser auxiliares na modelagem de problemas, com simulações, etc. Em particular, eles são excelentes auxiliares para a segunda categoria de atividades por permitir uma facilidade de manipulação e especulação de conceitos pelo próprio aluno, aumentando o prazer do aluno em interagir com a tecnologia para descobrir e aprender matemática. As calculadoras gráficas TI-92 plus têm sua capacidade de uso aumentada por conter programa Cabri-geometry, uma versão simplificada do Cabri-Géomètre II dos computadores. As calculadoras mais simples como TI-83 e TI-89 podem ser carregadas com programa Cabri-geometry por meio de aplicações que usam a tecnologia Flash. A última versão de TI-92, a Voyage 200, além de ter sua capacidade de processamento aumentada, já vem com os programas Cabri-geometry II e Geometer's Sketchpad. O potencial didático destes programas está sendo reconhecido nas escolas de nível básico, principalmente para visualizar e estudar propriedades de objetos geométricos. Em [Baldin, 2002], chamamos a atenção para o fato que, com os programas CAS em geral, o aluno costuma confundir o conceito de função com a expressão que define a imagem, o que provoca muitas vezes má escolha de parâmetros para a variável independente ou visualização prejudicada de gráfico. Em [Baldin, 2002] apresentamos um exemplo de utilização didática de DGS para estudar o conceito de função, através de seus elementos (domínio, lei de correspondência, imagem, gráfico no plano cartesiano).

III - Utilização compartilhada da tecnologia por professor e aluno.

À medida que as experiências se sucederam, uma terceira categoria de utilização de tecnologias no ensino surgiu, como uma conseqüência das demais e destacando o potencial que as tecnologias apresentam para aperfeiçoar a comunicação de conhecimentos.

Esta categoria é representada pelas aulas diferenciadas em que o desenvolvimento de projetos, aulas interdisciplinares, construção de conceitos através de experiências e conjeturas, podem finalmente sair das intenções de planos de ensino e serem colocadas em prática. Esta categoria é a mais desafiadora de todas as utilizações e necessita de contínua pesquisa. Os programas CAS têm sido bastante eficazes para dar suporte a esta inovação metodológica nas aulas de matemática, introduzindo a prática de "ensino com projetos" em níveis universitários, e repercutindo positivamente na formação profissionalizante de cursos de engenharia e outras ciências, por exemplo, o projeto REENGE da UFSCar, projeto de Cálculo da UNICAMP, da UFRJ, da UFSC, e muitos outros.

Os programas de geometria dinâmica também trouxeram novas possibilidades para o ensino de matemática em todos os níveis, através de construção de conhecimentos em atividade conjunta "professor + aluno", modelando situações geométricas, visualizando situações-problema, especulando possibilidades matemáticas de um problema, montando estratégias de resolução de problemas, estudando os passos lógicos de uma demonstração matemática, etc. Um uso adequado de DGS ou de calculadoras gráficas permite, desde o nível básico de ensino, realizar atividades interdisciplinares entre a matemática e outras ciências. Por exemplo, em [Bonatto-Baldin] apresentamos atividade aplicando o conceito de regressão em problemas da vida real em nível de ensino médio com o uso de calculadora, em [Salvador-Baldin] a interdisciplinaridade com a astronomia (relógio de sol), em [Baldin-Villagra] o relato de experiência concreta numa sala de aula de ensino fundamental envolvendo função quadrática e problemas de saltos ornamentais com uso de calculadoras, em [Baldin-Hasegawa-Villagra] uma aplicação de cônicas à ótica geométrica com manipulações dinâmicas.

As Calculadoras Gráficas (CG), principalmente aquelas que possuem as capacidades de CAS, DGS e planilhas eletrônicas como as TI-92 plus, são portáteis, de manutenção facilitada por não depender de redes de computadores e de salas informatizadas, possuem sintaxes de comando mais amigáveis do que os programas CAS e uma linguagem de programação mais facilitada, o que torna este recurso uma transição para usar CAS em computadores. Algumas considerações sobre o papel didático deste recurso estão em. [Baldin- Baldin].

Destacamos que mesmo nas atividades indicadas para o ensino básico, quer sejam com CAS, DGS ou calculadoras, percebemos que o conhecimento de matemática, importante no uso correto de programas computacionais, inclui fortemente a compreensão da natureza dos números, percepção do significado da precisão, do conceito de unidade e escalamento de unidades, a noção de representação paramétrica e representação implícita para objetos gráficos, a noção de métodos numéricos e de aproximação, a noção de algoritmos e estruturas de programação, dentre outras.

Queremos afirmar que estes conhecimentos são necessários para a formação de futuros professores do ensino básico, mesmo que estes tópicos não façam parte do conteúdo curricular do ensino fundamental e médio. De fato, a falta deste embasamento implica num professor usuário da tecnologia sem postura crítica e criativa diante da limitação e do potencial que um recurso computacional apresenta, e também um professor despreparado para as novas tecnologias que virão.

4. CONCLUSÃO

A tecnologia não substitui o pensamento crítico nem as atividades com lápis e papel, ela deve ser usada como auxiliar no ensino/aprendizagem em atividades adequadas para cada situação, valorizando o conhecimento integrado e o papel do professor. O entendimento de usos diferenciados de recursos de informática no ensino deverá auxiliar o professor na escolha e planejamento de atividades para as suas aulas, trazendo mais confiança e alegria no seu trabalho.

Agradecimento: A autora agradece o professor Leônidas O. Brandão pela leitura crítica, sugestões que melhoraram a redação deste artigo, e pela informação sobre o programa gratuito iGeom.

Referências:

-BALDIN, YY, 1998, "Utilização do Maple V como auxiliar didático em Álgebra Linear", Hipertexto, instrução programada na rede interna do Laboratório REENGE do DM-UFSCar.

-BALDIN, YY, 2002, "On some important aspects in preparing teachers to teach mathematics with technology", Proceedings of ICTM2, Crete.

-BALDIN, YY, 2002, "Exemplos de utilização diferenciada de recursos computacionais no ensino de matemática", apresentados no 1º. HTEM, a ser disponibilizado no site: www2.dm.ufscar.br/~atividades

-BALDIN, YY, BALDIN, N., 2001, "Calculadoras gráficas como auxiliar didático no ensino de matemática para as engenharias", Anais do XXIX COBENGE, Porto Alegre.

-BALDIN, YY, HASEGAWA, R., VILLAGRA, GAL, 2001, "Focal properties of conics and applications", Proceedings of 2nd Cabriworld, Montréal.

-BALDIN, YY, SALVADOR, JA, 1999, "A arte de medir o tempo e a Matemática: do gnomon ao relógio atômico", Anais da 7ª. Reunião Anual da SBPN, Londrina.

-BALDIN,YY, VILLAGRA, GAL, 2001, "Atividades de geometria aplicadas à resolução de problemas (uso auxiliar de informática)", Relatório de aulas inéditas do Projeto Pró-Ciências CAPES/Fapesp, UFSCar, São Carlos.

-BONATTO, T, BALDIN,YY, 2001, "Usando calculadora gráfica TI-92 plus no estudo de Métodos de regressão e aplicações no Ensino Médio", Anais do IX CIC, 4ª. Jornada Científica da UFSCar.

-COHEN, A, 2001, "Two reactions to The Mathematical Education of Teachers", Notices of AMS, vol 48, Number 9, pp 985-988.

-LAUGHBAUM, ED (editor), Hand-held Technologies in Mathematics and Science Education: a collection of papers, The Ohio State University, 2000.

-MET, 2001, Report The Mathematical Education of Teachers (CBMS), //www.maa.org/cbms/

-OLDKNOW, A, 2000, "Personal computing technology - use and possibilities", in Hand-held Technologies in Mathematics and Science Education: a collection of papers, Laughbaum,ED (editor), The Ohio State University.

-PCNEM, 1999, Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio, MEC, Secretaria de Educação Média e Tecnologia.

-WAITS, B, DEMANA,F, 2000, "Calculators in mathematics teaching and learning: past, present and future", in Hand-held Technologies in Mathematics and Science Education: a collection of papers, Laughbaum,ED (editor), The Ohio State University.

CAPÍTULO 3

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 39:50.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

UTILIZANDO O COMPUTADOR NA CAPACITAÇÃO DE PROFESSORES

Elizabeth Belfort

Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
endereço eletrônico: beth@im.ufrj.br

Resumo - *Neste artigo, é feita uma síntese de reflexões e de pesquisas envolvendo experiências utilizando Novas Tecnologias na formação continuada de professores de Matemática. Relatam-se aqui experiências utilizando softwares de Geometria Dinâmica. Através da análise de exemplos de propostas didáticas feitas pelos professores, durante situações de formação, argumenta-se que, mais importante do que a ferramenta em si, é a forma em que esta é utilizada didaticamente. Analisa-se também a relação existente entre o uso didático eficiente das ferramentas computacionais e os conhecimentos matemáticos do professor. Como conseqüência, as oportunidades de capacitação do professor voltadas para prepará-lo para utilizar ferramentas computacionais se revestem de uma importância fundamental. Estas devem ser aproveitadas para promover, de forma integrada, a revisão, o aprofundamento e a ampliação de sua formação em Matemática, pois é desse conhecimento que depende diretamente uma boa utilização de todas as ferramentas didáticas colocadas à disposição do professor pela tecnologia.*

Palavras-chave: *Formação de Professores, Geometria Dinâmica, Ferramentas Computacionais.*

Abstract - *In this article the outcomes of a research project designed to evaluate the influence of using new technology tools during in-service teacher training courses are presented. The positive influence of especially designed activities supported by Dynamical Geometry Softwares may exercise in teachers' preparation is discussed. It is argued that teachers' motivation in learning to use these tools for school work can be explored to help them to overcome content knowledge difficulties. To support the statement that with a computational tool, as it happens with any other tool, it is the way it is used that determines the final outcomes, the didactical materials produced by the teachers during a graduate course are analysed. It is argued that developing these materials made these teachers more conscious of some critical* *educational issues related to Mathematics teaching and learning and made them willing to make the effort to overcome their content difficulties.*

Key words: *Teacher training courses, Dynamical Geometry, Computational Tools.*

1. INTRODUÇÃO

Um grupo de professores do Instituto de Matemática da UFRJ vem se dedicando à pesquisa de situações didáticas que utilizam as Novas Tecnologias como recurso educacional, e também ao desenvolvimento deste tipo de recurso para o ensino de Matemática. Neste momento, o desenvolvimento de softwares de Geometria Dinâmica (no plano e no espaço), que permitem a integração de usuários via Internet, tem sido um dos pontos chave de nosso trabalho (ver, por exemplo, Guimarães et al., 2002 (a) e (b)). No entanto, nossa pesquisa sobre a utilização da Geometria Dinâmica (G.D.) como recurso didático é anterior ao nosso esforço de desenvolvimento destes programas (ver, por exemplo, Belfort et al. 1998, 1999). De fato, nossa convicção do potencial destes softwares como ferramenta para o estudo da Matemática foi uma das principais motivações para o desenvolvimento que vimos realizando. Trabalhos de pesquisadores em diversos países (ver, por exemplo, a seleção em King & Schattschneider, 1997), assim como nossas pesquisas, nos levam a acreditar que a utilização didática eficiente destes recursos pode auxiliar em um processo ensino/aprendizagem voltado para a compreensão de conceitos, para a resolução de problemas e para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos alunos. Neste artigo, discutimos formas de utilizar Novas Tecnologias como ferramenta de capacitação de professores de Matemática, abordando aplicações da G.D., pois é aí que a linha de experimentação e de pesquisa da autora está centrada.

Não acreditamos que uma ferramenta didática, por si só, possa ser considerada como a causa de melhorias que possam ocorrer no ensino, por mais eficiente que esta seja. Uma ferramenta pode, quando muito, contribuir para melhorar condições. Além disto, para que seu impacto seja positivo, é necessário capacitar os professores para utilizá-la. O uso de ferramentas computacionais para o ensino de Matemática faz com que enfrentemos uma situação bastante diversa da usual na capacitação de professores. Diferentemente de uma aula desenvolvida com quadro-negro, ou estudos dirigidos, em geral, o professor não teve experiências prévias com estas ferramentas (nem como aluno nem como professor). Por outro lado, a informatização das escolas faz com que o professor procure atualização, criando uma demanda por capacitação em serviço que os prepare para as novas situações. O atendimento a esta demanda, se bem explorado, pode ser um instrumento que venha a contribuir para a melhoria das condições de ensino de Matemática, em todos os níveis.

Cientes desta motivação do professor, e da demanda social por professores capazes de utilizar Novas Tecnologias como recurso didático, desde 1997 temos utilizado programas de G.D. em diversas situações de capacitação de professores (cursos de graduação, de atualização, e de especialização), com resultados extremamente positivos. Neste artigo, apresento um resumo das reflexões que temos feito sobre estas experiências, analisando também exemplos de utilizações propostas pelos próprios professores.

2. NOVAS TECNOLOGIAS E CAPACITAÇÃO DE PROFESSORES: REFLEXÕES INICIAIS

Minha participação na pesquisa e experimentação com a integração de Novas Tecnologias na formação de professores de Matemática teve início durante as edições do projeto PRÓ-CIÊNCIAS, uma parceria do Instituto de Matemática da UFRJ com a CAPES e a FAPERJ. Estes cursos foram promovidos entre 1997 e 2000, e visavam a reciclagem de professores do ensino médio no estado do Rio de Janeiro.

Durante o planejamento de atividades para esta capacitação, a equipe responsável levou em consideração que, no caso de professores de Matemática (especialmente em situações de formação continuada), existiria a necessidade de atender a uma demanda de formação que envolveria diferentes aspectos profissionais. Nossas experiências prévias indicavam uma forte procura por atividades adequadas à transferência para a sala de aula e por metodologias de ensino, ao mesmo tempo em que seria muito marcada a necessidade (e a demanda) de melhoria na formação Matemática básica.

Algumas de nossas reflexões sobre a utilização de recursos computacionais nesta formação foram resumidas em Belfort & Guimarães (1998):

> "a forma que o computador for utilizada nesse trabalho poderá ser determinante na maneira que o professor irá, por sua vez, enxergar o computador como ferramenta para ensinar Matemática para seus próprios alunos .... Já que o objetivo de apresentar o computador para o professor é que ele reflita sobre a sua utilidade como ferramenta com seus próprios alunos, nada mais natural do que confrontá-lo com uma situação em que ele é levado a aprender a utilizá-lo para ensinar Matemática enquanto o usa para aprender Matemática." (pp. 105-106)

O curso de capacitação ofereceu disciplinas dedicadas ao aprofundamento, revisão e ampliação dos conhecimentos matemáticos dos professores cursistas. A estratégia de trabalho se apoiou na integração de três momentos: apresentação de conteúdos; resolução de problemas (com materiais didáticos) e atividades de laboratório. Esperava-se, ainda, que os materiais didáticos desenvolvidos pela equipe (textos, hipertextos, roteiros de aula e de laboratório) contribuíssem para um quarto momento: o de estudo e reflexão.

Utilizamos um software de G.D. nos laboratórios do curso de Geometria. A resposta dos professores à utilização proposta para esta ferramenta foi bastante positiva, e situações de aprofundamento e revisão de conceitos matemáticos eram constantes em nossos laboratórios. Conforme discutido em Belfort e Guimarães (1999), os professores do ensino médio puderam repensar e questionar seus conhecimentos matemáticos sem desconforto, em "*uma situação onde não se sentiam testados em seus conhecimentos, já que estavam sendo apresentados a uma nova ferramenta*".

Uma das principais estratégias utilizadas foi a discussão de tópicos de matemática ligados à prática dos professores, abordados de pontos de vista diferentes daqueles usualmente encontrados nos textos escolares, como ilustram alguns dos exemplos que apresentaremos na próxima seção. Como decorrência desta mudança de enfoque, observamos que podíamos trazer de volta a necessidade de justificar e provar resultados, práticas que pareciam distantes das atividades didáticas desenvolvidas usualmente pelos professores, como discutiremos a seguir.

3. GEOMETRIA DINÂMICA: USOS E ABUSOS

Durante a capacitação, constatamos que muitos professores tendiam a acreditar nos resultados a partir da visualização na tela (havia até mesmo uma crença de que as medidas não estavam sujeitas a erros e aproximações). Constatamos também que a maioria dos professores, não justificava os 'fatos' matemáticos que conheciam e utilizavam. Por exemplo: todos os professores parecem conhecer o enunciado do Teorema de Pitágoras e a grande maioria destes parece ser capaz de aplicar este resultado para resolver problemas simples. No entanto, em um teste do qual participaram cerca de 20 professores, apenas 4 deles foram capazes de apresentar alguma prova deste teorema. Todos os demais não demonstraram ser capazes de conectá-lo com os resultados envolvendo relações métricas no triângulo retângulo ou resultados de semelhança. Nenhum destes professores ofereceu uma prova do Teorema de Pitágoras através de áreas de figuras planas.

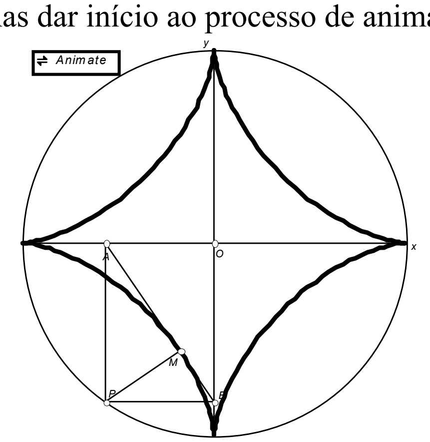
A excessiva valorização do conhecimento "fatual" tem sido uma constante constatação em nosso trabalho com professores. Na maioria dos casos onde professores mencionam resultados para os quais desconhecem qualquer justificativa, estes estão, pelo menos, corretos. Mas exemplos de citações completamente equivocadas, como "nenhum retângulo é inscritível, só o quadrado" ou mesmo afirmativas sem sentido, como "os números que possuem representação decimal finita são aqueles que possuem apenas números primos como fatores" também fazem parte da lista de resultados que ouvimos de professores (estes também sem nenhuma justificativa, é claro). Tudo parece ser possível no emaranhado de resultados sem conexão e sem justificativas lógicas que parece constituir o corpo de conhecimentos matemáticos de um grande número de professores. A esta forma de conhecimento opomos uma outra, valorizando o conceito, e onde justificativas e argumentações têm um papel fundamental na compreensão dos resultados.

Esta pesquisa se insere em um contexto mais amplo, que busca estabelecer o conhecimento de conteúdos específicos pertinente à prática didática do professor de Matemática (ver, por exemplo, Ball, 1991; Ma, 1999; Belfort et al. 2001(a) e (b) , que discutem a influência positiva de um sólido conhecimento dos conteúdos nas práticas didáticas dos professores). Busca-se estabelecer as características de um saber matemático bastante específico, e não necessariamente igual àquele desejável para os pesquisadores da área, mas que possa ser relacionado com uma boa prática didática. Segundo estes estudos, o conhecimento detalhado, aprofundado e justificado dos conteúdos específicos pode ser mais facilmente transportado para as situações didáticas, sendo ferramenta central na atuação didática do professor. Estas pesquisas também apontam para dificuldades encontradas, por professores que não demonstram esta forma de "saber", para realizar transposições didáticas de conteúdos que levem seus alunos a uma aprendizagem significativa da Matemática.

A tendência do professor em não questionar os resultados visualizados na tela, constatada em nossas experiências, nos alertou para o fato de que um software de G.D., como qualquer outra ferramenta, poderia ser utilizado de forma equivocada pelo professor não preparado. Um dos sérios problemas relacionados à utilização da G.D. como ferramenta didática é devido à própria concepção desses programas: "*existe sempre o risco de levar o professor a generalizar um resultado a partir de um número finito de casos, e de considerar como demonstrados resultados que foram apenas visualizados através do software*" (Belfort & Guimarães, 1999). Existe também a tentação de utilizar apenas o raciocínio indutivo, no estudo de conjecturas.

Observações realizadas nos cursos de especialização que vimos oferecendo para professores de Matemática, indicam que, mesmo após passar por experiências de aprendizagem com o auxílio do computador, os professores ainda apresentam muita dificuldades em elaborar atividades baseadas nestas ferramentas para sua prática. Em Belfort et al. (2001 a) analisamos os materiais criados por professores, apoiados em G. D., como parte das atividades propostas na disciplina "Informática no Ensino de Matemática".

Destacamos aqui dois exemplos de explorações equivocadas que nos foram apresentadas. Em um deles, o professor se envolveu com a aprendizagem da ferramenta e com a exploração de suas potencialidades, esquecendo-se dos objetivos didáticos de seu trabalho. O professor demonstrou grande domínio da ferramenta, mas sua proposta didática reduzia o aluno a um mero espectador. As possibilidades do programa eram exploradas tão somente para que as imagens se formassem na tela, sem que o aluno tivesse conhecimento das propriedades matemáticas dos lugares geométricos sendo apresentados. O professor também demonstrou insegurança em enunciar estas propriedades, apesar do trabalho técnico bem realizado. As figuras 1a. e 1b. mostram duas de suas "telas". Observe que as propriedades matemáticas que levam à construção das curvas não estão destacadas, e que ao aluno cabe apenas dar início ao processo de animação da figura.



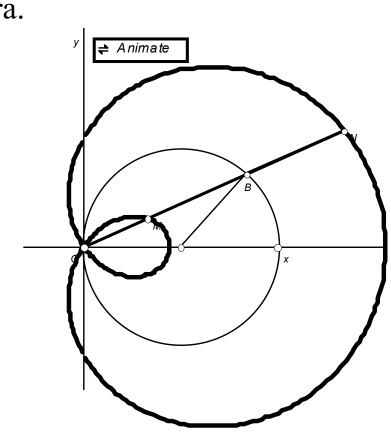


Figura 1(a): A Astróide **Figura 1(b): A Cardióide**

Muito embora a grande maioria dos professores tenha apresentado trabalhos onde se percebia um claro interesse em desenvolver atividades para serem exploradas por seus alunos, apoiadas pelo uso do computador, uma boa parte destas propostas não apresentava um desenvolvimento matemático correto e/ou completo para o tópico em questão. Em uma parcela considerável destes materiais, percebia-se claramente a influência das abordagens geralmente encontradas nos livros didáticos, manifesta em uma visão fragmentada da Matemática e em uma “pressa” em obter fórmulas.

Para exemplificar nossa afirmativa, discutimos o material didático apresentado por um grupo de professores. Pretendia-se explorar a área de figuras planas com alunos da sexta série do ensino fundamental. As figuras 2a e 2b mostram telas do material apresentado. Em 2a, os alunos devem responder quantos quadrados de área unitária são necessários para preencher o retângulo dado. A tela seguinte proposta no trabalho repete a mesma atividade, com um retângulo ainda maior. Esperava-se que os alunos concluíssem a fórmula indutivamente, como forma de evitar um trabalho extremamente repetitivo.

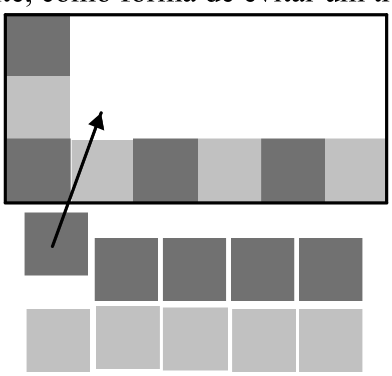


Figura 2a: Quantos quadrados para preencher completamente o retângulo?

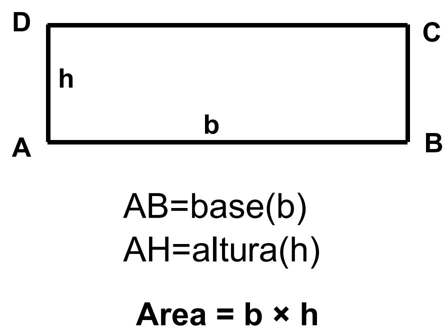


Figura 2b: A fórmula da área, concluída indutivamente.

Na figura 2b, vemos a tela que conclui o processo de obtenção indutiva da fórmula, a partir dos retângulos, todos os quais tinham valores inteiros como medida dos lados. Além da valorização de fórmulas, a proposta demonstra uma visão bastante fragmentada de Matemática, já que nesta série são também estudados os produtos de frações, para os quais as áreas de retângulos são exemplos concretos. Cabe notar que a maioria dos livros didáticos adota exatamente a mesma postura no tratamento destes conteúdos.

Em resumo, podemos dizer que nossas experiências mostram que a maioria dos professores parece considerar, com entusiasmo, a utilização de Novas Tecnologias como recurso didático em Matemática. No entanto, em geral, eles não parecem preparados para criar sozinhos estratégias de utilização eficientes e integradas ao currículo de Matemática de suas escolas. No entanto, sua motivação pode ser explorada em atividades de capacitação, não apenas para ajudá-los em superar deficiências de conteúdo matemático, como também para ajudá-los a desenvolver um senso crítico, fundamental para a escolha de materiais didáticos voltados para facilitar o trabalho apoiado por computador.

Concluímos que a formação do professor para a utilização didática destas ferramentas se reveste de uma grande importância. Este é momento no qual atitudes como as descritas nos parágrafos anteriores podem ser questionadas, e o papel fundamental dos conceitos e do raciocínio dedutivo em Matemática pode ser destacado. Nosso desafio tem sido desenvolver atividades em G.D. que incentivem os professores a demonstrar os "fatos" visualizados na tela. Em Belfort et al. (1999), diversos exemplos são apresentados, explorando, em ambiente de G.D., a elegância, beleza e simplicidade da argumentação lógica apresentada por autores como Euclides (Heath, 1956) e Legendre (1852).

Para ilustrar como diferentes tratamentos podem fazer uma grande diferença no uso de uma mesma ferramenta, apresentaremos aqui um exemplo simples, mas que aparece com freqüência em situações de formação de professores: o estudo dos pontos notáveis de um triângulo (para fixar idéias, discutiremos o circuncentro).

Ao entrar em contato com um software de G.D., muitos professores de Matemática realizam uma verificação visual da existência dos pontos notáveis do triângulo, pois são “fatos” matemáticos bastante conhecidos. No caso do circuncentro, em geral, ele constrói um triângulo qualquer na tela e as mediatrizes dos três lados. Nenhum dos softwares de Geometria Dinâmica no mercado permite que o circuncentro seja obtido como a interseção simultânea das três retas, mas a obtenção deste ponto como a interseção de duas destas retas e o fato de que a movimentação “livre” do triângulo mantém a terceira reta “passando” pelo ponto de interseção das outras duas, como ilustrado na figura 3, faz com que o professor afirme que este experimento convencerá seus alunos que as três mediatrizes dos lados de um triângulo se encontram em um único ponto.

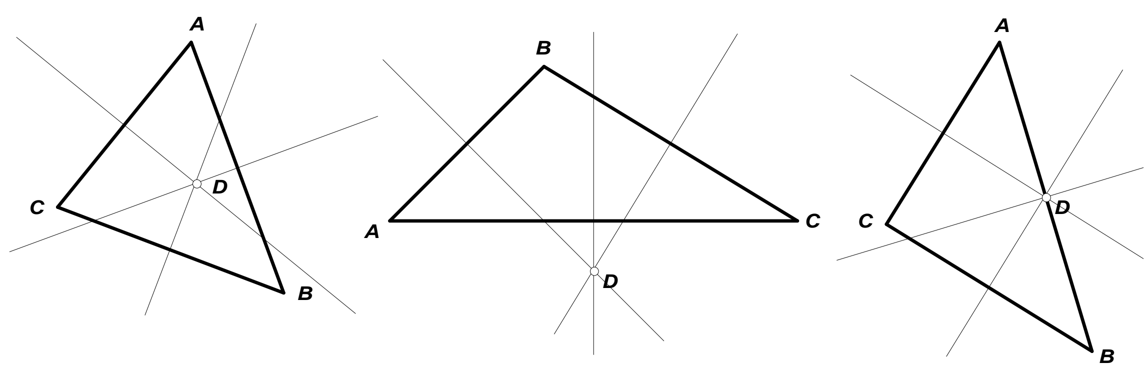


Figura 3: Movimentação dinâmica de um triângulo, e de seu circuncentro.

Esta é uma das formas de utilização destas ferramentas que vimos criticando: a simples visualização do resultado, que envolve apenas um número finito de casos, é considerada, pela grande maioria do professorado de Matemática, como uma “prova” de que o resultado é verdadeiro. Nenhum dos professores com os quais esta atividade foi discutida percebeu, a princípio, que se poderia, ao invés, considerar a visualização permitida pelo programa como uma forma dinâmica e motivadora de apresentação de uma conjectura matemática, que deve ser justificada e para qual cabem perguntas como: será que isto sempre acontecerá? Em caso afirmativo, como justificar este resultado?

Ao apresentar o problema sem estes questionamentos para seus alunos, o professor perde a oportunidade de discutir as causas matemáticas da validade deste resultado, e de explorar algumas das propriedades fundamentais de figuras geométricas. Em situações de formação, temos questionado este tipo de utilização. No exemplo, após a discussão crítica da proposta, foi dado aos professores algum tempo para repensá-la. As sugestões de atividades apresentadas por alguns deles são bastante criativas, e valem ser mencionadas:

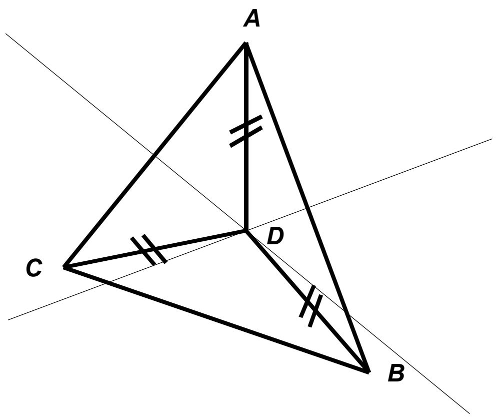


Figura 4a: O ponto de interseção das mediatrizes de AC e AB é eqüidistante dos pontos B e C.

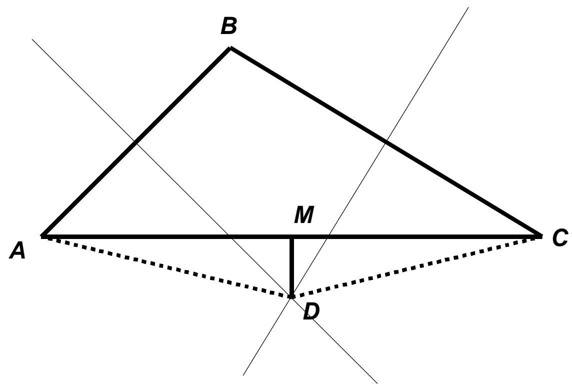


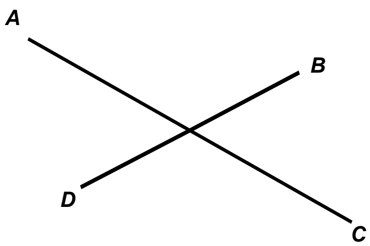
Figura 4b: Se D é o encontro das mediatrizes de AB e BC e M é o ponto médio de AC, então os triângulos AMD e CMD são congruentes e o ângulo M é reto.

Um dos professores sugeriu que a atividade fosse desenvolvida da seguinte forma: traçam-se apenas duas das mediatrizes e marca-se o ponto D, interseção entre elas, como mostrado na figura 4a. A partir da propriedade de eqüidistância aos extremos do segmento que gozam os pontos da mediatriz, argumentar que D também pertence à mediatriz de BC, ainda não traçada, pois eqüidista dos pontos B e C. Uma outra sugestão apresentada está ilustrada na figura 4b. Traçam-se apenas duas mediatrizes, e liga-se o ponto D, interseção destas retas, ao ponto M, médio do terceiro lado. Formam-se então dois triângulos congruentes (caso LLL): AMD e CMD, obrigando que o ângulo da reta MD com o segmento AC seja reto, ou seja, a reta MD é a mediatriz do segmento AC. Em ambas as sugestões, a exploração dinâmica da figura permite investigar se as justificativas propostas são aplicáveis em diferentes situações (por exemplo, no segundo caso, se B for um ângulo reto, o ponto D coincide com o ponto M, e não existem os triângulos considerados).

Ressaltamos ainda que mesmo aqueles professores que não conseguiram apresentar sugestões foram unânimes em reconhecer que estas formas de explorar as propriedades do circuncentro eram bastante superiores àquela inicialmente proposta, levando seus alunos à compreensão de conceitos, ao invés da memorização de mais um resultado. Todos foram também unânimes em reconhecer que, a partir de explorações como estas, a construção do círculo circunscrito ao triângulo seria melhor compreendida e assimilada por seus alunos.

Outra forma de utilização que vimos propondo, com grande aceitação pelos professores, envolve explorar conceitos matemáticos conhecidos de uma forma diferente da usual. Esta estratégia, em geral, nos leva a poder discutir com o professor a necessidade de justificar matematicamente resultados.

Um exemplo recentemente utilizado em situações de formação, considera a construção de quadriláteros a partir de suas diagonais. Por exemplo, ao invés de construirmos um paralelogramo e verificarmos que suas diagonais se cortam ao meio, construímos dois segmentos se interceptando nos respectivos pontos médios, como na figura 5a. Ao criarmos o quadrilátero ABCD, obtemos uma figura que "parecerá" sempre ser um paralelogramo, mesmo quando movimentada, como ilustrado na figura 5b.



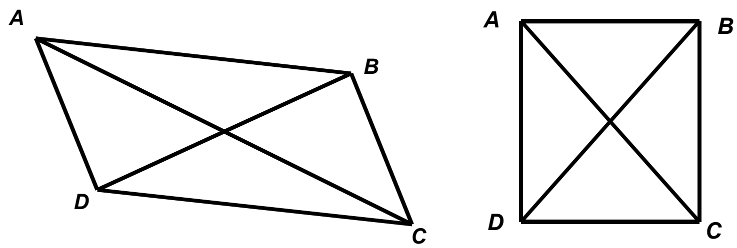


Figura 5a: Construção de dois segmentos cortando-se ao meio.

Figura 5b: Resultado da movimentação dinâmica do quadrilátero obtido, levando à conjectura de que este será sempre um paralelogramo.

Criada a conjectura, partimos então para a justificativa do resultado. Muito embora nosso exemplo trate de uma condição equivalente à definição usual do paralelogramo, esta direção de implicação é um resultado dificilmente discutido nos livros didáticos. O tratamento pouco usual de um resultado conhecido faz com que o professor se preocupe em provar o resultado, o que foi feito sem maiores dificuldades neste ponto do curso. A melhoria de compreensão de conceitos matemáticos não ocorreu apenas com aqueles diretamente relacionados com quadriláteros e suas diagonais. Perguntas (ou melhor, afirmativas) como "quer dizer que eu poderia definir um paralelogramo a partir da propriedade das diagonais e então provar que seus lados opostos são paralelos?" mostram que estes professores passaram a conceituar proposições equivalentes com mais clareza a partir desta atividade.

4. Relevância do Trabalho para a Educação no Brasil

Em artigo em preparação, Guimarães (a aparecer) analisa os relatórios divulgados pelo MEC ao final do ano de 2001, registrando os resultados de uma amostra de estudantes brasileiros, de 15 anos de idade, em uma prova internacional comparativa, o PISA (Project for International Student Assessment). Segundo esta análise, além dos piores resultados na análise comparativa entre países participantes da amostra, obtivemos resultados absolutos que devem ser considerados como inaceitáveis, e que apontam para um comprometimento das possibilidades de bom desempenho, tanto nas atividades profissionais de nossos jovens, como nas atividades acadêmicas daqueles que se voltarem para os estudos. Observa-se ainda que os piores resultados de nossos jovens são aqueles obtidos *na prova de Matemática*.

Não é possível desvincular este desempenho dos diversos problemas vividos como conseqüência da falta de investimentos educacionais em nosso país. Em particular, nos preocupam os problemas ocasionados pela situação crítica da formação de professores de Matemática no Brasil, sugeridos com clareza pela análise dos resultados do Exame Nacional de Cursos, o "Provão" e confirmados no nosso dia a dia de contato com aqueles professores que nos procuram para aprofundar seus estudos. Parece que, em nosso país, estão sendo formados um grande número de professores que não dominam nem mesmo os conteúdos básicos de Matemática que deverão ensinar e que, conseqüentemente, estão despreparados para assimilar qualquer tratamento didático sugerido para o ensino destes conteúdos.

A pesquisa em ensino de Matemática que vem sendo desenvolvida pelo nosso grupo busca criar condições para a integração das Novas Tecnologias no Ensino da Matemática como forma de contribuição efetiva para a melhoria das condições discutidas acima. No momento em que o Estado no Brasil vem adotando políticas de disseminação do uso de computadores no sistema escolar, estamos vivendo uma oportunidade para que a formação continuada de professores se estabeleça como um hábito em nossa sociedade.

5. CONCLUSÕES

A estratégia de utilizar Novas Tecnologias em situações de capacitação pode ser bastante efetiva, pois se apoia na motivação do professor para aprender a utilizar estas ferramentas. Porém, é absolutamente fundamental que os professores não sejam simplesmente treinados em softwares comerciais, mesmo que estes sejam educativos. Argumentamos aqui que mais importante do que a ferramenta em si, é a forma em que esta é utilizada didaticamente e que nenhuma ferramenta carrega em si a garantia de sua boa utilização. Acreditamos que esta oportunidade de capacitação deva ser bem explorada, permitindo ao professor aprofundar continuamente seu conhecimento nos conteúdos de sua disciplina. Com a pesquisa que vimos desenvolvendo, esperamos estar ajudando a indicar um caminho que permita utilizar estes momentos de capacitação para estabelecer uma revisão crítica na formação em Matemática de nossos professores, com conseqüências que, acreditamos, sejam bastante positivas para sua prática didática.

Referências:

BALL. D. 1991: Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. Em J. Brophy (ed.) *Advances in Research on Teaching*, vol. 2, pp.1-48. Greenwich, CT: JAI Press.

BELFORT, E. , GUIMARÃES, L. C. & BARBASTEFANO, R.2001 (a): Using Computers in Mathematics Teacher Training Programs: a Reflection upon an Experiment. Em *Annals of The 5th. International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, vol. eletrônico. Klagenfurt: ICTMT.

BELFORT, E.; GUIMARÃES, L. C.; BARBASTEFANO, R G., 2001(b): Tertiary Algebra and Secondary Classroom Practices in Number and Algebra: Closing the Gap. In: *Annals of The ICMI STUDY: The future of the teaching and Learning of Algebra*; Volume I, pp 84-92; Melbourne; Austrália: Universidade de Melbourne.

BELFORT, E., GUIMARÃES L. C., & BARBASTEFANO, R.. 1999. Geometria Dinâmica e Demonstrações na Formação Continuada de Professores In *Anais do Cabri World 99*, vol. eletrônico, São Paulo: PUC -SP

BELFORT, E. & GUIMARÃES L. C.. 1998. O Papel do Software Educativo na Formação Continuada de Professores de Matemática. Em *Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática*, II:104-107 São Leopoldo, RS.: Unisinos.

GUIMARÃES, L. C. (a aparecer): Os Resultados do PISA e a Formação de Professores de Matemática.

GUIMARÃES, L. C.; BARBASTEFANO, R G; BELFORT, E. 2002 (a): Mangaba: 3D Shapes and Dynamical Geometry. A aparecer nos *Annals of The 3rd International Conference on Mathematics Enrichement with Communication Technology. IMECT*. Cambridge,U.K.: University of Cambridge,

GUIMARÃES, L. C.; BARBASTEFANO, R G; BELFORT, E. 2002 (b): Tools for Synchronous Distance Teaching in Geometry. A aparecer nos *Annals of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics*. Crete: J. Wiley & Sons Inc.

HEATH, T. L. 1956 - *Euclid - The Thirteen Books of The Elements*. 2ª edição. New York: Dover.

KING, J. & SCHATTSCHNEIDER, D. (eds.) (1997). *Geometry Turned On*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

LEGENDRE, A. M. 1852 - *Éléments de Géométrie* - 15ª edição. Paris: Librairie de Firmin Didote Frères.

MA, L. 1999: Knowing and Teaching Elementary Mathematics: teacher's understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah: LEA.

CAPÍTULO 4

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 51:63.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

O PARADIGMA MICROMUNDO

Franck Bellemain

Professor Visitante
CIn
Universidade Federal de Pernambuco
endereço eletrônico: f.bellemain@terra.com.br

***Resumo**: A introdução da tecnologia no ensino é uma questão que vem sendo discutida há anos. Mesmo sendo, por razões técnicas obvias, a integração do computador no ensino uma coisa um pouco mais recente, já existe uma extensa produção de softwares educativos. Para entender como melhor usar os softwares já produzidos, e para facilitar o desenvolvimento de novos produtos, organizamos essa importante produção numa tipologia, destacando os paradigmas de aprendizagem subjacentes ao desenvolvimento dos mesmos. Depois de uma rápida descrição das grandes orientações de diferentes softwares educativos, iniciamos uma analise mais aprofundada do paradigma de micromundo, que corresponde à orientação dos nossos próprios desenvolvimentos. Exploramos num primeiro momento as origens, e o que fundamenta o conceito, destacando particularmente as contribuições do micromundo à construção de conhecimentos pelo sujeito. Num segundo momento, abordamos a questão central da interação do sujeito com micromundo, e dos meios dessa interação. As formas de interagir nesse caso são ou baseadas na elaboração de instruções em uma linguagem estruturada, ou sobre a manipulação direta com os objetos representados. Observaremos a evolução das concepções sobre a influência dessas formas de interação sobre a construção de conhecimento pelo sujeito. Finalmente, terminamos com uma definição de micromundo, que resume as diversas reflexões sobre esse paradigma e seus efeitos na construção de conhecimento, levantando a questão da integração do micromundo ao ensino.*

***Palavras-chave:** Micromundos; Geometria dinâmica; Mecanismos de interação; Construção de conhecimento.*

***Abstract**: The introduction of technologies in education is an old issue. Even if the widespread integration of computers in the learning process is something more recent, for obvious technical raisons, a vast amount of software is currently available. As a reflection upon the use of these instruments in teaching, as well as to contribute in the development of new products, we begin the organization of this important production in a typology reflecting* *the diverse learning paradigms implicit in their development. After a short description of the main orientations of the production of educational software, we analyze in more dept the paradigm of microworld, which corresponds to the orientation of our own developments. Firstly, we explore the origins and what fundaments the microworld, stressing in particular the contributions of the microworld to the construction of knowledge by the subject. After that, we approach the central question of the interaction of the subject with the microworld, and the forms this interaction may assume. Mechanisms of interaction with a microworld are mostly based either on the elaboration of instructions in a structured language or on the direct manipulation of the represented objects. We observe the evolution of the conceptions on the contributions of these forms of interaction for the subject's learning process. Finally, we end with a definition of microworld whose captures the various reflections on this paradigm and its contribution to the construction of knowledge, raising the question of integrating the microworld into education.*

Key words: *Microworlds; Dynamic geometry; Mechanisms of interaction; Construction of knowledge*

1. INTRODUÇÃO

A produção de softwares educativos aparece como cada dia mais importante e temos hoje muitas possibilidades de integração da tecnologia no ensino. A diversidade de softwares disponíveis associa-se obviamente à diversidade dos conteúdos abordados. Mas, os softwares educativos distinguem-se também por suas formas de abordar os conteúdos. Assim, podemos constatar diversos tipos de softwares educativos que são, do nosso ponto de vista, frutos da combinação de vários elementos, como:

- a aplicação de um certo modelo de ensino-aprendizagem,
- a concretização de um certo projeto didático do autor,
- a escolha do tipo de situação onde o software deve intervir.

Com o objetivo de desenvolver uma ferramenta tanto para nortear o desenvolvimento de softwares quanto para organizar a integração dos vários tipos de software educativo, integramos esses elementos em uma tipologia contemplando:

- a visão da educação que fundamenta cada tipo de software, e por conseqüência a maneira como ele pode ser integrado no sistema didático (visões representadas pelos eixos vermelhos do esquema),

- as contribuições que cada tipo de software traz à aprendizagem e as preocupações que eles procuram atender,
- a evolução histórica dos softwares educativos (de fora para dentro do esquema),
- e aproximações entre as diversas orientações do desenvolvimento de softwares educativos.

A descrição do esquema acima foi apresentada no VI ECEM (Bellemain, 2002a). Aqui se apresentam apenas alguns comentários sobre os três eixos desse esquema que correspondem a três modelos de aprendizagem: behaviorismo, instrucionismo e construtivismo.

Os softwares seguindo o modelo behaviorista tentam resolver a questão da aprendizagem com sistema de treinamento, de aprendizagem por tentativa/erro (aprender é associar). Nessa categoria aparecem os primeiros softwares educativos que foram desenvolvidos (Teaching Machine[1]) e os sistemas de treinamento (como, por exemplo, o simulador de vôo Whirlwind). Os princípios de desenvolvimento desses ambientes baseiam-se no recorte do saber a ensinar em pequenos passos e, na criação de um sistema questão-resposta para passar esses passos.

Na sua versão, Skinner considerava que o percurso pelo sujeito desses passos era predeterminado. Numa versão mais sofisticada, Norman Crowder desenvolveu um sistema onde a resposta dada pelo sujeito a cada pergunta determinava a pergunta seguinte. O computador contribui em automatizar um tal sistema. Se, para a aquisição de automatismo, o treinamento parece ainda o mais adaptado, para a aquisição de conhecimentos, as teorias behavioristas mostraram seus limites. Portanto, existem ainda muitos softwares seguindo os princípios behavioristas, organizando a aprendizagem em torno de sistemas de questão-resposta.

Os softwares seguindo o modelo instrucionista consistem em geral na automatização pelo computador, das formas tradicionais de ensino. A questão da aprendizagem é considerada como uma questão de transmissão de informação. O computador contribui permitindo uma organização não linear da informação (utilização de hipertextos) e a criação de múltiplas formas de apresentação dos conhecimentos, incluindo animações. Nessa categoria colocamos os sistemas multimídias de apresentação de aulas como os sistemas de autoria de aulas multimídias (courseware). Os limites dessa visão do ensino e dessa utilização do computador são que a informação não é o conhecimento e que o sujeito somente manipula elementos ativos (zona hipertexto, botões, menus) e não os próprios conhecimentos.

Os softwares seguindo o modelo construtivista criam, no âmbito computacional, condições e ferramentas para expressão e resoluções de problemas. Nessa categoria colocamos

[1]: Sidney L. Pressey em 1924 e B.F. Skinner desenvolveram “rote-and-drill teaching machine” baseadas sobre princípios de condicionamento. Não eram propriamente softwares.

os micromundos e simulações. O paradigma de micromundo será desenvolvido ao longo do texto.

Colocamos os tutores inteligentes no ponto de encontro desses três eixos, porque justamente eles podem ser desenvolvidos seguindo as preocupações que associamos com um ou outro dos três modelos de aprendizagem. Com efeito, eles podem ser, por exemplo, desenvolvidos:

- para acompanhar de forma inteligente a manipulação e construção de conhecimentos do sujeito com micromundos e simulação,
- para guiar o sujeito na exploração de conteúdos,
- para construir um percurso dentro de uma tipologia de situações que se adapte ao sujeito e suas respostas.

Nesse esquema, certas formas de uso da tecnologia na aprendizagem como os jogos educativos ou sistema de educação à distância não aparecem. Do nosso ponto de vista, jogos educativos com o computador ou ensino a distância caracterizam uma outra dimensão do uso da tecnologia na educação além das dimensões contempladas por nossa tipologia de software. Os jogos educativos ou ambientes de educação a distância não são tipo de software no nosso sentido. Um jogo educativo pode ser um micromundo, um tutor, um questionário, etc. Um ambiente de educação a distância pode também favorecer uma interação com os conhecimentos do tipo micromundo, simulação, etc.

Propomos abordar o paradigma micromundo do ponto de vista teórico, fazendo um levantamento de algumas questões sobre a definição desse paradigma como sobre a definição da interação com um micromundo.

2. MICROMUNDO: SISTEMA FORMAL PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Segundo Noss e Hoyles (1996), a origem do termo micromundo remonta ao início dos anos 70, na comunidade de Inteligência Artificial, tendo como forte referência os trabalhos de Minsky e Papert. Nessa comunidade, o termo micromundo foi inicialmente usado para definir um sistema que permite simular ou reproduzir um domínio do mundo real, e que tem como objetivo abordar e resolver uma classe de problemas.

A associação da noção de micromundo à resolução de problemas permanece no mundo da informática educativa e da educação matemática. Assim, quando Thompson (1987) propõe sua caracterização introdutora de micromundo, considera dois focos interligados: o desenvolvimento conceitual e a resolução de problemas. Com efeito, a resolução de problemas é, com freqüência, fonte de desenvolvimento conceitual. Essa caracterização resume em poucas palavras o que fundamenta os micromundos e que é detalhado nas diversas definições do paradigma e problematiza tanto a concepção como a análise de micromundos, por meio das questões que gravitam em torno dos dois focos citados.

Thompson e em seguida Laborde e Laborde interessando-se mais especificamente pelos micromundos matemáticos, os descrevem como sistemas compostos de objetos, relações e operadores transformando objetos e relações e podendo ser expandidos pela criação de novos objetos, relações e operadores:

- "I will use "mathematical microworld" to mean a system composed of objects, relationships among objects, and operations that transform objects and relationships. (Thompson, ibid., p.85) - un environnement d'objets et de relations,
- -un ensemble d'opérateurs susceptible d'opérer sur ces objets en en créant de nouveaux présentant certaines nouvelles relations. » (Laborde e Laborde, 1991, p.159)

Assim, trata-se, pelo micromundo matemático, de fornecer um sistema próximo de um sistema axiomático, que permite expressar e resolver um conjunto de problemas. Relativamente à implementação de sistema axiomático, o computador tem uma contribuição significativa, pois ele permite criar novos sistemas de objetos e relações que oferecem novas formas de resolver os problemas. A importância que demos a essa contribuição do computador é conseqüência de uma certa visão da matemática que compartilhamos com Thompson (ibid. p.84): *"... mathematical symbol systems are fundamentally representational; they are contrived by individuals or communities to provide economic ways to think about complex ideas."* As representações têm um papel central na elaboração e evolução dos saberes e na construção dos conhecimentos pelo sujeito, o computador pode contribuir de forma significativa nesses processos com novos sistemas de representação. Os softwares de geometria dinâmica constituem exemplos do uso do computador na criação de novos sistemas de representação dos objetos da geometria.

De um ponto de vista construtivista, a resolução de problemas e o desenvolvimento conceitual são fortemente interligados. A resolução de problemas tem um papel central na evolução dos saberes e na construção de conhecimentos pelo sujeito[1] e o micromundo contribui para o desenvolvimento conceitual por meio de seus aportes à resolução de problemas. Na verdade, de uma forma geral, o micromundo contribui para a aprendizagem permitindo as manipulações pelo sujeito dos objetos e relações através dos operadores e favorecendo assim a construção dos conhecimentos sobre esses objetos e relações. Papert (1980, p.125) considera, por exemplo, falando do LOGO: *"The turtle world is a microworld, a place, a province of the mathland where certain kinds of mathematical thinking could hatch and grow with particular ease."* Continuando nessa mesma idéia, Papert (ibid. 122) propõe a Dynaturtle para abordagem das leis Newtonianas:

---

[1] : O sujeito não assimila os conhecimentos na forma que eles são apresentados, mas reconstrói esses conhecimentos num processo de assimilação e acomodação contínuo de novos conhecimentos aos antigos. A emergência dos novos conhecimentos é em geral ligada à necessidade de resolver situações problemáticas que provocam conflitos cognitivos.

> "a computer-based interactive learning environment where the prerequisites are built into the system and where learners can become the active, constructing architects of their own learning."

O micromundo propõe ao sujeito um campo de experimentação onde ele constrói conhecimentos sobre esses objetos manipulados: *"Piagetian learning, the natural spontaneous learning of people in interaction with their environment."* (Papert, 1980)[1]. Papert propõe assim que o sujeito seja ativo na sua própria aprendizagem. De forma mais precisa, considera-se que a utilização dos operadores dos micromundos, particularmente na resolução de problemas, favorece a construção dos conhecimentos que justificam essa utilização e se considera também que esses conhecimentos construídos são conhecimentos matemáticos.

Segundo Noss e Hoyles (ibid., p.73), com o objetivo de estudar os processos em jogo nas construções cognitivas feitas pelo sujeito na interação com um micromundo, Lawler (1985) propõe distinguir diversos sistemas: microworld, miniworld e microview para diferenciar os objetos do mundo real das suas representações intelectuais para o iniciante ou para o especialista. Assim, ele considera o miniworld como o objeto, em outros termos seria o sistema axiomático implementado, e o microworld como o que pode ser feito nesse miniworld, integrando assim no micromundo elementos de atividades e interação. O microview caracteriza as estruturas cognitivas desenvolvidas pelo sujeito na interação com o micromundo.

Nas distinções de Lawler destaca-se a necessidade de colocar as atividades e interações como elementos fundamentais do micromundo. Se os conhecimentos construídos nessas atividades dependem do sistema formal implementado, as interfaces de manipulação dos operadores como as representações concretas dos objetos e relações desse sistema têm também um papel central nessa construção de conhecimentos do sujeito. Podemos, por exemplo, considerar que a partir de um mesmo sistema de objetos, relações e operadores, dependendo das interfaces, os problemas abordados e as aprendizagens podem ser diferentes. Nas caracterizações de micromundo propostas por Lawler, Papert, Thompson ou Laborde e Laborde aborda-se sob diversos ângulos a questão da interação e da interface. Esses autores dão à interação papéis diferentes relativamente à aprendizagem e à construção de conhecimentos pelo sujeito.

3. A INTERAÇÃO COM O MICROMUNDO

De forma simples, a interação com o computador funciona em termos de entrada e saída. O usuário usa comandos (entrada) e recebe respostas (saída) a esses comandos. No caso de um micromundo, o usuário aciona os operadores de criação, manipulação de objetos e relações e recebe respostas diversas (representação, movimento, etc). Esse par "ação-reação" tem um papel central na aprendizagem:

---

[1] : Idéia encontrada também em Thompson (ibid., p.84): *"It is that they (the mathematical microworld) act as objective systems, in the sense of physical systems studied by scientists".*

- favorecendo a construção de conhecimentos sobre os objetos e relações em função das suas reações (respostas) a ações e,
- sobretudo necessitando a construção de conhecimentos permitindo antecipações e a determinação das ações necessárias a uma reposta esperada.

De forma geral, com o objetivo de colocar o sujeito como ator da sua própria aprendizagem, o par "ação-reação" permite a criação de situações a-didáticas[1] nas quais o sujeito pode elaborar e adaptar as ações em função das respostas do computador[2].

Thompson propõe uma interação com o micromundo por meio de um par "comando simbólico-visualização" (ibid., p.100) destacando a necessidade de comandos concisos (e próximos do formalismo matemático convencional) e de uma visualização[3] reagindo aos comandos de acordo com seus fundamentos matemáticos. Trata-se de uma visão básica do que se pode esperar na interação com micromundo (um par "ação-reação" efetivo), com a consideração implícita que a adaptação do sujeito às exigências sintáxicas dos comandos é equivalente a uma adaptação ao formalismo matemático.

Papert, de forma análoga, descreve um par "comando simbólico-deslocamento". No seu trabalho de desenvolvimento da tartaruga LOGO, ele apresenta, entre outros, dois pontos que merecem ser destacados: a integração dos comandos simbólicos a uma linguagem estruturada e o uso da tartaruga como uma "incorporação concreta" dos objetos matemáticos.

A integração dos comandos simbólicos a uma linguagem estruturada (linguagem de programação) tem por objetivo explorar a necessidade da comunicação com o computador como uma forma de problematizar a explicitação de conhecimentos e a organização do pensamento. Papert propõe o uso dessa linguagem para favorecer a elaboração de situações de formulação.

O objetivo do uso da tartaruga como uma "incorporação concreta" dos objetos matemáticos é facilitar a elaboração de significados das reações e das respostas às ações. A significação das ações e das reações para o sujeito é um elemento crucial para que o par "ações-reação" favoreça efetivamente aprendizagens.

Laborde e Laborde interessam-se pelo conceito de manipulação direta[4] na elaboração das interfaces. Eles acrescentam sua contribuição à definição de micromundo falando de « *un rapport plus ou moins net au concept de manipulation directe* » (ibid., p.159). O aporte central da manipulação direta à interação com o micromundo é que ela não exige o mesmo nível de explicitação das noções envolvidas na interação que as linguagens de comandos e linguagens de programação. Uma parte dessas noções pode ser envolvida implicita-

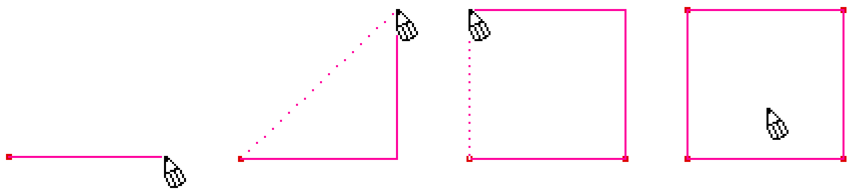
[1] « *Une situation a-didactique est une situation qui peut être vécue par l'élève en tant que chercheur d'un problème mathématique, indépendant en ce sens du système enseignant.* » (Margolinas, 1989, p.46)

[2] « *Les rétroactions du milieu apparaissent comme objectivement liées à la situation à l'élève et sont moteurs de la poursuite d'une recherche d'une solution plus satisfaisante.* » (Capponi et Laborde, 1991, p. 221)

[3] É importante notar que Thompson não considera a natureza da visualização como um elemento crucial: *"Decisions about the design of the graphics display are important, but are not among the most crucial decisions one makes in designing a mathematical microworld"* (ibid., p.100).

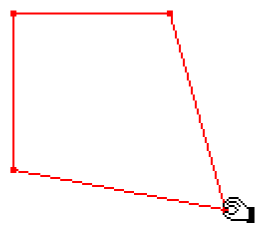
[4]: « *Une interface est à manipulation directe si l'usager a l'impression d'agir directement sur les objets intervenant dans ses buts et intentions en manipulant les objets du système* » (Nanard, 1990).

mente nas ações "quase" físicas sobre os objetos da tela. Por exemplo, no caso da construção de um quadrado com o Cabri-géomètre (ou outros softwares de geometria dinâmica), a manipulação direta pode permitir a elaboração de um objeto na tela do micromundo sem que a explicitação de nenhuma das suas propriedades geométricas seja necessária.



Construção a mão livre de um quadrado no Cabri-géomètre

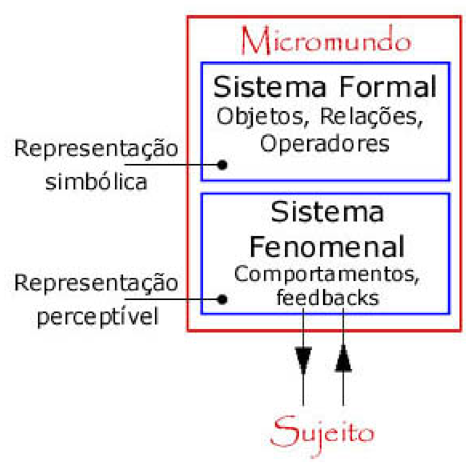
Propriedades geométricas do quadrado são implicitamente usadas para a elaboração do desenho, propriedades que podem ser em seguida explicitadas pela exploração do objeto e a interpretação de retroações à sua manipulação direta.



O deslocamento de um vértice do quadrado pode, por exemplo, mostrar a necessidade de explicitar propriedades para a conservação dos ângulos retos.

No caso do LOGO, a explicitação prévia das propriedades é necessária ao uso dos comandos para pilotar a tartaruga para que ela represente um quadrado.

No caso dessa situação do quadrado, é interessante trabalhar com os dois ambientes: Cabri-géomètre e LOGO, passando de situações de ação (com Cabri-géomètre) a situações de formulação (com LOGO), para conduzir o sujeito à explicitação e formulação de propriedades geométricas do quadrado.



Pela manipulação direta, o par "ação-reação", mais que no caso das interfaces simbólicas, pode ter o papel esperado de favorecer a evolução das ações a partir da observação das respostas que elas provocam. Com efeito, no caso da manipulação direta, é a adequação entre a ação e a reação que é motor da evolução da atividade do sujeito enquanto no caso de linguagens de comandos, são as exigências sintáxicas e gramáticais que precedem a ação.

Um outro aspecto importante da manipulação direta é que as visualizações dos objetos e relações do micromundo não são somente elementos no lado da saída, mas também são no lado da entrada. As visualizações são tanto produto das ações como objeto das ações. A distância semântica entre a interface de entrada e a interface de saída é reduzida. As ações e as respostas apóiam-se sobre um mesmo sistema de representações e um mesmo conjunto de significações.

4. MICROMUNDO, SISTEMA FORMAL E SISTEMA FENOMENAL

Para reunir numa mesma definição essas diversas contribuições na caracterização do paradigma de micromundo, apoiar-nos-emos na definição de Balacheff (1999) segundo a qual um micromundo é constituído de:

> (i) um sistema formal no sentido matemático, seja um conjunto de objetos primitivos, um conjunto de operações elementares e um conjunto de regras exprimindo como as operações podem ser executadas e associadas;
>
> (ii) um sistema fenomenal que determina os comportamentos na interface em relação com os objetos do sistema formal e as operações sobre esses objetos. Esse sistema modeliza o tipo de "feedback" resultantes das ações e decisões do usuário.

Esse autor também considera que o micromundo deve permitir constituir objetos complexos ou processos complexos em novos objetos e novos operadores.

Nessa definição, Balacheff interessa-se particularmente à interface como produtora de representações. O sistema fenomenal fornece representações perceptíveis[1] sobre os objetos e relações do sistema formal. Ele produz "feedback" que são manifestações perceptíveis pelo sujeito dos resultados das operações sobre os objetos do sistema formal, portanto manifestações significativas das propriedades desses objetos.

Acrescentaremos à definição de Balacheff um terceiro sistema caracterizando as possibilidades de ações do sujeito (Bellemain, 2002, p.41):

> "(iii) a system of interpretation which determines the possible actions of the user. This system has a set of interface which interprets the subject actions and transforms these actions into operations on the elements of the formal system. The representations of the phenomenal system can be artifact for the subject to act on the elements of the formal system which they represent. In short, this system implements the principle of direct manipulation."

Esse sistema é constituído de comandos e artefatos de construção e manipulação dos elementos do universo interno. E, de uma forma geral, e um pouco de maneira simétrica em relação com o sistema fenomenal, ele tem como função descrever as ações significativas do usuário na interface em termos dos objetos, relações e operadores do sistema formal, elementos processáveis pelo computador.

As caracterizações do sistema fenomenal e do sistema de aquisição destacam a importância, particularmente no caso da aprendizagem, das significações envolvidas na interação

[1] As representações na interface são, em geral, dinâmicas. O dinamismo é usado como uma das propriedades das representações com o computador que participa da construção de significados sobre essas representações. É certamente em relação a esse dinamismo que Balacheff fala de fenômenos.

entre o sujeito e o micromundo. A interface deve produzir representações significativas para o sujeito e interpretar suas ações, também significativas para ele, para poder processar essas ações de uma forma relevante.

5. ENSINAR COM UM MICROMUNDO

Na verdade, embora o micromundo dê condições que permitem a elaboração de situações que favorecem a construção de conhecimentos pelo sujeito, ele não ensina nada: *"... microworlds do not teach; they do not provide instruction.*" (Thompson, ibid., p.85). Ensinar com um micromundo necessita a elaboração de situações de uso do micromundo pelo sujeito. Assim, voltando à origem do paradigma (o micromundo fornece um sistema de objetos, relações e operadores para a expressar e resolver problemas), a resolução de problemas deve necessariamente ter um papel central na elaboração dessas situações. A resolução de problemas é um motor da manipulação dos elementos do micromundo e o motor da construção dos conhecimentos que justifica essa manipulação.

Escolher os bons problemas para ensinar com um micromundo não é somente escolher problemas interessantes do ponto de vista das noções em jogo. Os problemas devem ser adaptados a uma exploração com um micromundo do ponto de vista das estratégias de resolução que ele permite desenvolver. Com os novos sistemas de representação introduzidos pelos micromundos, novas formas de colocar os problemas aparecem. Por exemplo, na situação de construção de um quadrado apresentada não se trata do problema da produção do desenho de um quadrado, mas de um procedimento de construção de um quadrado. Assim, no caso do Cabri-géomètre, que também é o caso da maioria dos softwares de geometria dinâmica, diversos tipos de uso na sala de aula foram desenvolvidos correspondentes a diversas formas de problemas. Entre outros, existem problemas em torno de construções geométricas (Capponi, 2000), de simulações (Moreira Baltar, 1996), de caixas pretas (Charriere, 1996).

A gestão pelo professor da resolução e dos produtos dessa resolução pelos alunos é importante e deve considerar algumas especificidades ao uso do micromundo:

- existe uma contextualização importante dos conhecimentos construídos pelo uso do computador (Artigue, 1991),
- uma atividade importante do aluno com o computador não significa necessariamente que ele está construindo os conhecimentos que justificam essas ações (Guillerault, 1991).

Uma das dificuldades encontradas pelos professores e que eles exprimem regularmente nos encontros onde se trata da questão da integração da tecnologia no ensino, é a dificuldade de acompanhar a atividade do aluno com o computador. Com efeito, muito da atividade do aluno acontece na interação aluno-computador e o professor em geral não tem acesso a essa interação. Recursos computacionais podem ser usados para ajudar o professor na tarefa de acompanhamento do aluno.

Com o objetivo de facilitar o desenvolvimento de tais recursos, estamos trabalhando sobre o paradigma de agente micromundo (Bellemain, 2002b). Pelo agente micromundo, trata-se simplesmente de criar um micromundo capaz de comunicar com outros agentes. Em particular, ele pode comunicar uma descrição das manipulações dos objetos, relações e operadores pelo aluno a outros agentes capazes de tratar essas informações e, por exemplo, fornecer informações significativas ao professor sobre a atividade do aluno.

O agente micromundo é uma forma de trazer as propriedades de interface do micromundo entre sistema formal e sistema de representação em ambientes que podem explorar essas interfaces. O agente micromundo funciona como:

- um agente "racionalizador" da atividade do sujeito (sistema de aquisição). Os produtos dessa racionalização podem ser tratados e,
- como um agente "produtor" de representações significativas sobre os resultados dos processos (sistema fenomenal), e eventualmente sobre os resultados dos tratamentos efetuados por outros agentes.

Pelo agente micromundo, queremos desenvolver uma tecnologia que permite integrar o que o micromundo oferece do ponto de vista da interação com os objetos de saber a ambientes mais complexos integrando outros agentes considerando outros aspectos do funcionamento do sistema didático.

Referências

ARTIGUE, M., (1991), Analyse de processus d'enseignement en environnement informatique, *Petit x*, n°26, Grenoble, p.5-27.

BALACHEFF, N. (1999), Apprendre la preuve, in J. Sallantin et J.J. Szczeciniarz (Editors), *La preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, Paris, PUF.

BELLEMAIN, F. (1992), Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie. Thèse de l'université Joseph Fourier. Grenoble.

BELLEMAIN, F.: 2002a, Tipologia de softwares educativos e papel do professor, VI ECEM, 24 a 26 de maio, Vitória (ES).

BELLEMAIN, F.: 2002b, Microworld agent: creating interface for specific object manipulation in multimedia systems, EARLI SIG Meeting on "multimedia comprehension ", 29 a 31 de agôsto, Poitiers (France), p.41-43.

CAPPONI, B., (2000), De la géométrie de traitement aux constructions dans Cabri-géomètre II au collège, Repères, Lille, Topiques Editions.

CHARRIÈRE, P.M., (1996), Apprivoiser la géométrie avec Cabri-géomètre. Monographie du centre informatique pédagogique (CIP) Genève.

GUILLERAULT, M., (1991), La gestion des menus dans Cabri-géomètre. Etude d'une variable didactique, Mémoire de DEA, Université Joseph Fourier, Grenoble.

HUTCHINS, E.L. (1995), *Cognition in the wild*, The MIT press, Cambridge.

LABORDE, J. M. & LABORDE, C. (1991), Micromondes intelligents et environnement d'apprentissage, In: Bellissant C. (ed.) *Actes des XIII Journées francophones sur l'informatique*, Grenoble: IMAG & Université de Genève, 57-177.

LABORDE, C. e CAPPONI, B. (1994), Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques vol 14, n°1.2*, 165-210.

MOREIRA, Baltar P. (1996), *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes : une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège*, Thèse de l'université Joseph Fourier. Grenoble.

NOSS, R. e HOYLES, C. (1996), *Windows on mathematical meanings, learning cultures and computers*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

PAPERT, S. (1980), *Mindstorms: children, computers and powerful ideas*. Basic Books, New York.

THOMPSON, P.W. (1987), Mathematical microworlds and intelligent computer-assisted instruction, in Kearsley G (ed.), *Artificial Intelligence & Instruction, applications and methods*, Addilson Wesley, 83-109.

CAPÍTULO 5

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 63:78.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01** © 2002, Editora IME-UERJ.

PRODUÇÃO DE MATERIAL PARA ENSINO DE MATEMÁTICA: LEM, IMÁTICA E IGEOM

Leônidas de Oliveira Brandão

Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística -
Universidade de São Paulo
Rua do Matão 1010, Cid. Universitária,
São Paulo, CEP 05508-900
endereço eletrônico: leo@ime.usp.br

Resumo: *Um Professor antes de "entrar na sala de aula", deve primeiro definir o método de ensino a ser aplicado e para isso é necessário definir a priori seus objetivos de ensino. Um objetivo razoável é que os alunos assimilem os tópicos discutidos. Apenas sob esta premissa já poderíamos encontrar uma boa justificativa para o uso do Computador, que é sua capacidade de gerar imagens e animações. Porém, se adotarmos a "autonomia intelectual e do pensamento crítico" [3] do aluno como uma das metas, podemos aproveitar ainda mais a capacidade do Computador, usando-o como bancada de testes para o aluno procurar (fase de conjecturas) e testar relações (fase de demonstrações ou de contra-exemplos). Deste modo, nesta visão simplificadora do ensino, enunciamos três tipos de aprendizagem: aprender ouvindo, vendo ou fazendo. Quanto à adequação destas opções à meta de autonomia crítica, pensamos que um antigo ditado chinês a responde satisfatoriamente: o aluno ouve e esquece, vê e se lembra, mas só compreende quando faz. Neste trabalho apresentaremos algumas idéias de como o Computador pode auxiliar nesta meta de aprendizagem significativa a partir de nossa experiência na criação do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), no IME-USP. Além disso, apresentaremos dois projetos para "aprendizado à distância", um deles é um conjunto de páginas com uma linha do tempo de Matemática (iMática) e o outro é um programa de Geometria Dinâmica (iGeom), que pode inclusive ser usado em páginas Web.*

Palavras-chaves: *Ensino de Matemática, Computador no Ensino, Geometria Dinâmica, Aprender Fazendo.*

***Abstract**: Before a teacher "gets into the classroom", he must define the method to be applied and for this, it is necessary to define his classroom goals. A reasonable goal for any teacher is the comprehension of his subjects by the students. Considering only this target, is reason enough for the use of Computers in classes, because of its capacity of visualization and animation. On the other hand, if we adopt as target the "intellectual autonomy and the critical thought" ([3]) of the student, we can use Computers in a better way. It can be used in a "research approach" as a tool table to help the student in his search (conjectures phases) and to test relations (demonstration or counter-examples phases). Therefore, under this simplified point of view, we can quote the Chinese saying: "the student listens and forgets, sees and remembers, but there is comprehension just when he performs". In this work, we present some ideas about how Computers can help in this "significative learning", by using our experience in a laboratory created for this goal, named Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), at IME-USP. We also describe our projects to provide distance learning (on Internet). One is a set of Web pages with a time line history of Mathematics (iMática) and another is our software for Dynamic Geometry (iGeom), that can be used directly in Web pages.*

***Key words:** Mathematics Teaching, Computador no Ensino, Geometria Dinâmica, Aprender Fazendo.*

1. INTRODUÇÃO

Desde o início do século XX, educadores e tecnocratas têm tentado aplicar à educação todas as inovações tecnológicas ligadas à comunicação, desde o surgimento do rádio (rádio, TV e vídeo), sendo que nenhuma delas ganhou destaque na educação. Com o Computador não foi diferente, tendo-se tentado incorporá-lo ao ensino, *informática no ensino*, sob diferentes objetivos, desde meados da década de 50 ([30]). Porém, este também não conseguiu destaque nesta função até a década de 80, apesar de trazer duas grandes vantagens sobre as outras tecnologias tentadas: contém as características das tecnologias anteriores, além de apresentar um grande potencial individualizador, permitindo uma interação direta com o usuário, o que inexistia nas outras tecnologias [30].

Com o advento dos microcomputadores, nos anos 80, e seu conseqüente barateamento, o Computador passou a ganhar grande destaque no ensino e sugiram muitos projetos nesta direção, inclusive no Brasil. O MEC, por exemplo, lançou dois projetos marcantes: em 1983 o programa EDUCOM (*COMputadores na EDUcação*) e em 1997 o ProInfo (*Programa de Informática na Educação*) ([22], [26], [30]). O ProInfo, que ainda está ativo, "é um programa educacional que visa à introdução das Novas Tecnologias de Informação e Comunicação na escola pública como ferramenta de apoio ao processo ensino-aprendizagem" (http://www.proinfo.gov.br).

Atualmente, devido à importância adquirida pelo Computador em nossa sociedade, além da *informática no ensino*, passou a existir uma preocupação também com a "alfabetização em informática", ou seja, com o *ensino de informática*. Outra dicotomia que ganhou força na década de 90, esta advinda da **Internet**[1], é o *ensino presencial* versus o *ensino à distância*, incorporando ao uso do Computador os objetivos educacionais das tecnologias de comunicação de massa (rádio e TV).

Nosso interesse está centrado no uso do Computador no ensino de Matemática, e por isso, quanto à primeira dicotomia acima apontada, discutiremos apenas a informática no ensino. Quanto à segunda, nos concentraremos no ensino presencial (com professor e alunos na mesma sala, no mesmo momento), mas também abordaremos o ensino à distância via **Web**[2]. Quando falamos em ensino à distância estamos nos restringindo, até o momento, à disponibilização de material didático na Web.

Em resumo, a partir de nossa experiência, discutiremos neste texto as seguintes questões:

1. Como o Computador pode ser usado, principalmente em sala de aula, de modo a facilitar um ensino significativo de Matemática ?
2. Como o Professor, com o auxílio do Computador, pode ajudar o aluno a construir com significado seu conhecimento Matemático ?

Nas demais seções deste trabalho, procuramos responder às questões acima, de um ponto de vista prático, utilizando nossa experiência no Laboratório de Ensino de Matemática (**LEM**), no desenvolvimento do programa de **Geometria Dinâmica (GD)**, i*Geom*[3], e nas páginas do *iMática*. Na próxima seção discutimos algumas preocupações sobre o ensino de Matemática e a ajuda do Computador, apresentando algumas contribuições práticas. Na seção 3, discutimos a relação Professor-Computador a partir das observações de alguns autores, coincidente com a experiência no LEM. Na seção 4 apresentamos o LEM e a motivação para o criarmos. Na seção 5, resumimos os resultados alcançados no LEM. Na seção 6 apresentamos algumas idéias que empregamos no desenvolvimento de um "site" de Ma-

---

[1] Rede de Computadores espalhados pelo mundo, sem qualquer controle central, apenas com uma entidade coordenadora, a *Internet Society* [IS 2001] (http://www.isoc.org).

[2] A *World Wide Web*, (*WWW* ou apenas *Web*) é um sistema de armazenamento, recuperação e troca de informação pela Internet, originado no *European Organization for Nuclear Research* (CERN), no início dos anos 90. A novidade trazida pela Web é permitir a conexão de redes heterogêneas - Diferentes tipos de Computadores, trabalhando com diferentes sistemas operacionais, como PC com Linux, PC com Windows, Macintosh com MacOS, Sun com Solaris OS, etc - , de maneira completamente distribuída (sem a necessidade de um "Computador central"), com recursos gráficos e um sistema baseado em *hipertexto*: pode-se colocar apontadores, "links", que ao ser "clicado" com o "mouse" leva a outros textos, imagens ou outros recursos - para informações detalhadas, na forma de linha do tempo, sobre a histórica da Internet e da WWW consulte, por exemplo, as páginas Web [WWW 2001] (http://www.w3.org/History.html) e http://www.zakon.org/robert/internet/timeline.

[3] Por Geometria Dinâmica (GD) devemos entender a Geometria proporcionada por programas gráficos que, numa área de desenho, permitem construções geométricas a partir de objetos-base, que atualizam automaticamente as construções sempre que o usuário/aluno alterar um dos objetos-base. Pode-se, por exemplo, a partir de dois pontos A e B , construir a mediatriz do segmento AB, assim, sempre que o ponto A ou B for movido na área de desenho, o programa redesenha automaticamente a mediatriz (normalmente de forma contínua, dando a impressão de movimento).

temática e também um programa de Geometria Dinâmica que estamos desenvolvendo. Por fim, na seção7 sistematizamos a metodologia empregada no LEM e alguns resultados[1]

2. COMPUTADOR, ENSINO DE MATEMÁTICA E GEOMETRIA DINÂMICA

As questões 1 e 2 acima passaram a nos preocupar quando precisamos montar uma disciplina que trabalhasse com o Computador, específica para os alunos de licenciatura, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP)[2] , em 1995. Aproveitando esta necessidade, pensamos na criação de um laboratório para testes metodológicos, e posterior divulgação para Professores, no qual os licenciandos interessados pudessem atuar e que pudesse subsidiar a disciplina. Por este motivo montamos o *Laboratório de Ensino de Matemática* (LEM)[3]. O LEM e esta disciplina, MAC118 - Noções de Ensino de Matemática usando o Computador, serão melhor descritos na seção 4.

Como apontado anteriormente, além das razões didáticas do uso do Computador na aprendizagem, devido à sua larga utilização na vida cotidiana,hoje existe também a necessidade da "alfabetização em informática". Isso tem feito com que o Computador venha sendo implantado em grande parte das escolas, inclusive públicas. Nas três turmas de professores no LEM do primeiro semestre de 2001, de 40 professores presentes na primeira aula, 19 já tinham usado o Computador alguma vez com seus alunos. Porém, sua utilização é muitas vezes desvinculada de um planejamento pedagógico e freqüentemente, nas escolas privadas, é atrelada a um setor de informática.

Uma das razões para esta abordagem técnica é a falta de Professores com conhecimento dos potenciais pedagógicos do uso do Computador, sendo que uma grande parcela nem sabe utilizá-lo como instrumento em suas tarefas corriqueiras, como na preparação de planilhas com resultados das avaliações dos alunos. Entretanto este quadro tem mudado, ao menos em São Paulo, pois em uma pesquisa feita no final de 1999, os alunos de MAC118 visitaram 77 escolas na grande São Paulo (e Santos) e detectaram que 11 usam programas gráficos para funções (Winplot, Graphmatica,...), 3 usam o Logo e 12 usam programas de Geometria Plana (11 Cabri e 1 GSP). Nos chamou a atenção o fato do Cabri ter sido o programa mais citado, só sendo alcançado pela planilha eletrônica Excel.

Isso se deveu principalmente ao programa *Ensino Online* da Secretaria Estadual de Educação, que foi o primeiro programa de implantação,de Computadores, em larga escala, nas escolas estaduais de São Paulo [19]. O projeto previa também cursos de capacitação dos professores, que foram considerados insuficientes - segundo os professores no LEM, vide seção 3.

---

[1] Na análise referente ao LEM, a licenciada em Matemática, Mônica Panetta de Faria - estagiária desde o início do LEM até sua formatura em 1999 teve participação ativa.
[2] O endereço Web do IME-USP na Internet é http://www.ime.usp.br.
[3] A página do LEM está no endereço Web http://www.ime.usp.br/lem.

Um exemplo claro de como e onde o Computador pode trazer ganho significativo na aprendizagem é no ensino de Geometria Plana. Como anota [20],

> Uma das ferramentas mais importantes surgidas nos últimos anos no campo do ensino gráfico foi a Geometria Dinâmica, implementada por programas como Cabri-Géomêtre II ([13]) e o The Geometer's Sketchpad ([10])

Um program de GD possibilita ao aluno, a partir de uma única construção, efetuar um número arbitrário de testes para procurar ou verificar uma conjectura, o que seria virtualmente impossível com régua e compasso, e por isso podemosdizer que é **uma-construção, infinitos-testes** (**1-construção, N-testes**). Podemos usar o Teorema de Pitágoras para ilustrar como uma "pesquisa" pode ser catalizada pela Geometria Dinâmica: *o aluno pode construir um triângulo retângulo, tomar algumas medidas e alterar a posição dos vértices e, por si próprio, eventualmente observar que o quadrado da hipotenusa sempre coincidirá com a soma dos quadrados dos catetos*[1].

Apesar de existirem vários programas de GD, como nosso objetivo é trabalhar preferencialmente com professores da rede pública de ensino e almejamos que eles apliquem as idéias com seus alunos, devemos nos restringir a programas gratuitos. Por outro lado, também objetivamos disponibilizar material de GD na Internet, permitindo construções por parte dos "alunos internautas", então devemos considerar apenas os programas que possam ser interpretados pelos *navegadores* (ou *browsers*) populares (como o Netscape e o Internet Explorer). Entretanto, nossas buscas por um programa na interseção destes dois conjuntos (gratuito e permitir construções na Web) têm resultado num conjunto vazio. Isso nos motivou a trabalhar também na construção de um programa de GD.

3. O PROFESSOR, O COMPUTADOR E A INTERNET

As tentativas de incorporação de "tecnologia educativa" à sala de aula, não raramente são apresentadas como "solução para os problemas educacionais", mas se esta incorporação não for acompanhada de um projeto educacional adequado, pode produzir resultados pífios, como observa [17].

Isso implica que "antes mesmo de influir sobre o aluno, o uso dos computadores obriga os professores a respensar o ensino de sua disciplina" [16].

A introdução do Computador nas salas de aula não pode ser feita sem mudanças adequadas no método de ensino, como pode ser constatado em [28], que estuda a aplicaçãode um projeto de longa duração sobre o uso do Computador nas Escolas, o *Apple Classroom Of Tomorrow (ACOT)*[2]. Este projeto é baseado num método construtivista de aprendizagem com significado e [28] conclui que

[1] Na verdade o aluno poderá encontrar algumas configurações onde ocorre alguma diferença numérica, ilustrando a limitação da máquina.

[2] Este projeto foi iniciado ainda em 1985, com cinco escolas americanas, e ainda hoje é mantido pela Apple Computer, Inc.

> "o processo de capacitação de todos que estejam direta ou indiretamente envolvidos com a educação e mais efetivamente do professor, deve acontecer de forma contínua".

Hoje existe praticamente uma unanimidade a respeito da necessidade do uso do Computador no ensino e também de que o aprendizado ocorra com significado. Para citar outros exemplos, [24] diz que

> O computador, pelas suas potencialidades a nível de cálculo, visualização, modelação e geração de micromundos, é o instrumento mais poderoso de que atualmente dispõem os educadores matemáticos para proporcionar este tipo de experiências aos seus alunos..

[29] relata que: depois de inúmeras visitas por várias escolas, de linhas metodológicas bastante diferenciadas, ficou nítido que o computador é uma grande ferramenta que pode ser utilizada com sucesso no ambiente educacional.

Mesmo os organismos oficiais de educação têm apontado como meta este tipo de ensino. Em Portugal, [1] destaca que a posição do Ministério da Educação, em sua Lei de Bases do Sistema Educativo e nos diversos documentos da Reforma Curricular, relativa ao Ensino de Matemática, pode ser sintetizada na frase: "saber Matemática é fazer Matemática'"

No Brasil, as diretrizes educacionais apontam que devemos propiciar ao aluno desenvolvimento da capacidade de aprender e continuar aprendendo, da autonomia intelectual e do pensamento crítico, de modo a ser capaz de prosseguir os estudos e de adaptar-se com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento", conforme o artigo 4º parágrafo I, da resolução CEB, Nº 3 de 26/06/98 [3].

Quanto à informática, o governo de São Paulo, por exemplo, tem investido bastante na parte técnica, equipando escolas e também tentando capacitar professores. Podemos citar dois "programas" nesta linha: o grupo Gerência de Informática Pedagógica - GIP, dedicado à implantação de projetos na área de Informática Educacional e de Tecnologias de Educação a Distância para atender a rede pública estadual de ensino (http://www.fde.sp.gov.br/gip/frm_gip.htm); e o projeto *Ensino OnLine* [19], que previa inicialmente 5 micros por escola, com oficinas pedagógicas nas delegacias de ensino, as quais não atenderam satisfatoriamente aos professores. Este último, apesar de ser aplicado em larga escala, tem causado grandes frustrações, pois atingem uma parcela pequena de alunos e a capacitação dos professores não tem sido suficiente[1]. Deste modo, é importante a existência de centros de difusão de material de ensino, idealmente presencial (como o LEM) ou ao menos à distância(como *iMática*).

[1]Estas observações são constatadas no LEM, que recebe professores de várias regiões da Grande São Paulo. Em 2001, por exemplo, considerando apenas as escolas estaduais de ensino médio, temos professores de 12 diferentes escolas, incluindo Parelheiros, Perus, Itupeva, Embú e Taboão da Serra.

4. O QUE É O LEM

O LEM é basicamente um laboratório para "testar e divulgar aulas de Matemática" utilizando o Computador. A idéia de criar um tal laboratório surgiu em 1995 na preparação de uma disciplina sobre uso do Computador para licenciandos do IME, e em 1998 foi oficialmente incorporada ao currículo da licenciatura sob o nome de *Noções de Ensino de Matemática usando o Computador* (MAC118)[1], sob responsabilidade do Departamento de Ciência da Computação do IME-USP.

As atividades do LEM tiveram início, informalmente, com os alunos do ensino médio da Escola de Aplicação da USP no segundo semestre de 1996, e depois com os alunos da disciplina *Seqüências recursivas e equações de diferença*, no programa de Verão de 1997 (http://www.ime.usp.br/verao/01/97). No segundo semestre de 1997, tivemos a primeira turma de professores a participar do LEM. Desde então, estas atividades são dirigidas a dois públicos: professores de Matemática do ensino fundamental e médio e aos alunos do ensino médio[2].

Quanto aos objetivos principais do LEM, podemos enumerar os seguintes:

1. divulgar uma metodologia de ensino de Matemática que permita uma participação ativa dos alunos no processo de aprendizagem com significado, apoiado na resolução de problemas;
2. mostrar as possibilidades do Computador como ferramenta interativa e dinâmica e a necessidade de aprimoramento em seu uso;
3. aprofundar conhecimentos em Matemática, permitindo maior entendimento de sua estrutura formal-dedutiva.

Hoje, a estrutura do LEM é composta por seu coordenador e seus "estagiários", sendo estes últimos alunos (ou ex-alunos) da licenciatura do IME. Administrativamente, o LEM conta com o apoio do Centro de Ensino de Computação (CEC), cuja página é http://www.ime.usp.br/cec.

Os cursos são estruturados a partir de problemas-desafio, em geral ministrados pelos estagiários do LEM em duas etapas: inicialmente aplicam a metodologia a alunos do ensino médio e, posteriormente, repassam esta experiência aos professores que vêm fazer cursos no LEM.

No método empregado, o computador é utilizado como uma *bancada de testes* para que o aprendiz procure propriedades/relações (fase de conjecturas) e depois as teste (fase de demonstrações ou apresentação de contra exemplos),sendo estimulado o trabalho cooperativo (entre todos).Em alguns casos, como na Geometria Dinâmica ou visualização de fun-

---

[1]A página da disciplina ministrada em 2001, pode ser encontrada em http://www.ime.usp.br/~leo/mac118/01.

[2] Estes alunos são geralmente de escolas públicas vizinhas à USP. Inicialmente trabalhávamos com a Escola de Aplicação da USP, e atualmente com as escolas estaduais de ensino fundamental e médio, *Emygdio de Barros*, *Alberto Torres* e *Architiclino Santos*. Esta última escola foi incorporada ao projeto em 2001.

ções, esta *bancada* pode ser muito mais eficiente que a utilização de materiais tradicionais, como lápis, papel, régua e compasso.

O trabalho com os alunos da rede pública tem também o objetivo de permitir que os estagiários do LEM tenham uma experiência concreta na aplicação do método proposto, para que se sintam mais confortáveis com a forma de ensino e possam avaliar seus resultados. Começamos com aulas introdutórias de computação(o que é um Computador, sistema de arquivos, ambiente de janelas, etc). Os tópicos de Matemática e programas utilizados, depois de "testados" com os alunos, são empregados nos cursos para professores.

Com os professores, no início do curso são propostas atividades elaboradas com o objetivo específico de estimular uma discussão sobre o ensino da Matemática com a utilização do Computador. A partir daí, são realizadas atividades de forma a permitir que o professor vivencie a dinâmica que poderá desenvolver com seus alunos. Ao final do curso, é solicitado o planejamento de uma aula para que os professores participantes possam refletir sobre as possibilidades de trabalho com o uso do Computador.

O curso oferecido aos professores é apostilado, numa linguagem que procura ser acessível, de modo a não apenas servir de guia às aulas, bem como sanar eventuais dúvidas matemáticas. Os professores ainda recebem um CD com os programas utilizados, mas que também podem ser descarregados, em qualquer momento, da página http://www.ime.usp.br/lem/free.html.

Para um melhor entendimento deste curso é importante ressaltar que procuramos programas específicos mais adequados para cada proposta de atividade. Sempre que possível adotamos programas gratuitos, que possam ser entregues aos professores, visando aumentar as chances de uso das atividades com seus alunos.

5. RESULTADOS OBTIDOS NO LEM

Levando em consideração o quadro exposto na seção 3 podemos supor que os professores de Matemática estão sendo pressionados a empregar o Computador no ensino. De fato, a experiência do LEM confirma isso. Hoje as escolas, e governos, usam o Computador como propaganda. Implicitamente existe a sensação de que "as escolas que não usam ficam defasadas", como observou um professor no LEM em 2001. No caso de São Paulo, um dos patrocinadores do emprego do Computador no ensino é o governo do estado, como pode-se notar principalmente na abrangência do projeto "Ensino Online" (indicado na seção 3)

Porém, devido ao desconhecimento de atividades pedagógicas adequadas,notamos que o emprego do Computador tem sido mais como fim e não como meio de aprendizagem[1]

Esta leitura também é feita por [17]:

[1] Notamos que algumas das escolas que usam o Computador, conseguem um pouco mais, usando o Computador como *visualizador*, principalmente em programas de funções (tipo Winplot) e de Geometria Dinâmica (Cabri).

> A informática, nessa época, e de uma certa maneira até nossos dias ainda era uma atividade de informáticos. ..... Neste quadro, a "educação utilizando informática" praticamente inexistia e o que se fazia era "ensino de informática".

Isso coloca em foco para estes professores a questão inicialmente proposta: como usar de modo significativo esta tecnologia ?

No LEM procuramos responder a esta demanda de uso efetivo do Computador no ensino, com atividades desenvolvidas a partir da resolução de problemas e empregando o Computador como catalisador no processo de descoberta. A abordagem de resolução de problemas não é restrita a ensinar heurísticas, como é o foco em [25] e [14], mas propiciar ao aluno *aprender Matemática, fazendo-a.*

Analisando algumas das turmas de alunos do LEM, inicialmente, acreditávamos que eles ficariam entusiasmados com as aulas, mas o resultado superou a expectativa: a relação de colaboração e cooperação entre o grupo foi muito positiva, mostraram entusiasmo pelas aulas e envolvimento nas atividades propostas, a motivação era grande. Outro aspecto positivo que percebemos foi a mudança de expectativa dos alunos, vários deles comentam que inicialmente vinham ao LEM para aprender "computação", mas ao final do semestre estavam muito mais interessados no aprendizado matemático.

A motivação e maior facilidade de trabalhar no Computador é comumente citada pelos alunos do ensino médio. Em particular, uma atividade desenvolvida no semestre passado ilustra bem isso:propusemos a *construção de um quadrado no papel, com régua e compasso*. Na ficha de aula do aluno, solicitamos que eles escrevessem o que aprenderam, sem fixarmos qualquer formato para isso. Dos 16 alunos presentes, 6 alunos escreveram que com o computador é mais fácil desenvolver a tarefa, enquanto apenas 1 aluno escreveu o contrário (mais fácil no papel). Como não era uma questão dirigida, os 9 alunos restantes não fizeram comparações sobre as dificuldades "papel × computador".

Quanto aos professores que vêm ao LEM, analisando seus questionários, notamos muitas dificuldades no uso do Computador e também no emprego de métodos que privilegiem a participação do aluno. Notadamente em relação ao Computador, os professores que estão lecionando a mais tempo, sentem maior dificuldade por não se sentirem confortáveis com o "mundo da eletrônica".

Os professores gostam da metodologia empregada nas atividades, acham que com o Computador e com resolução de problemas[1] seus alunos ficam mais motivados na sala de aula, possibilitando a aprendizagem com significado. Por outro lado, a queixa mais freqüente nos questionários é que acham muito difícil, num primeiro momento, saber como introduzir alguns tópicos de Matemática usando o Computador.

---

[1]No primeiro semestre de 2001, dos 48 professores matriculados nas três turmas no LEM, 19 tinham usado alguma vez o Computador com alunos e 23 já usara resolução de problemas em aula

6. PÁGINAS WEB E GEOMETRIA DINÂMICA

Uma das dificuldades que encontramos para preparar professores, e mais diretamente alunos, capazes de usarem o Computador de maneira efetiva na aprendizagem é o grande volume de trabalho requerido (existe uma quantidade muito grande de professores que ainda não se sentem confortáveis nesta tarefa). Neste sentido, as páginas Web podem contribuir bastante, pois uma das grandes vantagens da Web é poder atingir qualquer pessoa conectada na "grande rede". No caso da Geometria Plana (Euclidiana, Analítica, Trigonometria e Desenho Geométrico), o uso do Computador (com programa de Geometria Dinâmica, seja pela Web ou não) pode potencializar bastante um ensino com construção do conhecimento. Deste modo, a junção de GD à Web é um objetivo natural para nós.Como citado anteriormente existem vários programas para GD, porém desconhecemos a existência de algum que permita ao aluno/"internauta" fazer suas construções diretamente numa página Web. Esta limitação nos motivou a produzir um tal programa, *iGeom*, que além disso pudesse ser distribuído para professores de Matemática de rede pública de ensino. Este programa está sendo escrito em *Java*[1], para podermos usá-lo também na Web, e pode ser encontrado no endereço http://www.matematica.br/igeom.

Em paralelo à construção deste programa, iniciamos a construção de um "site", *iMática*, para contribuir com o aprendizado em Matemática fornecendo material para pesquisa (via textos, problemas, animações...) e que contivesse um repositório de programas que efetivamente pudessem auxiliar o aprendizado matemático.

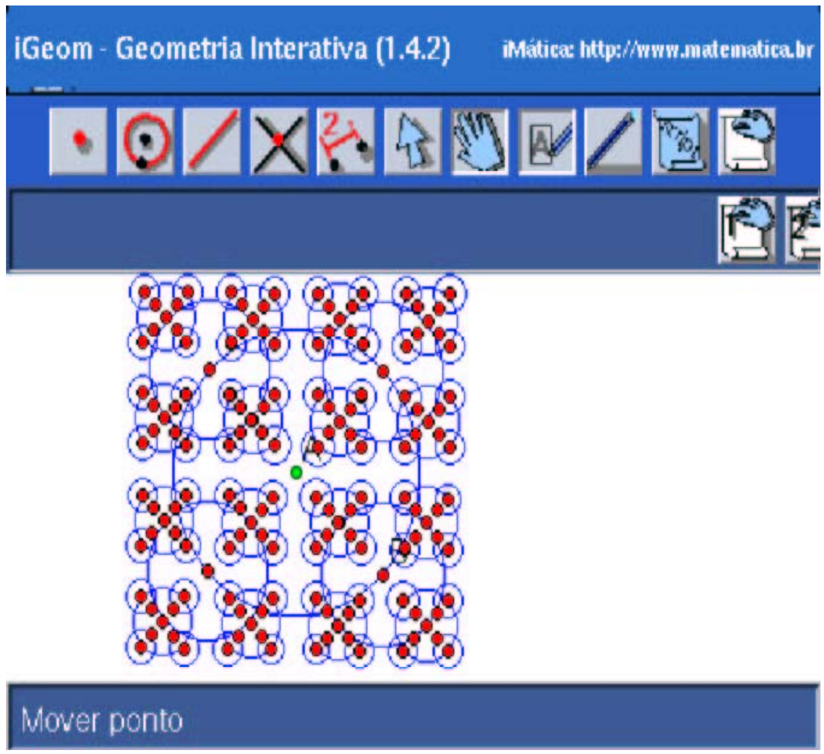
O trabalho no *iMática* pode ser dividido em duas partes: uma é a produção de ferramentas para automatizar a geração de páginas e a outra é a produção de conteúdos.Até o momento, o *iMática* (parte de ferramentas) e o *iGeom* têm sido desenvolvidos em iniciações científicas de alunos do curso de Ciência da Computação, orientados por este autor. O núcleo do *iGeom* foi desenvolvido com Ricardo Hideo, a parte que permite gravar construções na forma de macros, foi implementada com Fabiana Piesigilli. Neste semestre a aluna Renata Teixeira começou a trabalhar no *iGeom*, ficando responsável pelo desenvolvimentode coordenadas cartesianas.

No *iMática*, o aluno Seiji Isotani tem trabalhado no desenvolvimento de ferramentas para automatizar a produção de páginas, que foi iniciado por Maurício Rapchan Andretta [9]. Na parte de produção de conteúdo para o *iMática*, a licenciada em Matemática Valéria Ostete Jannis Luchetta trabalhou de 1999 (segundo semestre) a 2001 (final) e a licencianda Fernanda Bürher trabalha desde o início 2002, na parte de pesquisa dos textos de História, sob a orientação do professor Francisco César Polcino Milies - http://www.ime.usp.br/~polcino - do departamento de Matemática do IME-USP.

[1] Uma linguagem de programação desenvovidade pela *Sun*, orientada a objetos, que pode ser interpretada por qualquer sistema operacional e por todos os navegadores ("Web browsers") populares

A primeira versão do *iMática* foi ao ar em abril de 2000, contendo principalmente uma seção de *História da Matemática*, no endereço http://www.matematica.br. A primeira versão do *iGeom* (na forma de *applet* - "pequenos programas" específicos para Web, em *Java)* foi disponibilizada em fevereiro deste ano, no endereço http://www.matematica.br/igeom.

iGeom



Devido ao dinamismo, um programa de Geometria Dinâmica permite a elaboração de construções geométricas sofisticadas, que uma vez prontas permitem que o aluno efetue um número arbitrário de testes, desde que feitas de maneira rigorosa (1-construção, N-testes). Isso cataliza o processo de descoberta de propriedades, facilitando o trabalho do aluno (um exemplo desta "facilitação" está relatado na seção 5, página 71, na experiência no LEM de construção do quadrado).

Na figura ao lado, apresentamos uma tela do *iGeom* com a representação (finita) de um fractal (isso é facilmente implementado utilizando seu recurso de macro recorrente).

O recurso "1-construção, N-testes" traz grandes benefícios ao aprendizado com significado (o aluno constrói seu conhecimento), nas várias Geometrias, pois agiliza o processo de descoberta por parte do aprendiz.

Nesse projeto, que denominamos *iGeom (Geometria Interativa via Internet)*, visamos dsensenvolver um programa de GD em *Java,* agregando a vantagem da portabilidade e integração com o ambiente Web. Além dos potenciais usos em sala de aula, este programa será integrado ao "site" *iMática,* de modo a conseguirmos disponibilizar atividades de Geometria onde o "internauta" possa efetuar suas próprias construções/testes. Além disso, o programa – na versão aplicativo- poderá ser distribuído para as escolas públicas.

Na figura anterior, apresentamos uma construção geram no *iGeom,* a partir de macro com recorrência – com dois passos de recursão.

iMática

A construção de um "site" envolve muitas decisões de projeto. Para a construção do iMática, iniciada em abril de 2000, adotamos como meta a produção de material principalmente, a partir de iniciações científicas. Outra meta era que a produção de conteúdo não demandasse conhecimento Computação (nem mesmo de HTML, a linguagem "usada" na

Web) – [9] e [12]. Para isso seria necessária a produção de ferramentas de automatização e a definição de uma estrutura par a alimentação dos textos (conteúdo). Optamos pela utilização de filtros em Perl ([2], [7] e [21], por ser uma linguagem livre desenhada para trabalhar com palavras (dispõe de interpretadores gratuitos, para várias plataformas, inclusive *Linux* e *Windows*).

A primeira seção que decidimos produzir foi uma de História da Matemática, construída a partir de uma linha de tempo e eventos matemáticos. Para esta seção os dados (textos com história) deveriam estar no formato padrão de texto (ASCII) e conter alguns cabeçalhos com, por exemplo, título do texto, data do "evento", quais tópicos de Matemática contém e, se for uma biografia, de quem é. As fórmulas matemáticas são digitadas no formato Latex [15] e, após serem processadas, são convertidas para um formato padrão de imagens (*GIF* ou *JPEG*).

O filtro produz as páginas com figuras, "links" e fórmulas, além de produzir automaticamente três diferentes indexações: uma linha de tempo com os "eventos" matemáticos, uma seção por tópicos e outra com biografias. A vantagem desse método é conseguirmos, a partir da mesma base de dados, produzirmos diferentes caminhos para recuperarmos a informação. Por exemplo, uma biografia poderá ser encontrada na lista de biografias, mas também pelos tópicos que o matemático estudou e ainda pelo período que viveu.

No momento estamos trabalhando na definição de uma nova seção, de Geometria, baseada no programa *iGeom*, com a licencianda Roberta Ribeiro Altermann. Esta seção introduzirá conceitos básicos de Geometria a partir de problemas propostos (a serem resolvidos "on-line" no *iGeom).*

7. CONCLUSÃO

A implantação do uso do Computador no Ensino encontra uma resistência natural por entrar em conflito com métodos já estabelecidos, além da barreira do desconhecimento de seus recursos e de como utiliza-lo eficazmente.

O principal responsável para que a utilização do Computador se dê de uma forma a propiciar uma melhora na qualidade do processo de ensino/aprendizagem é sem dúvida professor. Para tanto o desafio inicial é a capacitação deste, dotando-o de autonomia no uso de informática, pois, como nos contam em seus depoimentos, "*precisamos primeiro dominar o computador para depois usa-lo no ensino"*. A partir do momento em que eles estiverem convencidos dos benefícios dessa tecnologia, tanto para eles como para seus alunos, será investido mais tempo e esforço para integrá-las às suas salas de aula. Dessa forma, acreditamos que o Computador poderá ser efetivamente incorporado ao ensino.

Não devemos, entretanto, ter a ilusão de que o Computador será a salvação do ensino, mas devemos ter sempre em mente que as mudanças benéficas se darão em algumas circunstâncias.

A transmissão de conhecimentos professor/aluno no seu modo tradicional, *professor fala aluno ouve*, não é mais considerada como uma postura adequada. Porém a orientação do educador é necessária para que o aluno possa refletir e transformar suas idéias em conhecimento efetivo. Essas mudanças no ensino/aprendizagem colocam o aluno do centro do processo, devendo construir o seu saber através de tarefas cooperativas e de explorações, e dessa maneira, aprenda a aprender. O Computador pode ter aqui um importante papel na agilização de testes e simulações. Sob nosso ponto de vista, isso deve ser feito de modo a propiciar ao aluno *o fazer*, deixando de usar o Computador apenas com *over*.

As mudanças são difíceis tanto para professores quanto alunos. Para que um professor tenha a idéia do tema que poderá trabalhar e qual o programa usar, precisará pesquisar o que já é feito, ter tempo para planejar suas aulas e ministrar aos seus alunos, aulas de conhecimento básico de computação, bem como do programa a ser usado. Resulta daí um bom tempo de dedicação. Já os alunos acham mais fácil serem receptores de informações, pois não estão acostumados a trabalhar em grupo, a investigar, a descobrir, a criar, a responder, a ser ouvidos, etc.

O ponto de partida para estes professores poderá ser a análise de alguns exemplos de aulas, como as usadas no LEM. Aprender a utilizar o Computador e a lecionar numa abordagem construtivista é um processo que não se aprende em uma única oficina, por isso a capacitação deve ser continuada possibilitando assim a troca de informações com outros colegas, e permitindo uma maior reflexão sobre sua prática diária.

Assim, apesar de não existir mais dúvidas quanto à necessidade de mudanças no ensino médio, substituir antigos hábitos de ensino levará um certo tempo, mas hoje se espera que o "profissional do futuro" além das habilidades básicas de leitura e escrita, esteja preparado para trabalhar em grupos, localizar, avaliar e utilizar informações e trabalhar com uma série de tecnologias (conforme consta das "*Competências e Habilidades a serem objetivadas em Matemática"*, dos Parâmetros Nacionais Curriculares para o Ensino Médio, [23]).

Em resumo, nossa experiência no LEM mostra que nesta proposta de ensino, principalmente com o uso de Geometria Dinâmica, os alunos ficam mais motivados para aprender, gostam de pensar quando têm oportunidade, arriscam mais com o Computador e ficam mais envolvidos quanto têm oportunidade de descobrir e participar ativamente. Neste método o erro aparece sob um novo enfoque tornando-se um fator de aprendizagem: através de análise do erro e de novas tentativas é que se dá o entendimento. Esta fase de tentativa/erro, em que o aluno verifica como raciocinou, é muito mais dinâmica e interativa com o uso do Computador. Assim, os aprendizes vão se tornado responsáveis pela própria aprendizagem e tendo um maior controle e compreensão sobre a mesma.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser concluído se a ajuda dos estagiários, alunos e ex-alunos de licenciatura do IME, que trabalham comigo no LEM. Particularmente agradeço à ajuda de Rika Andersen, Shirley Ferreira e principalmente Mônica Panetta de Faria. A última ajudou inclusive na redação de algumas seções do artigo.

Referências:

[1] BORRÕES, Manuel L.C. *O Computador na Educação Matemática* URL: http://www.apm.pt/apm/borrao/matematica.doc, em 18/06/1999.

[2] BRENNER, S.E. & AOKI, E. *Introduction to CGI/Perl*. M&T Books, New York, 1996.

[3] CEB. *Res. da Cˆamara de Ed. Básica do Cons. Nac. de Educação*, n. 3, de 26/06/98.

[4] CAMACHO, M.L.A.S.M. *As Mais-Valias da Realidade Virtual na Educação*. URL: http://www.api.pt/eni96/encontro.net/papers/com-09.htm,em 14/04/1999.

[5] CARRAHER,T.N., org. *Aprender Pensando; contribuições da psicologia cognitiva para a educação*. Recife, Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco, UFPE, 1983.

[6] COXETER,H.S.M. *Introduction to Geometry*. New York, Wiley, 1969.

[7] DEEP,J. & HOLFELDER,P. *Developing CGI Applications with Perl*. John Wiley & Sons, 1996.

[8] DIMENSTEIN,G. URL: http://www.uol.com.br/aprendiz/ensaio/index.html, em 14/04/1999.

[9] ISOTANI,S., HIDEO,R. & BRANDÃO,L.O. *iMática: Ambiente Interativo de Apoio ao Ensino de Matemática via Internet*. Anais XXI Congr. Bras. Comp., pp 533-543, Fortaleza, jul. 2001.

[10] JACKIN, N. *The Geometer's Sketchpad*. Berkeley: Key Curriculum Press, 1990.

[11] JAVA. *Linguagem de Programação Java*. URL: http://java.sun.com, em 27/04/2001.

[12] JIANPING,Z., GIBBONS,A.S. & MARRILL,M.D. *Automating Design of Adaptive and Self Improving Instruction*. Cap. 35, pg 613-632, Ed. Educational Technology Publication, 1997.

[13] LABORDE, J.M. & BELLEMAIN,F. *Cabri-geometry II*. Dalas: Texas Instruments, 1994.

[14] LAKATOS, I. *Proofs and refutations*. New York State: Cambridge University Press, 1976.

[15] LAMPORT,L. *LaTeX a Document Preparation System*. Addison Wesley, 1999.

[16] LÉVY, P. *A Máquina Universo: criação, cognição e cultura informática*. Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1998.

[17] LUCENA,C. & FUKS,H. *A. Educação na Era da Internet: Professores e Aprendizes na Web*.Rio de Janeiro: Clube do Futuro, 2000.

[18] MOISE,E.E. *Elementary Geometry From an Advanced stand Point*, seg. ed., Reading, Addison-Wesley Publications, 1963.

[19] Ensino OnLine. *A Escola de Cara Nova na Era da Informática*.URL: http://www.educacao.sp.gov.br/acoes/informatiz/bolinfor1.htm, em 27/04/2001.

[20] SANTOS,E.T. & MARTOMEZ,M.L. *Software para Ensino de Geometria e Desenho Técnico*. Anais III Cong. Int. de Engenharia Gráfica nas Artes e no Desenho, Ouro Preto, jun. 2000.

[21] PERL. *Linguagem de Programação Perl*. URL: http://www.perl.com, em 27/04/2001.

[22] PENTEADO,M.G., BORBA,M.C. & GRACIAS,T.S. *Informática como ve´ýculo para mudan¸ca*. Zetetiké, vol. 6, n´um. 10, Dezembro 1998.

[23] PNCEM. *Parâmetros Nacionais Curriculares para o Ensino Médio*. URL: http://www.mec.gov.br/semtec/ftp/Ciênciasn%20dan%20Natureza.doc, em 28/09/1999.

[24] PONTE,J. *O computador um instrumento da educação*. Lisboa: Texto editora, 1986.

[25] POLYA,G. *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, (versão original de 1957), 1973.

[26] PROINFO. *Programa de Informática na Educação*. Lan¸cado por portaria em 09/04/1997 URL: http://www.proinfo.gov.br, em 27/04/2001.

[27] SALVADOR,C.C. *Aprendizagem Escolar e Construção do Conhecimento*. Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1994.

[28] SANDHOLTZ,J.H., RINGSTAFF,C. & DWYER,D.C. *Ensinando com Tecnologia Criando Salas de Aula Centradas nos Alunos*. Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1997.

[29] TAJRA,S.F. *Informática na Educação: Novas Ferramentas Pedagógicas para o Professor da Atualidade*. São Paulo: Editora érika, 1998.

[30] VALENTE,J.A., organizador. *O Computador na sociedade do conhecimento*. URL: http://www.seed.pr.gov.br/download.htm, em 28/05/2001.

CAPÍTULO 6

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 79:87.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR

Antonio Carlos Brolezzi

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
endereço eletrônico: brolezzi@ime.usp.br

Resumo: *O recurso à História da Matemática tem sido apontado como tendência em construção na Educação Matemática. Nos últimos anos, esse recurso pedagógico foi oficialmente reconhecido como importante para o ensino em todos os níveis. Particularmente no que se refere ao Ensino Superior, a História da Matemática aparece como um dos pontos essenciais das Diretrizes Curriculares tanto dos cursos de Licenciatura quanto de Bacharelado em Matemática. Entretanto, ainda não é certo como incluir História da Matemática no Ensino Superior. O uso de tecnologias da informação pode servir para melhorar o acesso e o uso da História no Ensino de Matemática. Para contribuir para essa discussão, apresentamos uma proposta de disciplina História da Matemática que aborda o acesso às fontes, o valor didático e o uso de tecnologias.*

Palavras-chave: *História da Matemática, Tecnologias, Valor Didático, Fontes, Formação de Professores*

1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UMA TENDÊNCIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Na última década, a pesquisa no campo da Educação Matemática incorporou a abordagem histórica do conteúdo matemático como um dos componentes do processo educativo. BARONI e NOBRE (1999)e apontam o uso da História como instrumento metodológico, entre outros, que pode ser utilizado pelo professor de matemática em suas atividades didáticas:

> A História da Matemática é um destes “instrumentos” que, nos últimos tempos, vem ganhando um certo destaque no meio acadêmico-educacional (BARONI e NOBRE, 1999: 129).

Além de ganhar destaque, esse instrumento tem sido aperfeiçoado, ultrapassando, ao menos no meio acadêmico, a consideração da História da Matemática como mera fonte de curiosidades. Trata-se de considerar a Matemática e seu ensino à luz da História, não necessariamente usando fatos da História nas aulas de Matemática. Por exemplo, ao ensinar Álgebra no Ensino Fundamental, o professor que conhece história pode identificar as diferentes etapas da álgebra – retórica, sincopada e simbólica, e diversificar seus modos de abordagem da matéria, sem necessariamente ter que contar como foi a história da álgebra aos seus alunos.

Contudo, não se pode afirmar que se trata de uma tendência consolidada. Parece-nos possível inserir essa abordagem na tendência considerada emergente por FIORENTINI em 1995 (p. 31), a qual denominou provisoriamente de tendência histórico-crítica:

> A Matemática, sob uma visão histórico-crítica, não pode ser concebida como um saber pronto e acabado mas, ao contrário, como um saber vivo, dinâmico e que, historicamente, vem sendo construído, atendendo a estímulos externos (necessidades sociais) e internos (necessidades teóricas de ampliação dos conceitos). Esse processo de construção foi longo e tortuoso. É obra de várias culturas e de milhares de homens que, movidos pelas necessidades concretas, construíram coletivamente a Matemática que conhecemos hoje.

Essa visão da Matemática enquanto ciência em construção, proporcionada pelo estudo da História, revela seu valor didático mais profundo. Mas é preciso cautela na abordagem desse tema, como concluem BARONI e NOBRE:

> O estudo do papel da História da Matemática no desenvolvimento do ensino e aprendizagem da matemática tem crescido nos últimos anos, mas ainda não possui fundamentações sólidas que possam se constituir em parâmetros claros de atuação (BARONI e NOBRE, 1999: 135).

Assim, o recurso à História da Matemática, se considerada como instrumento da Educação Matemática, pode ser definido como tendência emergente ou em construção, já que, apesar de não consolidada, estabelece uma crescente presença tanto no meio acadêmico quanto na prática escolar.

2. Adoção Oficial da História da Matemática no Ensino Superior

Se o professor pretende usar história, ela tem de estar presente na sua formação. Os parâmetros curriculares parecem reconhecer isto. Com a promulgação da nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996), que estabelece em seu Artigo 53 que as universidades deverão fixar o currículo de seus cursos, observadas as diretrizes gerais pertinentes, iniciou-se um processo lento e confuso de tentativa de definição das diretrizes curriculares dos cursos de graduação, que deverão substituir os currículos mínimos. Temos atualmente ante-projetos de diretrizes curriculares, elaborados por comissões de especialistas constituídas pela Secretaria de Ensino Superior - SESu e atualmente em estudo no Conselho Nacional de Educação[1].

Há também propostas de diretrizes elaboradas pelas Comissões de Curso do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas – INEP, para possibilitar a confecção dos programas do

[1] Cf <www.mec.gov.br/Sesu/diretriz.shtm>

Exame Nacional de Cursos – ENC (Provão). O INEP explica assim a existência de seus anteprojetos próprios de diretrizes curriculares:

> No momento em que, atendendo à determinação legal, a SESu/MEC lançou o Edital nº 4, de dezembro de 1997, convocando todas as instituições de ensino superior a apresentar propostas para as novas diretrizes curriculares dos cursos de graduação, as Comissões de Curso do ENC, por haverem já discutido longamente esses temas, sentiram-se na obrigação de colaborar com o processo de definição das novas diretrizes curriculares para os respectivos cursos.
>
> Suas propostas são aqui apresentadas, colocando-se cada uma dessas Comissões à disposição das respectivas Comissões de Especialistas da SESu/MEC para o debate. [1]

Assim, o INEP, que tem a necessidade de realizar medidas e avaliações do ensino, elaborou suas próprias diretrizes e com elas delineou os conteúdos e habilidades a serem cobrados no Provão. As propostas do INEP prescrevem estudos de História da Matemática como uma das capacitações do futuro Matemático formado pelos cursos de Bacharelado em Matemática:

> Os profissionais formados nos cursos de Matemática devem possuir as seguintes capacitações:
>
> (...)
>
> d. visão histórica e crítica da Matemática, tanto no seu estado atual como nas várias fases de sua evolução; [2]

Para o Curso de Licenciatura em Matemática, a Comissão de Curso do ENC propõe História da Matemática como conteúdo básico obrigatório:

> Um curso de licenciatura em Matemática deve conter disciplinas que cubram minimamente o seguinte conteúdo básico em Matemática:
>
> Cálculo Diferencial e Integral, incluindo equações diferenciais
>
> Álgebra Linear
>
> Geometria
>
> Estruturas Algébricas
>
> História da Matemática
>
> Análise Matemática[3]

Essa inclusão, mesmo sendo ainda objeto de debate acadêmico, já está tendo efeitos diretos na organização dos currículos. Por carência de diretrizes curriculares oficiais, as propostas do INEP acabam por ser postas em prática, pois estão associadas ao programa do Provão.

---

[1] <www.inep.gov.br/enc/diretrizes.htm>
[2] <www.inep.gov.br/enc/diretrizes/Matemática.htm>
[3] <www.inep.gov.br/enc/diretrizes/Matemática.htm>

As propostas da SESu, mesmo não referendadas em forma de resolução do Conselho Nacional de Educação, também já estão influenciando os currículos, pois são adotadas como textos de apoio ou mesmo parâmetros curriculares nas visitas das equipes de especialistas para a realização das Avaliações das Condições de Oferta dos Cursos de Graduação.

Assim, pela via da avaliação, ou seja, da cobrança, assinalamos a presença da História da Matemática nos currículos de licenciatura e também de bacharelado (apesar de que a proposta da SESu para o bacharelado não menciona História).

Essa adoção oficial traz uma importante conseqüência para o ensino superior, que é a criação de uma demanda gigante por História da Matemática nos cursos universitários e por parte dos professores em exercício. Essa demanda, a nosso ver, exigirá trabalho em conjunto da comunidade dos educadores matemáticos interessados no assunto.

Vamos propor agora um programa de disciplina de História da Matemática que possa contribuir para a inserção da História no Ensino Superior.

3. REFLEXÕES PRELIMINARES SOBRE A DISCIPLINA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

NOBRE (2000) mostra a necessidade de uma maior reflexão sobre o uso da história na formação do profissional de matemática. Não bastam propostas oficiais incluir História da Matemática como disciplina sem essa análise mais profunda. É necessário que o debate evolua, tendo como parâmetros questões do tipo:

> Quais seriam as implicações imediatas caso houvesse obrigatoriedade da disciplina [História da Matemática] em todos os cursos de graduação do país? (NOBRE, 2000: 179)

Precisamos debater se a História da Matemática deve ser uma disciplina obrigatória, ou mesmo se deve ser uma disciplina acadêmica. Nesse caso, qual deveria ser sua abordagem metodológica? Em que período deveria aparecer no currículo? Qual sua carga didática recomendada?

Existe a proposta de que a História, mais que se constituir em uma disciplina a parte das demais, deva estar presente em todas as disciplinas, impregnando o conteúdo e a abordagem, como afirma ANASTÁCIO (2000: 76)

> Essas disciplinas, por sua vez, devem ser trabalhadas num enfoque histórico-filosófico de tal maneira que o aspecto sócio-cultural da matemática se faça presente.

A existência dessas questões, ainda necessitadas de mais discussão, mostram um pouco da profundidade do tema. Por exemplo, é preciso aprofundar na questão da formação do professor que leciona dos cursos de Matemática. Existem profissionais aptos para ensinar matemática com esse enfoque histórico-filosófico?

Sabemos que o acesso à História da Matemática sempre foi restrito. Milhares de professores atualmente em ação não tiveram acesso a abordagens práticas que permitissem um trabalho efetivo utilizando História no ensino de Matemática. Inúmeros outros sequer tiveram uma aula de História da Matemática. Como há poucos professores universitários formados nesta área, BARONI e NOBRE alertam para a existência de um verdadeiro ciclo:

> Nesse sentido há um ciclo que se forma e a deficiência relativa à História da Matemática entre aqueles que desenvolvem suas atividades em torno da Matemática se generaliza. *(BARONI e NOBRE, 1999: 130)*

Mesmo quando o professor tem acesso ao conhecimento sobre a História da Matemática, nas aulas de licenciatura ou através de livros e artigos, depara-se também com outras barreiras, pois pensar historicamente a matemática supõe, como pano de fundo, um plano interdisciplinar que tem como característica um estreitamento de relações entre as áreas ditas exatas e as humanidades. Essa relação, buscada e evidenciada nas novas propostas curriculares, está longe dos professores em exercício, e também distante dos alunos de Licenciatura, formados em escolas em que a divisão do conhecimento impregna a prática docente cotidiana.

Para o acesso ao conhecimento sobre a História da Matemática propriamente dita, o desenvolvimento da Rede Mundial de Computadores possibilitou a criação de novas perspectivas. Ferramenta poderosa para lidar com grandes quantidades de informação e estudos exaustivos sobre qualquer assunto, a Internet pode ser muito proveitosa para o estudo da História da Matemática, campo vasto de conhecimento multidisciplinar. A publicação das páginas de conteúdo histórico de acesso irrestrito, em geral ligadas a Universidades, possibilitam a auto-correção dos temas tratados, que podem ser imediatamente comparados.

Podemos indicar um primeiro uso das novas tecnologias que é permitir o estudo da História da Matemática, facilitando o acesso. Páginas extensas como o *Arquivo MacTutor de História da Matemática*[1], criado e mantido pelos professores John J O`Connor e Edmund F. Robertson, da Universidade de St Andrews, na Escócia, permitem o acesso rápido a muitas informações em formatos diversos que nos livros comuns. O *MacTutor* apresenta o conteúdo em várias categorias de busca: por assunto, por biografias, pela linha do tempo *etc*.

Em português, estão em fase de construção interessantes páginas que oferecem bastante segurança quanto ao seu conteúdo. Podemos destacar a página *iMática – Matemática Interativa*[2], mantida por professores e alunos do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, sob a coordenação do professor Leônidas de Oliveira Brandão. A página ainda está em fase de testes, e oferecerá três indexadores, um por período (linha do tempo), um por tópicos matemáticos e outro por biografias de matemáticos famosos.

Diferentemente dos livros e artigos de divulgação impressos, que não podem ser mudados a não ser em edições sucessivas, o conteúdo das páginas da Internet é dinâmico. Usuários podem enviar críticas e sugestões, e assim conseguir atualizar ou corrigir as páginas. O debate é aberto e permanente. A segurança quanto à fidedignidade das informações reside tanto na confiança das páginas de autoria, com professores pesquisadores como responsá-

---

[1] Cf. <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html>
[2] Cf. <www.matematica.br>

veis, quanto na possibilidade de comparar a mesma informação em várias fontes, de modo mais rápido e prático que nos livros.

Existe o problema com o uso da Internet que é a confiabilidade dos dados. Esse problema já está sendo discutido por vários pesquisadores e educadores.

Um segundo uso se refere ao recurso da História da Matemática pelo professor, com fins didáticos. As tecnologias de informação, que estão modelando novas concepções de ensino e aprendizagem e até mesmo diferentes concepções de inteligência, parecem constituir elemento importante, se não fundamental, para que o uso da História da Matemática passe a influenciar de forma significativa a prática docente.

Evidentemente, como em qualquer outra modalidade pedagógica, o professor precisa saber utilizar-se dela criticamente. Para que o computador permita esse aumento da interação e da troca de experiências, o professor deve saber ele mesmo interagir com a máquina de forma criativa. Assim, PENTEADO (1999: 311) chama a atenção para a necessidade de formação do professor:

> É preciso que o professor, desde sua formação inicial, tanto nas Licenciaturas quanto nos cursos de Magistério, tenha a possibilidade de interagir com o computador de forma diversificada e, também, de discutir criticamente questões relacionadas com as transformações influenciadas pela Informática, sobretudo nos estilos de conhecimento e nos padrões de interação social.

No campo da formação do professor, podemos citar algumas experiências, necessariamente incipientes, que foram planejadas para dar aos futuros Professores de Matemática um pouco dessa vivência necessária para ser criativos diante do computador.

4. A Disciplina História da Matemática: uma Proposta

Na Universidade Federal de Ouro Preto, a disciplina História da Matemática procurou incluir no seu programa a questão do acesso às fontes, do uso didático da História e da relação entre História em Tecnologias.

Sua programação, descrita na tabela 1, procura incluir fortemente a pesquisa bibliográfica, a pesquisa na Internet, a discussão do valor didático e a produção de trabalho na Internet (Home-page).

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA – MTM102

PROGRAMA

UNIDADE	EVENTO
1	**Introdução**
2	O valor das fontes na História da Matemática
3	Fontes da História da Matemática Antiga e Medieval
4	Pesquisa na Internet
5	O advento dos livros de História da Matemática
6	Pesquisa na Internet
7	Valor didático da apresentação cronológica da História da Matemática
8	Pesquisa na Internet
9	Biografias: discussão do uso didático
10	Pesquisa na Internet
11	Organização da História da Matemática por assunto: valor didático
12	Pesquisa na Internet
13	Outras formas de abordar a História da Matemática
14	Pesquisa na Internet
15	Apresentações e Entrega de Trabalhos

A avaliação dos alunos é feita por meio de uma Home-page elaborada por pequenos grupos (três alunos) ao longo do curso, na qual vão adicionando links e resultados de suas pesquisas. Também realizam um trabalho de pesquisa em hipertexto, que após corrigido, integra a Home-page. Desse modo, a disciplina pretende também contribuir para o crescimento do conteúdo em português sobre História da Matemática, o qual pode ser utilizado por outros alunos e professores do ensino básico.

As novas tecnologias não são apenas úteis em si mesmas, mas enquanto provocadoras de uma atividade mais criativa, que tem efeito principalmente na mudança de atitude do professor. O formato da sala de aula se altera. LÉVY, em entrevista ao programa Roda Viva da TV Cultura em 8 de janeiro de 2001, destaca a liberdade de expressão e o intercâmbio de conhecimentos que ocorre no uso didático da Internet:

Não devemos limitar os processos de aprendizado a categorias estáticas, a programas de estudo pré-moldados, mas deixar o aprendizado se desenvolver como um processo natural e orgânico. E permitir que as pessoas expressem tudo o que sabem e tudo o que aprenderam.

> E podemos fazer isso hoje. Justamente... Por exemplo, permitir que hoje as pessoas façam suas 'home pages' é muito mais importante que submetê-las a exames.
>
> Ensiná-las a se inserir no processo de intercâmbio de conhecimentos, sendo originais e ajudando outros a se orientarem, propondo ligações interessantes a outros sites, é mais importante do que conferir se aprenderam um programa criado por um professor (LÉVY, 2001).

Assim, pretendemos que a estrutura da disciplina de História da Matemática proposta permita essa inserção do aluno no processo de intercâmbio de conhecimentos, de modo que a página que construírem sirva também ao longo do desenvolvimento de sua atuação profissional.

Referências:

ANASTÁCIO, Maria Queiroga Amoroso. *Formação de Professores de Matemática: vencendo barreiras*. (Mesa redonda) ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (2, 2000: Belo Horizonte, MG). Belo Horizonte: UFMG, 2000. 153 p.

BARONI, Rosa e Sérgio NOBRE A pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática. In Maria Aparecida Viggiani BICUDO, (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. 313 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. *Exame Nacional de Cursos: relatório-síntese 2000*. Brasilia: O Instituto, 2000. 565 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasilia: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999. 113 p.

FIORENTINI, Dario. *Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil*. ZETETIKÉ – CEMPEM – FE/UNICAMP – nº 4 – novembro de 1995 (reimpressão de 1998)

LÉVY, Pierre. *Entrevista ao Programa Roda Viva da TV Cultura*. São Paulo, 8 de janeiro de 2001.

MACHADO, Nílson José. *Ensaios transversais: cidadania e educação*. São Paulo: Escrituras, 1997. 189 p.

MIGUEL, Antonio. *Três estudos sobre história e educação matemática*. Campinas, SP, 1993. 346 p. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação, UNICAMP.

NOBRE, Sérgio. *História da Matemática e a Formação do Profissional em Matemática*. (Resumo). SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (1, 2000: Serra Negra, SP). Livro de resumos. Serra Negra: SBEM, 2000. 394 p.

PENTEADO, Miriam Godoy. Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In Maria Aparecida Viggiani BICUDO, (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. 313 p.

PESSIS-PASTERNAK, Guitta. Do caos à inteligência artificial: quando os cientistas se interrogam. São Paulo: UNESP, 1993. 259 p.

SCHUBRING, Gert. Desenvolvimento histórico do conceito e do processo de aprendizagem, a partir de recentes concepções matemático-didáticas (erro, obstáculo, transposição). Trad. de Pedro Goergen de artigo publicado em 1988. ZETETIKÉ – CEMPEM – FE/UNICAMP – v. 6 – nº 10, - jul./Dez. de 1998.

VIANNA, Carlos Roberto. *Matemática e História: algumas relações e implicações pedagógicas*. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Educação, USP, 1995.

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 89:104.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

ALGUMAS FERRAMENTAS TEÓRICAS PARA A PESQUISA EM ENSINO DE MATEMÁTICA[1]

Luiz Mariano Carvalho

Universidade do Estado do Rio de Janeiro
luizmc@ime.uerj.br

Victor Giraldo

Universidade Federal do Rio de Janeiro
victor@im.ufrj.br

Resumo: *Apresentamos uma releitura dos conceitos de obstáculo epistemológico e ato de compreensão e sua adequação na pesquisa de Ensino de Matemática na presença de novas tecnologias. Articulamos esses conceitos com os de raiz cognitiva e conflito teórico-computacional. Propomos novos pares de obstáculos epistemológicos e atos de compreensão.*

Palavras-chave*: Obstáculo Epistemológico, Atos de Compreensão, Raiz Cognitiva, Conflito Teórico-Computacional*

Abstract: *We review the epistemological obstacle and understanding act concepts and their adequacy of use on the Mathematics Education research in the presence of the new technologies. We establish links between these concepts and those of cognitive root and theoretical-computational conflict. We propose new pairs of epistemological obstacles and understanding acts.*

Key words*: Epistemological Obstacle, Understanding Act, Cognitive Root, Computational-Theoretical Conflict.*

1. INTRODUÇÃO

Apresentamos algumas ferramentas teóricas que vimos utilizando para a melhor compreensão de fenômenos que ocorrem no ensino/aprendizagem de matemática avançada. A partir da experiência com alunos de graduação em Matemática e na formação continuada de professores, recorremos a alguns teóricos de Ensino de Matemática Avançada [1, 2, 3, 4], de Filosofia da Ciência [5], de Teoria de Informação Algorítmica [6, 7] e de Neurobiologia [8, 9] para apoiar nossas indagações e hipóteses. Usaremos, também, como referências, alguns trabalhos desenvolvidos por outros pesquisadores que vêm discutindo o mesmo tema, por exemplo [11, 12, 13, 14].

[1] Uma versão resumida deste artigo foi publicada nos Trabalhos Completos do 56º Seminário Brasileiro de Análise em 2002

Entre as nossas principais motivações, estão as questões suscitadas pela utilização intensiva de computadores em apoio às aulas em nossos cursos. Observamos que as reações, as estratégias e o comportamento geral de alunos e professores mudam quando na presença de novas tecnologias, ensejando resultados contraditórios na compreensão dos conteúdos matemáticos em estudo.

Na seção 2, debateremos sobre a possível recuperação do conceito de obstáculo epistemológico numa acepção próxima à de Bachelard [5], esta proposta está baseada em observações de educadores matemáticos [1] e pesquisadores da área de teoria de informação algorítmica [6, 7]. Buscaremos, na seção 3, estabelecer conexões entre os conceitos de obstáculo epistemológico e ato de compreensão [2, 5, 15] por um lado e o de raiz cognitiva [3] por outro, ao nosso ver essas ligações permitem uma melhor compreensão dos três conceitos tratados. Em 4, discutiremos o conceito de conflito teórico-computacional que vem sendo desenvolvido por um dos autores em sua tese de doutoramento [16] Apresentaremos ainda alguns novos pares de obstáculos epistemológicos e atos de compreensão na seção 5, apesar da lista abrangente formula por Sierpinska em [15], avaliamos que o impacto causado pelo uso de novas tecnologias no ensino de matemática, e em especial no de funções, nos anima a incorporar algumas novas reflexões ao trabalho da autora.

2. OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS E ATOS DE COMPREENSÃO

Em [15], Sierpinska observa que freqüentemente se verifica no processo de compreensão em matemática um comportamento dual composto por obstáculos epistemológicos e atos de compreensão; nessa seção, revisitamos ambos os conceitos. Procuramos também estabelecer ligações entre a visão de educadores matemáticos e de pesquisadores da área de teoria de informação algorítmica para discutirmos possíveis relações entre a pesquisa e a aprendizagem em matemática quando utilizando as novas tecnologias.

Obstáculos Epistemológicos

Esse conceito é utlizado por Bachelard ao analisar problemas no desenvolvimento das ciências naturais (Física, Química e Biologia), principalmente, nos séculos XVII, XVIII e XIX. No início de um de seus trabalhos, lemos:

> Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos [. . .] No fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo

> conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo a espiritualização.
>
> [5, p.17]

Bachelard, no entanto, não aplica esse conceito à Matemática e afirma que:

> [. . .] Seria preciso estudar, do mesmo ponto de vista crítico, a formação do espírito matemático [. . .]. A nosso ver, essa divisão é possível porque o crescimento do espírito matemático é bem diferente do crescimento do espírito científico [. . .] Com efeito a história da matemática é maravilhosamente regular. Conhece períodos de pausa. Mas não conhece períodos de erro. Logo, nenhuma das teses que sustentamos nesse livro se refere ao conhecimento matemático.
>
> [5, p.28]

Essa visão não é compartilhada, por exemplo, por Lakatos:

> A história da matemática tem sido distorcida por filosofias falsas mais ainda do que tem sido a história da ciência.. Ela ainda é vista por muitos como uma acumulação de verdades eternas; teorias e teoremas falsos são banidos para o limbo escuro da pré-história ou documentados como erros desafortunados, de interesse apenas para colecionadores de curiosidades. De acordo com alguns historiadores da matemática, a história da matemática "verdadeira" começa com aqueles trabalhos que estão em conformidade com os padrões que eles vêem como definitivos. Outros descem às eras pré-históricas apenas para recolher no lixo, fragmentos brilhantes de verdades eternas. Ambos perdem alguns dos esquemas de conjecturas e refutações mais interessantes que foram desenvolvidos na história do pensamento matemático. Ainda pior, teorias inconsistentes, mas de interesse, são distorcidas até se tornarem "corretas", mas desinteressantes, precursoras de teorias contemporâneas. Esforços para salvar a autoridade dos gigantes do passado, dando-lhes um polido formato moderno foram bem mais longe do que se possa imaginar.
>
> [17, p.44], tradução nossa.

Dessa forma, encontramos um primeiro suporte para a utilização do conceito de obstáculo epistemológico no estudo do ensino/aprendizado/pesquisa em matemática.

Recorremos a seguir a Sierpinska, que fazendo referências a educadores matemáticos (principalmente a G. Brosseau) , sustenta:

> [. . .] educadores matemáticos tiveram a sensação que faria sentido falar sobre obstáculos epistemológicos em matemática: cotidianamente, eles estavam se defrontando com algo que parecia funcionar como um obstáculo epistemológico na forma de pensar de seus estudantes. O que estava faltando era uma fundamentação teórica. A transferência das ciências naturais para a matemática requereu alguma adaptação, e alguma reflexão filosófica sobre a natureza da matemática.
>
> [2, p.xii], tradução nossa

A observação da autora ganha maior relevância com a utilização intensiva de computadores e calculadoras no ensino e na pesquisa em matemática. Essa nova realidade permite detectarmos alguma semelhança entre o processo de aprendizagem e de pesquisa em matemática avançada. Nessa direção podemos encontrar em Dreyfus:

> Através do uso de ambientes computacionais para a aprendizagem muitas relações usualmente implícitas, por exemplo entre representações diferentes de um mesmo conceito, podem se dar explicitamente. Essa explicitação contribui para o reconhecimento por parte dos estudantes de tais relações e também para o aparecimento de idéias no processo de pesquisa [. . .] há diferenças claras entre o processo de pesquisa e o processo de aprendizagem [. . .] mas trata-se aqui de salientar as semelhanças muito importantes entre o processo de aprendizagem e o processo de pesquisa.
>
> [1], tradução nossa

Achamos interessante estabelecer pontos de contato entre as observações acima, provenientes de filósofos e educadores matemáticos, e alguns trabalhos de pesquisadores da área de teoria de informação algorítmica, por exemplo em [6, 7, 18]. Encontramos, entre esses, a constatação de que o uso de ambientes computacionais propicia à pesquisa em matemática uma metodologia próxima à das ciências naturais. A partir da interpretação que Chaitin [6, 7] dá aos resultados de Gödel [19, 20] e Turing [21], alguns trabalhos apontam para um desenvolvimento da pesquisa matemática em novas bases; em oposição ao que afirma Bachelard. e em sintonia com Lakatos, Calude e Chaitin escrevem:

> Esse trabalho recente reforça a mensagem da teoria de informação algorítmica de que a aleatoriedade é tão fundamental e presente em matemática pura quanto em física teórica. Em nossa opinião isso também nos dá mais suporte para a `matemática experimental', e para uma visão `quase-empírica' da matemática que diz que apesar da física e da matemática serem diferentes, é mais uma questão de grau do que de preto e branco. Físicos estão acostumados a trabalhar com suposições que explicam uma série de dados, mas que podem ser contraditadas pelas experiências subseqüentes. No entanto matemáticos não gostam de pedalar para trás. Mesmo depois de Gödel e Turing demonstrarem que o sonho de Hilbert não funciona, na prática, muitos matemáticos continuam agindo da mesma forma, com o espírito de Hilbert. Mas agora, finalmente, o computador mudou a maneira com que fazemos as coisas. É fácil rodar um experimento matemático em um computador, mas nós não podemos sempre encontrar uma prova para explicar os resultados. Então para fazer frente a essa realidade, os matemáticos são algumas vezes forçados a proceder de uma forma mais pragmática, como os físicos.
>
> [6], tradução nossa

Nesse sentido a mensagem é de que além do caráter experimental acompanhar o uso de novas tecnologias no ensino e na pesquisa, ele seria intrínseco à própria pesquisa em algumas áreas da matemática. A articulação entre os obstáculos epistemológicos, a pesquisa e a aprendizagem em matemática, e a pesquisa em ciências naturais, a partir das visões dos autores citados, permite recuperarmos o conceito de obstáculo epistemológico numa acepção próxima à formulada por Bachelard. O uso intensivo do computador na aprendizagem de matemática - e também na pesquisa - abre situações de construção de conhecimento em que os resultados não são frutos apenas de um desenvolvimento linear a partir de definições, teoremas e exemplos. As experimentações intensivas onde os resultados conseguidos, muitas vezes, não conseguem ser explicados, criam uma outra base para o desenvolvimento do conhecimento matemático, que por sua vez, também pode ter seu desenvolvimento entendido de uma forma "quase-experimental".

No entanto devemos levar em consideração a advertência de Sierpinska:

> Uma conferência interdisciplinar que reuniu psicólogos, filósofos da ciência, e educadores físicos e matemáticos, organizada por Nadine Bednarz no ano de 1988 em Montreal, foi parcialmente destinada a elucidar a noção de obstáculo epistemológico, mas os participantes saíram com um sentimento de confusão maior do que nunca.
>
> [2, p. 133], tradução nossa

Apesar desse conceito não ser consensual, esperamos, durante esse capítulo e em outros artigos, tirar partido do seu uso.

Atos de Compreensão

Utilizaremos a definição de ato de compreensão apresentada por Sierpinska em [15] e detalhada em [2]:

> [. . .] ao discutir a compreensão em matemática, eu devo me concentrar nos saltos, ou seja, nas mudanças qualitativas importantes relacionadas ao conhecimento matemático na mente humana, saltos das velhas formas de conhecimento para as novas. Há duas formas complementares de ver esses saltos. Uma vez que conhecemos de uma nova forma, se contemplamos nossas velhas formas de conhecimento, o que vemos são os aspectos que nos impediam de conhecer de uma nova forma. Algumas dessas formas podem ser classificadas como obstáculos epistemológicos. Mas se, ao invés de meditar sobre os erros do passado, passamos a olhar o que está à nossa frente então tendemos a descrever o salto em termos de novas formas de conhecimento. A primeira imagem será chamada de um ato de vencer uma dificuldade ou obstáculo. A última - um ato de compreensão.
>
> [15], tradução nossa

Ainda em [15] um ato de compreensão de um conceito matemático está ligado a duas perguntas:

- O que a definição do conceito diz?
- Sobre o que é a definição? Do que ela trata?

A capacidade de lidar com essas perguntas e as várias relações possíveis entre elas é que define, segundo a autora, a compreensão ou não de um conceito matemático.

Em [2], a autora faz uma afirmação sobre o papel da ação no processo de compreensão

> É quase uma tautologia dizer que compreensão é uma experiência ativa e não passiva, se nós queremos falar de atos de compreensão. Um ato de compreensão somente ocorre em uma mente atenta, que está desejosa de identificar objetos, de

> discriminá-los, de perceber generalizações no particular, e particularidades no geral, em sintetizar largos domínios de pensamento e experiência
>
> [2, p. 101], tradução nossa

Neste sentido, o uso do computador é um aliado presente. Reforçando a posição da autora vamos buscar algumas idéias de pesquisadores da área de neurobiologia[1]:

> Em paralelo às representações que expressam no cérebro do sujeito as “imagens” de seu mundo, os neurônios são encarregados da organização dos comandos motores do corpo, desde os movimentos que permitem os deslocamentos até os gestos sutis das mãos, as mímicas faciais e as contrações dos músculos vocais.
>
> O problema maior consistindo em designar o observador que dentro do cérebro toma conhecimento das imagens formadas e contidas não se coloca mais, se admitimos que o cérebro funciona como uma “metáfora em ação”, ou seja, na qual a representação se confunde com a ação. Os estudos de neurofisiologia confirmam a interdependência total das áreas motrizes e sensoriais. [...]
>
> As representações do mundo não podem então ser consideradas independentemente das ações do sujeito sobre esse mesmo mundo. Eu proponho para designá-las o neologismo representa-ações[2].
>
> [8, p.166], tradução nossa.

Uma síntese das duas afirmações acima pode ser encontrada no diálogo imaginário proposto por outro pesquisador em neurobiologia, Alain Prochiantz:

> Honoré: Nós bem veremos. Temos que precisar que por ser a mão uma antecipação do gesto, ela é também o seu resultado: a mão cria o gesto e o gesto cria a mão.
>
> Leanore: Assim como o cérebro cria o pensamento e o pensamento cria o cérebro.
>
> [9, p. 38] tradução nossa.

O computador vai propiciar mais representa-ações, permitindo aumentar as formas de representação dos conceitos matemáticos, como veremos na seção seguinte.

3. IMAGEM CONCEITUAL E RAIZ COGNITIVA

Estabeleceremos a seguir alguns pontos de contato entre os conceitos de obstáculo epistemológico e ato de compreensão e outros dois: imagem conceitual e raiz cognitiva. Para tal, vamos relembrar os últimos.

Na teoria desenvolvida por David Tall e Shlomo Vinner, imagem conceitual é a estrutura cognitiva total na mente de um indivíduo associada a um certo conceito matemático [22]. Segundo os autores, a imagem conceitual inclui todas as imagens mentais, propriedades,

[1] Utilizamos essa e outras citações de neurobiologistas advertidos pelo próprio J.-D. Vincent: “É possível que tomando um pouco de distância, todas essas maquinarias modernas do espírito se revelem tão bizarras como são aos nossos olhos a glândula pineal, sede da alma, e as tubulações do homem-máquina imaginadas por Descartes”.[8]

[2] représentactions, no original

relações e processos associados ao conceito e é continuamente construída através de todo tipo de experiências relacionadas, podendo mudar ao longo do desenvolvimento cognitivo do sujeito. A imagem conceitual pode ainda estar associada a uma sentença usada para especificar o conceito em questão, denominada definição do conceito por Tall e Vinner. Uma definição do conceito, por sua vez, pode ou não estar de acordo com a definição matemática correspondente. Dessa forma, a imagem conceitual pode ou não estar associada à conceituação matematicamente correta [4, 22, 23, 24]. A capacidade de recordação da definição formal, não está necessariamente associada a uma imagem conceitual rica. Freqüentemente, as idéias fundamentais necessárias para a construção das aplicações e desdobramentos de um conceito não se encontram na sua definição, mas nas imagens intuitivas associadas (Cornu [25 em [26]], Tall & Vinner [22]).

Recorremos outra vez a J.-D. Vincent para nos ajudar a compreender melhor a importância desses conceitos:

> O seu [do cérebro] tamanho não é suficiente, para explicar a inteligência do homem. Seu enorme cérebro, não faz do boi um pensador excepcional. A diferença no homem deve-se ao desenvolvimento de áreas cerebrais ditas associativas que ocupam mais de dois terços da parte superficial do cérebro, chamada córtex, notadamente em sua região anterior ou frontal. [...]
>
> Aquilo que o animal sabe do mundo está inscrito no seu cérebro sob forma de representações. O homem só se distingue do animal pela riqueza extraordinária e a abundância dessas últimas. [...]
>
> Eu não posso, tendo adotado o ponto de vista de biólogo, falar de representações sem falar de seu suporte neuronal. A diferença no plano anatômico entre o cérebro do chimpanzé e o do homem deve-se sobretudo ao número mais elevado de células nervosas e à riqueza de suas interconexões neste último.
>
> [8, pp. 167-168], tradução nossa.

Tall [27] define um *organizador genérico*, como um ambiente que possibilita ao estudante manipular exemplos e (se possível) contra-exemplos de um conceito matemático específico ou de um sistema de conceitos relacionados. Organizadores genéricos podem ser programas ou ambientes computacionais que forneçam respostas imediatas às explorações do usuário, como também, por exemplo, materiais concretos usados no ensino de matemática para crianças. Segundo o autor, a concepção de um organizador genérico deve estar baseada numa unidade cognitiva central relativa ao conceito em questão, denominada raiz cognitiva, que deve atender a duas características fundamentais:

- Fazer sentido (pelo menos potencialmente) para o estudante no estágio em questão;
- Possibilitar expansões cognitivas para construções formais e desenvolvimentos teóricos subseqüentes.

Tall [27] afirma que uma imagem contraditória pré-existente na mente do estudante pode se constituir num obstáculo para a compreensão de uma definição formal. Desta forma, a definição formal deve se colocar como um objetivo no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, e não como um ponto de partida - ao contrário do que ocorre na formulação teórica.

Ainda com respeito à conceituação de organizadores genéricos, Tall [27] afirma que tais ambientes devem ser planejados de maneira que suas próprias limitações possam ser percebidas pelos estudantes sem maiores dificuldades, de forma a indicar a necessidade de descrições teóricas mais precisas. Consideremos o exemplo mostrado na figura 1. Na parte superior da figura vemos os gráficos das funções $p(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 + 0{,}05\,b(x)$, onde **b** é a função *blancmange*[1] traçadas para $-1 < x < 1$, os mesmos gráficos aparecem na parte inferior traçados para $-0{,}0003 < x < 0{,}0003$. Na janela gráfica maior as curvas parecem praticamente idênticas, mas a menor revela as diferenças inicialmente imperceptíveis, porém fundamentais – a primeira curva é diferenciável enquanto a segunda não possui derivada em nenhum ponto.

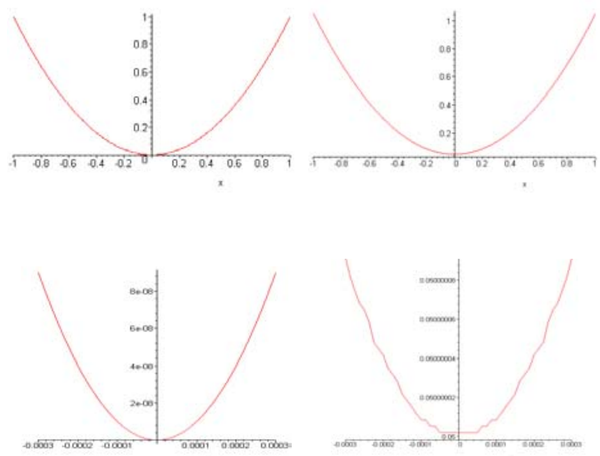


Figura 1 - As curvas associadas a $p(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 + \frac{1}{20}b(x)$ em duas janelas gráficas distintas.

De fato, o autor destaca que:

---

[1] A função *blancmange* é definida no intervalo (-1.1) pela soma da série $b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$, onde $(b_n)_{n\in N}$ é uma seqüência de funções modulares definidas indutivamente por:

$$b_1(x) = 1 - |\,x\,| \text{ e}$$

$$b_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} - |\,b_n - \frac{1}{2^n}\,|$$

Cada função b_n não é diferenciável para pontos na forma $x = \pm\frac{k}{2^{n-1}}$, para $k = 1,\ldots, 2^{n-1}-1$. A função b_n é contínua, pois é limite uniforme de funções contínuas, mas não diferenciável em nenhum ponto do intervalo.

> Eu espero de todos os organizadores genéricos que estes contenham as sementes da sua própria destruição, no sentido em que eles devem ser suficientemente sofisticados para mostrar as limitações de seus processos de modelagem e a necessidade de abordagens teóricas mais amplas.
>
> [27], tradução nossa

Sierpinska, quando fala de funções e suas representações, ressalta ainda que:

> A consciência das limitações de cada uma das representações e do fato que elas representam um único conceito geral são, com certeza, condições fundamentais para a compreensão das funções.
>
> [15], tradução nossa

Acreditamos poder estabelecer pontos de contato entre os conceitos de imagem conceitual e raiz cognitiva, por um lado, com os de obstáculo epistemológico e ato de compreensão, por outro. Em primeiro lugar, a partir das observações acima de Tall e Sierpinska, achamos que a **ampliação da imagem conceitual** de um indivíduo pode se dar a partir de **uma tensão dual entre obstáculos epistemológicos e atos de compreensão** que ocorram no processo de aprendizagem; discutiremos na seção a seguir, como os computadores podem ser inseridos de forma positiva nesse processo. Pensamos, também, que uma **boa raiz cognitiva deve conter,** pelo menos potencialmente**, um obstáculo epistemológico e um ato de compreensão**. Tanto no sentido da "compreensão das limitações" de Sierpinska, como no das "sementes de sua própria destruição" de Tall. Assim, uma boa raiz cognitiva pode ser estruturada levando em conta esses dois aspectos, permitindo uma **tensão** apropriada no processo de aprendizagem e levando ao enriquecimento da imagem conceitual do indivíduo associada ao conceito matemático em questão.

4. CONFLITOS TEÓRICO-COMPUTACIONAIS

Os algoritmos empregados pelos programas atualmente utilizados em ensino de matemática para traçar gráficos de funções baseiam-se geralmente em processos de interpolação linear de pontos. Em certos casos, esses algoritmos podem dar origem a uma série de erros ou imperfeições nos gráficos gerados. Observemos, por exemplo, a parte esquerda da figura 2, que retrata o gráfico de $f(x) = cos(90x)$, produzido pelo Maple no intervalo $\pi \leq x \leq \pi$ utilizando-se para o traçado o número de pontos padrão (50) a partir dos quais o programa faz as interpolações lineares. As imperfeições observadas na curva são devido ao baixo período da função em relação ao número de pontos utilizado, levando o programa a escolher pontos pouco favoráveis ao traçado. Com a mesma janela e com o mesmo intervalo, caso aumentássemos o número de pontos - de 50 para 400 - usados para traçar o gráfico teríamos a figura à direita, que apesar de ainda imperfeita é bem mais próxima da representação correta.

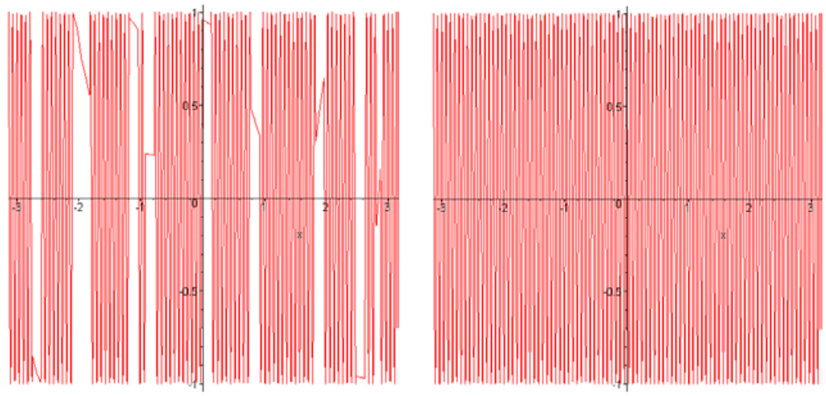


Figura 2 - A curva f(x) = *cos*(90x) com diferentes precisões de traçado.

Segundo Giraldo:

> Conflito teórico-computacional é qualquer situação onde uma representação computacional é contraditória, de alguma forma, ao modelo matemático correspondente.
>
> [16, p.16]

Os exemplo da figuras 2 e 1 potencializam conflitos teórico-computacionais. A representação gráfica da função f , mostrada na parte esquerda da figura 2, está em conflito com as propriedades de periodicidade da função. Para se resolver o problema (ou seja, para a escolha do número de pontos que permita uma exibição correta), é fundamental o conhecimento matemático (peridiocidade) que induzirá a busca do conhecimento técnico do programa (aumento de número de pontos). Por outro lado, no exemplo exibido na figura 1, o fato dos dois gráficos apresentarem o mesmo aspecto em determinadas janelas gráficas está em conflito com o fato das funções p e q possuírem propriedades distintas[1]. Desta forma, conflitos teórico-computacionais são considerados como situações de contradição aparente entre representações de natureza computacional e não computacional para um mesmo objeto, que podem ser colocadas em evidência por meio do confronto entre a representação computacional e a conceituação matemática correspondente.

5. Discussão Sobre Novos Obstáculos Epistemológicos e Atos de Compreensão

Em [15], Sierpinska classifica três tipos de obstáculos epistemológicos: atitudes, crenças e convicções, de nossa visão de mundo; em segundo lugar, os esquemas de pensamento (essencialmente inconscientes), as formas de encarar problemas e interpretar situações; e, por último, o conhecimento técnico, cujo valor e validade são determinados por critérios

[1] De fato, a similaridade dos aspectos visuais dos gráficos das funções p e q na figura 1 *oculta um comportamento qualitativo* radicalmente distinto: uma das funções é analítica, enquanto a segunda é não-diferenciável em todos os pontos do domínio.

mais racionais. Os atos de compreensão são descritos como sendo: a identificação, a discriminação, a generalização e a síntese.

Nesse mesmo artigo, são apresentados 19 obstáculos epistemológicos e 16 atos de compreensão. Nenhum deles, entretanto, está ligado explicitamente ao uso de novas tecnologias, apesar de alguns experimentos apresentados em um artigo anterior [28] terem sido desenvolvidos com computadores. No entanto, vários estudos [10, 11, 12, 14] apontam para situações especiais, encontradas em ambientes computacionais que utilizam programas consagrados para o estudo de matemática (Maple, Mathematica, Cabri, Sketchpad, Graphmatica, Excel etc). Em nossa experiência, também observamos que a presença do computador introduz variáveis novas no processo de aprendizagem, alguns relatos estão em [13, 16, 29, 30]. Daí acharmos que devemos tentar avançar na discussão de obstáculos epistemológicos e atos de compreensão ligados especificamente ao uso de computadores no ensino de funções. Introduziremos nessa seção dois novos pares de obstáculos epistemológicos e atos de compreensão, visando sintetizar nossa experiência e a de outros pesquisadores na área. Acreditamos também que até o fim do levantamento junto aos professores, deveremos sistematizar outros pares.

Papel do computador no processo de aprendizagem

Em [10, 11, 12, 13, 14, 16], são descritas várias situações onde professores e alunos de matemática parecem acreditar nas informações fornecidas pelo computador, *mesmo que elas estejam em evidente contradição com o conhecimento matemático que essas pessoas já possuem*. Em situações como essas, observamos que as representações computacionais para os conceitos matemáticos adquirem uma posição de critério absoluto de verdade, preponderante em relação às demais representações e conhecimentos prévios do sujeito. Apesar de qualquer representação, utilizada isoladamente, poder acarretar esse efeito, com a presença do computador essa observação é mais evidente. Alguns fatores contribuem para isso. Um primeiro seria o desconhecimento das limitações intrínsecas tanto do computador quanto dos programas utilizados, e o desconhecimento do funcionamento da máquina. Outro ponto que poderia estar por trás dessa atitude, seria o não reconhecimento do computador como obra humana, acarretando uma valorização excessiva do seu papel (alienação computacional).

Quando o computador passa a ser usado principalmente como instrumento de apoio, esse obstáculo pode ser ultrapassado. Na elaboração de tabelas, no esboço de gráficos em várias janelas, na realização de cálculos repetitivos, na formulação de conjecturas, na montagem de um grande número de exemplos, na investigação individual do usuário, entre outras atividades, o computador adquire um papel motivador e de ferramenta importante na formação de imagens conceituais ricas. A representação computacional deixa de ser critério absoluto de verdade para se tornar um apoio à compreensão da necessidade da formulação teórica do conceito em questão, ajudando a construir uma imagem conceitual mais rica.

Podemos sintetizar as observações acima no seguinte par:

Obstáculo Epistemológico 1 - Forte crença no computador como validador de conhecimentos matemáticos.

Ato de Compreensão 1 - Identificação do computador como um instrumento no processo de ensino/aprendizagem.

Estratégias humanas e algoritmos computacionais

Em [29], identificamos propriedades matemáticas de duas naturezas distintas nas atividades computacionais envolvendo funções:

- quantitativas: dizem respeito aos valores de uma função em um subconjunto finito de pontos do domínio;
- qualitativas: envolvem os valores de uma função no domínio, num intervalo, ou, de forma geral, num subconjunto infinito do domínio.

Por exemplo, a existência de descontinuidades numa dada função $f:\Re\rightarrow\Re$ é uma propriedade qualitativa, uma vez que sua determinação exige a comparação dos valores de f numa vizinhança dos pontos em questão.

O procedimento comumente empregado por alunos para esboçar gráficos lança mão somente de propriedades quantitativas da função, isto é, de seus valores num conjunto finito de pontos do domínio. Da mesma forma, os algoritmos computacionais utilizados nos principais programas atuais para gerar gráficos baseiam-se na determinação de uma quantidade finita de valores (o Maple utiliza 50 pontos como padrão). A diferença aqui é clara: sendo a capacidade de cálculos da máquina imensamente maior que a humana, esses pontos ficam suficientemente próximos para que se crie a ilusão de se estar visualizando uma curva na tela.

Há aqui uma questão de fundo: a impossibilidade de representação gráfica e/ou tabular de funções reais de variável real em computadores. Para nos convencer dessa impossibilidade, basta usarmos um simples argumento de enumerabilidade. O conjunto de todas as máquinas de Turing - modelo teórico dos computadores que usamos - é um conjunto enumerável; assim como todos os programas que podem ser rodados em cada máquina também formam um conjunto enumerável. Logo, dada a não-enumerabilidade dos reais, qualquer representação, gráfica ou tabular, de uma função real de variável real por uma máquina universal de Turing, ou mesmo por um número enumerável delas, será sempre incompleta. Notemos também, que isso é verdade para qualquer tentativa humana de representação, gráfica ou tabular, dessas mesmas funções.

Além desse fato estrutural, os programas atuais apresentam várias limitações, tanto decorrentes dos algoritmos quanto de erros numéricos intrínsecos à forma de representação interna dos números. Logo, grande parte das propriedades qualitativas, que um indivíduo pode usar para esboçar gráficos, não é acessível aos programas encontrados atualmente. Essa limitação dará inevitavelmente origem a situações onde a representação computacional não corresponde ao modelo matemático. A não discriminação entre a natureza quantitativa e qualitativa das propriedades envolvidas nessas atividades pode levar à interpretação incorreta dos resultados exibidos na tela do computador.

Atividades que evidenciem conflitos teórico-computacionais em contraposição àquelas que usem o computador apenas para testar a correção de respostas, ou como simples livro eletrônico é, ao nosso ver, uma forma de vivenciar esse obstáculo epistemológico e esse ato de compreensão. Assim como no par anterior, as possibilidades exploratórias e as limitações criam condições da aparição de conflitos teórico-computacionais que devem ser estimulados, permitindo a criação de imagens conceituais mais ricas e indicando a necessidade da definição formal do conceito de função.

Resumimos essas observações em outro par:

> **Obstáculo Epistemológico 2** - Não compreensão das propriedades envolvidas na construção de gráficos em ambientes computacionais.
>
> **Ato de Compreensão 2** - Discriminação entre as propriedades quantitativas e qualitativas que envolvem a construção de gráficos em ambientes computacionais.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Discutimos a possível recuperação do conceito de obstáculo epistemológico numa acepção próxima à de Bachelard, a partir de observações de educadores matemáticos, neurobiologistas e pesquisadores da área de teoria de informação algorítmica. Propusemos conexões entre os conceitos de obstáculo epistemológico e ato de compreensão por um lado e o de raiz cognitiva por outro, estabelecendo uma relação, que acreditamos inédita, entre os três conceitos envolvidos. Apresentamos, por fim, alguns novos pares de obstáculos epistemológicos e atos de compreensão, por avaliarmos que o impacto causado pelo uso de novas tecnologias no ensino de matemática, e em especial no de funções, permite-nos incorporar algumas novas reflexões aos trabalhos desenvolvidos por outros autores da área. Essa será, em um primeiro momento, a base principal que guiará nossa reflexão sobre a imagem conceitual de funções reais de variável real possuídas por professores do ensino fundamental e médio, e por alunos de graduação. Além de servir a esse estudo, temos claro que as questões levantadas nesse artigo merecem um aprofundamento teórico e esperamos continuar essa linha de investigação ao longo dos próximos anos em colaboração com outros pesquisadores da área de Ensino de Matemática.

Referências:

[1] DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking process. In Tall [26], pp 25-41.

[2] SIERPINSKA, A. Understanding in Mathematics, volume 2 of Studies in Mathematics Education Series. The Falmer Press, London, 1st edition,1994

[3] TALL, D.O. Concept images, generic organizers, computers & curriculum change. For the Learning of Mathematics, 3(9):37-42, 1989

[4] VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14:293-305, 1983.

[5] BACHELARD, G. A Formação Do Espírito Científico. Contraponto, Rio de Janeiro, 1996. tradução de Estela dos Santos Abreu de La Formation De L'esprit Scientifique: Contribuition À Une Psychanalyse De La Connassaince, Librairie Phylosophique J. Vris, Paris, 1938.

[6] CALUDE, C.S. & CHAITIN, G.J. Mathematics/randomness everywhere. Nature, 400:319-320, 1999.

[7] CHAITIN, G.J. Paradoxes of Randomness, Complexity, vol. 7, n. 5, 1-14, 2002 (disponível em http://www.cs.umaine.edu/~chaitin/summer.html).

[8] VINCENT, J.-D. Fabrique de l´homme, em Ferry, L. & Vincent, J.-D., Qu´est-ce que l´homme?, Editions Odile Jacob, Paris, 2000.

[9] PROCHIANTZ, A. La Biologie dans le Boudoir, Editions Odile Jacob, Paris, 1995.

[10] ABRAHÃO, A.M.C. O comportamento de professores frente a alguns gráficos de funções $f: \Re \to \Re$ obtidos com novas tecnologias. Master's thesis, PUC/RJ, 1998.

[11] BELFORT, E. & GUIMARÃES, L.C. Uma experiência com software educativo na formação continuada de professores de matemática. In Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática, volume II, São Leopoldo, Brasil, 1998. SBEM.

[12] DEMANA, F. & WAITS, B.K. Pitfalls in graphical computation. College Math. Journal, 2(19):177-183, 1986.

[13] GIRALDO, V. & T. ROQUE, V. Uso do computador no ensino de cálculo e seus pré-requisitos. In Anais do 1o: Encontro Estadual de Educação Matemática, Rio de Janeiro, Brasil, 1997. SBEM-RJ.

[14] HUNTER, M., MONAGHAN, J.D., & ROPER, T. The Effect Of Computer Algebra Use On Students' Algebraix Thinking. In R. Sutherland, Editor, Working Papers for ESCR Algebra Seminar, London University. London University, Institute of Education, London, England, 1993.

[15] SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In HAREL, G. & DUBINSKY, E., editors, The Concept of Function: Elements of Pedagogy and Epistemology, MAA Notes and Report Series, pages 25-58. The Mathematical Association of America, 1992.

[16] GIRALDO, V. Magnificação local, erros e limitações computacionais e a aquisição do conceito de derivada, 2001. Exame de Qualificação de Doutorado do PESC/COPPE/UFRJ.

[17] LAKATOS, I. Cauchy and the Continuum, em Lakatos, I. Phylosophical papers of I. Lakatos. Mathematics, science and epistemology, vol. 2. Cambridge University Press, 1978.

[18] CHAITIN, G.J. Gödel´s Theorem and Information, International Journal of Theoretical Physics, 22, p. 941-954, 1982.

[19] GÖDEL, K. Acerca de proposições formalmente indecidíveis nos Principia Mathematica e Sistemas Relacionados. In M. Lourenço, editor, O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo (1979, pages 245-290. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa), 1931.

[20] NAGEL, E. & NEWMAN, J.R. Gödel's proof. New York University Press, 1958.

[21] TURING, A.M. On computable number with an application to the Entscheidugsproblem. Proc. Amer. Math. Soc., 42:230-265, 1936-7. A correction, ibid., (43) (1937), 544-546.

[22] TALL, D.O. & VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12:151-169, 1981.

[23] BARNARD, A.D. & TALL, D. Congnitive units, connections, and mathematical proof. In E. Pehkonen, editor, Proceedings of the 21st Annual Conference for the Psichology of Mathematics Education, pages 41-48, Lahti, Finland, 1997.

[24] VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In Tall [26], pages 65-81.

[25] CORNU, B. Limits. In Tall [26], pages 153-166, 1991.

[26] TALL, D.O. editor. Advanced Mathematical Thinking. Kluwer, Dordrecht, 1991.

[27] TALL, D.O. Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics. PhD thesis, University of Warwick, UK, 1986.

[28] SIERPINSKA, A. On 15-17 years old students' conceptions of functions, iteration of functions and attractive fixed points. Preprint 454, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland, May 1989.

[29] GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. Funções e Novas Tecnologias. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, (3), 1, 111-119, 2002

[30] GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. Magnificação e Linearidade Local: Novas Tecnologias no Ensino do Conceito de Derivada. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, (3), 2, 101-110, 2002.

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1,
págs: 105:114..
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01** © 2002, Editora IME-UERJ.

O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NOS NOVOS CURRÍCULOS DE ENGENHARIA

Profª Dra. Helena Noronha Cury

Faculdade de Matemática –
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
Avenida Ipiranga, 6681 CEP 90619-900 - Porto Alegre, RS
endereço eletrônico: curyhn@via-rs.net

Resumo: *Este trabalho apresenta uma síntese de pesquisas realizadas na PUCRS com alunos de Cálculo Diferencial e Integral. Também fazemos uma comparação entre as diretrizes curriculares para os cursos de bacharelado em Matemática e as engenharias, em fase de homologação pelo Ministério de Educação, bem como as possibilidades de oferecer atividades em Cálculo que desenvolvam as competências e habilidades sugeridas por tais diretrizes. Finalmente, propomos medidas para formar uma rede de professores de Cálculo Diferencial e Integral de IES brasileiras que possam interagir e compartilhar experiências individuais e institucionais.*

Palavras-chave: *Ensino de Cálculo, Diretrizes Curriculares, Cursos de Engenharia.*

Abstract: *This paper presents a synthesis of researches carried out with Differential and Integral Calculus students at PUCRS. We compare curriculum guidelines of Mathematics and Engineering courses and present possibilities to offer activities that can develop competencies and abilities suggested by these guidelines. As a final remark, we propose to create a net of Calculus professors, who can interact and share individual and institutional experiments.*

Key words: *Calculus teaching. Curriculum guidelines. Engineering courses.*

1. INTRODUÇÃO

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral tem sido responsabilizada por um grande número de evasões e repetências nos cursos de Engenharia; os problemas têm sido discutidos e muitas soluções testadas, mas ainda estamos longe de poder dizer que encontramos a fórmula mágica para fazer com que os alunos efetivamente aprendam Cálculo.

Trabalhando com a disciplina inicial, Cálculo A, há mais de 15 anos, com turmas de calouros dos cursos de Engenharia, Física, Química ou Matemática, temos realizado várias pesquisas, avaliando as opiniões dos alunos sobre a disciplina, os erros cometidos em questões de prova, suas concepções sobre ciências e Matemática e seus estilos de aprendizagem.

A proposta de novas diretrizes curriculares para os cursos de Engenharia e as mudanças que estão sendo gestadas em muitas Instituições de Ensino Superior (IES) brasileiras, relatadas em eventos como, por exemplo, o Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia (COBENGE) e o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), levam-nos a tentar aproveitar essas experiências para discutir as possibilidades de modificações nos cursos de Cálculo que estamos oferecendo.

Nesta comunicação, apresentamos um resumo das pesquisas realizadas e discutimos algumas questões decorrentes das novas diretrizes, propondo, ao final, um debate mais amplo sobre o tema e a formação de grupos de estudo e pesquisa, interinstitucionais, para dar suporte às várias experiências que estão se desenvolvendo no Brasil.

2. AS PRIMEIRAS PESQUISAS REALIZADAS

Em 1989, quando houve uma modificação nos currículos de Engenharia da PUCRS, foi realizada uma pesquisa sobre erros cometidos por alunos de Cálculo A. Trabalhamos com uma amostra de 700 alunos, tendo sido escolhida, em cada uma das três provas do semestre, uma questão típica, comum a todas as turmas. Foi feita a correção da questão e a classificação dos erros cometidos. Além da confirmação de vários erros já esperados, o dado mais interessante na análise foi a ocorrência de erros que parecem ter origem em uma espécie de "falsa generalização" : por exemplo, em questões que solicitam a derivada do produto, muitos alunos usam uma falsa regra, $(u.v)' = u'. v'$, "generalizando" a regra da derivada da soma; o mesmo aconteceu com vários outros itens, tanto de Cálculo como de conteúdos do ensino médio. (CURY, 1992).

Fazíamos muitas hipóteses sobre as condições de ingresso dos alunos das engenharias e resolvemos investigar, então, o perfil dos estudantes que cursavam Cálculo A. Aplicamos um questionário a uma amostra de 537 alunos, no primeiro semestre de 1995 e encontramos alguns dados que têm se mantido ao longo dos anos: estudantes predominantemente do sexo masculino (80%), entre 17 e 25 anos (91%), com conclusão do ensino médio praticamente dividida entre escola particular e pública e com 63% deles cursando Cálculo A pela primeira vez.

Além dessas informações, também detectamos que 62% dos alunos já havia feito outro exame vestibular antes de ingressar em seu curso, para a mesma área ou para outras distintas (Medicina, Computação, Arquitetura, etc.).

Na questão aberta, era solicitado ao aluno que fizesse observações sobre a disciplina e o curso. Muitos comentários foram semelhantes, a maior parte deles queixando-se dos conteúdos, da metodologia, do professor e do curso. Porém pelas considerações feitas, vimos que os calouros chegam à Universidade com a idéia de que poderão ser aprovados sem estudar (um aluno queixou-se de que "a disciplina exige que se destine um certo tempo para estudar") e de que trabalhos e exercícios devem ser utilizados para "aumentar a nota".

Dessa forma, concluímos ser necessário buscar novos métodos e técnicas para fazer com que o aluno "aprenda a aprender", o que demanda, também, uma modificação nas concepções de alguns professores, que estão acostumados com o sistema tradicional, de apresentar conteúdos e cobrá-los em exercícios padronizados. Parece-nos que tais procedimentos de ensino não têm conseguido conscientizar o aluno de sua responsabilidade pela própria aprendizagem e da necessidade de um esforço contínuo para estudar. (CURY, 1995).

3. AS DIRETRIZES CURRICULARES

Nesta época, iniciou-se a elaboração dos projetos pedagógicos das faculdades e todos os problemas apontados por alunos e professores vieram à tona. A seguir, as diretrizes curriculares começaram a ser discutidas em todas as IES, estando a maior parte das sugestões ainda em exame no MEC.

O que há de comum entre as propostas de diretrizes para as engenharias e o bacharelado em Matemática? Para tecer algumas considerações sobre o papel do Cálculo nos currículos, vamos destacar as competências e habilidades a serem apresentadas pelos futuros profissionais de ambas as áreas.

Segundo os documentos que se encontram na página do MEC:

"Os currículos dos cursos de Bacharelado em Matemática devem ser elaborados de maneira a desenvolver as seguintes competências e habilidades.

(a) capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão

(b) capacidade de trabalhar em equipes multidisciplinares

(c) capacidade de compreender, criticar e utilizar novas idéias e tecnologias para a resolução de problemas.

(d) capacidade de aprendizagem continuada, sendo sua prática profissional também fonte de produção de conhecimento

(e) habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema

(f) conhecimento de questões contemporâneas

(g) educação abrangente necessária ao entendimento do impacto das soluções encontradas num contexto global e social" (BRASIL, 2002a).

No caso das diretrizes para as engenharias, o documento correspondente apresenta a lista requerida:

"Os Currículos dos Cursos de Engenharia deverão dar condições a seus egressos para adquirir competências e habilidades para:

a) aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia;

b) projetar e conduzir experimentos e interpretar resultados;

c) conceber, projetar e analisar sistemas, produtos e processos;

d) planejar, supervisionar, elaborar e coordenar projetos e serviços de engenharia;

e) identificar, formular e resolver problemas de engenharia;

f) desenvolver e/ou utilizar novas ferramentas e técnicas;

g) supervisionar a operação e a manutenção de sistemas;

h) avaliar criticamente ordens de grandeza e significância de resultados numéricos;

i) comunicar-se eficientemente nas formas escrita, oral e gráfica;

j) atuar em equipes multidisciplinares;

k) compreender e aplicar a ética e responsabilidade profissionais;

l) avaliar o impacto das atividades da engenharia no contexto social e ambiental;

m) avaliar a viabilidade econômica de projetos de engenharia." (BRASIL, 2002b).

Se compararmos essas competências e habilidades para os futuros engenheiros brasileiros com as exigidas dos egressos dos mesmos cursos americanos, segundo o documento da American Board of Engineering and Technology (ABET), vemos que são a tradução quase exata desse último documento. (ENGINEERING CRITERIA 2000)

Também na Escócia surgem objetivos de aprendizagem, comuns à maioria dos cursos de Matemática para a Engenharia no Reino Unido, como por exemplo: : "selecionar e usar software para realizar cálculos; aplicar matemática na solução de problemas da engenharia; explicar o significado de expressões matemáticas (..) em uma forma clara e lógica, tanto por escrito como oralmente; trabalhar com colegas (..), compartilhar informações e idéias." (WILKINSON et al., 2001, p. 15).

De uma forma geral, vemos que há competências e habilidades comuns aos cursos de Matemática e Engenharia (e provavelmente a muitos outros cujas diretrizes se encontram em estudo pelo MEC), como: comunicar-se bem, de forma oral, escrita ou gráfica; atuar em equipes multidisciplinares; criticar e utilizar novas tecnologias; identificar, formular e resolver problemas nas respectivas áreas; avaliar o impacto de sua atuação sobre o contexto social e ambiental.

Tomando apenas esses itens, podemos pensar que o ensino de Cálculo tradicional, calcado em apresentação de conteúdos, realização de exercícios e "cobrança" em provas escritas individuais, não vai levar os alunos a desenvolverem tais capacidades. Acreditamos que é necessário pensar, em primeiro lugar, em aproveitar as inúmeras aplicações do Cálculo, para motivar os estudantes e fazê-los responsáveis por sua aprendizagem, no sentido de procurarem entender os textos, questionar, formular hipóteses, discutir em grupos. A capacidade de comunicar-se oralmente e por escrito precisa ser estimulada, com questões que não sejam, apenas, cópias de outras existentes nas listas de exercícios.

Outros itens, específicos das diretrizes das engenharias, utilizam verbos que mostram o que se espera de um futuro engenheiro: planejar, projetar, supervisionar, coordenar e avaliar. Portanto, a ênfase não está no papel de cumpridor de ordens, mas de emissor das mesmas; ou seja, está sendo, indiretamente, cobrada uma postura de líder e não de liderado. Esta é uma das questões que deveria ser pensada, também, pelos professores de Cálculo e não apenas pelos responsáveis pelas disciplinas profissionalizantes.

E o que podemos fazer, então, para incluir em aulas de Cálculo ou de outras disciplinas matemáticas, atividades que venham desenvolver as habilidades e competências esperadas dos futuros engenheiros? Vamos aproveitar, a seguir, algumas investigações já realizadas e apresentar sugestões para futuras discussões.

4. INVESTIGAÇÕES REALIZADAS E SUGESTÕES

Em primeiro lugar, é importante desenvolver a capacidade de comunicação, oral, escrita ou gráfica. Assim, em um trabalho que se apóie mais em gráficos, podemos aproveitar os recursos de software como MPP (Mathematics Plotting Package), Winplot, Mathematica ou Maple V. Pode-se usar a ferramenta informática de três formas: o modo *interativo*, o *diferido* (Palis,1995) e o que chamaremos de *delegado*. Na forma *interativa*, o aluno, frente ao computador, engaja-se em atividades de exploração, livres ou dirigidas. No modo *diferido*, o professor utiliza o computador para elaborar textos que serão reproduzidos (por impressora ou por cópias xerográficas) para todos os alunos. Nesse caso, o professor vale-se da melhor precisão dos gráficos realizados pelo computador, evidentemente muito superiores àqueles que pode fazer à mão livre. Na forma *delegada*, o professor utiliza, em sala de aula, um microcomputador, um retroprojetor e um *datashow.* Delega ao computador a responsabilidade pela realização dos gráficos ou pelo resultado de processos diversos e apresenta os conteúdos, discutindo-os mais profunda e rapidamente.

Nessa última forma, podemos plotar gráficos e questionar os alunos sobre um determinado conceito, de forma que eles comecem a solicitar novos exemplos e formulem imediatamente as dúvidas que lhes vêm à mente.

De forma geral, ao propor aos alunos as atividades em laboratórios de informática, buscamos criar ambientes de aprendizagem com os recursos de microcomputadores, *datashow*, impressora, manuais e roteiros de trabalho, com base em idéias de Vygotsky, especialmente a de "zona de desenvolvimento proximal"[1].

Efetivamente, pelas avaliações dos alunos sobre as experiências, ao final do semestre, vê-se que as aulas de laboratório são muito apreciadas e que eles valorizam a possibilidade de trabalhar em duplas, pois há uma troca de informações na sua própria linguagem, pouco técnica em termos matemáticos, mas que "serve" aos propósitos da tarefa solicitada, de modo que o colega com dificuldades é "tutelado" pelo companheiro mais capaz.

Assim, tarefas em duplas ou em grupos são outra forma de ir ao encontro das propostas das diretrizes curriculares, pois os alunos aprendem a trabalhar em equipe. E, em todos esses exemplos, estamos, evidentemente, pensando no uso de novas tecnologias. De qualquer forma, em qualquer atividade proposta, acreditamos ser importante solicitar aos alunos que escrevam sobre suas conclusões ou suas dúvidas, para estimular a comunicação por escrito.

Mas as competências para resolver problemas de sua área e avaliar o impacto das soluções sobre o contexto social e ambiental dependem, em parte, das concepções prévias dos alunos sobre questões contemporâneas e de uma visão global sobre todos os condicionantes que entram no planejamento de suas ações.

Uma pesquisa realizada com alunos de Cálculo A mostra que as discussões sobre atitudes, concepções e crenças dos estudantes em relação às Ciências e à Matemática devem ser estimuladas. A investigação em questão foi feita com base em um questionário elaborado por Fleener (l996), que por sua vez baseou-se em Habermas e Ernest, buscando classificar os participantes da pesquisa segundo os três interesses humanos fundamentais identificados por Habermas: técnico, pragmático e emancipatório. O interesse técnico é revelado através da abordagem empírica ou analítica para o conhecimento e está associado ao desejo de controle ou "gerenciamento" do meio em que vive o indivíduo. Em relação à ciência, essa visão de mundo sugere que existem verdades matemáticas e científicas e que o propósito da pesquisa científica é descobri-las.

O interesse pragmático concentra-se mais na interpretação do conhecimento e busca não contradizer os valores e costumes da sociedade, trabalhando com o conhecimento já existente. O interesse emancipatório examina o conhecimento de forma crítica e desafia as práticas existentes para a sua aquisição. Essa concepção expressa a importância da liberdade de pesquisa, ainda que contradiga o *status quo*.

[1] Zona de desenvolvimento proximal (ZDP) é "...a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes." (Vygotsky, 1989, p.97).

Para aplicar o instrumento de pesquisa[2], foram escolhidas as oito turmas de calouros de Cálculo A da PUCRS, no segundo semestre de 1998. Contamos, assim, com uma amostra de 359 alunos.

Após um tratamento estatístico cuidadoso das respostas, com o auxílio do software SPSS, os participantes foram classificados segundo as dimensões técnica, pragmática e emancipatória, de acordo com as percentagens de concordâncias nas questões características de cada uma delas. Constatamos então que:

a) Há predominância da tendência *pragmática* entre os alunos, seguida da *técnica*;

b) os alunos tendem a ser *não-emancipatórios* ;

c) há tendência *pragmática* acentuada entre os homens;

d) entre as mulheres, surge a mais forte rejeição à tendência *emancipatória*, pois apenas 17,9% se identificam com a mesma;

e) há crescimento da tendência *técnica* com o correspondente aumento da idade.

Em uma análise global das respostas, chamou-nos a atenção o fato de que esses calouros de Engenharia parecem ter muita fé nas verdades científicas e valorizam extremamente o conhecimento matemático e científico; no entanto, estão divididos em muitos aspectos, emitindo idéias contraditórias, possivelmente assimiladas acriticamente, a partir das concepções e crenças assumidas por pais, amigos, professores ou veiculadas através dos meios de comunicação.

É preocupante, por exemplo, o fato de apenas 56% dos respondentes concordarem ser a pesquisa sem utilidade imediata tão importante quanto aquela focada na resolução de problemas práticos. Nessa época de tão grandes mudanças tecnológicas, a pesquisa sem utilidade imediata pode ser aproveitada em muito menos tempo do que se espera. Aqueles que vislumbram novas possibilidades e criam os produtos para que elas se concretizem estarão sempre liderando o desenvolvimento em C & T. (CURY e PINENT, 2000).

Finalmente, outra investigação realizada com alunos de Cálculo A pode dar algumas idéias sobre dificuldades de aprendizagem. Os seres humanos têm diferentes estilos de aprendizagem, ou seja, características e preferências quanto à forma de se apropriar das informações, processá-las e construir novos conhecimentos. Entre os vários modelos de estilos de aprendizagem, o de Felder-Silverman classifica os aprendizes em cinco dimensões: ativos/reflexivos; sensoriais/intuitivos; visuais/verbais; indutivos/ dedutivos; seqüenciais/globais. (FELDER, 2000). A partir deste modelo, os autores desenvolveram um instrumento denominado Índice de Estilos de Aprendizagem (*Index of learning styles* - ILS), que classifica os estudantes em quatro das dimensões acima citadas.

Aplicamos o teste a alunos de Cálculo A e vimos que esses estudantes são, preferencialmente, ativos, sensoriais, visuais e seqüenciais. Se essas são suas formas de se apropriar

---

[2] As questões aplicadas podem ser encontradas em Cury e Pinent (2000), artigo disponível em <http://www.mat.pucrs.br/~helena/pages/revabenge.pdf>

dos conhecimentos apresentados, eles devem ter mais facilidade de aprender se seus professores desenvolvem atividades que apelam para essas características. No entanto, na análise dos estilos de aprendizagem de professores (e que devem ser seus estilos preferenciais de ensinar, pois ensina-se, em geral, como melhor se aprende), vimos que a situação é bem diversa, pois a aplicação do teste ILS a um grupo de docentes da mesma Faculdade mostrou que eles são preferencialmente reflexivos, intuitivos, visuais e globais. Mesmo sabendo que não há uma relação direta entre suas formas de ensinar e a forma de aprender dos alunos da turma investigada (porque não são exatamente os mesmos docentes que ministram as aulas a todos os estudantes da turma), pode-se supor que há um descompasso entre os estilos de ensinar e aprender, o que deve causar alguns dos problemas detectados. (CURY, 2000).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A apresentação das diretrizes curriculares para os cursos de Engenharia e das investigações sobre ensino de Cálculo, acima citadas, tem por objetivo levantar idéias para uma discussão ampla sobre as dificuldades do processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina e sobre experiências que estão sendo realizadas para investigar os problemas e propor soluções. Sabemos que há um grande número de colegas envolvidos com esses trabalhos em muitas IES brasileiras, mas às vezes estamos a "reinventar a roda", pois já há experiências e resultados confiáveis para serem discutidos.

Portanto, como conclusão dessa comunicação, sugerimos algumas medidas para formar uma rede de professores de Cálculo Diferencial e Integral:

(1) criação de uma lista de discussão, via Internet;
(2) troca de experiências, com possibilidade de reaplicação de testes, estratégias e atividades em outras IES;
(3) pesquisa ampla, envolvendo várias Instituições, com projeto enviado para alguma agência financiadora, bolsistas de Iniciação Científica e mestrandos, com vistas ao preparo de futuros docentes universitários para um trabalho continuado de investigação sobre ensino de Cálculo;
(4) criação de uma página na Internet, ancorada em algum Programa que tenha facilidade para gerenciar as modificações e inclusões, com publicações disponíveis *online* e *links* para outros endereços importantes;
(5) realização de encontros sobre ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.

A troca de informações entre docentes participantes de grupos de pesquisa cadastrados no CNPq, envolvidos com ensino de Cálculo Diferencial e Integral, pode ser uma possibilidade inicial para a futura criação dessa rede de pesquisa.

Referências:

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Superior. Comissão de Especialistas de Ensino de Matemática e Estatística**. Diretrizes curriculares para cursos**

de bacharelado em matemática. Disponível em <http://www.mec.gov.br/sesu/ftp/ Matembac-DC.rtf> Acesso em : 04 fev. 2002a.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Superior. Comissão de Especialistas de Ensino de Engenharia. **Diretrizes curriculares para os cursos de engenharia**. Disponível em <http://www.mec.gov.br/sesu/ftp/curdiretriz/engenharia/ eng_dire.rtf> Acesso em: 04 fev. 2002b.

CURY, Helena Noronha. Analisis y classificación de errores em calculo diferencial e integral. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMATICA, 8., 1991, Miami. **Actas**. Paris: Unesco, 1992. p.134.

CURY, Helena Noronha. **Perfil do aluno de Cálculo A dos cursos de engenharia**. Porto Alegre: PUCRS, 1995. (Relatório de pesquisa)

CURY, Helena Noronha. Estilos de aprendizagem de alunos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 28., 2000, Ouro Preto. **Anais...**Ouro Preto: UFOP, 2000. CD-ROM.

CURY, H. N.; PINENT, C. E. da C. Análise de atitudes de calouros de engenharia em relação às ciências e à matemática. **Revista de Ensino de Engenharia**, v.19, n.1, p.47-54, 2000.

ENGINEERING **Criteria 2002**. Disponível em <http://www.abet.org/images/Criteria/ e-ac_criteria_b.pdf > Acesso em 10 fev. 2002.

FELDER, Richard M. **Reaching the second tier**: learning and teaching styles in college science education. Disponível em <http://www2.ncsu.edu/unity/lockers/users/f/felder/public/Papers/ Secondtier.html > Acesso em: 04 out. 2000.

FLEENER, M. J. Scientific world building on the edge of chaos: high school student´s beliefs about mathematics and science. **School Science and Mathematics**, v.96, n.6, p.312-320, Oct. 1996.

PALIS, Gilda de la Rocque. Computadores em Cálculo: uma alternativa que não se justifica por si mesma. **Temas & Debates**, v.8, n.6, p.22-38, 1995.

VYGOTSKY, L. S. A formação social da mente. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

WILKINSON, J.; MATTHEW, B.; EARNSHAW, H. Engineers need mathematics but can we make it interesting? In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING EDUCATION, 2001, Oslo. **Proceedings**...Oslo, Noruega, Aug. 2001. CD-ROM.

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1,
págs: 115:122..
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

O MÉTODO DE BOOLE

Marta Figueredo dos Anjos

Depto. de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
martafigueredo@yahoo.com.br

John A. Fossa, PhD

Depto. de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
fosfun@digi.com.br

Resumo: *A vida de Mary Boole foi marcada pela intolerância religiosa e pela discriminação contra as mulheres na matemática. Depois de recontar rapidamente os eventos mais importantes da sua vida, localizamos a origem e descrevemos a função social do mito de que as mulheres não poderiam fazer matemática. Por fim, descrevemos o trabalho pedagógico de Mary Boole, o qual caracteriza a matemática, como uma maneira importante de pensar e não, simplesmente, como um conjunto de procedimentos técnicos.*

Palavras-chave: *Mary Boole; Mulheres na Matemática, Método de Boole; História da Matemática; Educação Matemática; Sociologia da Matemática.*

Abstract: *The life of Mary Everest Boole was marked by suffering due to religious intolerance and discrimination against women in mathematics. After briefly recounting the main events in her life, we locate the origin and describe the social function of the myth that women are incapable of doing mathematics. Finally, we describe Mary Boole's reaction to this state of affairs in her pedagogical work, where mathematics is characterized, not as a set of technical procedures, but as an attitude and an important way of thinking.*

Key words: *Mary Boole; Women in Mathematics; Boole's Method; History of Mathematics; Sociology of Mathematics.*

Segundo E.T. Bell (1986, p.446), George Boole, foi a fonte das idéias de Mary Boole sobre a educação: "After her husband's death, Mary Boole applied some of the ideas which she acquired from him to rationalizing and humanizing the education of young children."[1]

---

[1] "Depois da morte do seu marido, Mary Boole aplicou algumas das idéias que tinha adquirido dele à racionalização e humanização da educação de crianças".

Pondo de lado a questão da validade da apreciação de Bell dos méritos relativos de George e Mary Boole no desenvolvimento do pensamento pedagógico de Mary, podemos afirmar que ambos tiveram a evidente preocupação de que o ensino da matemática fosse feito de forma a propiciar a formação de valores humanísticos, e até religiosos, do aluno. George foi um ativo voluntário no ensino de um grupo de cegos e chegou a inventar instrumentos, parecidos com o sistema Braille, que os permitiriam utilizar materiais escritos. Mary propunha o uso de materiais manipulativos no ensino da matemática e teve grande influência nas escolas “progressistas” que começaram a surgir no início do século XX. No entanto, observamos que o ensino da matemática, tanto historicamente quanto cotidianamente, não é, em geral, conduzido da forma indicada acima, mas como uma técnica (mera manipulação de símbolos). Este tipo de educação matemática treina as pessoas a repetir passos e isto ajuda na formação de pessoas não-conscientes e sem atitudes críticas. Isto, por sua vez, permite que a matemática seja usada na manutenção de estruturas sociais discriminatórias, calcadas na criação de conhecimento e linguagem de acesso restrito e reforçadas por atitudes sociais propagadas pelos interessados. A própria Mary Boole foi uma vítima desta discriminação, apesar do seu inegável talento para a matemática. Assim, depois de uma rápida revisão da vida de Mary Boole, tentaremos esclarecer a origem, na Revolução Industrial no século XIX, de uma das atitudes discriminatórias sobre as mulheres e a matemática mais prevalecentes – que a mulher não teria a capacidade de fazer a matemática. Finalmente, faremos uma revisão do que seja a álgebra para Mary Boole e mostrar a sua relevância não somente para o ensino de crianças, mas também para o ensino da matemática em qualquer nível.

1. MARY BOOLE E A LUTA CONTRA O PRECONCEITO

Mary Everest[1] Boole nasceu na Inglaterra em 1832. Aos cinco anos de idade, a sua família foi morar na França por razões relacionadas à saúde do seu pai, um pastor protestante. Aparentemente, foi ali que sentiu o primeiro gosto amargo da discriminação, pois os franceses, católicos em geral, eram bastante intolerantes com a família protestante. Mas, também foi na França, através dos estudos com um professor particular, Monsieur Deplace, que a pequena Mary adquiriu o amor pela matemática que iria perdurar toda a sua vida.

Depois de oito anos na França, sua família retornou à Inglaterra. Mary foi obrigada a deixar de freqüentar a escola para ajudar seu pai. Assim, ela passou a ensinar na escola dominical onde seu pai era pastor e ajudá-lo a preparar seus sermões; neste mesmo período, ela também estudava a homeopatia com seu pai. Mesmo fora da escola, Mary não abandonou seus estudos de matemática. Usufruindo, à revelia do pai, dos livros de matemática deste, ela estudava sozinha, tirando dúvidas com um tio sempre que a oportunidade se apresentava.

Durante uma das visitas que fazia à Irlanda, onde o referido tio morava, Mary conheceu George Boole, um matemático já famoso que tinha sido convidado a lecionar na recém-

[1] Um de seus tios foi o primeiro a escalar o pico da montanha do Himalaia que hoje traz o seu nome.

fundada universidade irlandesa Queen's College. Depois de casar com George, Mary começou a freqüentar um seminário que o seu marido ministrava. No entanto, Mary experimenta de novo a discriminação, pois, pressionada pela comunidade, a direção da universidade proibiu a sua presença na sala de aula. Mas, a pedido de seus alunos, os quais aparentemente entendiam as explicações dela melhor do que as do seu marido, George passou a reunir o seminário na própria casa para que Mary pudesse continuar a assisti-lo.

Este período da vida de Mary Boole chegou a um fim inesperado com a morte súbita do seu marido. Caminhando para casa, George foi pego de surpresa por uma tempestade e ficou resfriado. Aplicando seus conhecimentos da homeopatia, Mary despejou baldes de água fria sobre ele e, em conseqüência, George contraiu uma pneumonia e faleceu, deixando Mary com cinco filhas. Assim, Mary se mudou para Londres, onde obteve um emprego e onde começou a escrever artigos e livros sobre o ensino da matemática. Tinha uma fascinação pelas ciências da psique e do espírito, chegando a estudar a teosofia. Quando suas idéias teosofistas começaram a aparecer nas suas obras escritas, Mary sofreu mais uma vez as conseqüências da intolerância religiosa, perdendo a sua posição em Londres. Mencionamos alguns de seus livros, a título de exemplo:

- *The Mathematical Psychology of Gratry and Boole* (1883)
- *Logic Taught by Love* (1890)
- *Lectures on the Logic of Arithmetic* (1903)
- *The Preparation of the Child for Science* (1904)
- *Philosophy and Fun of Algebra* (1909)
- *The Forging of Passion into Power* (1910).

Mary Boole faleceu em 1916 com 84 anos de idade.

2. A DISCRIMINAÇÃO CONTRA AS MULHERES

Voltando a nossa atenção para as potencialidades da matemática como suporte de práticas sociais discriminatórias, estudos etnomatemáticos (ver, e.g., D'Ambrosio, 1990, ou Joseph, 1994) têm mostrado claramente que vários grupos sociais foram e continuam a ser o alvo destas práticas. Assim, a matemática age como um crivo, negando ascensão social a quase todos os membros destes grupos. Um dos maiores grupos prejudicados por essa conjuntura é o das mulheres. Todos os dois autores deste trabalho podem apresentar evidência anedótica desta discriminação. Em vez disto, porém, apontamos para a composição dos corpos discentes e docentes dos cursos de matemática nas nossas universidades. Há, é certo, muitas mulheres nestes cursos, da mesma forma que há muitas mulheres entres os médicos. Quase todas as médicas, porém, se encontram nas especialidades menos nobres de ginecologia ou pediatria e somente uma proporção bem reduzida alcançam posições de poder dentro da estrutura médica. Analogamente, as mulheres que estudam a matemática estão concentradas nos cursos de licenciatura, pois se espera que vão ser professoras do ensino fundamental e médio. Poucas alcançam posições como pesquisadoras nas fronteiras da matemática ou obtêm posições de poder dentro da estrutura universitária.

Desde que vivemos em uma sociedade "democrática" e "livre", não seria aceitável discriminar as mulheres unicamente por conta do seu gênero. Assim, é necessário o desenvolvimento de atitudes sociais que "justifiquem" tal discriminação. Uma das atitudes sociais que fazem este papel é a crença que foi usada contra Mary Boole, a crença de que a mulher não tem as condições intelectuais para fazer matemática. Este mito funciona em duas maneiras distintas: por um lado, justifica ações que limitam o acesso das mulheres à matemática e, por outro lado, desestimula a procura da matemática por parte das mesmas.

É interessante notar, no entanto, que esta atitude social prejudicial contra as mulheres na matemática, observada tão incessantemente hoje em dia, não foi uma constante histórica. De fato, parece que podemos precisar o seu início na época da Revolução Industrial. Teri Perl (1979) explicita o desenvolvimento da referida atitude no seu estudo sobre o Ladies' Diary, uma espécie de almanaque (publicado de 1704 a 1841 na Inglaterra), direcionado às mulheres e dedicado à publicação de problemas e curiosidades matemáticas. A própria existência deste almanaque com conteúdo quase inteiramente matemático, direcionado às mulheres e contando com um grande número de mulheres entre seus colaboradores é evidência forte para a ausência, no período sob consideração, da crença de que as mulheres não possam fazer a matemática. A autora conclui que: "There is no evidence to suggest that mathematics was considered less accessible to women than to men,"[1] no final do século XVII e início do século XVIII (Perl 1979, p. 43).

Que o almanaque foi uma publicação vigorosa é atestado pelo grande período – quase 150 anos – durante o qual sobreviveu. Segundo Perl, o Ladies' Diary acabou falindo devido ao surgimento de uma nova conjectura social em que a matemática prática se tornou mais complexa em resposta às novas aplicações do mundo de trabalho e, desta forma, deixou de ter aplicações significativas para os interesses das mulheres. Independentemente deste acontecimento, sempre segundo a explicação de Perl, surgiu uma nova atitude social segundo a qual as mulheres eram seres frágeis e, portanto, incapazes de enfrentar o trabalho árduo da matemática. Desta forma, conclui Perl, o estereótipo de que a mulher não pode fazer matemática era uma conseqüência do desenvolvimento da própria matemática e o acoplamento da matemática prática a um novo mundo de trabalho que não interessava às mulheres.

Dois fatores, porém, mostram que a explicação de Perl é falha. Em primeiro lugar, não era necessário que o Ladies' Diary acompanhasse o desenvolvimento da matemática prática. Poderia ter continuado a publicar o mesmo tipo de material que tinha publicado no passado e, assim, ter assegurado sua clientela. Em segundo lugar, e talvez mais importante, o almanaque faliu no início da Revolução Industrial. Isto era um período em que, pela primeira vez, um grande contingente de mulheres saiu de casa para trabalhar. Assim, as mulheres certamente teriam muito interesse na nova matemática prática e a falência do Ladies' Diary era provavelmente devido a sua incapacidade de mudar seu formato literário (os problemas

[1]"Não há evidência que sugere que a matemática fosse considerada menos acessível às mulheres do que aos homens".

eram redigidos como poemas) e, desta forma, não acompanhou a mudança real nos interesses das mulheres trabalhadoras.

De onde veio então a crença da mulher frágil, incapaz de fazer a matemática?

Para responder a esta pergunta, notamos primeiro que, embora o mito da mulher frágil não existiu nos séculos XVII e XVIII, isto não significa que a mulher não era discriminada neste período. De fato, na assinalada época, a mulher inglesa era presa à casa e inteiramente subjugada ao pai ou ao marido. Com o advento da Revolução Industrial, porém, e a conseqüente saída da mulher do lar para trabalhar fora, esta maneira direta de dominação foi perdida. Eram necessários novos mecanismos que permitiriam a saída da mulher para o local do trabalho, mas que impediriam que ela pudesse competir com o homem para alcançar as posições mais cobiçadas. A solução era afastar da mulher o conhecimento da matemática prática que era necessária para exercer estas ocupações. Isto foi feito, parcialmente, através da adoção da nova crença da mulher frágil, incapaz de fazer matemática. Por sua vez, esta nova atitude foi usada para afastar as mulheres do estudo da matemática nas universidades, como aconteceu com a própria Mary Boole, fechando assim o círculo discriminatório ao impedir o surgimento de *role models* femininos que pudessem inspirar as meninas a estudar a matemática. Portanto, ao contrário do que Perl concluiu, a nova atitude social da incapacidade da mulher de fazer matemática não foi um acontecimento independente e fortuito; foi um novo instrumento de dominação, ocasionado pela entrada da mulher na força de trabalho durante a Revolução Industrial, visando mantê-la afastada do novo conhecimento matemático necessário para ascensão no trabalho.

3. O MÉTODO

Dada a situação descrita nos parágrafos acima, qual foi a resposta de Mary Boole? Em primeiro lugar, elaborou uma nova concepção da matemática, especialmente da nova álgebra em que o seu marido foi um dos pioneiros. Para ela, a álgebra não é apenas a dominação de certas técnicas de manipulação de símbolos, mas é uma maneira de pensar. Além disto, porque é um pensamento reflexivo e crítico, baseado em auto-conhecimento, também é uma maneira poderosa de pensar:

> The essential element of Algebra: — the habitual registration of the exact limits of one's knowledge, the incessant calling into consciousness of the fact of one's own ignorance, is the element which Boole's would-be interpreters have left out of his method.[1] (Boole, 1909, p.89.)

Sendo assim, a matemática deixa de ser um conjunto de procedimentos técnicos, pois é baseada em componentes humanísticos.

[1] "O elemento essencial da Álgebra: – o registro habitual dos limites exatos do nosso conhecimento, o constante relembrar do fato da nossa própria ignorância, é o elemento que os intérpretes de Boole deixaram de fora de seu método".

Podemos ver a concepção da matemática de Mary Boole em dois níveis distintos. Num nível, o método formal da matemática nos ajuda a registrar os limites do nosso conhecimento das seguintes maneiras:

1. Definir os termos;
2. Identificar as hipóteses;
3. Identificar as teses;
4. [Modelar e] manipular;
5. [Re-interpretar].

A definição exata dos termos é uma delimitação dos mesmos e a identificação das hipóteses e teses é uma separação do que sabemos do que não sabemos. Estas três etapas de investigação matemática pertencem claramente à concepção de Mary Boole sobre a matemática. A manipulação utiliza as técnicas formais para estender o nosso conhecimento. Finalmente, em situações práticas, a modelagem matemática da situação e a re-interpretação dos resultados em termos desta situação têm a mesma estrutura: o que sabemos e o que não sabemos sobre a situação é registrado em termos formais e a manipulação estende o nosso conhecimento, mas o resultado não fica no plano formal, sendo transformado em termos não formais, estendendo o nosso conhecimento prático sobre a situação sob consideração.

O método de Boole, porém, visa mais do que isto. Pretende registrar os limites da ignorância ao levar o aluno a ter as seguintes novas atitudes perante a matemática:

1. Estabelecer uma rotina heurística;
2. Desenvolver a curiosidade;
3. Ser apto a experimentar e investigar;
4. Perder o medo da matemática.

Parece que o estabelecimento de uma rotina seria o exato oposto ao pensamento crítico. A rotina heurística, porém, não é uma receita que o aluno deve seguir mecanicamente. Muito pelo contrário, é uma atitude que leva o aluno a pensar matematicamente. Leva-o a refletir sobre os conceitos sob consideração e as relações que podem manter entre si. Desta forma, desperta a curiosidade do aluno sobre os conceitos matemáticos e, nas situações práticas, os conceitos não-matemáticos que estão sendo modelados matematicamente. Leva-o a fazer investigações sobre estas relações e ter uma atitude ativa frente ao problema proposto. Em conseqüência, perde o infame medo da matemática.

4. CONCLUSÃO

Desde seus dias de criança na França até a sua morte, a vida de Mary Everest Boole foi vitimada pela intolerância religiosa e o preconceito contra a mulher. Também foi caracterizada por um amor à matemática. Ironicamente, era a própria matemática que foi usada como instrumento de discriminação contra ela e tantas outras mulheres, como vimos acima. Não obstante, com um espírito de genialidade talvez tão grande quanto o do seu mais famoso marido, ela soube elaborar uma visão da matemática que a coloca no seu devido lugar como um tipo de pensamento crítico e humanístico. Assim, fez uma contribuição importante ao ensino da matemática. Mais ainda, desde que a matemática é visto como pensamento humanístico pelo método de Boole, há implicações mais abrangentes:

> Men who wish to exploit other men fear nothing in logic or science except this element. They fear nothing in earth, heaven, or hell, so much as a public accustomed to realize exactly how much has been proved, and where its own ignorance begins. Exploiters fear this about equally, whether they call themselves priests, schoolmasters, college dons, political leaders, or organizers of syndicates and trusts. (Boole, 1909, p. 89; ênfase no original.)[1]

Desta forma, Mary Boole argumenta que a matemática não é um conjunto de conteúdos e procedimentos técnicos, mas uma atitude e uma maneira importante de pensar.

Referências:

BELL, E.T. *Men of Mathematics*. New York: Simon & Schuster, 1986.

BOOLE, Mary Everest. *Philosophy and Fun of Algebra.* London; C. W. Daniel, 1909.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*. São Paulo: Ática, 1990.

JOSEPH,G. G. The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics. London: Penguin Books, 1994.

PERL, Teri. "The *Ladies' Diary* or Woman's Almanack, 1704-1841". *Historia Mathematica* 6, p. 36-53, 1979.

[1] *"Homens que querem explorar os outros não temem qualquer elemento da lógica ou da ciência exceto este. Eles não temem qualquer coisa na terra, no céu, ou no inferno, tanto quanto um povo acostumado a ter consciência de exatamente* quanto tem sido demonstrado e onde sua ignorância começa*. Todos os exploradores têm o mesmo medo deste elemento independentemente do que eles pensem ser: padres, professores, lideres políticos ou organizadores de sindicatos".*

CAPÍTULO 10

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1,
págs: 123:129..
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01** © 2002, Editora IME-UERJ.

O PROGRAMA DE DIENES

John A. Fossa, PhD

Depto. de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
endereço eletrônico: fosfun@digi.com.br

Resumo: *Z. P. Dienes desenvolveu uma teoria importante de Educação Matemática, a qual, no entanto, não era explicitamente epistemológica. O presente trabalho extrai dos escritos de Dienes a epistemologia, sobre a qual a sua teoria é fundamentada. Também mostra que a referida teoria é de natureza intuicionista, ou seja, é um precursor do construtivismo. Finalmente, o programa intuicionista de Dienes é revisto e são deduzidas duas lições para o ensino da matemática, para o nível do terceiro grau.*

Palavras-chave: *Dienes; Intuicionismo; Construtivismo; Filosofia da Matemática; Educação Matemática.*

Abstract: *Z. P. Dienes developed an influential theory of Mathematics Education, which, however, was not explicitly epistemological. The present work elicits from Dienes' writings the underlying epistemology upon which his theory is founded and shows it to be intuitionist, thereby making it an early type of constructivism. Finally, Dienes' intuitionist program is reviewed, from which two lessons for college-level mathematics teaching are deduced.*

Key words: *Dienes; Intuitionism; Constructivism; Philosophy of Mathematics; Mathematics Education.*

No presente trabalho queremos mostrar como a teoria de Educação Matemática de Z. P. Dienes era uma teoria intuitionista e, portanto, precursora[1] do construtivismo contemporâneo. Em conseqüência, veremos a relevância do programa de Dienes para o ensino superior.

[1] Uma teoria intuicionista de Educação Matemática, baseada no intuicionismo como uma filosofia da matemática, foi explicitada pela primeira vez em Fossa (1995), onde também foi mostrado que esta teoria é um tipo de construtivismo. Limitar-nos-emos ao trabalho de Dienes feito entre 1950 e 1971. O trabalho de Piaget já foi largamente conhecido a partir dos 1960s. Assim, parece mais adequado rotular Dienes um contemporâneo do construtivismo do que seu precursor. Não estamos, porém, interessado nas relações temporais entre estas duas formas da teoria, mas nas suas relações lógicas. Deste ponto de vista, o intuicionismo é uma forma primitiva do construtivismo e, assim, poderá ser visto como um precursor do mesmo.

A classificação da teoria de Dienes como intuicionista (construtivista), ou não, é problemática porque esta teoria não propõe uma epistemologia explicita, enquanto o construtivismo é essencialmente uma epistemologia. Sendo assim, tentaremos trazer à tona a epistemologia implícita na teoria de Dienes.

1. O CONCEITO DE INTUICIONISMO

Podemos conceituar o intuicionismo como um tipo de idealismo crítico, ou seja, um tipo de kantismo. Immanuel Kant combinou o tipo de idealismo então vigente com o empirismo (ver Fossa, 1998) através da tese da estruturação ativa da experiência pela mente cognoscitiva. Isto é, Kant tentou investigar sob quais condições o conhecimento seria possível. O realismo é muito ingênuo, segundo Kant, porque afirma que temos acesso, através das nossas sensações, a objetos que são independentes da nossa mente. Mas a única evidência que temos para esta afirmação é a própria experiência sensorial. Assim, caímos no empirismo, a tese de que todo o nosso conhecimento é, ou é baseado em, conhecimento sensorial. Para Kant, isto seria intolerável porque tornaria todo o conhecimento incerto e falível, enquanto o seu projeto era, precisamente, mostrar que há conhecimento – por exemplo, o conhecimento matemático – infalível.

A saída de Kant era postular que há, de fato, entidades independentes que ocasionam as nossas sensações, mas que não temos acesso direto a estas entidades. A mente vem equipada com um conjunto de categorias básicas que usa para organizar o conhecimento sensorial. Estas categorias, segundo Kant, nos proporcionam a possibilidade de obter conhecimento não-empírico e infalível. Além disto, Kant argumenta que temos intuições puras (não-empíricas) – as intuições de espaço e de tempo – e que podemos construir conceitos puros (não-empíricos) nestas intuições. Assim, a geometria seria conhecimento construído na intuição de espaço e a aritmética/álgebra na intuição de tempo, o que explica a natureza infalível de conhecimento matemático.

Aplicado à filosofia da matemática, o kantismo implica na intuição e construção de objetos matemáticos e a rejeição de certas técnicas de demonstração, notadamente *reductio ad absurdum*. É possível que George Boole e W. R. Hamilton tivessem tendências intuicionistas, pois Boole acreditava no papel da intuição e Hamilton na tese de que a álgebra era a ciência do tempo puro. Mesmo assim, a tese de Boole parece ser mais teológica do que epistemológica e Hamilton acabou qualificando sua opinião no fim da sua vida. Por outro lado, Leopold Kronecker, com seu famoso *bom mot "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk*",[1] recomendou que os matemáticos voltassem à intuição primordial dos números naturais e, assim, é um verdadeiro precursor do intuicionismo como uma filosofia da matemática.

Há ainda os "intuicionistas franceses", principalmente Henri Poincaré, Émile Borel e H. Lebesgue, bem como L. E. J. Brouwer e seus seguidores (A. Heyting, H. Weyl e Troelstra).

[1] "Nosso querido Deus fez os números naturais, todo o resto é o trabalho do homem".

Brouwer era provavelmente o mais importante proponente do intuicionismo. Argumentou que temos intuições de certos objetos matemáticos básicos e que construímos todos os outros. Conseqüentemente, é necessário que construamos um objeto matemático antes de começar a raciocinar sobre as suas propriedades. Assim, provas indiretas da existência de objetos matemáticos são vetadas e a lógica intuicionista não aceita a equivalência entre uma proposição e a sua dupla negação. Há alguns construtivistas matemáticos, como Beeson, que parecem diferir do grupo de Brouwer em não ter fortes motivações filosóficas. Em Educação Matemática, o intuicionismo não era formalmente reconhecido, mas, como Fossa (1998) mostrou, o construtivismo é um desenvolvimento de idéias intuicionistas. Assim, temos Jean Piaget e os vários construtivismos pós-piegetianos, especialmente o construtivismo radical, liderado por Ernst von Glasersfeld.

2. O INTUICIONISMO DE DIENES

O próprio Dienes atestou que era um matemático intuicionista (Dienes, 1951/52, e Dienes, 1959). Assim, temos razões *a fortiori* para pensar que Dienes era um intuicionista (construtivista) na sua teorização sobre a Educação Matemática, pois é de supor que, quando ele pensava sobre a Educação Matemática, as suas considerações seriam condicionadas pela sua posição intuicionista do que seja a matemática. De fato, Dienes (1960, p. 11) afirma

> That is why this volume is called *Building Up Mathematics*. It is meant to send cold shivers down the spines of those who believe that mathematics is based on logic. In the author's view mathematics is based on experience; it is the crystallization of relationships into a beautifully regular structure, distilled from our actual contacts with the real world. Logic consists in reflecting on how this and other structures function, and I find it difficult to see how it is possible to reflect on something that is not there yet.[1]

As teses intuicionistas evidentes nesta passagem são as seguintes:

1. um forte anti-formalismo;
2. uma rejeição da lógica como fonte de conhecimento matemático:
3. uma aceitação do empirismo:
4. uma insistência na necessidade de exibir (construir) objetos matemáticos antes de investigar as suas propriedades.

Das três filosofias da matemática mais proeminentes na primeira metade do século XX – o intuicionismo, o formalismo e o logicismo –, as primeiras duas eram especialmente antagônicas. De fato, houve até um certo desentendimento nas relações pessoais dos seus proponentes principais, Brouwer e Hilbert, respectivamente. Assim, a linguagem forte de

[1] "O presente volume é chamado *Construindo a Matemática* para arrepiar os que pensam que a matemática é baseada na lógica. No ponto de vista do presente autor, a matemática é baseada na experiência; é a cristalização de relações em estruturas belas, destiladas de nossos contatos com o mundo real. A lógica reflete sobre como estas, e outras, estruturas funcionam e acho difícil refletir sobre o que ainda não existe".

Dienes, que quer "arrepiar" os formalistas, pode ser vista como um reflexo da antipatia existente entre as duas concepções da matemática. Como já vimos, os intuicionistas rejeitaram a lógica como uma fonte de conhecimento matemático, propondo sempre a intuição (kantiana) para este papel. Isto não quer dizer que a lógica não faça parte da matemática. Da verdade, como veremos mais adiante, Dienes quer levar o aluno à axiomatização. Mas, a lógica só vem depois; é meramente[1] uma maneira de sistematizar o conhecimento obtido de outras formas. A forma primária de obter conhecimentos matemáticos, para Dienes, é através da experiência. O próprio Brouwer não confiou muito na experiência, mas o empirismo faz parte do intuicionismo da maioria dos seus seguidores e tem um papel central no construtivismo radical de von Glasersfeld. Finalmente, Dienes, na citação acima, afirma a tese intuicionista de que é necessário construir um objeto matemático antes de raciocinar sobre as suas propriedades.

Para caracterizar o pensamento de Dienes mais profundamente, será interessante olhar para a sua concepção de abstração. Assim, Dienes (1971, p. 337) afirma que

> By concrete, we mean usually, our immediate contact with the real world. We come into contact with objects and events and we re-act to them… This is the first stage towards abstraction.[2]

Esta posição é bastante parecida com a de Piaget, pois para ele é a nossa interação com o mundo sensorial e a reflexão sobre o comportamento deste mundo que nos leva aos primeiros níveis de abstração. Dienes (1976, p. 1) explica ainda mais que

> In mathematics the objects of our thoughts are not real concrete objects. They are ideas or abstractions… The number 3 has no real concrete existence. It is an abstraction built out of sets of objects which all have the properties of threeness, familiar to all of us… This is where mathematics differs from the experimental sciences. Mathematics is to do with relating non-existent entities to other non-existent entities.[3]

Parecendo mais uma vez com a teoria de Piaget, a teoria de Dienes aqui postula níveis de abstração. Mesmo um conceito tão fundamental como o de número é o resultado de um nível bastante avançado de abstração. Finalmente, sua posição em relação à abstração é esclarecida por Dienes (1963):

> The formation of isomorphisms is the process by which we arrive at our abstractions (p. 59)… This [construction] is literally putting things together to build another structure with some previously specified requirements (p. 61)… A central problem in successfully accomplishing the abstraction process is inducing sub-

---

[1] Para Brouwer, porém, a linguagem e, portanto, a lógica é sempre uma distorção do pensamento. Esta posição não é compartilhada pela maioria dos outros construtivistas.

[2] "Por concreto, geralmente queremos dizer o nosso contato imediato com o mundo real. Encontramos objetos e eventos e reagimos a eles... Este é o primeiro passo no processo de abstração".

[3] "Na matemática os objetos do nosso pensamento não são objetos concretos. São idéias ou abstrações... O número 3 não tem existência concreta. É uma abstração construída a partir de conjuntos de objetos – conjuntos que têm as propriedades bem conhecidas de triplicidade... Neste sentido, a matemática difere das ciências experimentais. A matemática relaciona entidades não-existentes a outros objetos não-existentes".

> jects to form isomorphisms, this being the positive facet of the process (p. 85)… Constructive thinking takes place when one aims at a set of requirements and attempts to build a structure which will meet them (p. 95)… Abstraction is essentially constructive in character (p.95).[1]

As teses intuicionistas destas passagens são:

1. objetos são dados por meio da sensação e é só na ocasião desta que intuições são produzidas;
2. abstração é um processo construtivo;
3. abstração é a construção de isomorfismos.

O conhecimento, mesmo o conhecimento puro (não-empírico) não acontece em um vácuo. É só quando a mente recebe a matéria prima das sensações, por assim dizer, que as filtra através das supramencionadas categorias (ver Kant, *Kritik der Reinen Vernunft*, B34). A abstração é caracterizada como uma atividade construtiva, efetuada através da elaboração de isomorfismos. Weyl afirma que a abstração é feita através da construção de relações de equivalência. É óbvio que as duas são posições equivalentes.

3. O PROGRAMA

Do que foi visto acima, podemos afirmar que a teoria de Educação Matemática de Z. P. Dienes é uma teoria intuicionista e, assim, uma forma de construtivismo. Finalmente, então, podemos explicitar o que pode ser chamada do "programa de Dienes", a cristalização do seu pensamento sobre o ensino da matemática, o qual deve ocorrer nas seguintes seis estágios, baseados em atividades lúdicas:

1. Interação lúdica com o ambiente, resultando na descoberta de regularidades;
2. Estruturação da brincadeira pela construção de regras;
3. Comparação de jogos com a mesma estrutura, resultando na construção de isomorfismos;
4. Representação dos itens isomorfos de uma maneira única;
5. A própria representação se torna um objeto de estudo (simbolização);
6. A representação é reduzida a um sistema axiomático (formalização).

Dienes, como virtualmente todo construtivista em Educação Matemática, propõe o uso de atividades com materiais concretos num contexto de redescoberta como o instrumento fundamental do ensino da matemática. É uma conseqüência do empirismo – que aprendemos da nossa experiência – e do idealismo crítico – que é a própria mente que é ativa ao construir o conhecimento matemático a partir desta experiência. A abstração das estruturas matemáticas inerentes nas atividades é feita através da comparação das atividades e a cons-

[1] "Abstraímos através da formação de isomorfismos... Esta [construção] é – literalmente – juntar coisas de tal maneira que uma nova estrutura, satisfazendo certas condições previamente especificadas, seja construída... Um problema central na consecução da abstração é levar o aluno a formar isomorfismos, sendo isto a faceta positiva do processo... O pensamento construtivo ocorre quanto se tenta construir uma estrutura que satisfaça a um conjunto de condições... A natureza da abstração é essencialmente construtiva".

trução de isomorfismos entre elas. Finalmente os próprios isomorfismos se tornam um objeto de estudo e são simbolizados e formalizados em sistemas axiomáticos.

Devemos ter, porém, um certo cuidado na interpretação do referido programa. Os seis estágios enumerados acima não se referem a seis partes de uma só atividade que seria feita numa única aula. Desta forma, os seis estágios não devem ser interpretados como características desejáveis para cada atividade, vista como uma unidade. Muito pelo contrário, se referem a um programa de Educação Matemática que começa na pré-escola e só culmina na universidade.

4. CONCLUSÃO

O programa de Dienes tem duas lições para o ensino da matemática no nível superior. A primeira é uma micro-lição, pois reza sobre o ensino de cada assunto: manipulação de símbolos não basta. Segundo Dienes, é necessário fundamentar o conhecimento matemático do aluno na experiência para que ele alcance uma compreensão significativa. Por exemplo, em ensinando grupos, não basta apresentar a definição e proceder axiomaticamente. Antes, é necessário que o aluno ver como a idéia de grupo surge dos padrões de simetria, através da classe de mapeamentos de um conjunto sobre si mesmo.

A segunda lição do programa de Dienes é uma macro-lição, pois reza sobre o desenvolvimento do conhecimento matemático como um todo: ensinar matemática no nível superior leva vinte anos. Isto é, o programa de Dienes não se refere apenas a pequenas seqüências de atividades para o desenvolvimento de um determinado conceito, mas ao desenvolvimento de certas habilidades e atitudes necessárias para fazer matemática com compreensão. Sendo assim, o estudo de grupos, por exemplo, começa com o estudo e apreciação de simetria através de atividades lúdicas, provavelmente já no primeiro grau.

Referências:

DIENES, Z. P. “Sulla definizione dei gradi di rigore”. *Rendiconti del Seminario Matemático*, 11, 223-253, 1951/52.

-----. “The growth of mathematical concepts in children through experience”. *Educational Review*, 2 (1), 1959.

-----. *Building Up Mathematics*. London: Hutchinson, 1960

-----. ”Les six étapes de l’apprentissage des structures”. *Educational Studies in Mathematics*, 3 (1), p. 12-42, 1970.

-----. ”An example of the passage from the concrete to the manipulation of formal systems”. *Educational Studies in Mathematics*, 3 (3/4), p. 337-352, 1971.

FOSSA, John A. *Intuitionist Theory of Mathematics Education*. Ann Arbor: University Microfilms, 1995.

-----.. *Teoria Intuicionista da Educação Matemática*. (Trad. de Alberta M. R. B. Ladchumananandasivam.) Natal: EDUFRN, 1998. [Tradução do item anterior.]

CAPÍTULO 11

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1,
págs: 129:139..
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

CORPO, TECNOLOGIA E COGNIÇÃO MATEMÁTICA[1]

Janete Bolite Frant

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
endereço eletrônico: janeteb@pucsp.br

Resumo: *O foco deste artigo é a discussão do papel do corpo e da tecnologia na cognição matemática. Apresento a análise de um estudo de caso sobre gráficos de movimento,[2] para subsidiar tal discussão. Esta investigação analisou a produção de significados de alunos de licenciatura e professores enquanto envolvidos em atividades matemáticas com calculadoras gráficas e sensores*

Palavras-Chave: *Tecnologia, Corpo, Cognição, Linguagem*

Abstract: *This article examines the role of embodiment and technology in mathematics cognition. I will present a case study analysis that investigated meaning production for Cartesian graphics. Participants were mathematics and physics teachers and undergraduate students.*

Key words: *Technology, Body, Cognition, Language.*

1. INTRODUÇÃO

Um dos propósitos da Educação Matemática é descrever e compreender melhor os processos do pensamento matemático dos estudantes para que nós professores elaboraremos atividades que promovam a produção de idéias matemáticas. De acordo com esta perspectiva, queremos analisar a produção de significados dos alunos e professores com novas tecnologias enquanto eles estão envolvidos em atividades matemáticas[3]. Neste artigo vou me deter a olhar como professores e alunos de matemática constroem e interpretam gráficos de funções lineares que representam movimento.

A dificuldade dos alunos em relação à leitura e/ou construção de gráficos cartesianos que expressam movimento é grande, quer na Matemática quer na Física, bastando ver os resultados do SAEB, vestibular, Provão e o alto índice de reprovação em matemática e física (ensino fundamental e médio), e em cálculo (ensino superior). Como no currículo esco-

---

[1] Esta pesquisa conta com o apoio da Texas Inc. do Brasil e faz parte de uma pesquisa maior que vem sendo discutida e apresentada em outras conferências.
[2] Agradeço a Vicente Eudes (UESA) por sua parceria nas oficinas iniciais .
[3] Atividades matemáticas são aquelas em que os alunos descobrem padrões, regularidades, exceções, tomam decisões, abandonam determinados caminhos em função de julgarem que outros são melhores.

lar fundamental o estudo do movimento não é contemplado no currículo de matemática, em geral, só vamos perceber esta dificuldade nas turmas de 3º grau nas aulas de cálculo ou no ensino médio nas aulas de cinemática.

Minha hipótese é de que esta dificuldade está intimamente ligada à relação entre a noção de movimento ensinada na escola e a noção de movimento adquirida pelo corpo ao se movimentar. Por exemplo, quando subimos uma escada não necessitamos pensar em levantar um pé, colocá-lo no próximo degrau, levantar o outro pé, e assim por diante, subimos quase automaticamente. Se alguém nos perguntar que pé foi colocado no primeiro degrau, ou no 38º certamente não saberemos. Acredito que algumas idéias sobre gráficos e fórmulas que descrevam movimento são produzidas a partir dessa movimentação corporal e incluídas em nosso repertório cognitivo. Vou tentar fazer um apanhado das teorias que fundamentam essa pesquisa mesmo sabendo que corro o risco de simplificar e reduzir teorias complexas.

Antes de continuar, cito algumas metáforas bastante comuns em nosso linguajar cotidiano. Quando dizemos que algo está impregnado, estamos afirmando que está em nosso corpo, nossas atitudes, enfim em nosso modo de entender e constituir o mundo. Expressões idiomáticas, por exemplo, são incorporadas através da cultura, da vivência e por isso é difícil para um estrangeiro ou uma criança muito pequena entenderem-nas.

A pesquisa em Educação Matemática vem se modificando, inserindo em sua base teorias da antropologia, lingüística, ciência da cognição para melhor compreender e explicar seus fenômenos. Neste caso, trago a contribuição de uma teoria sobre a o papel do corpo na produção de conhecimento que se desenvolve fora do Brasil com o nome de "embodied cognition" e aqui uso apenas como Corpo (para maior aprofundamento, veja, principalmente, Lakoff e Nunez (2000) Nunez (2000); Lakoff e Johnson (1999), e Nemirowsky (2002)).

Trabalhos com sensores e calculadoras gráficas foram também desenvolvidos no Brasil no GPIMEM1, a diferença reside exatamente no referencial teórico pois admito a introdução de novas tecnologias no ensino da Matemática como próteses que permitem agir e falar sobre objetos matemáticos. Afirmo, ainda mais, que o uso de tecnologia traz um novo texto que força a produção de significados em um campo semântico diferente do que o aluno está acostumado a trabalhar.

2. Da Teia Teórica ao Referencial Adotado

Encontramos grande parte dos pesquisadores investigando a utilização da tecnologia como ferramenta que pode facilitar o ensino e a aprendizagem de matemática. Outros se voltam a investigar este uso como forma de expressão de aprendizagem, mais adiante falaremos de uma nova visão a "prótese".

O uso da tecnologia como ferramenta traz embutida a idéia de que o computador ajudaria a fazer a ponte entre o sujeito cognoscente e o conhecimento. Essa ponte não é boa ou

[1] GPIMEM- Grupo de Pesquisa em Informática da UNESP RC

ruim, mas não dá conta de entender a aprendizagem e consequentemente contribuir com o ensino de matemática. Podemos olhar esta idéia como um legado do behaviorismo que nos levaria a acreditar que uma “boa” ponte resolveria o problema, infelizmente estudos em ciência da cognição, atualmente, nos mostra que o assunto é mais complexo.

Não existem pontes ou caminhos simples para uma forma de expressão. Quando eu uso uma ferramenta esse caminho é explicitado, o exemplo que gosto de trazer é o do martelo para pregar um prego na parede. Não vou ficar experimentando e martelar o meu dedo, não vou usar uma esponja para pregar o prego, escolho o martelo por ser a melhor “ponte” para levar o prego até a parede. A tecnologia atual que passa pelo computador tem uma vantagem de poder ser uma ferramenta ou um meio de expressão, assim como o pincel e a tinta. Posso pintar um quarto e posso pintar um quadro e a diferença entre as duas ações é bem grande. Um pianista pode tocar uma sinfonia ou pode compô-la.

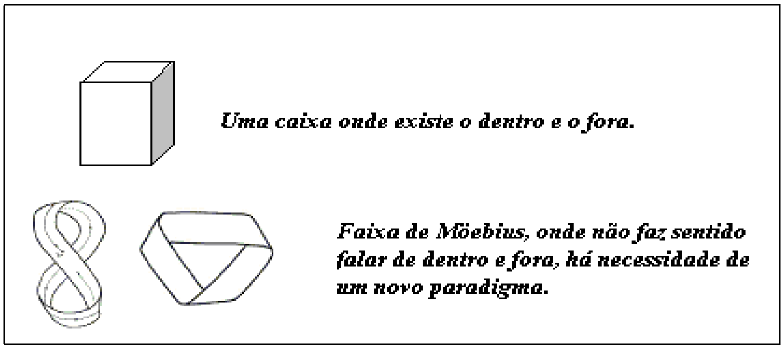
Faz-se necessário, portanto, esclarecer o que entendo e aceito por ‘conhecimento’, ‘produção de significado’ uma vez que esses conceitos vêm sendo utilizados em diferentes contextos, assim como ocorreu com a noção de construtivismo.

3. PRODUZINDO SIGNIFICADOS

Adoto a visão de que conhecimento e informação pertencem a classes distintas. Podemos dar informações (oral ou escrita) a outra pessoa, e com o uso de tecnologias podemos até transferir informação de um local a outro, via disquetes ou via fitas cassete de áudio ou vídeo mas não podemos fazer o mesmo com o conhecimento. Um exemplo bem atual é uma homepage onde podemos pegar informações sobre que caminho fazer para ir de um local A para um local B. Ali são oferecidas algumas opções de caminhos e temos a possibilidade de imprimir todas e levar na bolsa.

A idéia da transferência de conhecimento pressupõe que existe um caminho simples a seguir que é independente do contexto em que a resolução de um problema ocorra. Para nós, as situações complexas exigem e nos levam a construir modelos complexos para estudar a produção de conhecimento, sobretudo não temos bases epistemológicas para julgar o que permanece invariante entre duas ou mais atividades.

Proponho duas metáforas para o conhecer. A da caixa e a da faixa de Möebius. Para a primeira, vale falar de internalização de conceitos, de representação como reprodução de algo que estava “dentro” da mente, etc.. Ao adotar a segunda, não temos como dizer o que está dentro ou fora e precisamos adotar um novo paradigma para conhecer, conhecimento.



Na procura de um novo paradigma, encontro no modelo teórico dos campos semânticos de Lins (1997) o pressuposto de que o conhecimento é produto da enunciação do sujeito. O conhecimento é definido como o par (crença-afirmação, justificação) e quando duas ou mais pessoas enunciam a mesma crença mas com justificações distintas, dizemos que elas produzem conhecimentos distintos. Por exemplo, três pessoas podem identificar um triângulo mas cada uma justifica esta identificação de modo distinto, a primeira pessoa diz é um triângulo porque é uma figura pontuda; para outra é porque é uma figura com 3 lados; e para uma terceira é por ser um polígono com 3 vértices.

Observe que tomo o cuidado de falar de produção de conhecimento, o que remete ao sujeito que o produz, logo não estarei chamando de conhecimento algo que foi dito (oral, escrito, gestual) por outros, escrito em livros-texto, colocado por um professor em aula expositiva, ou falado por um colega. O que é dito por outros será considerado um texto. A utilização da tecnologia, do computador, da multimídia e/ou da internet é visto de acordo com esta perspectiva como um novo texto para o qual o aprendiz produzirá significados.

Uma outra contribuição para um novo paradigma vem de Eisenstein, o cineasta, que chamava a produção de significados de o terceiro termo. Quando falava de montagem afirmava que "duas partes de filme quando unidas combinam-se, infalivelmente, numa representação nova nascida dessa justaposição como uma nova qualidade". Isto nos aproxima do processo metafórico, onde relacionamos, juntando, elementos estranhos um ao outro para engendrar uma possibilidade semântica que não pode ser encontrada em nenhum dos termos separadamente.

A noção de *produção de significado* não está ligada a idéia de ser significativo para este ou aquele indivíduo ou para o professor. Adoto mais uma vez a posição de Lins e por isso analiso tudo o que, efetivamente, é dito pelo sujeito sobre um objeto e não o que poderia ser dito sobre o mesmo. Desta forma, me interessa levantar os argumentos engendrados para expressar crenças e justificações em atividades que utilizam a tecnologia. Esses argumentos irão compor o *corpus* da investigação.

A enunciação está diretamente ligada a linguagem, não necessariamente apenas ao que está explicitado na fala oral, mas principalmente aos implícitos, gestos, escritos, e outros.

4. O MODELO DA ESTRATÉGIA ARGUMENTATIVA

Este modelo foi elaborado para explicar os episódios nos quais as negociações acontecem, quando existem acordos ou controvérsias, quando um aluno tenta convencer o outro (ou a si próprio) de uma idéia.

As diferentes maneiras com que o estudante costura as conjecturas que ele acredita que já estão aceitas pelo grupo a que se dirige com aquelas que ele quer que o grupo aceite vão determinar o tipo de argumento que está sendo usado.

O Modelo da Estratégia Argumentativa (MEA) é um modelo alternativo para análise do discurso em sala de aula. Buscamos interpretar a produção de significados baseados nos argumentos utilizados ao invés das palavras. O contexto de uma enunciação é fundamental para sedimentar os acordos, que são as bases para ação de argumentar.

Nossa premissa, ponto de partida, é que o processo de produção de significados para objetos matemáticos é similar ao processo de produção de significados para objetos do cotidiano. A linguagem ordinária, do dia-a-dia é regida pelas relações dialógicas e ambíguas entre os indivíduos e suas regras de utilização são baseadas em práticas sociais que devem ser reveladas através da análise dos argumentos.

Ao observar os diálogos do cotidiano, sempre que alguém quer convencer um outro alguém (que pode ser a si próprio) lança mão de argumentos. Aquele que argumenta se dirige a outro intencionalmente, portanto o argumento é sempre dependente da hipótese sobre as preferências e os saberes do auditório (audiência). Um dos principais objetivos da argumentação é convencer uma determinada audiência sobre uma idéia ou tese. As réplicas da audiência levam o orador a reformular ou melhorar suas hipóteses e, sobretudo, a reorganizar seus argumentos nas diferentes partes de seu discurso.

A aceitação de qualquer conjectura de uma argumentação não implica na aceitação da tese, este fato pode ser entendido como uma situação temporária. Os argumentos são estabelecidos entre as enunciações de modo a persuadir um determinado público sobre uma idéia.

A análise de um episódio requer a recriação do contexto da enunciação. É necessário descrever este episódio através de um esquema, no qual está presente o argumento que está sendo utilizado pelo orador, através de afirmações simples. Assumimos que cada elemento está presente no esquema argumentativo por ser essencial ao mesmo. As interpretações são feitas baseadas neste esquema.

A compreensão de uma afirmação não se limita a avaliação do contexto no qual o discurso acontece, é importante entender o papel de tal afirmação dentro da argumentação. Assim, procuramos entender de que modo as intenções do falante determinam suas escolhas sobre questões operacionais (ou pequenas questões) através das quais a questão principal se efetiva.

5. A TECNOLOGIA OLHADA COMO PRÓTESE E SUA IMPLICAÇÃO NA PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS.

Aprendemos na escola que sentimos o mundo através dos 5 sentidos: Tato, Olfato, Visão, Paladar, Audição. Hoje sabemos que sentimos o mundo usando muitas vezes outros sentidos, para os que apelam à emoção chamaremos o coração e sem apelação chamaremos de linguagem.

Um mesmo copo cheio com água até a metade pode ser visto como algo que está acabando ou como algo que ainda falta a metade para acabar. O importante aqui é observar que, os tradicionais cinco sentidos não dão conta, sozinhos, de falar do mundo e/ou de construí-lo, já que adoto a hipótese de que percebemos o mundo enquanto o construímos e vice-versa. A imagem não depende apenas da visualização (capacidade de ver) mas sobretudo da linguagem que a constitui. D'Amásio (1994) afirma que as imagens não são guardadas em nossa mente como cópias-retrato das coisas, eventos, palavras ou frases. Adquirimos uma quantidade tão imensa de informações ao longo da vida que seria impossível guardar tudo. Se o cérebro fosse uma biblioteca convencional faltariam prateleiras e se guardássemos as cópias fac-símiles teríamos problemas de tempo em resgatá-las eficazmente.

Aproveitando mais uma vez da linguagem cinematográfica, vejamos uma cena do filme Dançando no Escuro, onde Bjork a atriz principal trabalha numa fábrica, onde opera máquinas com lâminas afiadas. De alguma forma, é dito que ela está perdendo a visão e ficando cega.

Não existe nenhuma informação explícita de que ela vai se cortar, mas a montagem da cena, justapondo a cegueira e máquinas afiadas, música macabra desenvolve um "clima" que cria uma idéia do perigo, faz com o significado que cada sujeito da platéia produza vá desde achar que ela vai decepar um dedo até perder a mão. O mais interessante é que enquanto espectadores podemos sentir arrepios e até uma dor, muito embora jamais tenhamos vividos a experiência de decepar a própria mão. Considero essa capacidade de aprender a sentir como cognição.

Alguns autores quando falam de estruturas da mente, Davis (1984) afirmam que nós fazemos relações porque temos material para tal. Que material é este? Segundo Lakoff (2000), o sujeito desenvolve um sistema de metáforas primárias automática e inconscientemente pelo simples funcionamento das ações mais ordinárias do cotidiano desde a tenra infância. Uma vez que as conexões neurais ocorrem muito cedo na vida do ser humano, todos pensamos, naturalmente, utilizando centenas de metáforas primárias.

Voltando a sala de aula de matemática, uma das grandes fontes que temos para entender qual o significado produzido por um aluno é analisar suas ações, quer sejam verbais, escritas, pictóricas, líricas, ou artísticas.

Existe uma corrente de pesquisadores que chamam algumas dessas ações de representação e a definem como uma reflexão interna de uma realidade externa; uma reprodução na mente de algo externo a mesma. Consistente com o que venho trazendo, minha posição é a de que a representação é uma ação, uma produção e não uma reprodução. Trazendo mais elementos para essa discussão, acreditamos que o que é chamado de representação é ao mesmo tempo constituinte da produção de conhecimento e constituída pelo sujeito ao produzir significados para um determinado texto.

Em geral, pensa-se na prótese como algo 'reparador', o que pode gerar conseqüências bastante graves, como veremos adiante. Por exemplo, se uma pessoa tem problemas visuais pode-se pensar nas lentes de contato como próteses, no entanto, as lentes podem ser olhadas como algo diferente de apenas 'reparar' a visão. No caso de um cego é difícil dizer onde termina sua mão, nos dedos ou na bengala, ela não é apenas um objeto auxiliador da visão mas um artefato que modifica a percepção de quem o usa.

Usarei aqui a idéia de que a prótese vai além de reparar uma falta, ela é, em si, um objeto. Um sujeito equipado com uma prótese (seja qual for) pode fazer coisas que não faria sem ela. Esta perspectiva me leva a ver o uso de tecnologia como uma prótese, e portanto vai além de fazer mais rápido, por exemplo, vai para o fazer diferente.

Usando o sensor, CBR, como prótese

A pesquisa da qual trago apenas resultados parciais tem como objetivo entender o papel do corpo na situação específica da compreensão de funções de movimento quando representadas no plano cartesiano. Para tal, equipamos professores de matemática, física e/ou licenciandos com um sensor de ultra-som que produz gráficos cartesianos e os armazena. Ao conectarmos o sensor na calculadora gráfica, um programa mostra a representação gráfica armazenada. Tratou-se de uma oficina de 4 horas que envolveu um grupo de 32 professores e licenciandos de matemática de diferentes níveis de ensino, 1º, 2º e 3º grau, e diferentes estados do Brasil. Para uma compreensão mais fina do processo, um grupo de 3 professores (2 do Rio e 1 do Paraná) foi filmado durante as 4 horas em vídeo-tape. Ao qual chamaremos grupo-laboratório.

A coleta de dados inclui o material escrito produzido por todos, o registro filmado do grupo todo durante a oficina e o registro do vídeo (e da transcrição do mesmo) do grupo-laboratório.

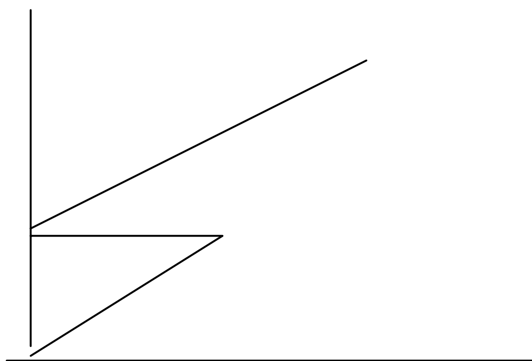
A oficina constou de: apresentação do grupo e dos pesquisadores, da explicação dos objetivos, da entrega da primeira atividade realizada individualmente e sem prótese, da segunda atividade realizada com a prótese, de uma terceira atividade, e da reflexão sobre a oficina e de uma entrevista ao final da mesma.

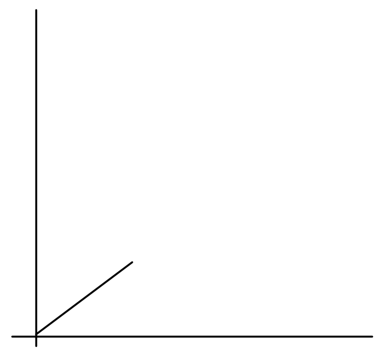
Os materiais coletados foram vistos e discutidos por um grupo de 4 pesquisadores.

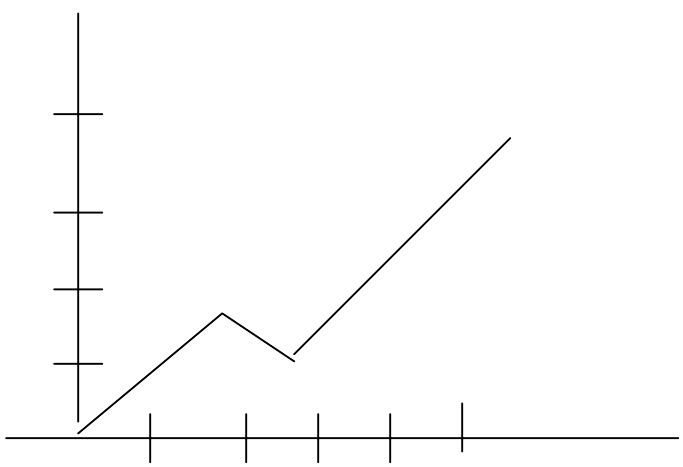
Discussão

A atividade 1 consistia em fazer um gráfico distância x tempo usando lápis e papel, régua ou papel milimetrado para a seguinte situação: Um aluno sai a pé em direção a escola. Suponha que a casa do aluno e a escola estejam no mesmo lado de uma calçada em linha reta. Após quatro minutos o aluno percebe que esqueceu um livro importante, volta para casa pega o livro e recomeça seu trajeto. Um pouco depois se lembra do dinheiro da merenda que ficou em cima da mesa. Volta mais uma vez e finalmente chega na escola.

Exibo aqui alguns tipos de gráfico que mais foram encontrados.







Podemos pensar que quando um aluno desenha o gráfico d x t com várias posições no mesmo tempo, como no primeiro gráfico, se chamamos sua atenção para o fato, ele irá corrigir o gráfico. De fato, algumas vezes após tal intervenção, o aluno dá uma resposta mais próxima do que o professor esperava. No entanto, enquanto pesquisadores, a única que podemos garantir é que para ele o significado produzido é: Quando tiver que desenhar um gráfico d x t não pode ter mais de uma posição para cada tempo e o truque é não posso fazer um gráfico que quando cruzado por uma reta vertical tenha mais que um ponto de interseção.

Nesta investigação, passei a me questionar: Por que este aluno fez o gráfico daquela forma? Qual foi seu argumento? Uma vez que o mesmo está implícito será que o que vem sendo desenvolvido pela teoria do corpo pode ajudar?

A metáfora conceitual[1] é um mecanismo cognitivo que permite inferências em um domínio de experiência (domínio alvo) a partir das inferências realizadas em outro domínio (o fonte). O domínio alvo é entendido, em geral inconscientemente, em termos de inferências nas estruturas sustentadas no domínio fonte ou de partida. Mais uma vez opto por parecer simplista, até mesmo reducionista, e fazer uma análise levando em conta apenas dois domínios que o aluno teve que lidar.

O domínio fonte é, neste caso, o movimento realizado e que em geral é chamado de "rastro". Quando caminhamos na areia, ou descalços com pés sujos num chão claro, desenho animado, etc... o que registramos não é a posição em cada instante mas a Gestalt do movimento, ou seja, o movimento visto globalmente como o "caminho". Observo que este caminho é unidimensional. Por sua vez o domínio alvo é um gráfico bi-dimensional.

Domínio Fonte ou de Partida Espaço unidimensional	→	**Domínio Alvo** Espaço bi-dimensional
Movimento realizado pelos pés no chão, trajetória, deslocamento unidimensional	→	Não leva em conta a dimensão tempo mas tem que traçar algo no plano cartesiano

Nesta investigação, a atividade 3 apresenta um gráfico na calculadora que deve ser "imitado" pelo robô/participante. Um aluno/professora chamado robô usa o sensor acoplado ao próprio corpo enquanto dois outros seguram a calculadora que mostra dois gráficos o pedido pronto e o que vai sendo construído pelo andar do robô.

Esta prótese traz uma nova experiência para o "robô" e para os que o comandam. Os gráficos, as justificativas para o mesmo geram um texto para o grupo. O sensor "força" o confrontar ou o corroborar deste texto. Ao movimentar o corpo de uma determinada maneira o aluno recebe um gráfico de feedback.

Muitos alunos explicitaram usando a mesma frase: "apesar de ter sido dito que era distância x tempo, não tava ligando para isso". Não explicitam em palavras que estavam relacionando com uma trajetória unidimensional, já que vários deles, durante a leitura do problema, fizeram com a mão ou dedos gestos icônicos similares ao gráfico esboçado. Apenas um licenciando, durante uma entrevista coloca:

Le_{23} – Mas o movimento...não é o mesmo que aparece na calculadora

[1] Definida por Lakoff and Johnson 1980.

Pesq – Como assim? Você acha que este gráfico já estava lá? Então pra quê acoplar o sensor?

Le29 – Não, não é isso.

Pesq – Então é o que?

Le31 – Um é o movimento do corpo e o outro é o gráfico.

6. PENSANDO EM CONCLUIR

A afirmação "um é o movimento do corpo e o outro é o gráfico" explicita os dois campos, o unidimensional, inconsciente para a maioria, e o bi-dimensional. Chamo a atenção para o fato de que em sala de aula o professor tenta o tempo todo colocar que "é tudo a mesma coisa", o movimento corporal e o gráfico. Atitude esta que leva o aluno a se sentir confuso e incapaz já que em suas próprias palavras os dois são de naturezas distintas.

A discussão sobre o papel do corpo, da tecnologia e linguagem na cognição matemática, sem dúvida, requer mais pesquisa. Mas se aceitamos que o sujeito produz significado para um objeto através de ações e enunciações, então devemos e podemos pensar em atividades que contemplem e explicitem diferentes campos semânticos com os quais o aluno está acostumado ou não a operar.

Referências:

EISENSTEIN, S. Reflexões de um Cineasta. Zahar RJ 1969

FRANT, J.B. e POWELL, A.B. Communicating Mathematical Ideas: Reflecting and Convincing. Proceedings of the 21st PME. Lahti-Finland 1997

FRANT, J; RABELLO DE CASTRO, M e LIMA, F. Investigating Function from a Social Representation Perspective. PME 24. Hiroshima-Japan 2000

HOLYAK, K. e THAGARD, P. Mental Leaps: Analogy in Creative Thought. MIT Press 1995.

LAKOFF, G e NÚÑEZ, R. Where Mathematics Comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. Basic Books 2000

LAKOFF, G e JOHNSON, M, The Philosophy in the flesh Basic Books NY 2000

MATURANA, H. Cognição, Ciência e Vida (Org. Cristina Magro e Victor Paredes) Editora UFMG 2001

NUNEZ; R Can the future taste purple? In Reclaiming Cognition the primacy of action, intention and emotion ed Núñez and Freeman. Imprint Academic 1999

NUNEZ R.. Mathematical Idea Analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. Proceedings of the PME 24. Hiroshima. 2000

Webgrafia:

NEMIROVSKY, R. www.terc.edu

CAPÍTULO 12

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 141:150.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

TECNOLOGIA E ENSINO DE CÁLCULO

Márcia M. Fusaro Pinto

Depto. de Matemática
Universidade Federal de Minas Gerais
marcia@mat.ufmg.br

Teresinha Fumi Kawasaki

Depto. de Matemática
Universidade Federal de Minas Gerais
kawasaki@mat.ufmg.br

Resumo: *Este artigo discute projeto em andamento de desenvolvimento do software Visual Calculus 1.0 (VCalc 1.0), incorporando aplicativos em linguagem Java para o ensino de Cálculo. Idéias são ilustradas como no software Graphic Calculus, ambiente computacional desenhado por David Tall para mediar exploração de conceitos matemáticos. O aplicativo possibilita, entre outros recursos, magnificar sucessivamente regiões da curva (gráfico de função) especificada pelo estudante sugerindo a noção de local straightness (retificação local) de curvas diferenciáveis. A partir desta noção, abordagem dinâmica e uso de visualizações introduz-se a derivada de uma função como sua taxa de variação ou gradiente. Tal alternativa para o ensino do cálculo diferencial e integral será disponibilizada na Internet.*

Palavras-chave*: Java, Cálculo, Visual Calculus, Magnificação Local.*

Abstract*: This paper reports on an ongoing project aiming at developing the software Visual Calculus 1.0 (VCalc 1.0), consisting of Java applets designed for the teaching/learning of Calculus. Ideas are illustrated as in Graphic Calculus, software designed by David Tall as a tool to investigate mathematical concepts. The initial applet, VCalc 1.0.A, allows successive magnifications of pieces of a curve (given as a graph of a real function specified by the student) exploring the notion of local straightness of differentiable functions. At this point, the derivative of a function is introduced as its rate of change or gradient, through a dynamical approach and visual representation. VCalc 1.0 represents an alternative for the teaching/learning of Calculus to be available on the Internet.*

Key words: *Java, Calculus, Visual Calculus, Local Magnification.*

1. INTRODUÇÃO

A página "Tópicos de Cálculo Diferencial e Integral", visualizada no sítio http://www.mat.ufmg.br/~protem/Calc/calculus.html (sítio permanentemente em construção), está sendo construída como parte do projeto ENIBAM (ProTeM-CNPq). Tal página faz amplo uso de *applets Java* como recurso visual e de animação, apresentados e discutidos em Kawasaki (2002).

A esta página estamos incorporando novos *applets* que ilustram idéias e abordam conceitos como sugerido no *Graphic Calculus*, *software* idealizado pelo professor David Tall em 1986 com a intenção de trabalhar as idéias do Cálculo de modo significativo para o aluno. O desenho de tal software propõe a *visualização* como ponto de partida para construção dos conceitos de derivada e integral, a partir de duas idéias centrais: a noção de retificação local e a noção de *área sob a curva*. Tal abordagem tem sido experimentada e discutida por educadores que investigam a matemática avançada do ponto de vista da psicologia da educação. Apresenta-se assim como alternativa a abordagens formal ou simbólico proposicional para o ensino de Cálculo, fundamentada tanto do ponto de vista matemático como do da educação matemática.

Este artigo apresenta e descreve os recursos do *software Visual Calculus 1.0* (*VCalc 1.0*), conjunto de *applets Java* que T. F. Kawasaki vem construindo, reformulando o desenho do *Graphic Calculus*. Discute ainda um possível uso do aplicativo, introduzindo a noção de derivada de uma função real a partir da noção de gradiente ou taxa de variação. Beneficiando-nos de possibilidades abertas pelo uso de novas tecnologias, a construção de tal significado é esperada a partir de investigação mediada pelo *VCalc 1.0*.

2. *GRAPHIC CALCULUS,* VISUALIZAÇÃO E CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS

O *Graphic Calculus* é um *software* idealizado como ferramenta de apoio para trabalhar conceitos de Cálculo Diferencial e Integral. A intenção do autor foi possibilitar ao aluno interagir e investigar representações gráficas de funções de uma variável e conceitos fundamentais do Cálculo. O *software* explora a noção de retificação local para abordar o conceito de derivada de uma função e a noção de *área de região sob uma curva* para introduzir o conceito de integral definida. Menos usual que a última noção, *local straightness* diz respeito ao fato de que apenas os gráficos de funções diferenciáveis num ponto são localmente retificáveis por meio de magnificações. Neste artigo interessa-nos as funções deste *software* desenhadas para o estudo de derivadas.

Dentre tais funções, a função *Magnify* possibilita ao aluno magnificar 10, 100, 1000 vezes uma porção de uma curva, numa segunda janela. Pode-se assim investigar se a porção da curva se retifica ou não. Em caso afirmativo, é possível ainda investigar as variações dos valores numéricos do gradiente (taxa de variação média) desta porção.

As noções de *local straightness* e taxa de variação média auxiliam o usuário no estudo de derivadas, uma vez que estas podem ser definidas explorando os valores das taxas médias em intervalos de variação cada vez menores. Auxiliam ainda o estudo de soluções de equações diferenciais ordinárias, porque uma vez que o gradiente é conhecido em cada ponto, torna-se possível aproximar a solução de uma equação diferencial como curvas determinadas por pequenas porções de gráficos *locally straight*. Observado tal fato, o desenho do *software* possibilita ao estudante apontar o cursor num ponto do plano, desenhando a partir deste mesmo ponto um segmento de reta curto na direção determinada pelo gradiente especificado. Constrói-se assim, visualmente, uma solução aproximada da equação diferencial que foi proposta, unindo-se os segmentos em cada extremidade.

O *VCalc 1.0* está sendo projetado para disponibilizar na *web* recursos como os descritos acima, acrescidos da possibilidade de exploração dinâmica e animação das representações apresentadas na tela. Atividades mediadas pelo uso de computadores, desenhadas adequadamente para garantir interatividade e dando aos alunos condições de explorar aspectos genéricos dos conceitos, possibilitam uma abordagem "empírica" da matemática que pode servir de fundamentação para a teoria tanto de um ponto de vista aplicado quanto formal.

A este respeito, a pesquisa em educação matemática tem ressaltado a linguagem matemática simbólica como uma dentre as várias formas de representação que irão constituir o significado dos conceitos. Teorias de aprendizagem que se restringem a modelos simbólico-proposicionais para a construção dos conceitos por indivíduos não são suficientes para explicar o desenvolvimento dos estudantes a partir de experimentações e investigação (Pinto, 1998). Mesmo a construção de um sistema axiomático por um matemático profissional começa com um problema, cuja solução sugere idéias que valem a pena formalizar e organizar como um sistema dedutivo. Em atividade que muitas vezes precede o uso de linguagem simbólica e construções analíticas, explora-se o contexto como um todo, investigando que elementos e propriedades irão caracterizar o conceito que se quer construir.

3. O DESENHO DO AMBIENTE DE INVESTIGAÇÃO

Nosso projeto propõe abordagem ao conteúdo matemático mediada pela utilização de *organizadores genéricos*, descritos por Tall (1989) como "...ambiente (ou *microworld*) que possibilita ao estudante manipular exemplos e (se possível) contra exemplos de um conceito matemático específico ou de um sistema associado de conceitos".

Para sugerir a matematização do que está sendo investigado, *organizadores genéricos* devem focar aspectos do conceito que se vai trabalhar, selecionados previamente. Ao desenhar tais ambientes deve-se cuidar em não dispersar excessivamente a atenção do foco central, que é o conceito que se propõe explorar.

Por este motivo, ao invés de construirmos um único *applet* com todas as características, funções e possibilidades do *Graphic Calculus,* estamos optando por desenhar *applets* para cada uma das funções ou atividades. Numa prática e filosofia já utilizadas no desenho das páginas de cálculo acima mencionadas, aborda-se assim um tópico de cada vez, com aplicativos de manipulação facilitada e não tão "pesados", o que inclusive evita períodos muito longos para "descarregar" no computador do usuário.

O desenho de organizadores genéricos requer a escolha de uma idéia central relativa ao conceito em questão para constituir o ponto de partida da atividade. Tall (1998) denomina *raiz cognitiva* a tal noção geradora, caracterizando-a como ao mesmo tempo significativa para o estudante e adequada do ponto de vista matemático e cognitivo, no sentido de possibilitar expansões cognitivas para construções formais e desenvolvimentos teóricos subsequentes.

Uma *raiz cognitiva* não coincidirá necessariamente com a fundamentação teórica formal que em geral se apresenta em livros-texto e artigos. Questões centrais do ponto de vista cognitivo não são explicitadas em tais formulações, podendo levar a conflitos e mal entendidos.

No caso do Cálculo Diferencial e Integral, textos acadêmico-científicos em sua grande maioria fundamentam a teoria no conceito de limite (ver Reis, 2001). Tal abordagem tem inconvenientes que têm sido discutidos na literatura (ver, por exemplo Tall & Vinner, 1981; Sierpinska, 1987; Cornu, 1991). Propostas alternativas para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral, mediadas pelo computador como no caso do *Graphic Calculus*, ou não, tem sido objeto de interesse de inúmeros pesquisadores também aqui no país. (ver BALDINO et al, 1995; Cassol, 1997; BALDINO, 1998; Milani, 2001; Giraldo, 2002, dentre outros).

Em nossa proposta, a noção de *local straightness* é escolhida como *raiz cognitiva* para o estudo de Derivadas no aplicativo *VCalc 1.0.A*, como no *Graphic Calculus.* Tal escolha fundamenta-se no fato de que as curvas estudadas nos cursos iniciais de Cálculo, quando diferenciáveis, se assemelharão a uma reta se magnificadas próximo a um ponto. Tall (2000-b) observa que tal noção intuitiva não deve ser confundida com a formulação matemática de aproximação de uma curva por meio de uma função linear, que o autor denomina *local linearity*. Esta última deve ser meta a ser atingida, através de matematização dos resultados da investigação mediada pelo computador.

Para isto, buscamos projetar organizadores genéricos contendo "as sementes de sua própria destruição" no sentido de serem "...suficientemente sofisticados para exibir as limitações de seu processo de modelagem e a necessidade de abordagem teórica mais ampla" como observado por Tall (2000). Neste sentido o *VCalc 1.0.A* faz o cálculo numérico aproximado de taxas de variação média de porção de curvas definidas pelo seu usuário, possibilitando perceber sua estabilização ao se calcular seu valor sucessivamente em intervalos cada vez menores, que será então discutida em termos teóricos.

Assim, na tentativa de entender o movimento em termos de variação e da matematização de tal conceito - que leva a definição de derivada - trabalhar a noção de *local straightness* se encaixa de modo natural, dada a simplicidade dos resultados relacionados a tal discussão no estudo de funções lineares. Como no *Graphic Calculus*, através desta idéia explora-se o movimento ou variação sobre uma curva como sucessão de pequenas mudanças cuja variação média em intervalos, por pequenos que sejam, podemos sempre calcular.

4. VISUAL CALCULUS 1.0 E SEUS RECURSOS

O *VCalc 1.0* constitui um conjunto de *applets* (i.e; aplicativos programados na linguagem *Java* que podem ser inseridos em páginas *web*) projetados com o objetivo de abordar alguns conceitos básicos de Cálculo Diferencial e Integral. Baseado em grande parte no *software Graphic Calculus*, o *VCalc 1.0* incorpora em seu desenho, como um modo de operação, ações e gestos do usuário interagindo com a interface gráfica. Tall (2001) discute que percepções humanas e ações no contexto do mundo real ajudam a dar significado real a objetos matemáticos. Desta forma, em *VCalc 1.0*, é possível alterar representações visuais da curva em resposta natural a ações gestuais.

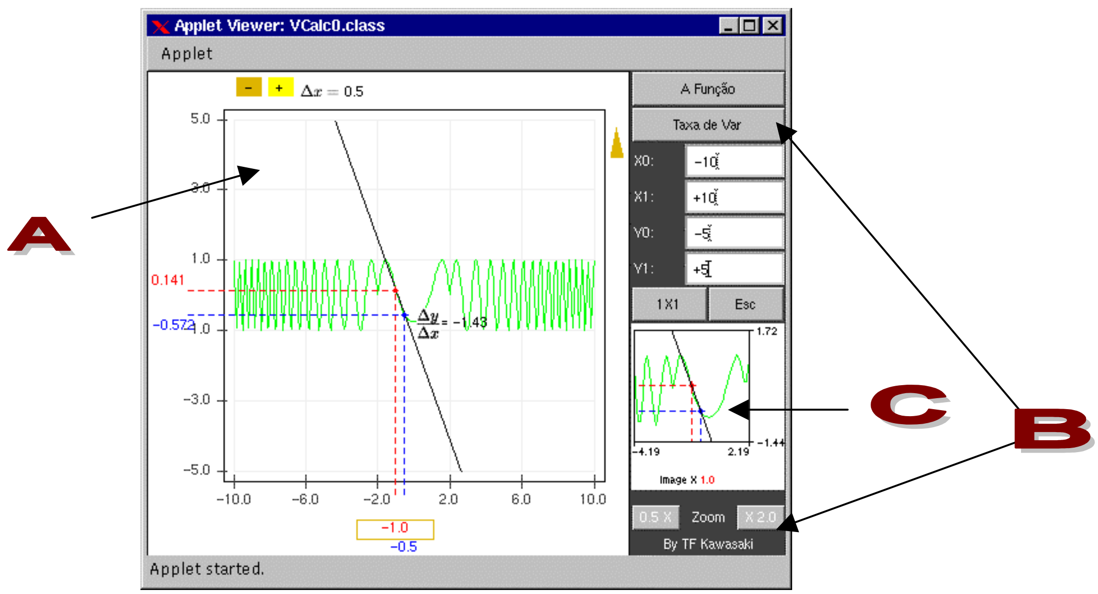


Figura 1

Inicialmente, construímos o *applet VCalc 1.0.A* (Figura 1) para o estudo do comportamento de funções de uma variável na vizinhança de um ponto e suas taxas de variação média. O ambiente de trabalho do *VCalc 1.0.A* compreende: uma tela **(A)**, onde são projetadas representações gráficas de curvas definidas simbólicamente pelo usuário; um painel de controle **(B)**, que permite o usuário a modificar campos de variação das variáveis x e y, curvas e escalas; e uma tela menor **(C)**, onde são projetadas porções do gráfico da curva representada na tela maior em diferentes escalas.

A curva a ser representada graficamente em **(A)** é dada pela representação simbólica (utilizando a notação usual de *softwares* matemáticos) de equação definida pelo usuário. O usuário também define o campo de variação das variáveis x e y. Ao manipular simbolicamente a equação e/ou ao definir novos valores para os campos de variação das variáveis, é possível observar de maneira dinâmica as mudanças que ocorrem na representação gráfica desta curva.

Destacamos um ponto da curva em vermelho com coordenadas $(x_v, f(x_v))$. Este ponto pode ser alterado arrastando, com o auxílo do *mouse*, a variável independente x (abscissa). Desta maneira, é possível observar simultaneamente mudanças na variável dependente y e, na tela menor **(C),** vemos uma porção do gráfico na vizinhança deste ponto. Esta porção pode ser magnificada e diminuída por inúmeras vezes, possibilitando-nos verificar a retificação (ou não) da curva em torno do ponto destacado em vermelho. Podemos também observar, geométrica e numericamente, a taxa de variação média em vários pontos da curva. Serão computados os valores numéricos das taxas de variação da curva entre os pontos destacados em vermelho $(x_v,f(x_v))$ e em azul $(x_v+\Delta x,f(x_v+\Delta x))$. O valor de Δx pode ser alterado, tornando possível esboçar o gráfico da função gradiente para diferentes valores de Δx.

Estamos projetando ainda, nestes mesmos moldes, o *applet VCalc 1.0.B* com o objetivo de investigar a noção de área de região sob uma curva para introduzir o conceito de integral definida e o *applet VCalc 1.0.C* para auxiliar o estudo de soluções de equações diferenciais ordinárias.

5. DISCUTINDO A UTILIZAÇÃO DO *VISUAL CALCULUS 1.0*

Ao desenharmos o *VCalc 1.0* levamos em conta a discussão em Tikhomirov (1981) sobre o papel do computador como instrumento de mediação no desenvolvimento da atividade mental do indivíduo. Tikhomirov ressalta que de modo geral tal mediação reorganiza a atividade e dá lugar a estágio de pensamento qualitativamente diferente: instrumentos transformam a atividade humana, não devendo ser considerados como apenas tendo sido adicionados à mesma.

Por exemplo, a possibilidade de o computador realizar algoritmos e apresentar o resultado final rapidamente, inclusive diversificando representações, favorece o desenvolvimento da intuição e de geração de hipóteses. De fato, tais recursos deixam o indivíduo livre de tarefas como as de verificar conjecturas, como acontecia antes, o que muitas vezes oprime componentes intuitivas do pensamento. Assim, entendemos que computadores em geral reorganizam nossa maneira de pensar, interagir, formular e resolver problemas.

Nosso *applet* inicial *VCalc 1.0.A,* permite que o aluno manipule representações gráficas de funções, definindo equações, extremos, escalas e magnificando porções da curva em torno de pontos definidos pelo usuário. O tornar visível regiões de curvas próximas a um ponto especificado como se num microscópio ou o permitir manipulação e investigação dinâmica abrem espaço para que estudantes incorporem novos conceitos, reconstruam suas idéias e construam novas relações, como parte de estruturas mais gerais. Em particular, pesquisa recente envolvendo alunos da área de ciências exatas revelou estudantes argumentando que "*toda curva em um ponto contém um arco de círculo*" (ver Almeida et alii, no prelo). Tal imagem (aparentemente incorporada por percepção primitiva ou atividade em desenho técnico) foi explicitada por alunos que participavam da pesquisa quando entrevistados sobre sua resposta a questão em um questionário que os convidava a posicionar a reta tangente a curvas, em pontos especificados. Para tais estudantes, que provavelmente visualizam as curvas como constituídas por pequenos arcos de círculos, a percepção das mesmas como *local straight* será desenvolvida a partir da magnificação de curvas. Assim, a reconstrução (ou construção) de tal imagem acontecerá em atividade mediada pelo uso do computador.

O organizador genérico projetado permite ao aluno experienciar a noção de *local straightness* fazendo uso de magnificação sucessiva em torno de um ponto especificado, e simultaneamente, conhecer taxas médias de variação da função, ou seja, o seu gradiente sobre intervalos, cada vez menores. Quando magnificadas, curvas (diferenciáveis) são - basicamente - retas; o que sugere desenvolvimento de estratégia para a análise de variação em relações intrinsecamente complexas entre grandezas a partir da análise de variação em relações lineares.

A simplicidade intrínseca da dependência linear entre duas grandezas se reflete não somente na simplicidade de suas representações algébrica e geométrica mas também no estudo de variações. Numa interpretação menos geométrica do coeficiente angular de uma reta, e em geral menos explorada, tal coeficiente é a taxa unitária de variação da variável dependente com relação à variável independente envolvida. Assim, se k é o coeficiente angular da reta, e y e x são as variáveis relacionadas, um acréscimo de uma unidade em um ponto x arbitrário corresponderá a um acréscimo (ou decréscimo caso k seja um número negativo) de k unidades em y. Tal coeficiente nos dará informação sobre a relação de crescimento ou decrescimento de y com respeito a x, ou seja, sua taxa de variação.

Caraça (1941) observa com oportunidade a tendência do homem a generalizar; sendo que uma generalização passa sempre "...pelo ponto fraco duma construção, e o modo de passagem é a negação da negação; tudo está em determinar e isolar, com cuidado, este ponto fraco." (Caraça, 1975, p.38)

Podemos argumentar que o fato de uma função nem sempre ser linear é o ponto onde reside a dificuldade em estudar o movimento que a relação representa em termos de variação: relações intrinsecamente mais complexas entre grandezas irão requerer o desenvolvimento de estratégia menos imediata para análise de variações. Neste caso, a abordagem baseada no processo de magnificação tendo a noção de *local straightness* como raiz cognitiva coloca bem a questão do "negar a negação" - a função, localmente, é linear - e do definir a taxa de variação em um ponto calculando-a (aproximadamente) como numa relação linear. A diferenciabilidade apresenta-se posteriormente como propriedade geométrica, exclusivamente local e intrínseca à curva.

Esta proposta de utilização do *VCalc 1.0.A* será implementada e resultados serão apresentados e discutidos em breve.

Referências:

ALMEIDA, A.; CARDOSO, R.; MOREIRA, V.; SAMPAIO, V.; PINTO, M. **Investigando a transição da escola elementar para a universidade, 2001**. Monografia de Iniciação Científica. Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais.

BALDINO, R.R. et al. Do coeficiente angular da reta ao conceito de Diferencial: crítica ao ensino atual e proposta alternativa. In: V ENCONTRO NACIONAL DE EDUCA-

ÇÃO MATEMÁTICA, Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Aracaju, 1995

BALDINO, R.R. **Desenvolvimento de essências de Cálculo Infinitesimal**. Rio de Janeiro: Gráfica Botânica Editora, 1998, . Série Reflexões em Educação Matemática, vol.4. MEM/USU.

CARAÇA. B.J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. 4. ed. Lisboa, Gradiva, 1975.

CASSOL, M.D.E. **Produção de significado para a derivada: taxa de variação**. Rio Claro, 1997. Dissertação (Mestrado), Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista.

GIRALDO, V.A. **Magnificação local e conflitos teóricos-computacionais**, **2001**. Material para o exame de qualificação (Doutorado). Instituto de Matemática – Coordenação de Programas de Pós-Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

KAWASAKI, T.F. *Applets Java*, um recurso visual no ensino interativo de Cálculo Diferencial e Integral. In: I COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 2002, Rio de Janeiro.

MILANI, R. **Concepções infinitesimais em um curso de Cálculo**, **2001**. Material para o exame de Qualificação (Mestrado), Universidade Estadual Paulista.

PINTO, M. **Students' understanding of Real Analysis**. Tese (Ph. D.), Institute of Education, The University of Warwick, 1998, Coventry, 1998. Trabalho não publicado.

REIS, F. A tensão entre o rigor e a intuição no ensino de cálculo e de análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Tese (Doutorado), Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, 2001, Campinas, 2001.

TALL, D.O. Building and testing a cognitive approach to the Calculus using interactive computer graphics. Tese (Ph. D.), Institute of Education, The University of Warwick, 1986, Coventry, 1986. Trabalho não publicado.

TALL, D.O.; VINNER, S. Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v.12, p.151-169, 1981.

TALL, D.O. Concept images, generic organizers, computers & curriculum change. **For the Learning of Mathematics**, v.9, n.3, p.37-42, 1989.

TALL, D.O. Biological brain, mathematical mind & computational computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: FIFTH ASIAN TECHNOLOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS, 5, *Proceedings of the fifth Asian technology conference in mathematics*, Chiang Mai: ATCM Inc, p.3-20, 2000a.

TALL, D.O. Cognitive development in advanced mathematics using technology. **Mathematics Education Research Journal**, v.12, n.3, p.210-230, 2000b.

TALL, D.O. Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. In: I COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 2002, Rio de Janeiro.

TIKHOMIROV, O.K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J.V.(Ed.) **The concept of activity in Soviet psychology**. New York: M.E. Sharpe. Inc, 1981, p.256-278.

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 151:162.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

CONFLITOS TEÓRICO-COMPUTACIONAIS E A IMAGEM CONCEITUAL DE DERIVADA

Victor Giraldo
Universidade Federal do Rio de Janeiro
victor@im.ufrj.br

Luiz Mariano Carvalho
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
luizmc@ime.uerj.br

David Tall
University of Warwick
Reino Unido
david.tall@warwick.ac.uk

Resumo. *O papel de ambientes computacionais no ensino de matemática tem sido largamente discutido na literatura de educação matemática na última década. Em particular, alguns resultados de pesquisa apontam para situações em que o uso de ambientes computacionais parece gerar um efeito de estreitamento: limitações intrínsecas de representações computacionais se convertem em limitações nas imagens conceituais conseqüentemente desenvolvidas por estudantes. Neste trabalho discutiremos a possibilidade de reversão do papel pedagógico de tais limitações. Nossa hipótese é de que se os potenciais conflitos associados a limitações são enfatizados, em lugar de evitados, estes podem colaborar não para o estreitamento, mas para o enriquecimento de imagens conceituais. Nosso argumento será respaldado por um estudo de caso onde seis estudantes de graduação lidam com representações computacionais para o conceito de derivada.*

Palavras-chave: *Pensamento Matemático Avançado, Tecnologia no Ensino de Matemática, Conflitos Teórico-Computacionais*

Abstract*. In the last decade, the role of computational environments in the teaching of mathematics has been widely discussed by mathematics education literature. In particular, some research results point out to situations in which the use of computational environments seems to lead to a narrowing effect: intrinsic limitations of computational representations induce limitations in the concept images consequently developed by learners. In this paper we will discuss the possibility of converting these limitations' pedagogical role. We hypothesize that if the potential conflicts associated with limitations are emphasized, rather than avoided, they can contribute not to the narrowing, but to the enrichment of concept images. Our argument will be supported by a case study, in which six undergraduate students deal with computational representations for the concept of derivative.*

Key words: *Advanced Mathematical Thinking, Technology in Mathematics Teaching, Theoretical-Computational Conflicts*

1. INTRODUÇÃO

Diferentes questões relativas ao uso de tecnologias computacionais no ensino e aprendizagem de Matemática têm sido discutidas em trabalhos recentes (ver por exemplo, Abrahão [1]; Belfort & Guimarães [3]; Giraldo [6]; Giraldo & Carvalho [8, 9, 10]; Laudares & Lachini [12]; Hunter, Monaghan & Roper [11]; Monaghan, Sun & Tall [15]). Alguns destes relatam experiências em que as limitações intrínsecas das representações computacionais para conceitos matemáticos levaram à formação de imagens conceituais restritas.

Aprofundando a discussão iniciada em Giraldo & Carvalho [8], discutiremos neste texto a possibilidade de *reversão* do papel pedagógico de tais limitações, especialmente daquelas relacionadas à natureza finita dos algoritmos empregados nos programas atualmente disponíveis para uso em sala de aula. Argumentaremos que esta reversão pode ser propiciada a partir do confronto de formas de representação computacionais e não computacionais e, particularmente, da evidência das aparentes contradições associadas.

Na seção 2, revemos brevemente as noções de *imagem conceitual* e *unidade cognitiva*, estabelecidas em Tall & Vinner [20]; Vinner [23] e Barnard & Tall [2]. Em 3, relembramos alguns resultados de pesquisa que apontam para efeitos negativos do uso de computadores no ensino. Em 4, baseados na noção de *conflito teórico-computacional*, apresentada em Giraldo [6] e Giraldo & Carvalho [7], expomos nossa proposta de potencialização das limitações das representações computacionais como fator de enriquecimento das imagens conceituais desenvolvidas por estudantes. Apresentamos em 5 nossa interpretação para parte dos resultados empíricos desta pesquisa. Finalmente, em 6 discutimos algumas perspectivas de pesquisa sugeridas por nosso trabalho.

2. IMAGENS CONCEITUAIS E UNIDADES COGNITIVAS

De acordo com a teoria desenvolvida por David Tall e Shlomo Vinner, *imagem conceitual* é a estrutura cognitiva total associada a um certo conceito matemático na mente de um indivíduo (ver Tall & Vinner [20], Vinner [23]), constituída de todas as imagens mentais, representações visuais, descrições verbais e impressões associadas a um dado conceito. Uma imagem conceitual se desenvolve continuamente ao longo dos anos, por meio de todo tipo de experiências relacionadas ao conceito em questão, podendo mudar a medida em que o sujeito se depara com novos estímulos. Uma imagem conceitual pode ainda estar associada a uma sentença usada para especificar o conceito em questão, denominada *definição conceitual* pelos autores, que, por sua vez, pode ou não ser coerente com a definição matemática correta, isto é, aquela aceita pela comunidade matemática de forma geral. Desta forma, uma imagem conceitual pode ou não estar associada a conceituação matemática formal, como destacam Barnard & Tall [2], Vinner [23], [22] e Tall [18].

Tall & Tony Barnard [2] denominam *unidade cognitiva* cada porção da estrutura cognitiva associada a um dado conceito, na qual um indivíduo é capaz de focar atenção de uma vez. Assim, unidades cognitivas podem ser símbolos, fatos específicos ou genéricos relacionados ao conceito em questão, passos de um argumento, teoremas, e assim por diante. De acordo com Thurston [21], as estratégias empregadas para desenvolver idéias matemáticas freqüentemente exigem esquemas de compressão mental, em que o sujeito deve recorrer rápida e completamente a idéias que constituirão posteriormente partes de outras mais complexas. Desta forma, Tall e Barnard afirmam que são fundamentais para o pensamento matemático as habilidades de conceber e manipular unidades cognitivas, de maneira que informações relevantes tanto possam ser trazidas ao foco da atenção quanto guardadas em pano de fundo, conforme o necessário. A teoria proposta pelos autores sugere portanto que uma imagem conceitual rica provem da construção de uma ampla gama de correlações e conexões entre unidades cognitivas.

3. EFEITOS NEGATIVOS DO USO DE COMPUTADORES NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Nesta investigação, tencionamos enfocar o uso positivo de tecnologia para a aprendizagem de Matemática. No entanto, é importante assinalar que diversos resultados de pesquisas recentes indicam que o uso inadequado de ambientes computacionais pode ter efeitos negativos (ou ao menos inócuos). A teoria citada na seção anterior sugere, em particular, que a abordagem do conceito de derivada deve incluir diferentes representações, de forma a propiciar a formação de ligações múltiplas e flexíveis entre unidades cognitivas. Cada representação põe em evidência certos aspectos do conceito, mas ao mesmo tempo oculta outros. Tall [18] afirma que a evidência em determinados aspectos e negligência de outros pode levar a atrofia dos aspectos negligenciados. Por exemplo, Hunter, Monaghan & Roper [11] observaram que estudantes usando o programa Derive não precisavam substituir valores para obter uma tabela e esboçar o gráfico. Em conseqüência, não desenvolveram a capacidade de cálculo por substituição. De fato, mesmo estudantes que empregavam substituição de valores antes do curso, aparentemente perderam esta habilidade depois.

No Brasil, Abrahão [1] observou a reação de professores do ensino médio lidando com gráficos de funções produzidos por computadores e calculadoras gráficas. Durante o experimento, os professores hesitaram em considerar o fato de que computadores podem fornecer resultados ‘errados’ ou ‘incompletos’, em virtude de limitações dos programas ou inadequação das janelas de visualização. Esses resultados foram muitas vezes aceitos pelos participantes sem questionamento, mesmo quando claramente contrários aos seus conhecimento prévio do tópico. Laudares & Lachini [12] observaram a implantação de um laboratório para o ensino de cálculo em uma grande universidade brasileira, que vinha adotando uma abordagem tradicional até então. As entrevistas com os professores de cálculo revelaram que a maioria deles acreditava que as atividades de laboratório seriam uma perda de tempo, que deveria ser empregado em sala de aula convencional, e que o uso do computador deveria se restringir a cálculos muito pesados. Os autores relatam que as atividades de laboratório eram restritas a tarefas mecânicas, sem ligação com a teoria estudada em sala de aula. Em conseqüência, os estudantes não demonstravam qualquer entendimento dos conteúdos e objetivos daquelas atividades. Laudares e Lachini concluem que o uso de tecnologia pode se constituir numa importante alternativa para o ensino em moldes tradicionais, porém é fundamental propiciar o desenvolvimento de uma perspectiva crítica por parte dos estudantes.

4. USANDO CONFLITOS TEÓRICO-COMPUTACIONAIS PARA O ENRIQUECIMENTO DE IMAGENS CONCEITUAIS

Muitos autores concordam que os efeitos dos computadores na aprendizagem de Matemática não dependem de qualquer característica intrínseca dos equipamentos utilizados. Tais efeitos são conseqüência da forma como a máquina é empregada (ver por exemplo, Tall [19]; Belfort & Guimarães [3]).

O experimento relatado por Hunter, Monaghan and Roper, em particular, revela um ***efeito de estreitamento*** de imagens conceituais: *as características intrínsecas da representação computacional levam a limitações nas imagens conceituais desenvolvidas pelos estudantes*.

Em geral, muitas das limitações das representações computacionais para conceitos matemáticos são decorrentes da estrutura finita dos algoritmos empregados. Por exemplo, na figura 1, vemos o gráfico da função polinomial $p(x)=(x-1)(x-1{,}1)$, traçado pelo programa *Maple* para $-2 \le x \le 4$ e $-0{,}01 \le y \le 0{,}01$. Devido a um erro de interpolação, o gráfico gerado não intercepta o eixo das abscissas, sugerindo que a função não admitiria raízes reais no intervalo.

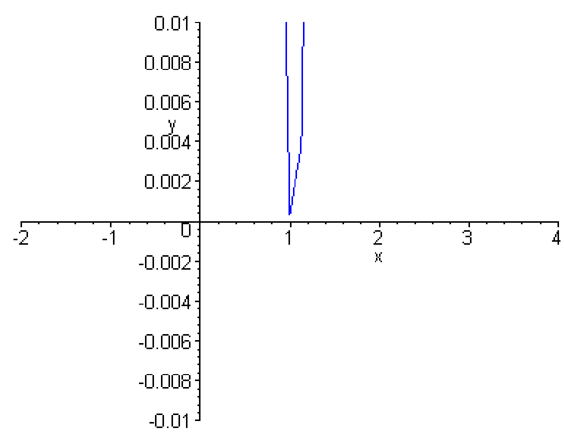


Figura 1: Um conflito teórico-computacional observado no gráfico do polinômio $p(x)=(x-1)(x-1{,}1)$, gerado pelo *Maple*.

Para estudar mais detalhadamente situações como a descrita acima, introduzimos, em Giraldo [6] e Giraldo & Carvalho [7], o termo ***conflito teórico-computacional*** para nos referimos a *qualquer situação na qual uma representação computacional é aparentemente contraditória com a formulação teórica associada*.

Encontramos outro exemplo em Mills, Tall & Wardle [14], onde é relatado um experimento computacional com a resolução da equação quádrica: $x^4-2{,}88x^3-19{,}23x^2-36{,}11x+91{,}56=0$.

Outro exemplo importante de conflito teórico-computacional é mostrado na figura 2, onde vemos o processo de magnificação local da curva $y=x^2$, em torno do ponto $x_0=1$, efetuado pelo *Maple*. Sendo a curva diferenciável, seria esperado que esta se assemelhasse a uma reta quando altamente magnificada. Entretanto, mais uma vez devido a erros de aritmética de ponto flutuante, para valores muito pequenos dos comprimentos dos intervalos da janelas gráficas utilizadas (de ordens iguais ou inferiores a 10^{-6}) a curva adquire o aspecto de uma poligonal.

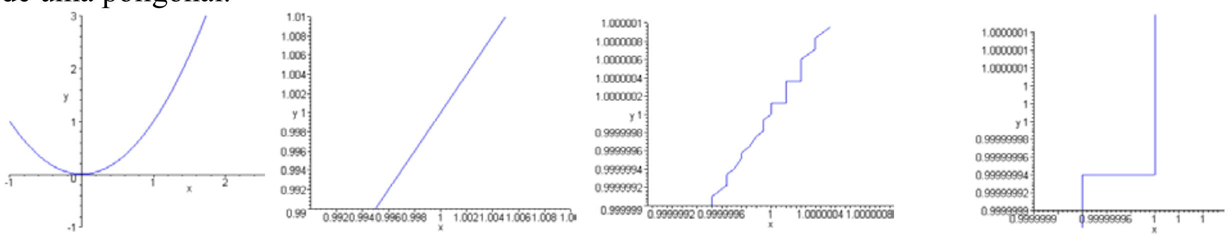


Figura 2: Um conflito teórico-computacional observado no processo de magnificação local

De acordo com nossa própria interpretação, o processo de estreitamento observado por Hunter, Monaghan e Roper não é devido à ocorrência de conflitos teórico-computacionais, mas, ao contrário, à sua ausência. O uso inadequado de ambientes computacionais — especialmente se não confrontados com outras formas de representação — pode contribuir para a cristalização da concepção de que as limitações da representação são na verdade características do próprio objeto considerado, levando à formação de imagens conceituais restritas. De fato, Sierpinska [17] assinala que a consciência das limitações de cada forma de representação e do fato de que elas representam um mesmo conceito é uma condição fundamental para a compreensão de funções.

Nossa hipótese é de que, se conflitos teórico-computacionais são enfatizados, em lugar de evitados, o papel pedagógico das características inerentes a cada forma de representação podem sofrer uma reversão positiva: elas podem contribuir não para o estreitamento, mas para o enriquecimento de imagens conceituais.

5. ALGUNS RESULTADOS EMPÍRICOS

Para investigar esta hipótese, observamos uma amostra de seis estudantes em primeiro ano de graduação na UFRJ, em doze entrevistas individuais nas quais lidavam com situações de conflito teórico-computacional. Passaremos a nos referir aos participantes do experimento pelos nomes fictícios: Antônio, Carlos, Francisco, Júlio, Marcelo e Tiago.

Apresentaremos resumidamente nesta seção os resultados da primeira entrevista individual. Foram dadas aos participantes duas representações para a função $h(x)=\sqrt{x^2+1}$: a expressão algébrica e o gráfico gerado pelo *Maple* para

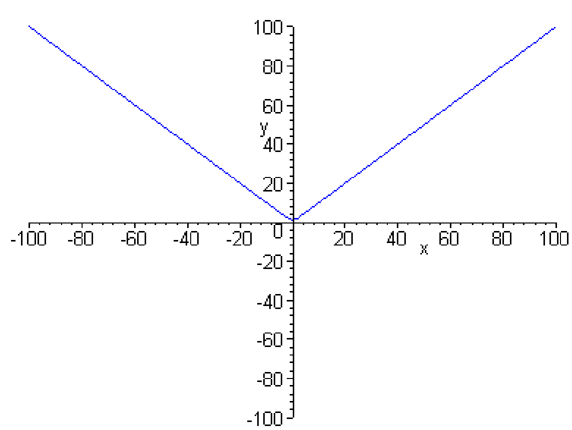


Figura 3: O gráfico de $h(x)=\sqrt{x^2+1}$, para $(x,y)\in[-100,100]^2$.

$(x,y) \in [-100{,}100]^2$ (figura 3). Devido à escolha da janela gráfica, a curva tinha o aspecto de duas semi-retas partindo da origem (de fato, suas assíntotas inclinadas). Assim, o gráfico mostrado na tela do computador apresentava o aspecto da função módulo. Esta representação computacional se encontrava portanto em conflito com a algébrica. Em particular, o gráfico esboçado pelo programa sugeria que a curva não seria diferenciável em $x = 0$. Demos início à entrevista perguntando:

> Você está vendo na tela o gráfico da função $h(x) = \sqrt{x^2+1}$, esboçado para $(x,y) \in [-100{,}100]^2$. Esta função tem derivada?

Para responder a questão inicial, os estudantes tinha liberdade para manipular à vontade o programa. Resumiremos a estratégia de cada estudante com a ajuda de um diagrama (figura 4). Os retângulos contínuos representam a pergunta inicial — h tem derivada? — e suas duas possíveis respostas — h tem derivada ou h não tem derivada. Os retângulos tracejados representam as duas representações dadas para h — computacional e algébrica. As setas indicam as ações dos entrevistados e se encontra enumeradas em ordem cronológica. A seta em negrito indica a ação decisiva do entrevistado, isto é, aquela que conduziu à conclusão final.

Analisaremos mais detalhadamente a estratégia de Francisco, que consideramos bastante significativa. Reproduzimos a seguir alguns trechos de sua entrevista.

> Por exemplo *[...]* se você fizesse $\sqrt{x^2}$, seria $|x|$, teria o bico. Você botou +*1* aí. Esse +*1* veio pra complicar. Você não consegue tirar ela da raiz completamente, concorda? *[...]* Visualmente, no visual, ali não é o bico, então, teria derivada. Estou falando em termos visuais. Agora vamos falar algebricamente. Realmente, algebricamente, você derivando, vai conseguir derivar. *[...]* Tem como você dar um *zoom* aqui? *[efetua o* zoom*]* É, parece uma parábola. Dando um *zoom* aí, você percebe nitidamente como é que ela é derivável.

Após concluir que *h* era de fato diferenciável, Francisco espontaneamente continua a estudar a função. Ele observa:

> Agora tá aí, uma boa questão. *[...]* Isso aqui tende a ser uma reta, mas não é uma reta? *[...]* Aí, agora, me pegou! Eu sei que é derivável! Deixa eu ver. *[...]* Aí, eu vou ter que derivar ela para pensar se é uma reta ou não. *[calcula a derivada]* Olha! Essa função é derivável, mas vai ter uma inclinação diferente para cada ponto. Não é como a função módulo que não é derivável no ponto $(0,0)$, mas tem a mesma derivada do lado x positivo e mesma derivada do lado x negativo para todos os pontos. Essa função não, ela vai se aproximar no $+\infty$ e $-\infty$ da função $|x|$. Vai se aproximar, mas para cada ponto vai ter uma derivada diferente.

Como podemos constatar a partir dos extratos acima, Francisco apresenta conexões flexíveis entre a representação computacional durante a entrevista. Sua conclusão sobre a diferenciabilidade de *h* está baseada na representação algébrica — ele argumenta que a propriedade estaria garantida pelo fato das fórmulas de derivação poderem ser aplicadas. Além disso, ele faz uso da representação computacional, efetuando um *zoom* no gráfico, para formar para si próprio uma visão mais geral do comportamento da função.

O ponto a assinalar, entretanto, é o fato de que Francisco espontaneamente vai mais adiante depois de estabelecer de forma conclusiva a resposta da questão inicialmente proposta. Ele formula outra pergunta para si próprio: *Isto tende a ser uma reta, ou é uma reta?* Para investigar esta nova questão, Francisco acessa uma nova unidade cognitiva: *Se a derivada não é constante, então a função primitiva não é uma reta*. A formulação da nova questão, que por sua vez conduziu à ativação de uma nova unidade cognitiva, foi motivada por um conflito teórico-computacional: *o gráfico, como era visto na tela, não era coerente com a expressão algébrica*.

É importante ressaltar que outros participantes seguiram estratégias consideravelmente distintas. Tiago e Marcelo, por exemplo, não fizeram menção espontânea ao gráfico mostrado na tela durante a entrevista. Entretanto, segundo nossa interpretação, este comportamento semelhante está associado a atitudes mentais bastante diferentes. Os resultados apresentados neste texto são parte integrante de uma investigação mais ampla em andamento, na qual os participantes lidaram com situações de conflitos de diferentes naturezas. Os resultados globais estão em fase de análise.

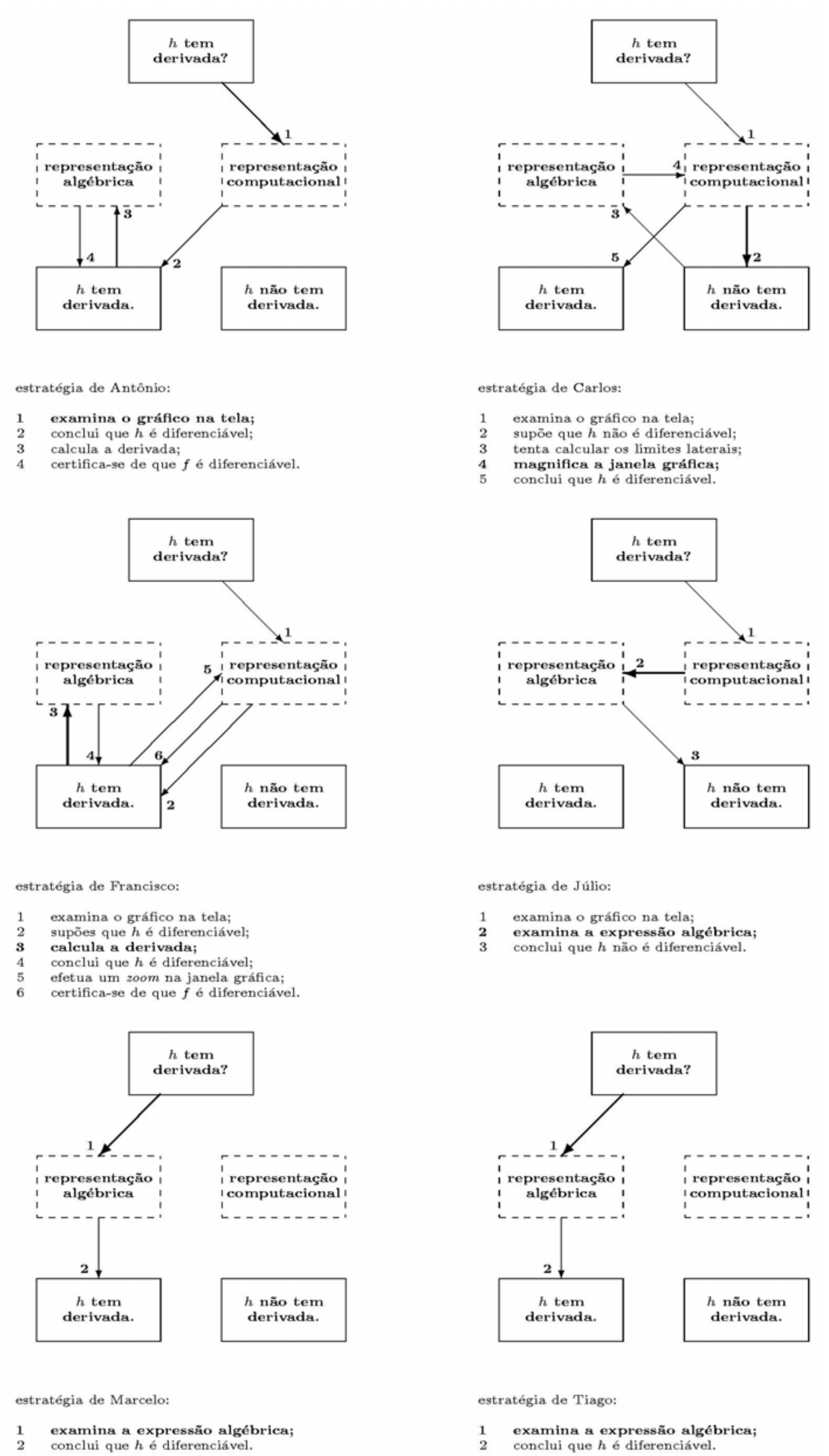


Figura 4: Estratégias dos participantes no estudo da diferenciabilidade de *h*.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observa-se freqüentemente em ensino superior de matemática, um modelo de abordagem puramente formal, em que os conteúdos são apresentados com as mesmas ordenações e estruturas das formulações teóricas. Diversos obstáculos pedagógicos estão associados a este modelo. Por exemplo, Bernard Cornu [4] ressalta que muitos termos empregados em definições matemáticas têm significados diferentes da linguagem corrente. Este é o caso dos próprios quantificadores lógicos, como 'existe' e 'para todo', além de muitos dos conceitos fundamentais do cálculo infinitesimal, como 'limite' e 'continuidade'.

Uma vez que uma definição matemática é formulada, o conceito definido adquire o status de objeto em si próprio, independente da linguagem empregada. Assim, embora definições lancem mão da linguagem corrente, o manuseio lógico das mesmas (como em demonstrações de teoremas e demais desdobramentos teóricos) demanda a abstração da linguagem. Grande parte do embasamento necessário para o desenvolvimento de idéias matemáticas não provém das definições, mas das noções intuitivas associadas ao conceito (ver Cornu [4]; Tall & Vinner [20]). Vinner [23] ressalta que os processos pelos quais teorias matemáticas são formuladas dificilmente correspondem a sua organização formal. Pelo contrário freqüentemente a conceituação formal se revela profundamente contrária à intuição humana, como evidencia sua própria evolução histórica (ver Cornu [4]; Malik [13]; Sierpinska [16]). Desta forma, ao introduzir um dado conceito matemático, freqüentemente recorremos a formas de representação distintas da definição formal, e limitadas em relação a esta. Este o caso das representações computacionais para o conceito de derivada, tratado neste trabalho.

Por outro lado, se em lugar do modelo puramente formal, adotamos um modelo de abordagem com base em uma única forma de representação, observam-se obstáculos pedagógicos de outra natureza. Como já observamos, é razoável esperar que, neste caso, as limitações intrínsecas da forma de representação utilizada se convertam em limitações nas imagens conceituais formadas pelos estudantes. De fato, este processo é evidenciado pelos resultados de pesquisa citados, dentre outros.

Lemos no clássico *What is Mathematics*:

> Qualquer que seja o ponto de vista filosófico, para todos os propósitos da observação científica, um objeto se exaure na totalidade das possíveis relações com o instrumento ou sujeito que o percebe.
>
> *Courant & Robbins [5] p. xvii, tradução nossa*

O que propomos com nosso trabalho é um modelo de abordagem alternativo em relação àqueles citados, isto é, um modelo baseado não puramente no formalismo nem puramente em representações imprecisas. Esta proposta não pressupõe a desvalorização do formal em relação ao impreciso, ou do impreciso em relação ao formal. Ao contrário, por meio da evidência de limitações e diferenças, objetivamos tanto a formação de imagens conceituais enriquecidas por uma ampla gama de unidades cognitivas, como a ênfase do fundamental papel da formalização na construção de uma teoria matemática, em relação a formas imprecisas de representação.

Referências:

[1] ABRAHÃO, A.M.C. (1998). O Comportamento de Professores frente a Alguns Gráficos de Funções $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Obtidos com Novas Tecnologias. Dissertação de Mestrado, PUC/RJ.

[2] BARNARD, A.D. & TALL, D. (1997). 'Cognitive Units, Connections, and Mathematical Proof'. Proceedings of the 21st PME Conference, Lahti, Finland, 2, pp. 41-48.

[3] BELFORT, E. & GUIMARÃES, L.C. (1998). 'Uma Experiência com Software Educativo na Formação Continuada de Professores de Matemática. Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática, São Leopoldo, Brasil, II, pp. 376-379.

[4] CORNU, B. (1991). 'Limits'. In D.O. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking, 153-166, Dordrecht: Kluwer.

[5] COURANT, R. & ROBBINS, H. (1941). What Is Mathematics? New York: Oxford University Press.

[6] GIRALDO, V. (2001). Magnificação Local e Conflitos Teórico-Computacionais. Exame de qualificação, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

[7] GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. (2002). Local Magnification and Theoretical-Computational Conflicts. Proceedings of the 26th PME Conference, Norwich, England, 1, p. 277.

[8] GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. (2002). 'Funções e novas tecnologias'. TEMA, vol. 3, nº 1, p. 111-119.

[9] GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. (2002). 'Magnificação e linearidade local: novas tecnologias no ensino de conceito de derivada'. TEMA vol. 3, nº 1, p. 101-110.

[10] GIRALDO, V. & CARVALHO L.M. (2000). 'Funções e novas tecnologias: algumas perguntas'. Anais do III Seminário: A Pesquisa em Educação Matemática no Rio de Janeiro, Campos dos Goytacazes, Brasil, 1, pp. 24-29.

[11] HUNTER, M., MONAGHAN, J.D. & ROPER, T. (1993). 'The effect of computer algebra use on students' algebraic thinking'. In R. Sutherland (Ed.), Working Papers for ESCR Algebra Seminar, London University, Institute of Education, London, United Kingdom.

[12] LAUDARES, J.B. & LACHINI, J. (2000). 'O uso do computador no ensino de matemática na graduação'. 23ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, Brasília, Brasil.

[13] MALIK, M.A. (1980). 'Historical and pedagogical aspects of the definition of a function'. Journal of Mathematics Education in Sciences and Technology, 11(4), pp. 489-492.

[14] MILLS, J., TALL, D.O. & WARDLE, M. (1990). 'A quartic with a thousand roots'. Mathematical Gazette, 74, pp. 339-346.

[15] MONAGHAN, J.D., SUN, S. & TALL, D. (1993). 'Construction of the limit concept with a computer algebra system'. Proceedings of the PME Conference, Lisboa, Portugal, 3, pp. 279-286.

[16] SIERPINSKA, A. (1996). 'Epistemologies of Mathematics and Mathematics Education'. In Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (Eds.), International Handbook of Mathematics Education, 827-876.

[17] SIERPINSKA, A. (1992). 'On understanding the notion of function'. In Harel, G & Dubinsky, E. (Eds.), MAA Notes and Report Series, 25-58.

[18] TALL, D.O. (2000). Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers. Plenary Presentation for ATCM Conference, Chang Mai, Thailand.

[19] TALL, D.O. (2000). 'Cognitive development in advanced mathematics using technology'. Mathematics Education Research Journal, 12(3), pp. 210-230.

[20] TALL, D.O. & VINNER, S. (1981). 'Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity'. Educational Studies in Mathematics, 12, pp. 151-169.

CAPÍTULO 14

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1,
págs: 163:172..
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

LEIBNIZ E O INÍCIO DA ANÁLISE MODERNA

Gérard Emile Grimberg

REHSEIS-CNRS France

endereço eletrônico: grimberg@alternex.com.br

Resumo: *Neste trabalho, pretendemos destacar dois aspectos que marcam o nascimento da Análise moderna, a saber, em primeiro lugar, os elementos da filosofia de Leibniz que tornam possível o raciocínio infinitesimal e, em segundo, o contexto no qual o conceito de função aparece, conceito que, com Euler, será o conceito que fundamenta o cálculo diferencial e será a pedra de toque da elaboração da Mecânica analítica.*

Palavras-chave: *Leibniz, História da Análise, Função, História da Mecânica, Lógica, Bernoulli.*

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho, pretendemos destacar dois aspectos que marcam o nascimento da Análise moderna, a saber, em primeiro lugar, os elementos da filosofia de Leibniz que tornam possível o raciocínio infinitesimal e, em segundo, o contexto no qual o conceito de função aparece, conceito que, com Euler, será o conceito que fundamenta o cálculo diferencial.

O fato de Leibniz não ter escrito *A ciência do infinito*, cujo projeto acompanhou sua vida desde os primeiros textos publicados sobre o cálculo das diferenças[1], coloca um problema: o das razões dessa falta. M. Parmentier atribui esta à hesitação de Leibniz quanto à fundamentação de seu cálculo. Segundo P. Costabel[2], Leibniz teria ligado o destino da característica do cálculo ao da característica universal, o fracasso dessa acarretando o da primeira no que diz respeito à sua formulação definitiva. Talvez a razão seja aquela que Belaval aponta na biografia de Leibniz: a maior parte das preocupações do filósofo era de ordem política, teologia e metafísica[3].

A complexidade da obra do pensador leva-nos à seguinte hipótese: se os textos científicos elaborados parecem pequenos, como resposta a problemas dados, pontuais, os textos filosóficos apresentam uma construção de conjunto expondo os fundamentos, a problemática, enfim um sistema que no final da vida de Leibniz pode-se afirmar acabado. O *Discurso*

---

[1]Marc Parmentier in Leibniz [1989] p. 53, data este projeto de 1693, carta de Leibniz a Malebranche.
[2]Costabel [1966], p. 115, citado por M. Parmentier [1989], p. 47.
[3]Belaval [1962].

da metafísica, os *Novos Ensaios*, A *Theodicea*, a *Monadologia* constituem as bases do que se pode chamar o sistema leibniziano. A nível de matemática ou mesmo de física, não há uma elaboração semelhante; a tese de M. Serres[1] sublinha o fato: são os raciocínios matemáticos que podem servir enquanto modelos para o pensamento filosófico de Leibniz. Mas essa problemática própria a esclarecer a filosofia de Leibniz deixa aberto o problema converso, qual seja, tentar definir o que perdura de sua metafísica em suas concepções matemáticas.

2. METAFÍSICA E MATEMÁTICA

Ao contrário de Descartes que pensava que as idéias eternas são criadas por Deus, Leibniz situa as idéias eternas no entendimento divino: "o entendimento de deus é a fonte das essências e sua vontade a origem das existências"[2]. Leibniz considera assim o Entendimento divino e as leis que o governam independentes mesmo da vontade divina. No *Discurso da metafísica*, ele critica os filósofos

> que dizem que as verdades eternas da metafísica e da geometria, e conseqüentemente, também as regras de bondade, justiça e perfeição são apenas os efeitos da vontade de Deus, ao passo que me parece que são as conseqüências do seu Entendimento, que não depende da sua vontade, ainda menos da sua essência[3].

Para Leibniz, tudo depende unicamente do entendimento divino. Ressaltamos que Leibniz coloca no mesmo lugar a Metafísica e a Geometria no que diz respeito às verdades eternas.

A matemática é, portanto, segundo Leibniz, aliás como para todos os pensadores da época, o paradigma de uma teoria verdadeira. Mas o conceito leibniziano de raciocínio verdadeiro é baseado na lógica, e não na teologia, porque até o raciocínio divino obedece à lógica.

Mas se a matemática, domínio das verdades necessárias depende do entendimento será que podemos chegar ao conjunto de todas estas? Várias vezes, devemos nos contentar com uma definição nominal, real ou causal, e não perfeita ou essencial[4], o que mostra os limites da nossa mente.

Ora, o cálculo infinitesimal representa um procedimento que opera sobre o infinito. Descartes — Belaval o mostrou[5] — pensava que não podemos operar sobre o infinito, devido às limitações de nossa mente.

A concepção de Leibniz, ou seja, pensar que as verdades matemáticas, idéias necessárias, dependem do entendimento divino e não são criadas, isto é, contingentes, permite es-

[1]Serres [1968].
[2]Leibniz [1710], *Théodicée*, I. 7.
[3]Leibniz [1686], II. Sobre o manuscito Leibniz tinha escrito: "cette expression de Monsieur Descartes" (nota de L. Boquiaux).
[4] Leibniz [1686], XXIV.
[5] Belaval [1962], p. 300 e sqq.

perar que a mente humana pudesse conseguir operar sobre o infinito por meio da lógica, já que todo que depende do entendimento divino é racional, logo dependente da lógica.

Mas se a metafísica de Leibniz já é inovadora em comparação à de Descartes e de seus seguidores, a concepção de Leibniz no que diz respeito à Lógica é revolucionária.

3. LÓGICA E MATEMÁTICA

Sabe-se o quanto o projeto de uma característica universal, língua do pensamento racional, ocupou toda a vida de Leibniz. Couturat analisou os vários ensaios de Leibniz sobre os raciocínios herdados da tradição escolástica. Estes ensaios não deram resultados definitivos, mas Couturat[1] ressalta vários avanços conseguidos por Leibniz: um desses é a distinção sobre o emprego da negação, (opera ela sobre a cópula ou sobre o predicado). Este avanço é importante na medida em que permite uma manipulação mais flexível da quantificação.

Outro progresso em comparação à lógica aristotélica e à tradição escolástica é a analogia perfeita das proposições categóricas e das proposições hipotéticas, ou como diz Leibniz, dos termos incomplexos e dos termos complexos, isto é, dos conceitos e das proposições[2]. O que diz respeito o conceito se exprime através de uma proposição simples. Por exemplo, “Todo homem é mortal”. Assim a lógica aristotélica é uma lógica do conceito.

Os termos complexos representam um conjunto de proposições: “Se A é B, C é D” pode ser substituído pelo complexo “(A é B) é (C é D)”.

Esta passagem de uma lógica do conceito à uma lógica da proposição permite um salto qualitativo: a quantificação do conceito em uma proposição simples remete à infinidade dos sujeitos; a quantificação que opera sobre uma proposição, em um complexo, remete a uma infinidade de proposições. Assim, dois quantificadores podem ser superpostos: o da proposição e o do sujeito.

Uma outra pesquisa de Leibniz ao longo de sua vida foi a possibilidade de exprimir simbolicamente relações que escapavam à teoria do silogismo: ele toma por exemplo nos *Novos Ensaios*, a relação “é filho de” ou “é pai de”, mas também na sua *Caractéristica géométrica*, a similitude, a congruência. Assim, ao lado da lógica dos predicados e das proposições, Leibniz tenta elaborar uma lógica das relações. Esta lógica que existia no estado de embrião na lógica tradicional se coloca, nas pesquisas de Leibniz, como um problema chave no que diz respeito a construir uma característica universal. É este novo encaminhamento que se encontra na analise do infinito.

---

[1] Couturat [1901], p. 351 e sqq.

[2] Leibniz [1765], Livro IV, Cap. XVII1.

4. LÓGICA DO CÁLCULO INFINITESIMAL, UM NOVO CONCEITO DE IDENTIDADE.

Leibniz nunca deu uma exposição completa do seu algoritmo. As explicações que fornece ao longo de sua obra são sempre pontuais, sintéticas, e muitas vezes são respostas às críticas dos adversários mais do que uma exposição rigorosa e sintética (como aquelas de sua obra metafísica). De um certo modo, Leibniz é mais explícito, mais rigoroso e mais matemático no *Discurso de metafísica* ou na *Monadologia* que na sua obra matemática.

Podemos todavia destacar certos pontos que permitem definir a problemática leibniziana do infinito no que diz respeito ao cálculo infinitesimal. Respondendo às críticas de B. Niewentijt, Leibniz enuncia o conceito de igualdade que é a pedra de toque de seu cálculo:

> Je juge d'ailleurs que des termes sont égaux non seulement lorsque leur différence est absolument nulle, mais aussi lorsqu'elle est incomparablement petite, et bien qu'on ne puisse dire en ce cas que cette différence soit absolument Rien, elle n'est pourtant pas une quantité comparable à celles dont elle est la différence. (...) Je pose donc que des grandeurs qui ne sont pas de cette nature sont égales, comme l'admit également Archimède et tout le monde après lui. C'est précisément dans ce cas qu'on dit qu'une différence est plus petite que toute grandeur donnée[1].

Essa nova definição da igualdade permite definir *a priori* o valor de uma soma composta de uma infinidade de termos. Isso representa um avanço lógico em relação à concepção de Wallis. Este cientista, o primeiro a dar uma teoria das séries[2], elabora um método de inferência por indução. A concepção de Leibniz emprega o caminho inverso.

Vejamos o que representa do ponto de vista lógico a enunciação do Leibniz. A igualdade de dois termos é definida a partir de sua diferença, quando aquela é "incomparavelmente pequena". Isso não significa que ela seja Nada, mas que não tem medida comum entre aqueles termos e a diferença: são incomparáveis no sentido de Euclides. E Leibniz precisa: duas grandezas são iguais quando a diferença é menor que qualquer grandeza dada.

A igualdade é definida a partir, não de uma proposição, mas de uma infinidade de proposições: essa infinidade aparece na parte da definição que explicita a significação das palavras "incomparavelmente pequena": "qualquer grandeza dada". A quantificação não se aplica à proposição, mas sim ao majorante da diferença. Para realizar a igualdade dos dois termos, é preciso provar uma infinidade de desigualdades. Tentemos agora traduzir com a lógica das proposições concebida por Leibniz o conceito de identidade:

A=B significa: para todo valor positivo α dada, $|A - B| < \alpha$.

Neste conjunto infinito de proposições, o quantificador opera sobre a quantidade α, isto é sobre a proposição, pois à cada α corresponde uma proposição. Uma consequência disto é que a igualdade entre A é B é définida a partir de uma infinidade de desigualdades. Leibniz

[1]Leibniz, "Responsio a nonnullas difficultates a DN. Bernardo Niewentijt circa methodum differentialem seu infinitesimalem motas" in Leibniz [1989], p. 327.

[2]Wallis [1655], *Aritmetica infinitorum*.

escreverá em um manuscrito que a igualdade é a última das desigualdades. Este é também uma relação que não pode ser concebível através da lógica do conceito mas sim por meio da lógica das proposições.

E se procurarmos o significado atual desta constatação, temos que traduzir a relação de igualdade em termos da teoria dos conjuntos:

A=B significa: para qualquer intervalo $I =]-\alpha,\alpha[$, $A - B$ pertence ao intervalo I.

Vejamos que a lógica das proposições de Leibniz corresponde a uma lógica de segunda ordem, pois a quantificação opera não sobre números mas sobre subconjuntos dos reais. Aliás, a topologia é baseada sobre tal lógica. Mas vejamos como o Leibniz usa este conceito no texto fundador do cálculo leibniziano de 1684, a *Nova Methodus*[1].

5. O ALGORITMO DIFERENCIAL LEIBNIZIANO

Sabe-se que a esta altura a geometria analítica se constrói em torno do conceito de equação de curva. O conceito de função esta ainda por vir. O objetivo de Leibniz na sua *Nova Methodus* é construir um procedimento universal que permita para uma curva determinar a sua tangente em qualquer ponto. O algoritmo diferencial se deduz, ainda que não seja bem explícito, do conceito de diferença finita. Leibniz considera a sua característica *d* como um operador linear que opera sobre variáveis de uma equação.

Para tomar um exemplo, a equação $x^3 + xy + 3y^4 = 0$ leva à equação diferencial: $3x^2dx + ydx + xdy + 12y^3dy = 0$. A relação: $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + y}{x + 12y^3} = \frac{y}{t}$ permite determinar a sub-tangente em qualquer ponto M(x,y) da curva, e portanto, traçar a tangente neste ponto.

Traduzida a equação em uma linguagem funcional que Euler vai elaborar por volta de 1730, poderíamos descrever o método de Leibniz da maneira seguinte: seja uma curva definida pela sua equação, f(x,y)=O.

Calcular a diferença é f(x,y)-f(x’,y’)=0 ou seja f(x,y)-f(x’,y)+f(x’,y)-f(x,y’)=0.

Esta expressão é da forma: A(x,y).x-A(x’,y).x’+B(x’,y).y-B(x’,y’).y’.

Para x’, y’ vizinhos de x e y, as diferenças A(x,y)-A(x’,y), B(x’,y)-B(x’,y’) pode ser tornadas mais pequena que qualquer quantidade dada, e assim, obteremos a expressão A(x,y).(x-x’)+B(y,y’).(y-y’)=0.

No limite das desigualdades x-x’ e y-y’, podemos escrever Adx+Bdy=0 ou seja $\frac{dy}{dx} = -\frac{A}{B} = \frac{y}{t}$, a famosa relação do triângulo característico.

---

[1] Leibniz [1684].

Quando escrevemos o termo "limite", esta noção não aparece na obra de Leibniz e se sabe o quanto o cálculo diferencial desencadeou (sobretudo no início) uma série de críticas sobre a falta de rigor do algoritmo.

Na realidade, o problema é que neste momento o conceito de curva, pedra de toque do cálculo, era complexo demais para formalizar a idéia de limite. O conceito de função de várias variáveis e a diferenciação parcial permitirão de se encaminhar em direção a este conceito.

6. O Surgimento do Conceito de Função

Ao lado de artigos envolvendo a aplicação direta do seu cálculo, Leibniz, em volta dos anos 1690, encontra outras formas de usar o seu algoritmo: considerando uma família de curvas parametrizadas, ele mostra como, diferenciando o parâmetro na equação da curva, chega-se à equação da envolvente da família de curvas. Um outro tipo de uso da diferenciação intervém a respeito do problema da braquistócrona, desafio lançado por Johan Bernoulli: trata-se de determinar a trajetória de um corpo entre dois pontos A e B, tal que o tempo de percurso seja mínimo.

Desta vez, a diferenciação atua sobre uma grandeza, o tempo que não aparece explicitamente nas trajetórias. O tempo de percurso aparece, mediante a lei da queda dos corpos, como uma função de variável de espaço. Outro aspecto deste problema é que o fato da curva ser de percurso mínimo é uma propriedade que é também propriedade local: dois pontos vizinhos da curva têm ainda esta propriedade, o que permite a Leibniz determinar a equação diferencial da curva. Mas Leibniz tem já um raciocínio que é de típo variacional, como o indica correspondência dele com Johan Bernoulli: expondo a sua solução, ele descreve depois como este método poderia resolver outros problemas, como aquele de curvas isoperímetras[1]. Como se vê, o início do cálculo diferencial é diretamente ligado à resolução de problemas de mecânica.

Foi neste contexto que emergiu o conceito de função. Dois problemas levaram Johan Bernoulli a definir e usar este conceito. O primeiro problema é o problema dos isoperímetros que propus Jacob Bernoulli: sendo uma família de curvas (x,y) de mesmo comprimento, trata-se de encontrar, por exemplo, qual é a curva do tipo (y, x^3), tal que a área definida por esta curva seja maximal. Johan Bernoulli resolve o problema de uma maneira mais geral: em vez de considerar só uma família de curvas de uma potência dada, ele considera uma família onde a potência de x é substituída por uma função qualquer de x. Houve uma polêmica entre Johan e seu irmão a respeito desta solução e, em realidade, a solução de Johan comportava erros que ele só conseguirá corrigir em 1718. Mas o interessante da solução de Johan Bernoulli reside no facto que ele usa o conceito de função, e, pela primeira vez, em lugar de diferenciar a equação de uma curva, ele diferencia funções. Na correspon-

[1] Leibniz, M.S.III-1, p. 294: "O método que eu tenho aplicado aqui será útil para outras linhas que devem apresentar certa propriedade de *maximum* ou *minimum*; sob a condição que o *maximum* ou o *minimum* da linha precedente seja uma parte do *maximum* ou *minimum* da seguinte".

dência com Leibniz, Johan explica e define os objetos, função e sua diferença e a resposta de Leibniz é muito eloquente, mostrando que ele já tinha uma idéia muito parecida.

A reação de Leibniz à leitura da solução de Bernoulli:

> Também uso sempre a diferença de funções de x, negligenciando as diferenças [de ordem superior]; assim como z é uma função de x, então đ [d cortado] é para mim uma quantidade ordinária, que se origina de dz, sendo dividido por dx, ou seja $đz = dz : dx$. Os signos são em si todos arbitrários, no entanto, não me convém significar uma multiplicação por $\times$, por causa da confusão fácil com a [variável] x…[1].

E a resposta de Bernoulli:

> Para denotar uma função de uma quantidade qualquer indeterminada x, prefiro usar a letra maiúscula X em vez da grega ξ, a fim de aparecerem no mesmo tempo a função, e a variável indeterminada da qual esta é função; isso alivia a memória. Quanto, porém, ao signo da função diferenciada, adoptarei facilmente o seu đ em vez de meu Δ, porque é mais simples…afinal aprovarei também o que diz em relação à notação dos signos comuns…2.

O interessante nesta discussão reside no significado novo do algoritmo diferencial: operando-se sobre uma função, esta diferença deve ser marcada por um novo símbolo, na medida em que a diferença não se aplica da mesma maneira. A diferenciação leibniziana operava sobre as variáveis dentro da equação da curva. Para tomar um exemplo, diferenciar a equação $x^3 + x^2 + 3y^4 = 0$ leva à equação diferencial: $3x^2dx + 2xdx + 12y^3dy = 0$. Mas, diferenciar uma função X, por exemplo $X = x^5$, leva à expressão $(\text{diferença de } X) = \Delta X.dx$ isto é: $(\text{diferença de } X) = 5x^4.dx$. No caso da equação, obtemos uma equação diferencial. Mas, no caso de uma função, temos o que chamamos hoje de uma 1-forma diferencial.

Enfim, na mesma época, isto é, em 1697, a respeito do estudo das trajetórias ortogonais aparece em uma carta de Johan Bernoulli a Leibniz[3], desta vez implicitamente o conceito de função de duas variáveis. Considerando uma família de curvas parametrizadas, Johan Bernoulli escreve a equação da curva sob a forma y=p(x,a), e usa as diferenciais parciais

---

[1] M.S. III-2, p. 526: "Saepe etiam ego utor functionibus differentaitis x, neglectis differentialibus; ut si z sit functio ipsius x, tunc đ mihi est quantitas ordinaria, quae prodit dz dividendo per dx, seu $đz = dz : dx$. Signa in cujusque arbitrio sunt, muhi tamen non placet, $\times$ multiplicationem significare, ob facilem confusionem x…".

[2] M.S. III-2, p. 531: "Ad denotandam functionem alicujus quantitas indeterminatae x, mallem uti litera majuscula cognomine X vel graeco ξ, ut simul appareat cujus, indeterminatae sit functio; hoc levaret memoriam. Quantum vero ad signum functionis differentiae, facile adopabo tuum đ loco mei Δ, quoniam simplicius est… Reliqua, quae mones circa notationem signorum vulgarum, etiam ego aprobabo…"

[3] M.S II-1 p. 464, Carta de Bernoulli à Leibniz (Agosto de 1697).

(segundo a variável a e segundo a variável x), a fim de determinar a equação diferencial que é solução do problema.

Estes conceitos, exceto o artigo de 1706, ficaram secretos até 1718. Antes desta data, os únicos a terem conhecimento destes conceitos e de sua manipulação foram os discípulos de Johan Bernoulli e Leibniz, Herman, os Nicolas Bernoulli, I e II, e em uma certa medida, Euler que devia reorganizar por volta dos anos 1730[1] o cálculo diferencial em torno do conceito de função de várias variáveis.

Esta perspectiva permite repensar a relevância do algoritmo diferencial leibniziano e a importância do conceito de função no que diz respeito ao desenvolvimento da Análise e à elaboração da Mecânica analítica no século XVIII. Pois, sem este equivalente de uma lógica de segunda ordem, os raciocínios que levam d'Alembert e Euler à criação e ao uso de equações diferenciais parciais não seriam possíveis. Conceber uma grandeza física tal como a aceleração, a velocidade de um fluído ou ainda a pressão enquanto função das variáveis de espaço e do tempo, requer um raciocínio que usa uma quantificação, ainda que não explicita, sobre intervalos e produto de intervalos. Ainda mais, o raciocínio variacional usa também uma quantificação, desta vez, sobre um conjunto de funções, e não é por acaso que Leibniz, com Jacob e Johanes Bernoulli, é um dos fundadores deste tipo de cálculo.

Neste sentido, Euler e Lagrange são os dois herdeiros de Leibniz.

Referências:

BELAVAL, 1962 Leibniz, critique de Descartes, Paris.

BOS, H. J. M, 1974 "Diffentials, Higher-Order Differentials and the derivative in the leibnizian calculus" in Archive for History of Exact Sciences, 14, pp. 1-90.

COUTURAT, L. 1901 La logique de Leibniz d'après des documents inédits, Paris.

_______1903 Opuscules et fragments inédits de Leibniz, Paris.

GRIMBERG G., 1998 D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique, Tese de doutorado, sob orientação de M. Paty, defendida em 1998 na Université Paris 7-Denis Diderot.

_______2001 A consituição da teoria das funções de várias variáveis e a elaboração da Mecânica analítica. Tese de doutorado em Filosofia, sob orientação do Pr Newton Da Costa, defendida em 2001 na Universidade Estadual de São Paulo (USP).

LEIBNIZ, G. W., 1684 "Nouvelle méthode pour chercher les Maxima et les Minima, ainsi que les tangentes, méthode que n'entravent pas les expressions fractionnaires ou irrationnellles, accompagnée du calcul original qui s'y applique", A.E. oct. 1684, trad. do lat., M. Parmentier, La naissance du calcul différentiel, Vrin 1989, pp. 104-117.

_______1686 Le discours de Metaphysique, reed. L. Bouquiaux, Paris 1995.

[1] Youschkevitch, A. P. [1983].

_______1715 Nouveaux essais sur l'entendement humain, ed. Jacques Brunschwig, Paris 1990.

_______1875 Théodicée, in Die philosophischen von Gottfried Wilhem Leibniz, Berlin, 1875-1890.

_______1855 Leibnizens mathematische Schriften, ed. Gerhardt, T. I-II, Londres 1850 e T. III-VII, Halle 1855-63, reed. 1962, Hildesheim. (Abrev. MS).

_______1875 Die Philosophischen Schriften von G. W. Leibniz, ed. Gerhardt, 7 vol. Berlin 1875-1890.

_______1989 La naissance du calcul différentiel, int. e trad. de M. Parmentier, Vrin, Paris.

_______1995 La caractéristique géométrique, trad. de M. Parmentier, Vrin, Paris.

_______1998 Recherches générales sur l'analyse des notions et des vérités, ed. J-B Rauzy, PUF, Paris.

SERRES M., 1968 Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques, Paris.

YOUSCHKEVITCH, A. P, 1983 "Leonard Euler's unpublished manuscript Calculis Differentialis", in Leonhard Euler, 1703-1783: Beiträge zu Leben und Werk, edicted by E. A. Fellmann. Basel, pp. 161-169.

WALLIS, 1655 Aritmetica infinitorum.

CAPÍTULO 15

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 173:184.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01** © 2002, Editora IME-UERJ.

Os *Elementos de Geometria*, de Adrien Marie Legendre

Luiz Carlos Guimarães

Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
endereço eletrônico: lcg@labma.ufrj.br

Resumo: *Neste trabalho examinamos as possibilidades de um texto clássico, no caso os Elementos de Geometria de A. M. Legendre, em um curso contemporâneo de formação de professores de Matemática. Historiamos o contexto em que essa obra veio a ser composta, como veio a ser traduzida no Brasil, e sua influência no ensino neste país. O exame crítico de algumas proposições é utilizado para ilustrar diversas formas de uso em um curso dessa natureza. Atenção especial é dada a como a utilização de softwares de Geometria Dinâmica pode demandar padrões mais estritos para construções geométricas, e servir de contraponto ao exame de demonstrações de teoremas.*

Palavras-chave: *História da Geometria no Brasil, Geometria Dinâmica.*

Abstract: *In this work we review some possible uses of a classic textbook, in the case in point the Elements of Geometry of A. M. Legendre, in a contemporary undergraduate geometry discipline for Mathematics teachers. We also briefly review the context in which the book came to light, and trace the events which led to its publication in Brasil, and its subsequent influence in schools in this country. The critical examination of some propositions is used to illustrate some of its possible uses in a course like this. We also pay special attention as to how the use of Dynamical Geometry software may lead to stricter demands for geometrical constructions and work as a counterpoint to enlighten what is at issue in the proof of theorems.*

Key words: *History of geometry in Brazil, Dynamic geometry.*

O estabelecimento de um sistema público de instrução foi uma das preocupações do governo revolucionário na França. A constituição de 1791 já prescrevia que a instrução primária deveria ser compulsória e gratuita. Para isso, haveria que se estabelecer tanto um sistema de formação de professores quanto a seleção e o provimento de livros-texto a serem adotados por estes. Para a instituição da "École Normale" (o primeiro exemplo de escola de nível superior para professores), o Comitê de Instrução Pública incumbiu, em 1794, sábios eminentes de preparar *livros elementares*, e Lagrange foi encarregado de preparar textos de aritmética e geometria. Duas semanas depois, ele solicita a ajuda de Legendre. É este último que realiza afinal a tarefa de escrever o texto de geometria, impresso cerca de dez meses depois, e publicado em 1794 ([Schubring], Cap. 8). Paralelamente a isso, havia sido instituído um concurso para a escolha de livros texto a serem adotados nas escolas. Legendre consegue ter seu texto aceito para julgamento, e ele é posteriormente adotado. (Para mais detalhes sobre este período, ver o interessante relato em [Schubring].)

O livro obteve reconhecimento imediato, e Legendre publicou em vida 14 edições. Foi traduzido nas principais línguas européias, algumas vezes com novas traduções em edições sucessivas. Após sua morte, em 1833, seu texto original continuou sendo editado, até pelo menos 1866. Em 1845, no entanto, M. A. Blanchet obtém da família de Legendre os direitos de edição sobre o texto, e começa a publicar uma versão "com adições e modificações", que teve também uma carreira longa e influente.

Infelizmente a versão de Blanchet continha, além de acréscimos para adaptar o livro aos novos programas, algumas modificações pouco felizes. Como, pelo menos até 1930, a versão de Blanchet ainda era editada na França (a 44ª edição!), não é de surpreender que alguns autores modernos, ao levantar reparos a certas passagens no texto, estejam sem o saber criticando o adaptador, em lugar do autor original. É o caso, por exemplo, de [Gonseth], que critica Legendre pelo argumento de continuidade utilizado (na verdade por Blanchet) para demonstrar a igualdade de dois ângulos retos quaisquer. O mesmo argumento de continuidade é criticado em [Hadamard]: "*... as considerações de continuidade habitualmente invocadas a este respeito deveriam ser descartadas, uma vez que se admite, anteriormente e sem demonstração, a possibilidade de dividir um segmento ou um ângulo em duas partes iguais...*"[1]

Na verdade, o argumento originalmente utilizado por Legendre, uma prova por absurdo, é o mesmo utilizado mais tarde em [Hilbert], apenas com a modificação, neste último, de usar postulados de congruência em lugar de superposição.

A tradução brasileira do texto de Legendre foi feita a partir da quinta edição francesa (de 1804), por Manoel Ferreira de Araújo Guimarães, brasileiro, professor da Real Academia dos Guardas-Marinhas. Foi realizada por ordem de D. João VI, como parte da bibliografia a ser utilizada nos cursos da futura Escola Politécnica, antecessora direta da nossa atual Escola Politécnica da UFRJ, e publicada no Rio de Janeiro, em 1809, pela Impressão Régia. Pelo menos três exemplares dessa edição podem ser encontrados na seção de livros raros da Biblioteca Nacional. Manoel Ferreira, matemático, engenheiro, economista, poeta e jornalista tem uma interessante biografia. Nascido na Bahia, em 1777, e morto em 1838, no mesmo estado, ele completou seus estudos superiores na Real Academia dos Guardas-

[1] Nesta, e nas citações que se seguem, a responsabilidade pela tradução é do autor deste trabalho

Marinhas portuguesa, em 1798, e aí lecionou até o regresso ao seu estado natal. Chamado posteriormente ao Rio de Janeiro, ele ajudou a formar nesta cidade a Real Academia dos Guardas-Marinhas, que viera transferida de Lisboa juntamente com a Corte. Veio a dirigi-la até 1821, quando se engaja na campanha pela Independência.

A Academia começou suas aulas em 1809, mesmo ano da publicação dos “Elementos”. Manoel Ferreira de Araújo Guimarães publicou diversas traduções de textos matemáticos, além de um par de livros de sua própria autoria, como os “Elementos de Astronomia” (Rio de Janeiro, imprensa Régia, 1814). Retirou-se da vida pública em 1831, mas voltou a lecionar (geometria!) na Bahia, na escola naval. Em 1838 seu filho é executado, por participar de um movimento revolucionário republicano, e Manoel Ferreira morre poucos meses depois.

Esta primeira edição brasileira parece ter-se esgotado rapidamente, e não foram feitas reimpressões. O original, no entanto, foi utilizado por muitos anos, e diversos exemplares de edições francesas existem ainda na biblioteca de livros raros da nossa Escola Politécnica. Uma das versões que M. A. Blanchet publica após a morte de Legendre foi posteriormente traduzida por B. Alves Carneiro, e publicada no Rio de Janeiro pela Livraria Garnier, provavelmente em 1886. Assim como a versão original, teve apenas uma edição.

No entanto, trechos inteiros do texto original de Legendre são vistos ainda na 16ª edição, de 1960, dos “Elementos de Geometria”, “do Frère Ignace Caput”[1] publicados em tradução e adaptação de Eugênio Raja Gabaglia. Nenhuma menção é feita à inspiração original nesse livro, e é provável que fosse mesmo desconhecida dos autores, e de muitos outros que editaram livros didáticos nesse intervalo de 160 anos. Tomar de empréstimo, sem agradecer à fonte, é hábito consagrado entre autores de livros didáticos, aqui e em países de tradição cultural mais antiga que a nossa. No caso de Legendre, herdamos essa licença de seus compatriotas franceses, mas ele não teve sorte diferente em outros países, onde seu livro foi também adotado como modelo por diversos autores. Assim, suas idéias, se não o seu nome, foram adotadas continuamente na Europa e no continente americano, pelo menos até o advento da “matemática moderna”. Entre os poucos que reconhecem o fato está A. Cambier, que em 1944 publica na Bélgica uma geometria “d’après A.-M. Legendre”. No entanto, o comportamento usual, para os autores de livros didáticos, é ignorar ou ocultar as suas fontes de referência[2]. Assim, a partir de 1888 e por pelo menos 50 anos, um dos textos mais utilizados nas escolas dos EUA [Wentworth & Smith] incluía até mesmo o apêndice ao livro IV de Legendre (onde se discutem problemas isoperimétricos), sem qualquer referência às inspirações originais. O fato merece registro aqui apenas porque um dos autores

[1] As iniciais F. I.-C., na verdade se referem a **F**rère **I**rlide - Jean-Pierre **C**azeneuve, superior entre 1875 e 1884 da irmandade dos Frères des Écoles Chrétiennes. A ordem publicava seus textos sob as iniciais do superior na ocasião. Assim, o livro foi publicado posteriormente na França como “par FJ” (ou **F**rère **J**oseph) e, mais tarde, como “par FG-M” (**F**rère **G**abriel**-M**arie, Edmond Jean-Antoine Brunhes, superior da Ordem de 1897 a 1913, e o autor provável do texto).

[2] Existem, é claro, exceções notáveis. Entre os autores brasileiros, a Geometria Descritiva de Álvaro Rodrigues se destaca pelas referências bibliográficas

que continuam a série após 1910 é mais conhecido hoje por suas obras de história da Matemática!

1. Os Elementos de Legendre no Curso de Licenciatura da UFRJ

No atual curso de Licenciatura em Matemática, na UFRJ, a formação em Geometria. é realizada em três disciplinas obrigatórias, além dos cursos de Geometria Analítica e de Álgebra Linear. O estudante cursa, em seu primeiro período, uma disciplina introdutória, passa depois por uma disciplina mais rigorosa e axiomática de Fundamentos de Geometria, e cursa então uma disciplina onde estuda Geometrias não-Euclidianas.

É na disciplina intermediária, de Fundamentos, que o texto de Legendre se revelou bastante útil. Escrito por um matemático maduro, o texto tem não obstante a particularidade de haver evoluído num período em que a matemática estava ainda caminhando para, finalmente, admitir a existência de geometrias hiperbólicas. Não é demais lembrar aqui que mesmo Gauss só parece admitir abertamente essa possibilidade a partir de 1818 (ver [Rosenfeld]), e que Lobatchevsky e Bolyai apenas publicam suas descobertas em 1829 e 1832, respectivamente. Legendre morreu aos 80 anos, em janeiro de 1833, sem ter tido ocasião de assimilar estes novos pontos de vista, que ainda tardaram muitos anos antes de serem aceitos pela comunidade matemática.

Legendre trabalha então sob a premissa de que, de uma forma ou de outra, o axioma das paralelas deveria estar embutido na estrutura geométrica. Escolhe fixá-lo na proposição de que a soma dos ângulos de um triângulo necessariamente iguala dois ângulos retos. Nas sucessivas edições, experimenta argumentos variados para demonstrar este fato como teorema. Após cada tentativa, reconhece o ponto em que seu argumento utiliza um postulado oculto, mas deixa a revelação disto para as notas ao fim do livro, longe dos olhos do leitor casual ou iniciante. As sucessivas tentativas frustradas de Legendre são amplamente mencionadas nos textos históricos (ver, por exemplo, [Rosenfeld]), ou em textos introdutórios de Geometria Hiperbólica atuais. O que parece ser insuficientemente discutido nessas fontes é a provável influência que o texto de Legendre, largamente disseminado em diversas línguas, possa ter exercido sobre os matemáticos que investigaram o problema. Uma possível indicação dessa influência é dada em [Lobatchevsky]:

> "Para esta teoria [das paralelas] os esforços de Legendre não levaram a nada, pois este se viu forçado a deixar o único caminho direto e se desviar para uma trilha lateral, e se refugiar em teoremas auxiliares, que ilogicamente se esforçou em caracterizar como axiomas necessários...". Sobre suas próprias publicações anteriores, Lobatchevsky comenta: "a extensão [daquele] trabalho pode ter prejudicado [a divulgação de tal assunto que] desde Legendre, havia perdido muito de seu interesse". Comenta ainda: "contrariamente à opinião de Legendre, todas as outras imperfeições – por exemplo a definição de linha reta – se mostram irrelevantes aqui, e sem real influência sobre a teoria das paralelas."

Mas mesmo essa aparente falta de reconhecimento da (possível) influência de Legendre no desenvolvimento da geometria não-euclidiana, dá margem a discussões úteis em uma disciplina de formação de futuros professores. O que temos em mente aqui é uma observação em [Thurston]:

> "Se o que estamos realizando é avançar o entendimento da matemática, então faríamos muito melhor reconhecendo e dando valor a uma gama muito maior de atividades. As pessoas que encontram o caminho de prova de um teorema o estão fazendo no contexto de uma comunidade matemática; não estão realizando tudo sozinhas. Elas dependem de uma compreensão da matemática que absorvem de outros colegas. Uma vez provado um teorema, a comunidade matemática depende do tecido social para distribuir as idéias às pessoas que podem utilizá-lo mais: a mídia impressa é demasiado obscura para isso. Mesmo se assumimos o ponto de vista estreito de que o que produzimos são os teoremas, o time é importante. O futebol pode servir aqui como metáfora. Podem ocorrer apenas um ou dois gols durante uma partida, feitos por uma ou duas pessoas. Isto não significa que o esforço dos demais foi desperdiçado. Não julgamos os jogadores em uma partida de futebol baseados apenas no fato de eles pessoalmente terem feito um gol; nós julgamos um time baseados em sua função como equipe."

A visão de Thurston do trabalho realizado pela comunidade matemática parece incluir o reconhecimento da importância mesmo de esforços como o de Legendre que, nas palavras de Lobatchevsky, "*não levaram a nada*", por não chegar à formulação final correta. Afinal, em um jogo de futebol são importantes também as jogadas que não levam a gol, mas que, ao falhar, levam a conhecer melhor o adversário. Num mundo como o visto por Thurston, até mesmo o reconhecimento da importância do papel do professor de Matemática poderia ser incluída, mesmo que este nunca viesse a provar teoremas!

Na escola soviética, havia o hábito de dar aos estudantes, como exercício, demonstrações plausíveis de resultados em última análise absurdos [Bradis]. Nos exemplos geométricos, uma figura bem feita em geral pode elucidar a questão, e revelar a falha no argumento. No caso da Proposição 20, no Livro I de Legendre, no entanto, uma figura corretamente desenhada apenas confirma o argumento. Além do que, longe de ser absurdo, o resultado em si é sabidamente verdadeiro, na geometria euclidiana. Podemos então dar um passo à frente na estratégia soviética: a falha deve ser encontrada não em um argumento que falsamente induz a um enunciado falacioso, mas sim em um argumento extremamente convincente, que carrega a autoridade e a clareza de raciocínio de um autor famoso, e que "prova" um resultado conhecido como verdadeiro.

Para os estudantes, o exercício tem se revelado de grande importância. Ao se darem conta (trabalhando de forma independente, e sem acesso às Notas) do exato momento em que Legendre utiliza-se de um axioma não enunciado (extremamente natural, e assim mesmo interdito), eles são estimulados a encarar com mais cuidado as suas próprias argumentações ao resolver problemas e exercícios.

A utilidade do texto como material de reflexão para os alunos está longe de terminar aí, mas vamos dar apenas alguns exemplos adicionais. Legendre está escrevendo num tempo em que muito está acontecendo no seu tema de escolha. Assim, entre a primeira edição, em 1794, e a quarta, em 1804, somos informados da publicação em 1801, por "um geômetra de Brunswick, chamado Carl Frederich Gauss", de um critério para determinar quais polígonos regulares são construtíveis por régua e compasso. Lambert já havia então demonstrado a irracionalidade de π (e o próprio Legendre havia melhorado a demonstração, incluindo-a no texto como a Nota IV), mas não existia ainda a prova de que esse número é transcendente (do que somos informados na mesma Nota, juntamente com algumas observações suas a respeito). O estudante tem, portanto, a oportunidade de acompanhar de perto a história da evolução de alguns desses resultados. O próprio texto é testemunha do caráter gradual dessa evolução. Assim, na sua exposição da geometria espacial, Legendre introduz simetrias e transformações. Seu tratamento é ainda hesitante, típico de um dos primeiros textos no assunto, e, por isso mesmo, valioso para estudantes iniciantes. E, é claro, ele dá à característica de Euler a merecida preeminência. No Livro VII, Legendre desenvolve uma apresentação concisa da geometria esférica que, embora introdutória, é suficientemente completa para lhe permitir a discussão de problemas isoperimétricos nessa geometria!

Em seu desenvolvimento do estudo de sólidos, no livro VI, Legendre é levado a considerar mais de perto a noção de simetria para sólidos, para sanar um erro na demonstração que Euclides apresenta, nos seus Elementos, para a proposição 28 do Livro XI, ou seja: "*Se um paralelepípedo for cortado por um plano, segundo as diagonais de duas faces opostas, então o sólido será dividido [em dois sólidos equivalentes] por esse plano"*. O problema aqui é que os dois sólidos resultantes não são, ao contrário do que parece imaginar Euclides, e mesmo [Simson] depois dele (ver também [Heath], vol. 3, pg. 331), congruentes. O tratamento que Legendre dá a essa proposição é adotado (sem atribuição de autoria, segundo [Heath]!) por diversos autores posteriores mas, a esse respeito, um patrício nosso tem uma observação interessante. José Vilela Barbosa, o futuro Marquês de Paranaguá, publicou no ano de 1815, em Lisboa, o primeiro texto de elementos de geometria escrito por autor brasileiro [Barbosa]. Em seu prefácio, ele se refere ao tratamento dado por Legendre nos seguintes termos:

> "... Era igualmente difícil, pelo menos não se soube por muito tempo, demonstrar com o rigor geométrico [a proposição 28]. Recorreriam à idéia dos infinitos; quando Legendre, mais zeloso da exatidão, tentou romper as trevas por um modo engenhoso e elegante. Mas ele mesmo, e Lacroix que o seguira, não se satisfizeram depois com a evidência desse método, como este dá a entender na nota da página 163 dos seus [Lacroix] Elementos de Geometria, 4ª edição feita no ano de 1804, em que aparece com outra demonstração, qual a que damos com pouca modificação nestes Elementos. E a supõe achada em primeiro lugar por Mr. Ampère, professor da Escola Central de Lyon. Nós, porém, não lha concedemos, em honra das Letras portuguesas; e declaramos que a temos lido nos Elementos

> de Geometria do Padre Manoel de Campos[1], impressos em Lisboa no ano de 1735, e por conseguinte muito anterior a Mr. Ampère. Não queremos com isto tirar o mérito a este professor, que pode bem ter-se encontrado em seu raciocínio com o geômetra português. Só não consentimos em que se atribua a aquele a glória de primeiro no invento; nem ainda a José Anastácio da Cunha, como alguns pretenderam, aliás geômetra de mui distinta reputação".

Em uma nota ao pé da página, Vilela Barbosa nos esclarece que o próprio Legendre posteriormente substitui sua demonstração original (exatamente a que aparece no texto que estamos editando)[2] pela de Ampère. Observe-se que Heath desconhece essa evolução: é a esta última demonstração, adotada por Legendre apenas a partir da 9ª edição, de 1812, que está se referindo na nota que mencionamos acima. Heath, aparentemente, desconhecia versões portuguesas para os Elementos, e nenhuma é mencionada na introdução de sua obra, mas faz referência a [Tacquet], considerado por alguns a inspiração de Manoel de Campos.

Existem ainda outras informações interessantes neste pequeno trecho de Vilela Barbosa: Manoel de Campos teve diversas impressões, e as edições de Simson para os Elementos só aparecem em 1756 e 1762 (a segunda, e última preparada pelo próprio Simson), e se estendem por muitos anos. A citada edição de 1817 (que era usada como livro texto) conserva ainda o erro aparentemente ignorado. O erro não está presente nas versões posteriores de [Todhunter] porque todas as proposições do livro XI sobre volume de sólidos, a partir da 22, passam a ser suprimidas, e consideradas como parte do Cálculo Integral. Não havia, pois, aparentemente, repercussão alguma do que se escrevia em Portugal na comunidade matemática européia da época.. Por outro lado, o texto inglês de Simson foi mandado traduzir em 1765 ao português pelo marquês de Pombal, e passa a ser adotado em lugar do livro de Manoel de Campos. Vê-se assim que a supressão dos Jesuítas trouxe consigo um retrocesso no saber matemático ensinado em Portugal. Em 1862 é reimpressa a tradução do texto de Simson, ainda sem o registro do erro, mas com uma tímida nota ao pé da página 168: *"Veja-se Legendre, Elem. de Geom. Liv. VI. Proposição. VI. Corol., e Not. 1"* (nenhuma referência a Manoel de Campos!). Existe uma edição brasileira desse mesmo texto, publicada em 1944 em São Paulo.

Outra informação interessante é que Vilela Barbosa, apesar de demonstrar uma erudição admirável nas pesquisas que fez para elaborar seu texto, parece ignorar completamente a identidade de "*Mr. Ampère*". Este já era, na data em que foi escrito o texto de Barbosa, bastante conhecido como matemático e cientista, membro do Institut National des Sciences, e

[1] Vilela Barbosa está se referindo aqui às proposições XXVIII e XXIX, pgs. 199 e 198, do Livro VII dos Elementos de Manoel de Campos, e o argumento aí é verdadeiramente engenhoso!

[2] Essa demonstração será examinada em um artigo posterior. Nela, Legendre examina também a questão de sólidos simétricos serem equivalentes por dissecção. O conhecimento de seu argumento parece ter sido também perdido por muitos, pois a pergunta tem sido atribuída a Gauss, em carta dirigida em 1844 a C. L. Gerling. A solução deste último utiliza a mesma dissecção da pirâmide triangular que fora proposta por Legendre, já antes de 1804, em sua Nota VII, o que Gauss certamente desconhecia. O argumento que Legendre usa após 1812 para o volume da pirâmide o leva a retirar essa discussão, e a tradução de Crelle para o alemão dos Elementos de Legendre já não a inclui.

professor da École Polytechnique desde 1809. Vê-se aqui um outro exemplo, como o de Álvaro Rodrigues e tantos outros depois dele, de cultura matemática aprofundada, mas desligada do ambiente de pesquisa e de produção de teoremas a que se refere Thurston.

2. Sobre a Edição em Uso em nosso Curso:

Para tornar o texto de Legendre acessível a nossos estudantes, uma nova edição está sendo preparada, com a colaboração voluntária de diversos alunos de Licenciatura. O texto segue fielmente a edição brasileira de 1809, feitas apenas a atualização ortográfica e pequenas correções, com a intenção exclusiva de tornar a leitura mais acessível aos estudantes e professores de Matemática aos quais se destina o trabalho. Pelo seu interesse histórico no contexto brasileiro, e pela influência que exerceu sobre os currículos de diversos países além do nosso, este livro, que hoje circula apenas internamente em nosso curso, será editado proximamente em maior escala. Gradualmente estarão sendo incorporadas a este texto as variantes de demonstração que Legendre utiliza nas sucessivas edições, bem como comentários sobre o conteúdo e a história de alguns resultados.

O livro será também objeto de uma edição eletrônica, da qual falamos a seguir. Uma extensa coleção de exercícios e problemas faz também parte do projeto, e será oportunamente incorporada a esse site.

3. Sobre os Complementos ao Texto:

Na disciplina de Licenciatura mencionada acima, são utilizados materiais complementares desenvolvidos com o software de geometria dinâmica Tabulæ [Guimarães]. O software é utilizado para modelar e ilustrar as demonstrações e construções geométricas do texto, variantes e construções adicionais, e uma coleção de problemas, extraídos principalmente de [FIC] (com correções e generalizações).

Uma das características ainda insuficientemente ressaltadas, que distingue a utilização de softwares de geometria dinâmica de métodos mais tradicionais, decorre de os dados iniciais poderem ser livremente manipulados, diretamente com o 'mouse', pelo utilizador. Assim, uma construção realizada com uma dessas ferramentas deve ser capaz de apresentar uma representação correta, não importa a escolha de configuração escolhida (dinamicamente!) pelo utilizador. Para dar um exemplo, se construímos as tangentes comuns a dois círculos, o usuário pode manipular os dados e obter configurações admitindo sucessivamente 4, 3, 2, 1 ou nenhuma solução. Efetuar uma construção correta assume, portanto, um caráter de programação; como em um algoritmo a ser executado por computador, o procedimento de construção escolhido deve ser capaz de retornar a saída correta sejam quais forem os dados de entrada admissíveis. Isto força o aluno a evitar escolhas que possam se tornar degeneradas: na construção acima ele deve evitar, por exemplo, especificar uma tangente como a reta passando por dois pontos que possam eventualmente coincidir.

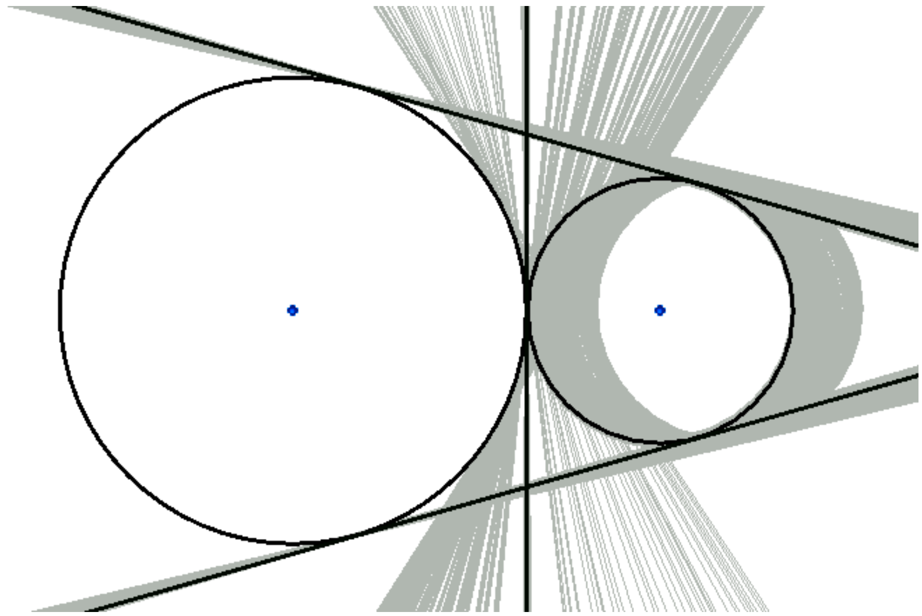


Figura 1: Uma construção corretamente realizada com o Tabulæ. Observe o rastro das configurações anteriores, admitindo 4 tangentes.

A caracterização de construções geométricas como algoritmos é observada por [Toussaint], referindo-se à segunda proposição de Euclides. O tipo de discussão, bem como a terminologia utilizada nesse artigo, têm se revelado úteis para orientar a análise das construções geométricas em geral, sob o ponto de vista de sua estabilidade (ou robustez) com respeito a condições iniciais. Este ponto de vista, aliado a um ambiente que facilita a livre manipulação destas condições iniciais, como é o caso do Tabulæ ou de outros ambientes de geometria dinâmica, tem grande potencial em cursos de geometria, e é sensível o interesse despertado nos nossos alunos por este tipo de discussão. O texto de Legendre fornece, tanto nas proposições quanto na coleção de construções básicas que contém, amplas oportunidades para este tipo de exploração.

Os materiais que estamos desenvolvendo serão oportunamente reunidos em um CD-ROM, que incluirá uma edição do texto integrada a um elenco de construções interativas, que substituem as figuras referidas nas demonstrações. Estas construções, que são na realidade programas escritos na linguagem Java, podem ser manipuladas pelo leitor, e modificadas arrastando com o mouse pontos previamente designados da figura. Dessa forma, uma ilustração assume, em um sentido bem determinado, um caráter "genérico", ausente no diagrama estático. Nesse trabalho, as construções planas estão sendo realizadas com o software Tabulæ, e as construções espaciais estão sendo concretizadas com o software Mangaba [Guimarães], também em fase de desenvolvimento por nosso grupo. Sobre as possíveis implicações disto para o ensino, estamos preparando um trabalho complementar a este, mas o leitor interessado pode consultar também [Chaachoua].

Um ensaio das possibilidades em um trabalho como este foi concretizado na orientação de um projeto de final de curso com [C. Salvado]. Nesse trabalho, as ilustrações foram programadas por ele, utilizando uma biblioteca idealizada por David Joyce, e disponível em http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/Geometry/Geometry.html. Recomendamos também ao leitor a edição realizada por Joyce dos Elementos de Euclides, que pode ser encontrada no endereço http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/ elements/elements.html.

Bibliografia:

VILELA BARBOSA, F. Elementos de Geometria, 1815, Lisboa.

BRADIS, V. M. et alii Lapses in Mathematical Reasoning, 1999, NY, Dover.

CHAACHOUA, A. Functions du dessin dans l´enseignement de la géométrie dans le espace..., 1997, Grenoble, IUJF. Tese de Doutorado.

Pe. MANOEL DE CAMPOS Elementos de Geometria Plana e Sólida, segundo a ordem de Euclides, 1735, Lisboa, Companhia de Jesus.

GONSETH, F. Les Fondements des Mathématiques, 1926, Paris, Blanchard (reimpresso em 1974).

GUIMARÃES, L. C. et alii Tabulæ, 2001, Rio de Janeiro, software de geometria dinâmica produzido e editado na UFRJ.

GUIMARÃES, L. C. et alii Tabulæ and Mangaba: Dynamical geometry with a distance twist; in Technology in Mathematics Teaching, Em: Borovcnik,M. and Kautschitsch, H. (eds.). Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, vol. 26. öbv & hpt, Vienna 2002.

HADAMARD, J Leçons de Géométrie, 1988, Paris, Gabay. Reimpressão da 13ª edição de 1947.

HEATH, T. L. Euclid, The Thirteen Books of The Elements, 1956, N. Y., Dover.

HILBERT, D: Foundations of Geometry, 1997, Open Court. (Tradução de P. Bernays, a partir da sétima edição alemã).

LOBACHEVSKI, N. The Theory of Parallels, 1914, Chicago, Open Court. (Tradução de G. Halstead da edição original alemã de 1840).

RODRIGUES, A. J. Geometria Descritiva (vols. 1 e 2) , 1940, Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico.

ROSENFELD, B. A. A History of Non-Euclidean Geometry, 1998, New York, Springer-Verlag. (Tradução de A. Schenitzer da edição russa de 1976).

SALVADO, C. D'A. Elementos de Geometria: uma visão da construção de sites educacionais, 2002, Rio de Janeiro, UFRJ, monografia de final de curso.

SCHUBRING, G. Analysis of Historical Textbooks in Mathematics, Lecture Notes, 1999, Rio de Janeiro, PUC . A ser publicado proximamente em português, pela editora da Unicamp.

SIMSON, R. The Elements of Euclid, viz. the first six books, together with the eleventh and twelfth, 1817, Glasgow.

TACQUET, A. Elementa Geometriae Planae et Solidae, 1654.

THURSTON, W. P. On Proof And Progress In Mathematics. Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 30, Number 2, April 1994, Páginas 161-177.

TODHUNTER, I. Euclid’s Elements, 1933, London, Dent & Sons. (Reedição do livro texto originalmente publicado em 1862.)

TOUSSAINT, G. T. "A new look at Euclid's second proposition," The Mathematical Intelligencer, vol. 15, No. 3, 1993, pp. 12-23.

WENTWORTH, G. A. e SMITH, D. Plane and Solid Geometry, 1938, Boston, Ginn Ed. Primeira edição em 1888.

CAPÍTULO 16

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 185:192.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01** © 2002, Editora IME-UERJ.

MATEMÁTICA DISCRETA EM SALA DE AULA

Samuel Jurkiewicz

Programa de Engenharia de Produção – COPPE/UFRJ
Departamento de Engenharia Industrial – EE/UFRJ
endereço eletrônico: jurki@pep.ufrj.br

Resumo *Os currículos de matemática, nos diversos níveis, foram forjados sob a influência da apropriação da matemática do contínuo pelos processos sócio-econômicos no período pós-revolução industrial. Entretanto, desde o final da segunda guerra mundial, o desenvolvimento de técnicas digitais de tratamento da informação têm possibilitado e impulsionado o uso de outros instrumentos matemáticos na sociedade e em particular nos sistemas educacionais. Nesse artigo discutimos a iminente introdução da algorítmica e da matemática discreta nos currículos de matemática em formação.*

Palavras-chave: *Matemática Discreta, Currículos em Matemática, Algorítmica.*

Abstract*: Mathematics curricula, in its several levels, were carved under influence of the social and economical processes appropriation of continuous mathematics in the post industrial revolution period. However, since the end of World War II, the development of digital techniques of data management permitted and pushed on the use of other mathematical subjects in the society and in particular in the educational systems. In this paper we discuss the imminent introduction of algorithmics and discrete mathematics in developing matemathics curricula.*

Key words: *Discret Mathematics, Mathemacital Curricula, Algorithmics.*

1. INTRODUÇÃO

Quando falamos de currículos e ensino, em particular do ensino da matemática, é fácil esquecer o quanto as formas contemporâneas de materialização desses dois objetos é recente. Nossa tendência é olhar para os currículos como fruto de longo amadurecimento e as modificações que porventura neles se façam necessárias como trabalho a ser elaborado sob justificativas estritas (e necessárias) e depois de exaustivo exame dos pressupostos de aprendizado e inter-relação escola-sociedade.

Se por um lado esta tendência é compreensível, é justo também perceber que a formação dos currículos atuais, em especial os de matemática, não se construíram de forma tão consciente. Eles refletem muito mais a evolução dos conceitos matemáticos e seu sucesso em fornecer à sociedade resultados práticos, isto é, soluções para problemas existentes e bases para desenvolvimento tecnológico e científico futuros.

À lenta evolução dos conceitos matemáticos, penosa e minuciosa por sua natureza, contrapõem-se as pressões econômicas e sociais exigindo aplicações e vulgarização de métodos. O processo de apropriação da ciência é mais sócio-econômico do que acadêmico o que é determinante para a forma e velocidade com que ele ocorre.

A escola, elementar, profissional, secundária e mesmo universitária, como a conhecemos, guarda os traços da evolução social, num primeiro momento pós-revolução industrial e num segundo momento, pós-segunda guerra, quando a ciência passa a fazer parte do programa estratégico das sociedades/países/conglomerados econômicos que almejem a hegemonia e controle de suas áreas de influência.

O parágrafo anterior, longe de nos distanciar do ambiente escolar, enfatiza a escola como ator persistente e importante dos cenários passados, presentes e futuros das modificações sociais. Um olhar, ingênuo que seja, sobre as atitudes do pós (segunda) guerra em países desenvolvidos, mostra o quanto a educação e a escola têm sido utilizadas como vetor estratégico. Não se trata aqui de emitir um juízo de valor quanto às qualidades intrínsecas dos modelos educacionais ou das vantagens (p. ex.) dos modelos franceses sobre os americanos ou vice-versa, mas de constatar que as sociedades que lograram maior desenvolvimento tecnológico e industrial (o que não é necessariamente uma qualidade) coincidem com aquelas que estabeleceram uma direção definida para seus sistemas educacionais, em particular no que toca ao ensino de ciências e, mais particularmente ainda, ao ensino de matemática.

Nada mais natural, portanto, do que tentar responder à questão: a que objetivos deve responder o ensino da matemática no século XXI ? Que tendências se apresentam como emergentes para este ensino ?

Apontamos algumas destas tendências observando características fundamentais de nossa forma de organizar a educação matemática, materializada nos currículos. Os currículos de matemática no ensino fundamental e secundário desenvolveram-se de forma seqüencial e cumulativa. Por seqüencial queremos significar que o percurso percorrido pelos alunos do início da escolaridade até o final do segundo grau reconstitui passo a passo o percurso matemático da humanidade até o século XVIII; por cumulativo assinalamos que o volume de conhecimentos que se supõe que esse aluno deva aprender aumentou à medida que a sociedade foi assimilando mais e mais conceitos e conteúdos em seus aspectos cotidianos, econômicos e sociais.

A característica cumulativa leva a uma já mais do que evidente fadiga do modelo curricular e impõe abordagens pedagógicas e didáticas qualitativamente diversas do que temos praticado; este, no entanto, não é o ponto que abordamos neste texto, embora reconhecendo sua importância e urgência. Por sua complexidade, esse aspecto mereceria discussão maior do que a que comporta este documento. Nos restringimos pois à questão seqüencial - que conteúdos estão sendo impostos pela sociedade.

2. Características Seqüenciais: o que Vem a Seguir?

A primeira característica pode agora ser mais detalhada; não só a seqüência de conhecimentos é mantida, como são privilegiados os aspectos que resultaram em aplicações, primeiro no âmbito científico e depois na vida sócio-econômica. Estamos nos referindo mais especificamente ao cálculo diferencial e integral.

Não se trata de vilipendiar o cálculo, mas de constatar que o seu sucesso influi decisivamente na formação de currículos. Mais ainda, esses currículos começam a se formar de forma organizada e planejada sob a égide deste sucesso. A ciência dos currículos, no que tange a matemática, não conheceu outra influência de peso além desta.

A seqüência números naturais – números inteiros – números racionais – números reais (e depois números complexos) aponta de forma decisiva para uma matemática do contínuo. A geometria euclidiana busca um retrato da natureza onde a continuidade é axiomática. A geometria analítica e o estudo de conjuntos e funções preparam o espírito dos estudantes para as ferramentas básicas da continuidade. O programa é claro, explícito e bem sucedido.

Nunca é demais reforçar que esse sucesso é merecido. A quantidade e qualidade dos resultados da matemática do contínuo possibilitaram ao mundo ser o que é hoje – independentemente da apreciação filosófica que tenhamos do progresso. Essa matemática soube responder, com notável eficiência, aos desafios impostos pela ciência dos séculos XIX e XX, e ainda vai nos oferecer muito mais. Na verdade, ela é também semente das circunstâncias sociais que produzirão os novos conteúdos. Cabe como dito, perguntar que conteúdos são esses e que circunstâncias apontam para eles.

Antes de abordar o tema, podemos observar que mesmo com o sucesso do cálculo, alguns "estranhos no ninho" já se impuseram. Nomearemos três: a análise combinatória, a probabilidade e estatística (mistos de matemática discreta e contínua) e a álgebra linear. Ressaltemos que pelo menos as duas últimas só começam a freqüentar os currículos de engenharia a partir dos anos 60. Em particular, a álgebra linear e as matrizes já preparam o caminho para as novas abordagens sócio-econômico-industriais, a saber, a era do tratamento digital das informações.

Evitamos aqui, com exagerado cuidado talvez, nomear os computadores. O motivo é que embora o computador (principalmente o computador pessoal) seja o ícone irrecusável dessa era, ele é a ferramenta, o veículo para teorias antigas como a geometria, e que, levadas a um refinamento extraordinário precederam e possibilitaram a sua construção.

Os algoritmos já existiam entre babilônios e gregos. O recurso a eles sempre acompanhou o desenvolvimento "nobre" da teoria matemática. As idéias de manuseio mecânico dos cálculos e desenvolvimentos lógicos é um sonho antigo e bastante tentado; ele se torna possível, entretanto, a partir de desenvolvimentos importantes da eletrônica digital (extremamente dependente da matemática do contínuo) mas antes ainda, do trabalho de teóricos como Von Neumann e Turing. Eles projetaram matemática e logicamente o computador antes que ele existisse, antes que a tecnologia para a sua construção existisse.

A algorítmica[1] é hoje uma ciência de primeira necessidade. Não podemos deixar ao a-caso o desenvolvimento de habilidades que já são claramente um fator de diferenciação cultural entre classes sociais, entre sociedades e que pode significar a diferença entre uma sociedade desenvolvida e uma comparável a uma sociedade da pedra lascada dos tempos modernos.

Não propomos a introdução de máquinas no jardim de infância (E.T.: o autor tem restrições ao uso indiscriminado de computadores em educação). Mas a algorítmica é parte da matemática e não um manual de uso de computadores. O pensamento algorítmico pode e deve ser introduzido de forma educacionalmente pertinente de maneira a fornecer às sociedades do século XXI, não programadores (embora também), mas cidadãos aptos a viver num mundo onde a cultura dos procedimentos seqüenciais se torna rapidamente um padrão.

Se a algorítmica é uma tendência não só clara como extremamente bem definida, uma outra tendência emerge, e com aspectos históricos e teóricos muito fortes: referimo-nos à matemática discreta.

Poderíamos argumentar que a matemática discreta precede a matemática do contínuo, mas não é este ponto que cabe reforçar. Na verdade, trataremos por matemática discreta àqueles conteúdos mais avançados, cujo desenvolvimento a distancia da citada evolução do cálculo. Curiosamente, essa evolução se dá praticamente a partir do mesmo momento, pelo menos em suas bases ainda menos desenvolvidas.

Citamos a Análise Combinatória e em seqüência a Probabilidade, e a Teoria dos Grafos (cuja data de nascimento é reputada como sendo 1736 – ano da solução do problema das pontes de Königsberg por Euler - ver, por exemplo, (Boaventura Netto)). Podemos ainda juntar a essas a Teoria das Matrizes.

Todos estes temas e conteúdos matemáticos são hoje alavancados pelas modernas abordagens de gestão, produção, planejamento e distribuição de produção. Essa pressão é fortemente localizada na solução de problemas logísticos da 2ª Guerra Mundial.

Concomitantemente, o desenvolvimento das máquinas digitais permitiu o uso extensivo de métodos discretos para modelar, simular e otimizar situações sociais que antes se configuravam como prescindíveis: tempo de produção, distribuição eficiente de insumos, aproveitamento ótimo de recursos, são alguns exemplos.

A condição primeira de migração de conteúdos para o currículo escolar, a saber, a pressão social, está mais do que amadurecida.

Uma segunda condição seria o consenso das áreas técnicas e científicas da sociedade. Embora para muitos setores destas áreas a matemática discreta permaneça (o trocadilho é inevitável) discreta, a expansão deste consenso parece irreversível. A título de exemplo, a

[1] Usaremos neste texto o termo “algorítmica” para designar a ciência que estuda a estrutura e desenvolvimento de algoritmos. Tal termo não existe (ainda, que saibamos) em português. Nos parece oportuna a sua introdução.

National Science Foundation dos Estados Unidos patrocina um programa de desenvolvimento curricular da matemática discreta junto à DIMACS (Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science) da ordem de dez milhões de dólares.

A terceira e mais crítica condição é o preparo do corpo docente. Neste aspecto, em termos nacionais e internacionais, a matemática discreta ainda não é parte do currículo de formação de professores, engenheiros e, para sermos diretos, da maior parte dos matemáticos. Um matemático pode se formar sem nunca ter tido um curso de teoria dos grafos ou de teoria da complexidade dos algoritmos.

A agenda de inclusão da matemática discreta seria, portanto, semelhante a de tantos conteúdos que foram sendo acrescentados e sedimentados nos currículos: a lenta e paulatina migração da necessidade social para a consagração da literatura didática. Mas se esse processo demorou séculos para cristalizar a seqüência consagrada da Álgebra e Geometria, a Álgebra Linear não precisou mais do que 20 anos (nos anos 80 poucos cursos de Engenharia nos Estados Unidos a incluiam como tema obrigatório). A expectativa da pressão em torno da matemática discreta já se configura como mais aguda.

Urge, portanto, que com respeito e cuidado, esses conteúdos passem a freqüentar os cursos de formação de professores de matemática.

3. Matemática Discreta em Sala de Aula

Se os argumentos até agora apresentados são pertinentes, outras características vêm corroborar quando se trata de inserir a matemática discreta em sala de aula: ela é uma ferramenta didático-pedagógica poderosa.

Ao longo do tempo cristalizou-se, notadamentente no que se refere à matemática, a tendência a uma pedagogia de "falsa construção de soluções próprias". Para isso contribuiu a uniformização dos currículos, o aviltamento da profissão de professor e a industrialização do segmento de material didático. Os livros didáticos de matemática (com as honrosas exceções de praxe) diferem hoje muito pouco uns dos outros, não só nos conteúdos como na forma de apresentação pedagógica: pequenos fragmentos de conteúdo são apresentados de forma estritamente propedêutica, seguidos de exercícios cuja resposta única resulta de um processo único e cuja solução se encontra nas últimas páginas.

Esses processos são coordenados e a uniformidade do livro tem a face, um pouco cruel, de minimizar o papel do professor no processo de aprendizagem. A contrapartida, que sentimos de forma insofismável, é o comportamento correspondente do corpo discente; os alunos procuram saber o que responder e não qual o significado de um problema, o que é uma solução e qual o valor da elaboração de um processo de obtenção e avaliação de uma (entre muitas) resposta.

Ressalve-se, é claro, que esse procedimento é muitas vezes contornado pela qualidade intrínseca de um professor e/ou de um grupo discente particular. Mas o processo social é claro e suas marcas na sociedade são visíveis – e não somente no Brasil.

Sem ser um remédio para todos os males, coisa que certamente não existe, os problemas combinatórios tem características que podem favorecer uma atitude diversa da atitude caracterizada acima. Por sua natureza enumerativa discreta, e sem abandonar características analíticas sempre desejáveis em um processo matemático, os problemas combinatórios :

- São de compreensão acessível.
- São abordáveis por processos algorítmicos.
- Nos casos exponenciais, embora tenham solução, esta é, em muitos casos, ainda computacionalmente inabordável.
- São largamente aplicados em situações de comunicação, transporte e alocação de recursos – temas tradicionalmente ausentes das aplicações clássicas do Cálculo Diferencial, mais voltadas para a ciência de laboratório.

A utilização desta classe de problemas para um estudo de novas abordagens dos conceitos de solução por alunos e professores pode portanto oferecer novos caminhos e alternativas para os impasses levantados no início deste parágrafo. Algumas experiências nesse sentido já foram realizadas, entre as quais destacamos [Casey] [Culbertson] [COMAP]. Entre várias experiências estruturadas, já funciona há 5 anos o DCI [DIMACS-DCI], que reúne anualmente professores secundários e pesquisadores dos para formação e capacitação em Teoria dos Grafos, com ênfase na educação.

4. CONCLUSÃO

Identificar tendências é necessário, mas não suficiente para que se criem condições internas à sala de aula. A introdução de tópicos de matemática discreta e algorítmica vem pouco a pouco sendo preconizada, de forma tímida, em alguns documentos de instâncias educacionais na Europa e Estados Unidos.

Desde 2002 vimos realizando oficinas no programa curricular em escolas do 2º grau do Rio de Janeiro (Escola Parque, Colégio Pedro II), em Universidades (curso de pedagogia da UERJ), e em eventos especiais (Bienal da SBM - BH e encontro do Projeto Fundão - UFRJ). A receptividade tem sido animadora - como seria de esperar de grupos manifestamente interessados em matemática - e o trabalho deve continuar e se expandir em 2003, inclusive com apoio da FAPERJ.

A agenda da inclusão da matemática discreta e da algorítmica é extensa, mas o que propomos neste artigo é que as condições sociais, históricas e econômicas conspiram para sua efetivação.

Referências:

BOAVENTURA NETTO, Grafos: Teoria, Modelos, Algorítmos, Editora Edgard Blucher Ltda.,2ª.ed., 2001

CULBERTSON, J., Colorfull Math, sítio Internet http://web.cs.ualberta.ca/~joe/Coloring/

COMAP, Consortium for Mathematics and its Applications, sítio na Internet, http://www.comap.com/

DIMACS-DCI, The DIMACS Connect Institute, sítio na Internet, http://dimacs.rutgers.edu/dci/

CASEY, N., MEGAMATH, sítio Internet, http://www.c3.lanl.gov/mega-math/

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 193:204.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

APPLETS JAVA, UM RECURSO VISUAL NO ENSINO INTERATIVO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Teresinha Fumi Kawasaki

Bolsista DTI-CNPq. Projeto ENIBAM
Depto. de Matemática ICEX -UFMG
endereço eletrônico: kawasaki@mat.ufmg.br

Resumo: *Este trabalho descreve um conjunto de applets Java (Calc.classes) desenvolvidos para serem utilizados na produção de material instrucional para a Web, como material suplementar no ensino/aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Cada applet foi desenhado para desenvolver atividades relacionadas a um único conceito fundamental do Cálculo, permitindo ao usuário manipular dados e parâmetros e, ao mesmo tempo, interagir com as representações visuais de um objeto matemático. Tais applets podem ser testados no sítio http://www.mat.ufmg.br/~protem/Calc/javaClasses/index.html.*

Palavras-chave: *Ensino/Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, Representação Gráfica de Funções,Applet Java, Internet.*

Abstract: *This paper describes a set of Java applets, the Calc.classes, developed to be used on instructional Web pages as interactive illustrations to support the teaching/learning of topics in Integral and Differential Calculus. Each applet was conceived to focus on activities related to a particular concept in Calculus allowing the user to manipulate data and parameters and, at the same time, interact with the visual representation of a mathematical object. These applets may be accessed and tested through the site http://www.mat.ufmg.br/~protem/Calc/javaClasses/index.html.*

Key words: *Teaching Learning of Calculus, Function Graphs, Java Applets, Internet*

1. INTRODUÇÃO

A utilização da Internet como ferramenta de apoio ao ensino/aprendizagem de conteúdos diversos tem aumentado significantemente nos últimos anos. Porém, é comum verificar que, para muitos, páginas *Web* nada mais são do que textos estáticos, compilados em uma tela de computador. O desenvolvimento da linguagem de programação Java, entre outras ferramentas, mudou de maneira significativa as faces das antigas páginas *Web*, permitindo ao usuário maior interatividade com as mesmas. Na linguagem Java, é possível criar aplicativos que podem ser visualizados pela Internet - os *applets* Java. Tais *applets* são executados localmente nas máquinas clientes e de forma independente de plataforma, desde que o usuário possua um *browser* habilitado para interpretar códigos em Java (e.g; Netscape e Internet Explorer).

Neste projeto, parte integrante do projeto ENIBAM/PROTEM (CNPq), foram desenvolvidos aplicativos e *applets* Java - *Calc.classes* - para serem utilizados como recurso visual e de animação em hipertextos de conteúdo matemático, em particular, Cálculo Diferencial e Integral. Estes aplicativos foram projetados de forma a possibilitar que o usuário analise soluções de questões específicas envolvendo conceitos básicos normalmente abordados nos cursos de Cálculo. Tais *applets* foram incorporados no sítio http://www.mat.ufmg.br/~protem/Calc/calculus.html - as páginas "Tópicos de Cálculo Diferencial e Integral" - compondo, desta maneira, material suplementar de apoio para os cursos de Cálculo oferecidos por este departamento. Este artigo apresenta uma breve descrição dos *applets*, de seus recursos e sua utilização.

2. CONCEPÇÃO

Cada *applet* foi desenhado de forma a abordar um tópico específico de Cálculo Diferencial e Integral. Desta maneira, estes *applets* formam um conjunto de aplicativos pequenos, leves e de fácil manipulação tanto para o usuário como para autores de hipertextos matemáticos. Esta concepção levou em consideração o fato de que muitos alunos iniciantes em *softwares* matemáticos e usuários inexperientes do computador podem ter seus problemas aumentados caso trabalhem desde o início com *softwares* sofisticados como *Maple* e/ou *Mathematica*.

Em sua maioria, estes aplicativos e *applets Java* permitem ao aluno mudar valores iniciais e parâmetros, e imediatamente, observar na interface gráfica as mudanças estabelecidas na representação gráfica do objeto matemático em questão. A interatividade possibilita o usuário analisar, de maneira rápida, as várias possibilidades de respostas para variantes de uma única questão. Muitos destes *applets* são configuráveis e, portanto, de uso múltiplo. Ou seja, o autor de páginas *Web* pode configurar o *applet* ao inserí-lo em seu arquivo *HTML*, fazendo pequenas mudanças de acordo com o uso desejado.

3. CONCEITOS E *APPLETS*

Vamos apresentar aqui uma descrição resumida dos *applets* e o potencial uso de cada ferramenta na abordagem dos conceitos de função, derivada e integral.

Os *applets Sketch*, *Tangente*, *Taylor* e *Área* utilizam os interpretadores matemáticos *cj-math.jar* e/ou *symjpack* gentilmente cedidos por, respectivamente, Patrik Lundin (ver http://www.javathings.com) e Jens-Uwe Dolinsky (ver http://www.mb.hs-wismar.de/Mitarbeiter/Pawletta/00Uwe/casE.html).

1. A função

Muitas são as dificuldades encontradas pelos alunos na compreensão do conceito de função. A literatura de pesquisa e nossa experiência docente mostram que raramente os alunos, em seu primeiro contato com o conceito, conseguem relacionar as diferentes representações de função - pares ordenados, diagramas, fórmulas, gráficos, etc – com a sua definição. Da representação gráfica de uma função, podemos extrair muitas informações sobre o seu comportamento ao longo do seu domínio: intervalos onde a função é crescente ou decrescente, máximos e mínimos locais, pontos de descontinuidade, concavidade e pontos de inflexão, etc. Muitos estudantes são capazes de extrair de um gráfico apenas informações pontuais sem perceber a utilidade da imagem visual para analisar tais aspectos qualitativos. A possibilidade de manipular os gráficos na tela do computador auxilia na visão holística do conceito contribuindo ainda para a construção do mesmo como um objeto matemático. Os *applets* descritos a seguir trabalham diferentes aspectos da representação gráfica de uma função real de uma variável.

A. Sketch

A noção de função como uma tabela e sua representação num sistema de coordenadas são aspectos básicos no trabalho com este conceito. *Sketch* foi projetado para possibilitar a visualização simultânea destas duas representações, contribuindo para o estabelecimento de relações entre as mesmas.

Dados dez pontos do plano real, *Sketch* (Figura 1) mostra a representação gráfica destes pontos dentro do sistema de coordenadas cartesianas retangulares. O usuário pode unir os pontos e verificar na tela o esboço de uma curva que contém tais pontos. O aluno pode alte-

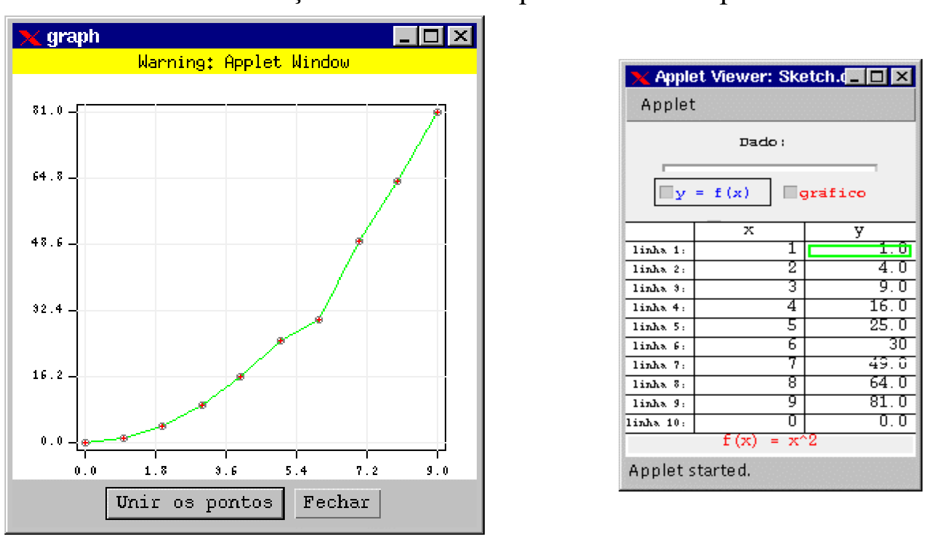


Figura 1: ***Sketch.class***

rar os valores numéricos de *(x,y)* e observar tais mudanças ocorrendo de maneira dinâmica na tela.

B. GraphF3

Ferramenta de autoria que pode ser utilizada para incluir, em uma página *Web*, representações gráficas de até quatro curvas e até dez pontos num mesmo sistema de coordenadas retangulares. *GraphF3* pode ser utilizado para ilustrar comparações entre gráficos de diferentes equações e pontos do plano real. Por exemplo, na Figura 2, *GraphF3* mostra a representação gráfica da função $f(x) = \begin{cases} sen(x) & se\ x < 0 \\ x & se\ x > 0 \\ 4 & se\ x = 0 \end{cases}$ dada por várias leis.

Ao arrastar o cursor pelo gráfico, é possível visualizar as coordenadas *(x,y)* para onde o cursor aponta. As funções, os respectivos campos de variação dos eixos das abscissas e das ordenadas, as cores das curvas e as coordenadas dos pontos representados no gráfico são parâmetros que podem ser definidos pelo autor ao configurar o *applet* no do arquivo *HTML* a ser inserido.

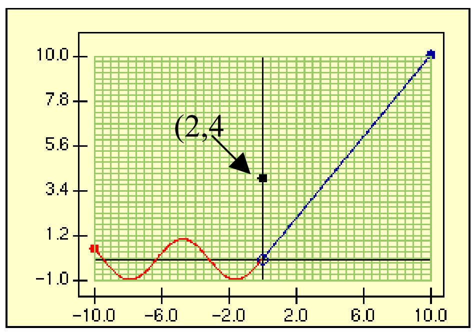


Figura 2: *GraphF3.class*

C. Linear

Este *applet* mostra a representação gráfica de uma equação linear no sistema de coordenadas cartesianas retangulares. Possibilita ao aluno explorar a tela e construir significados para os conceitos de coeficientes angular e linear da equação. Ao arrastar o cursor sobre a

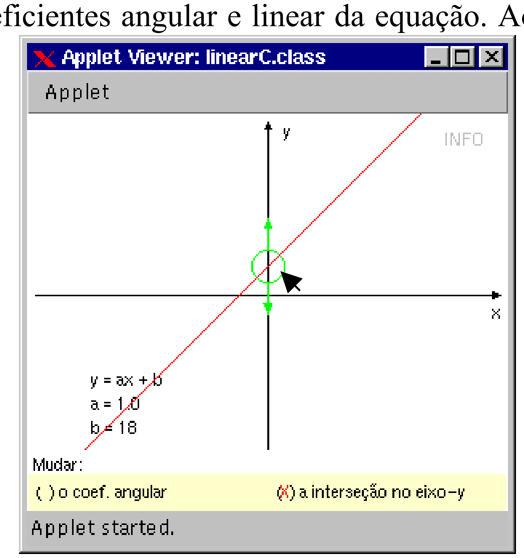


Figura 3: *linearC.class*

reta (ver Figura 3), o usuário pode (i) deslocar a reta verticalmente alterando o intercepto *y*, (ii) girar esta reta em torno do intercepto *y* alterando a inclinação da mesma e, ao mesmo tempo, (iii) verificar a mudança dos valores numéricos dos coeficientes ***a*** e ***b*** na equação ***ax* + *b*** representada na tela.

D. Poly

Dada a função polinomial $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, verificar as mudanças no gráfico de *f(x)* ao alterarmos o valor de um dos seus coeficientes. Esta questão pode ser explorada utilizando o *applet Poly.* Este aplicativo que foi desenvolvido para o estudo do comportamento de equações polinomiais de grau *n,* é composto por uma tela onde é possível visualizar o gráfico da equação polinomial em questão e por um painel de controle onde o aluno pode alterar os valores dos coeficientes $a_0, a_1,.., a_n$. Na tela, podemos observar, de maneira dinâmica e simultânea, as mudanças realizadas nos coeficientes. O grau *n* e os valores iniciais dos coeficientes são especificados pelo autor do hipertexto ao inserir o *applet* no arquivo *HTML*.

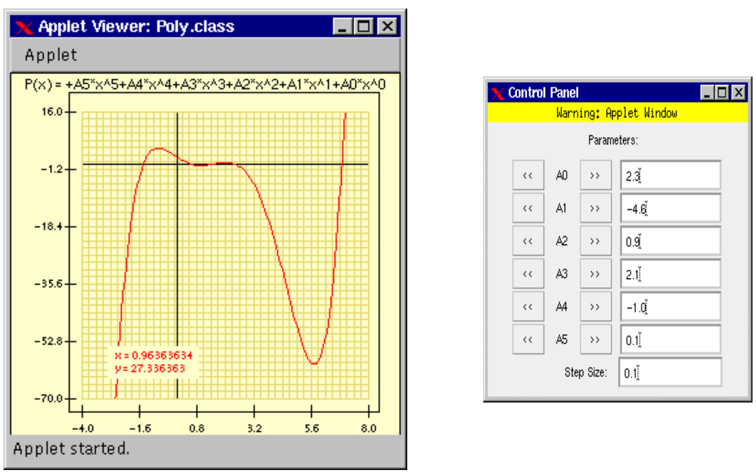


Figura 4: ***Poly.class***

E. Function Grapher

Este aplicativo mostra, em sua janela principal, gráficos de até três funções definidas pelo usuário. Aqui, o usuário observa as transformações nas representações gráficas ao alterar o campo de variação do eixo-*x*, do eixo-*y* e ao definir novas equações. A função *zoomIn* e a função *zoomOut*, respectivamente, amplia e reduz a imagem. Utilizando o *mouse*, o usuário pode ainda selecionar uma área retangular delimitando um novo campo de visualização do gráfico. As possibilidades de magnificar, reduzir, mudar o campo de visualização podem levar o aluno a questionar, refletir e conjecturar a partir da análise de uma única representação gráfica de uma função na tela.

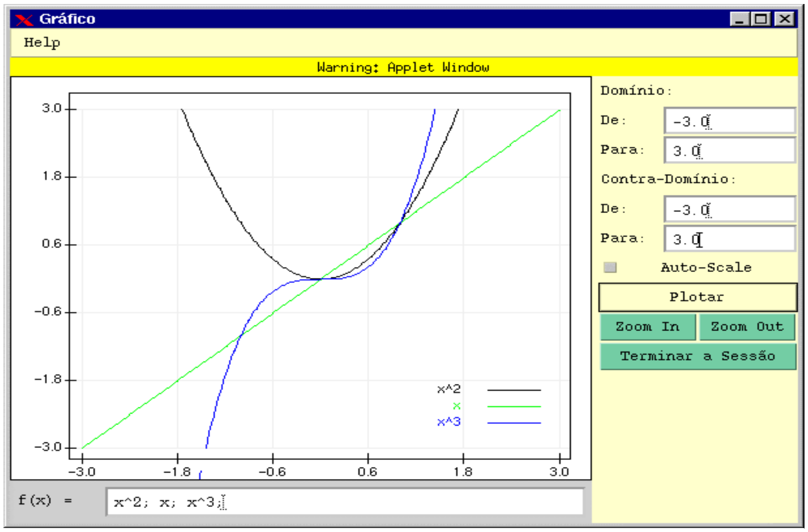


Figura 5: ***GraphF.class***

2. A derivada

O objetivo dos aplicativos descritos abaixo é dar ao estudante a possibilidade de explorar o conceito de derivada, definindo-o como inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função e possibilitando a exploração de seu significado como taxa de variação. Além disso, o *applet Derive* apresenta a derivada de uma função como uma nova função, *MaxMin* e *Taylor* auxiliam, respectivamente, na resolução de problemas de otimização e de aproximação de funções por polinômios.

A. Tangente

Este *applet* (Figura 6) ilustra de maneira dinâmica a definição da reta tangente a uma

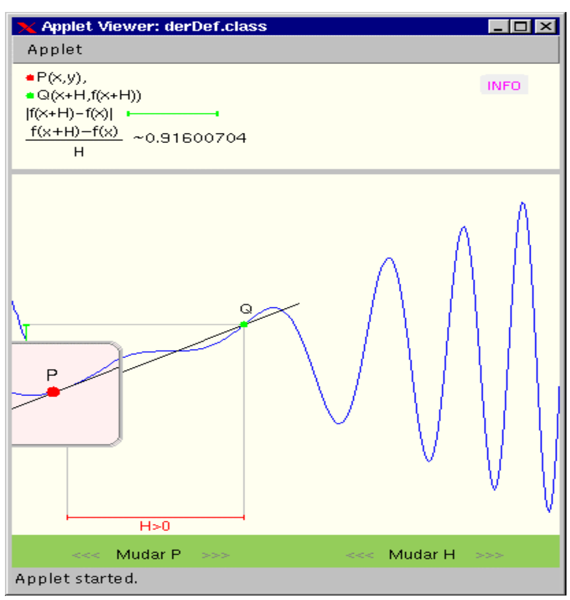


Figura 6: ***derDef.class***

dada curva *C,* em um ponto $P(x_i,f(x_i))$. Na janela principal, podemos observar uma reta secante à curva *C*, que passa pelos pontos $P(x_i,f(x_i))$ e $Q(x_i + h,F(x_i + h))$, com a inclinação desta reta determinada pela equação: $m_{PQ} = \dfrac{F(x_i+h)-F(x_i)}{h}$. Através de sucessivos incrementos do valor de h, aproximamos o ponto *Q* de *P* e conseqüentemente a reta secante da reta tangente no ponto P. Do painel de controle localizado na parte inferior do *applet*, é possível mudar os valores de *h* e deslocar o ponto *P(xi,F(xi))*. Na tela superior, verificamos os cálculos numéricos de m_{PQ}. Posicionando e clicando o cursor sobre um ponto da curva, o aluno aciona a função *zoom* que amplia a região em torno do ponto em até 10 vezes.

B. Derive

Este aplicativo apresenta a derivada de uma função como uma nova função. Permite ao usuário visualizar sua representação gráfica bem como de suas derivadas primeira e segun-

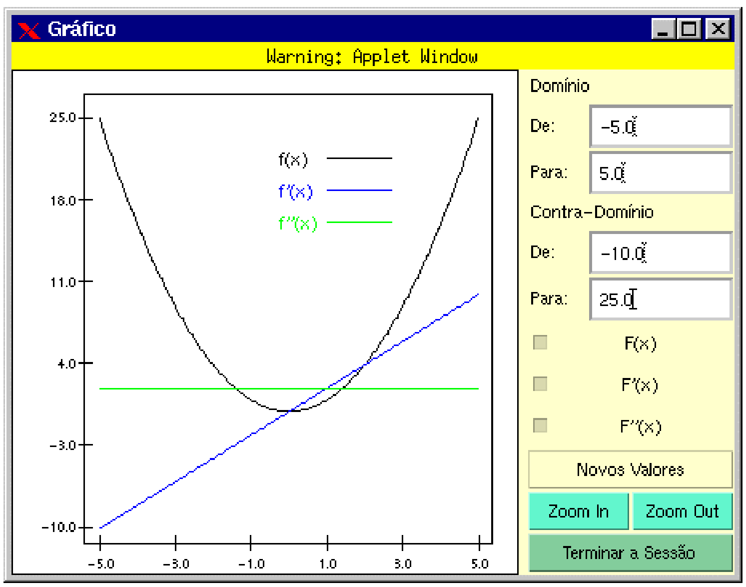


Figura 7: ***Derive.class***

da em um mesmo sistema de coordenadas. Inicialmente, ***Derive*** (Figura 7) faz o cálculo simbólico das derivadas primeira, segunda e terceira de uma função *f(x)* definida pelo usuário por uma única lei algébrica. Num segundo momento, esboça os gráficos de *f(x)*, *f'(x)* e *f''(x)* em uma tela, de maneira que seja possível observar visualmente as relações existentes entre uma função e suas derivadas primeira e segunda.

C. Max-Min

Série de *applets* que trata visual e interativamente de problemas de valores extremos de

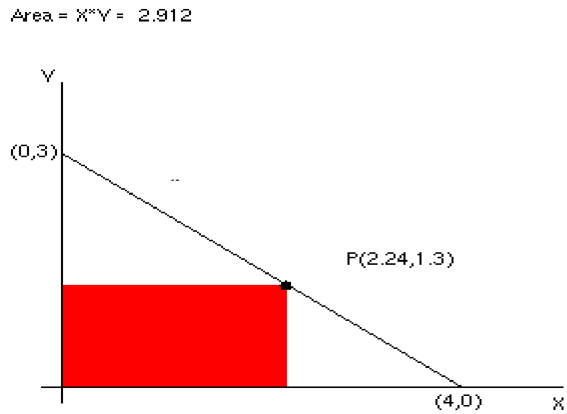


Figura 8: ***Max2.class***

uma função. Aqui, mostraremos como exemplo, apenas um dos problemas abordados nesta série de *applets*. Na Figura 8, vemos o *applet* *Max2* que ilustra a questão da maximização da área do retângulo formado pelos eixos *x* e *y* e com o vértice *P* sobre a reta *r* que passa pelos pontos fixos *(0,3)* e *(4,0)*. Ao deslizar o ponto *P* sobre a reta *r*, o usuário pode observar os valores numéricos da área calculados no topo deste *applet*.

D. Taylor

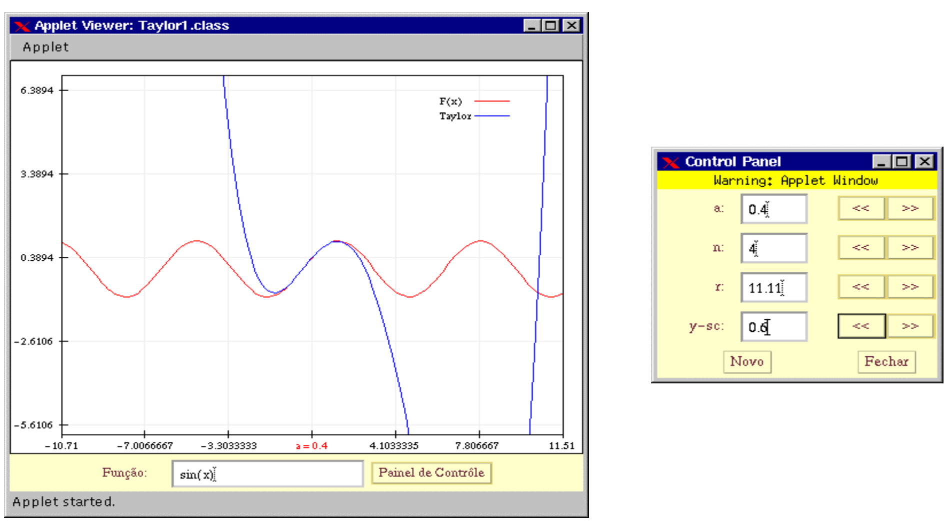


Figura 9: ***Taylor.class***

Este *applet* (Figura 9) mostra as representações gráficas, caso existam, dos polinômios de Taylor ($P_n(x)$) de grau n ($n \leq \mathbf{10}$) de uma função $F(x)$ em $x = a$. É possível acompanhar mudanças no gráfico de maneira dinâmica ao alterar os valores de a, n e r pelo painel de controle.

3. A Integral

O objetivo deste aplicativo é dar ao estudante um entendimento visual da integral definida como limite da soma de Riemman.

A. Área

Neste aplicativo é tratado o problema do cálculo da área de uma região *R* delimitada por uma curva *f(x)*, pelo eixo-x e pelas retas $x = x_i$ e $x = x_f$. Dada uma função contínua *f*, definida em um intervalo $[x_i, x_f]$, o *applet* ***Área*** (Figura 10) permite visualizar interativamente o processo de integração de Riemann (Darboux-Riemann). O *applet* inicia o proces-

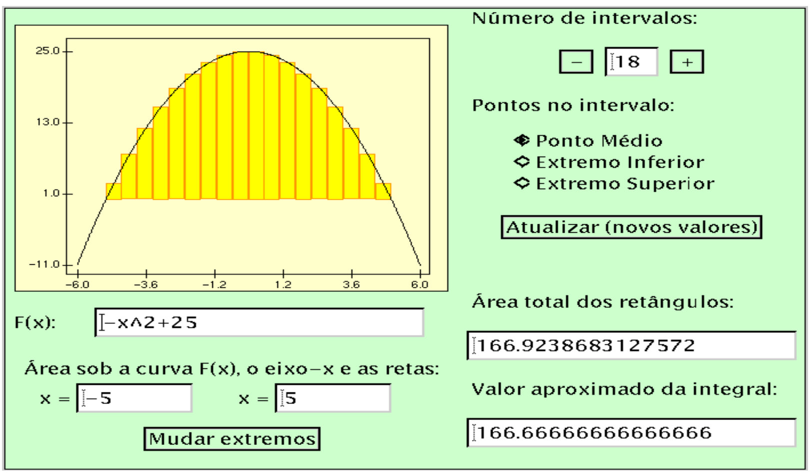


Figura 10: ***Area.class***

so com um número *n* (definido pelo usuário) de retângulos cobrindo a região *R*. Cada retângulo com largura $\frac{x_f - x_i}{n}$ e altura dada por um ponto da curva $(x_j, f(x_j))$, de modo que $(x_j, 0)$ seja um ponto do subintervalo que contém a base deste retângulo. Ao incrementarmos o valor de *n*, fazemos o número de retângulos aumentar, enquanto a largura de cada retângulo será reduzida. Graficamente, vemos a área coberta pelos retângulos aproximar-se da região *R*. Numericamente, vemos a soma das medidas das áreas dos retângulos aproximar-se de um valor que desejamos para representar a medida da área de *R*. Os retângulos podem ser inscritos, circunscritos, ou ainda, $(x_j, 0)$ pode ser o ponto médio da base do retângulo, de acordo com a escolha do usuário. Assim, possibilitamos ao aluno verificar a convergência da soma das medidas das áreas dos retângulos para um único valor, caso a medida da área de *R* seja finita.

4. Considerações Finais

Este trabalho apresenta Applets Java da série Calc.classes desenvolvidos pela autora e destinados ao ensino/aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Estas ferramentas acopladas às páginas "Tópicos de Cálculo Diferencial e Integral" constituem material de apoio suplementar ao curso regular presencial de Cálculo. Os applets estão disponíveis no sítio http://www.mat.ufmg.br/~protem/Calc/javaClasses.

Esta série de applets foi concebida como uma alternativa aos softwares matemáticos mais sofisticados. Softwares de manipulação simbólica tais como Mathematica e Maple têm capacidade de desenvolver algoritmos algébricos extremamente complexos e, também de representar graficamente tais operações. Porém, tais softwares não incorporam operações que respondam a ações e gestos naturais do usuário (Tall, 2002). Na série Calc.classes, tento sempre incorporar em seu desenho, operações computacionais que respondem naturalmente às ações e percepções humanas.

Este trabalho se encontra em constante reorganização e transformação. Esta é a dinâmica do hipertexto (Lévy, 1993). O objetivo será torná-lo sempre mais acessível (i.e., de fácil manipulação) tanto do ponto de vista do usuário como do autor de páginas Web. A reorganização do material deverá ocorrer, sempre que necessária, diante das experimentações, quando devem surgir sugestões, possíveis falhas no funcionamento do software e, principalmente, novas idéias. Neste momento, juntamente com os professores David Tall (Institute of Education/University of Warwick) e Marcia Maria Fusaro Pinto (DMat/UFMG), iniciamos um trabalho colaborativo (Pinto e Kawasaki, 2002), com o objetivo de adaptar alguns applets incorporando a abordagem que o Prof. D. Tall utilizou na idealização de seu software Graphic Calculus (Tall, 1986).

Agradecimentos: *Este trabalho não teria sido possível sem o apoio e colaboração das instituições e pessoas que listo a seguir: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Departamento de Matemática da Universidade do Texas/Austin, órgãos financiadores deste projeto; Marcia M. Fusaro Pinto, Evandro Gama de Oliveira, William S. Schelter, Maorong Zou, Patrik Lundin e Jens-Uwe Dolinsky. A todos gostaria de exprimir os meus agradecimentos e aqui reconhecer a sua importante contribuição.*

Referências:

LÉVY, P., As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da Informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

PINTO, M.F; KAWASAKI, T.F. Tecnologia e Ensino de Cálculo. In: I COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 2002, Rio de Janeiro.

TALL, D.O. Building and testing a cognitive approach to the Calculus using interactive computer graphics. Tese (Ph. D.), Institute of Education, The University of Warwick, 1986, Coventry, 1986. Trabalho não publicado.

TALL, D.O. Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. In: I COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 2002, Rio de Janeiro.

CAPÍTULO 18

IHTEM

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1,
págs: 205:212..
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01** © 2002, Editora IME-UERJ.

PROJETO EDUCOM/UFRJ: CENTRO PILOTO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

Maria Laura Mouzinho Leite Lopes

Professora Emérita
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Caixa Postal 68.530, Cep: 21945-970
endereço eletrônico: pfundao@dmm.im.ufrj.br

***Resumo**: Texto acerca da memória do Projeto EDUCOM do Programa Nacional de Informática Educativa (PRONINFE) da Secretaria Especial de Informática (SEI/MEC), na década de 1980, em especial do Experimento Piloto desenvolvido pelo EDUCOM/UFRJ.*

Palavras-chave: *Projeto EDUCOM, História do Ensino de Matemática.*

Na gestão do físico José Goldemberg no Ministério da Educação (MEC), sendo João Manoel de Souza Peil o Secretário Nacional de Educação Tecnológica (SENETEC) e Maria Cândida Moraes de Albuquerque Lima a Coordenadora do Programa Nacional de Informática Educativa (PRONINFE), foi criada a Secretaria Especial de Informática (SEI).

Uma das primeiras iniciativas da SEI, com a colaboração do MEC e do CNPq, foi a realização de dois seminários de Informática na Educação, o primeiro em Brasília, 1981 e o segundo em Salvador, 1982.

Resultou desses seminários o PROJETO EDUCOM, pelo comunicado SEI/SS nº 15/83 cujo objetivo era:

> **Promover, nas universidades brasileiras, pesquisa sobre a utilização da informática como instrumento auxiliar no processo ensino – aprendizagem.**

Das universidades que apresentaram propostas para o PROJETO EDUCOM foram selecionadas:

- UNICAMP
- **Universidades Federais:** do Rio de Janeiro (UFRJ), de Pernambuco (UFPe), de Minas Gerais (UFMG), do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Em 1983, as seguintes unidades da UFRJ:

- Faculdade de Educação (FE)
- Núcleo de Tecnologia Educacional para a Saúde (NUTES)
- Núcleo de Computação Eletrônico (NCE)

propuseram o PROJETO EDUCOM/UFRJ com a equipe de coordenação assim constituída:

Coordenação Geral: Lydinéia Gasman (FE)

Coordenação do Projeto de Desenvolvimento dos Coursewares: Nilma Santos Fontanive (NUTES)

Coordenação do Projeto Piloto: Riva Roitman (FE)

Em 5 de abril de 1984, o professor Nelson Maculan Filho, Reitor da UFRJ, criou o CENTRO PILOTO – EDUCOM / UFRJ pela portaria nº 246. Foi mantida a equipe de coordenação proponente do Projeto EDUCOM / UFRJ. Professores e Técnicos da UFRJ lotados nos Institutos de Biologia, Física, Matemática, Química, Filosofia e Ciências Sociais (IB, IF, IM, IQ, IFCS) no NUTES e no NCE foram convocados pela equipe de coordenação para atuar no CENTRO PILOTO.

A equipe do CENTRO, assim ampliada, resolveu desenvolver um EXPERIMENTO PILOTO – EDUCOM / UFRJ com os seguintes objetivos:

1. Introduzir o uso de computadores no ensino de Biologia, Física, Matemática e Química nas 3 séries do 2º grau do Colégio Estadual Souza Aguiar (CESA)
2. Pesquisar as conseqüências do impacto dessa inovação no ensino – aprendizagem, na administração e na comunidade escolar

Para a realização do EXPERIMENTO foram constituídas as equipes a fim de elaborar coursewares para as aulas de Biologia, Física, Matemática e Química.

Equipe de Conteúdo:

Instituto de Biologia

- Paulo César Bastos Arantes (Coordenador)
- Ana Cristina O Arantes
- Carlos Henrique Irajá Pereira
- Maria Leoniza Sanches Nunes

Instituto de Física

- Marcos da Fonseca Elia (Coordenador)
- Alda Lopes (SEE-RJ)
- Amaldo Borba Junior
- Flávia Rezende dos Santos Gomes
- Marly Lopez Athayde

Instituto de Matemática

- Maria Laura M. Leite Lopes (Coordenadora)
- Flávia Landin
- Marita Rosa Salgado Carpinteiro

Instituto de Química

- Ricardo Bicca de Alencastro (Coordenador)
- Eduardo M. Trindade
- João Otávio M A Lins
- João Ricardo F. Teixeira
- Paulo F. de Aguiar
- Paulo Romeno Z. Pinto
- Nadja Paraense dos Santos

Equipe de Computação (Nutes)
Analistas

- Luiz Fernando Magalhães Cordeiro (Criação do Software Educativo)
- Chantal Russi
- Jorge Fernando de Souza Massa
- Luiz Adauto Filizola C. Pessoa
- Nilce da Silva Corrêa

Programadores

- Andrea Sgorlon
- Claudia Maria Magalhães
- Claudia Paiva Campos
- Elaine Mendes Carneiro
- Elias Silva de Oliveira
- Hebe Durra
- João Alberto Ferreira de Oliveira
- Joisa de Souza Oliveira
- Luciane de Oliveira Freitas
- Marcelo Magalhães marques
- Marco Antônio Pontes

- Nahri Balesdent Moreano
- Ronaldo Joaquim da Silveira Lobão
- Sérgio Ribeiro da Luz Wanderley

Programadores Visuais

- Claudia Adriana Fontes Borges
- Edite Maria da Silva
- Elizabete Pereira Guedes
- Klauss Werner Funke
- Leila Maria da Silva
- Sandra Lopes Machado
- Sérgio de Sena Tavares

Foi um desafio muito grande para toda a equipe do EXPERIMENTO PILOTO do PROJETO EDUCOM / UFRJ a preparação dos coursewares.

Tínhamos consciência de dois fatos:

1. ser o computador um auxiliar do professor e não seu substituto,
2. não ser o courseware uma aula rotineira de cuspe e giz na tela do computador.

Costumo dizer que se o cinema foi, de início, teatro filmado e que, depois de muita experimentação, tornou-se arte independente, também a informática necessita de tempo de experiência para deixar de produzir aulas rotineiras na tela do computador.

O processo de elaboração de um courseware seguiu as seguintes etapas:

- análise do programa de ensino da disciplina dos professores do CESA
- escolha dos temas para tratamento computadorizado
- decisão pela equipe de conteúdo, com anuência de professores do CESA, do tratamento a ser dado a determinado tema
- criação pela equipe de conteúdo do desenho do courseware por meio de uma seqüência de telas escritas em folhas de papel
- entrega à equipe de computação do desenho do courseware
- análise pela equipe de computação para adequação às técnicas de programação e aos recursos computacionais disponíveis no microcomputador MSX
- crítica da proposta do courseware pelas equipes de conteúdo e de computação e os professores da FE e do CESA

- ajustes das modificações e negociações entre as equipes de conteúdo e computação
- aprovação do courseware e entrega ao Setor de Computação para programação
- teste pela equipe de professores para aprovação do courseware a fim de realização das cópias para os microcomputadores do CESA.

Esta descrição do processo de elaboração e finalização de um courseware mostra o longo caminho percorrido e a importância da integração das equipes de conteúdo e de computação nas diferentes etapas.

A participação de professores da FE e do CESA foi um fator enriquecedor no desenvolvimento do EXPERIMENTO. Evidencia, mais uma vez, que a EDUCAÇÃO deve ser percebida como uma ação coletiva para que a especificidade de cada um possa contribuir para a formação integral e harmônica do educando.

O testemunho de professores e alunos do CESA assegura que os courseware foram agentes motivadores para as aulas de Biologia, Física, Matemática e Química. A prova disso é terem sido posteriormente, editados em PC quando os MSX foram desativados.

As assessorias prestadas por membros da equipe ao Centro de Ciências do Estado do Rio de Janeiro (CECIERJ) e ao colégio Pedro II levaram o Projeto EDUCOM/UFRJ para fora dos muros da Universidade.

Pesquisas e estudos relacionados ao EXPERIMENTO – PILOTO originaram uma tese de Doutorado e sete dissertações de Mestrado, além de quatro trabalhos publicados em Revistas e Periódicos e 22 em Anais, Resumos ou Proceedings de Congressos e Encontros.

Havia intenção de ser publicado um trabalho denominado: EDUCOM / UFRJ: ONTEM E HOJE traçando a trajetória da atuação do Projeto no CENTRO – PILOTO de INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO no âmbito da UFRJ.

Para concluir pode-se dizer que foi uma experiência bem sucedida do CENTRO PILOTO DO PROJETO EDUCOM/UFRJ.

A produção de material inovador para as aulas de Biologia, Física, Matemática e Química foi enriquecedora para as equipes de conteúdo e computação. A participação de professores da Faculdade de Educação e do Colégio Estadual Souza Aguiar nas discussões com essas equips, possibilitou a integração de pessoas de visões diferentes porém todas direcionadas para encontrar meios a fim de melhorar a educação científica de nossos jovens.

Deve-se ter sempre presente que só se APRENDE FAZENDO. Por outro lado, mesmo para poder avaliar os coursewares existentes é fundamental ter presente as qualidades e as deficiências dos que foram produzidos pelas equipe do EDUCOM/UFRJ.

A partir de 1991 o Projeto EDUCOM / UFRJ foi transformado na COORDENAÇÃO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO SUPERIOR (CIES - EDUCOM) sendo seu Coordenador Executivo o Professor Marcos da Fonseca Elia.

Foi, então, proposto o PROJETO DE EDITORAÇÃO DOS COURSEWARES a ser desenvolvido pelo NUTES/UFRJ com a seguinte equipe:

- Maria Alice Sigaud Machado (Coordenação)
- Sílvio José Tavares Leite
- Claudia Adriana Fontes Borges
- Edite Maria da Silva
- Leila Maria da Silva
- Sandra Lopes Machado

Como produto desse Projeto de Editoração, além de 133 coursewares editados (em anexo) foi publicado o folheto: CURRICULO INOVADOR COM AUXÍLIO DO COMPUTADOR, PROJETO EDUCOM/UFRJ.

Colaboraram nessa publicação, na parte gráfica:

Composição de Capa e Arte Final:

- Ary Lino de Miranda
- Sérgio Murilo Tadeu

Digitação:

- Luiz Alípio de Oliveira Lima
- Elison Dias Durval

Fotolito e Impressão:

- Gráfica UFRJ – SR4

COURSEWARES PRODUZIDOS

MATEMÁTICA

1. Jogos
2. Números Inteiros
3. Números Racionais I
4. Números Racionais II
5. Números Irracionais
6. Números Reais
7. Coordenadas cartesianas
8. Coordenadas cartesianas no Espaço

9. Funções I
10. Funções II
11. Funções III
12. Funções do 1º Grau I
13. Funções Exponenciais
14. Relações Trigonométricas
15. Funções Trigonométricas
16. Progressão Aritmética
17. Progressão Geométrica
18. Matrizes
19. Sistemas Lineares I
20. Sistemas Lineares II
21. Princípio Multiplicativo
22. Arranjos
23. Permutação Circular
24. Probabilidade I
25. Probabilidade II

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1,
págs: 213:220..
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

SOBRE UM MÉTODO NÃO TRADICIONAL PARA APRENDER CÁLCULO

Iaci Malta

Departamento de Matemática
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
endereço eletrônico: malta@mat.puc-rio.br

Resumo: *Um método não tradicional para aprender matemática na universidade bem como as reflexões e experiências que levaram à sua formulação são apresentados. A partir da análise de algumas deficiências relacionadas com a dificuldade no aprendizado de matemática são elaborados pressupostos que norteiam a construção do método.*

Palavras-chave: *Autodidatismo, Explicador, Aprendizado Intelectual, Aprendizado Técnico, Auto-Avaliação.*

Abstract: *A new method of learning mathematics at the university is presented. It is also explained the considerations and experiences that led to its formulation. In particular, the assumptions that guide the construction of the method are set.*

Key words: *Self-Teaching, Explainer, Intellectual Learning, Technical Learning, Self-Evaluation.*

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste texto é descrever um método não tradicional para aprender matemática na universidade e apresentar as reflexões e experiências que me levaram a formulá-lo. Em particular, estou dizendo que sua elaboração não se baseou formalmente em teorias ou pesquisas acadêmicas da área de ensino/aprendizagem, mas sim em minhas experiências pessoais, como aluna e professora de matemática na universidade, nas avaliações que recebi de colegas, a respeito de suas experiências no ensino, assim como nas reflexões a que fui conduzida por essas vivências e informações. Este método já foi utilizado em Cálculo I (quatro semestres), Cálculo A (um semestre) e Introdução ao Cálculo (dois semestres) na PUC-Rio.

2. A OBSERVAÇÃO

Ao longo dos anos pude detectar (assim como meus colegas) várias deficiências que um número cada vez maior de alunos das disciplinas de cálculo do Ciclo Básico da área de Ciências Exatas apresentava, deficiências essas que poderiam ser responsáveis pelo seu insucesso (ou grande dificuldade) em aprender matemática. Peneirando essas observações bem como as avaliações que elas geravam, selecionei duas deficiências que me pareceram revelar não só possíveis falhas na forma com que nós, professores, tentávamos ensinar nossos alunos, mas também revelar o que pode ser responsável, em grande parte, pela dificuldade em aprender matemática. Eu me refiro as essas deficiências como *dependência de um explicador* e *incapacidade de expressar o próprio raciocínio*:

Dependência de um explicador: observei ao longo dos últimos anos que os alunos pouco, ou quase nada, desenvolviam sua capacidade de aprender diretamente de um texto, isto é, sem um explicador, sem alguém que traduza os conceitos e resultados em algum procedimento prático que lhes permita 'resolver' os exercícios. Em particular, observei que os alunos, em sua maioria, não sabiam e não aprendiam a 'ler matemática'. Em outras palavras, observei que havia, com raras exceções, muito pouco ou nenhum movimento na direção do autodidatismo.

Incapacidade de expressão do raciocínio: pude observar também, o pouco desenvolvimento da capacidade de expressão do raciocínio: os alunos chegam à resposta certa de um problema mas têm uma dificuldade extrema, senão total, de defender sua solução, isto é, não conseguem relacionar a seqüência de procedimentos que utilizaram com os conceitos e resultados que 'aprenderam'. Na minha opinião, isso revela que os alunos, em sua maioria, apenas aprendem um algoritmo (uma seqüência de procedimentos) associado a um certo tipo de problema, isto é, seu aprendizado se reduz ao nível técnico, não atingindo o nível do aprendizado intelectual. Uso *aprendizado intelectual* para me referir ao domínio do processo de geração de algoritmos a partir de informações dadas e resultados já conhecidos. Considero também que a incapacidade de expressar o raciocínio revela a incapacidade de organizar conscientemente o próprio raciocínio (observe que não estou me referindo à incapacidade de raciocinar mas sim à incapacidade de fazê-lo de forma organizada e consciente).

3. A REFLEXÃO

Refletindo sobre estes fatos, conclui que essas duas deficiências (quanto à capacidade de aprender por si e à capacidade de expressar seu raciocínio) podem ser, em grande parte, responsáveis pelo insucesso no processo de aprendizado de matemática. Mais ainda, conjecturei que essas duas deficiências estão intimamente relacionadas, no sentido de que a dificuldade de compreensão independente (sem explicador) leva à impossibilidade de desenvolvimento da capacidade de expressão do próprio raciocínio que, por sua vez, está relacionada com o aprendizado no nível intelectual.

Mais precisamente, comecei a pensar que, em matemática, a capacidade de expressar com clareza o raciocínio é, de uma certa forma, equivalente à capacidade de entender os resultados matemáticos (como já disse, estou convencida de que a dificuldade de expressão é um reflexo da dificuldade de raciocinar de forma organizada e consciente e, como em matemática tudo é abstrato, a organização de raciocínio é fundamental para sua compreensão). Se isso é o que ocorre, ajudando o aluno a desenvolver sua capacidade de expressão de raciocínio (o que me parece mais fácil) estaremos promovendo o desenvolvimento de sua capacidade de entendimento da matemática.

Um outro importante fato que observei é que, com muita freqüência, os alunos aprendiam a matéria após terem se submetido à prova que avaliava o respectivo aprendizado. Especificamente, observei que muitos alunos, que não haviam conseguido resolver as questões, entendiam os temas que estavam sendo abordados na prova quando da discussão das soluções das questões. Como a forma com que eu conduzia essa discussão, isto é, relacionar os procedimentos que levavam à resposta com a teoria estudada, era o mesmo recurso que normalmente usava quando expunha a matéria, conclui que a diferença de respostas (o não entendimento/entendimento do tema) se devia a uma mudança no estado do aluno. Daí, conjecturei que essa mudança era devido ao fato de que esses alunos haviam saído da posição passiva de serem ensinados para a posição ativa de aprenderem. Isto é, quando da sua preparação para a prova, esses alunos haviam tentado aprender por si (haviam começado a efetivamente pensar sobre o tema) e, durante a prova, haviam de fato raciocinado, tentando relacionar os dados da questão com as informações que tinham adquirido, o que permitia que aquilo que eu analisava agora fizesse realmente sentido para eles. É como se as peças de um quebra-cabeça agora pudessem se encaixar.

Essa reflexão me levou a considerar diretamente minha própria experiência como aluna na universidade. Tendo ingressado na Universidade de Brasília em 1970, cursei todas as disciplinas de física e de matemática do ciclo básico da área de ciências exatas pelo Sistema de Instrução Personalizada, método criado pelo psicólogo Fred S. Keller[1]. Nesse método não há aulas expositivas: o aluno deve ler o texto e discutir suas dúvidas com um monitor ou com o professor. Essa experiência me levou a concluir não só que aulas expositivas não são imprescindíveis para o ensino, mas também que o processo ‘leitura prévia-discussão de dúvidas’ é em si formativo.

4. A PROPOSTA

A partir dessas observações, reflexões e conjecturas, eu me coloquei a seguinte pergunta: o que eu posso fazer com essa experiência para tentar melhor exercer meu papel de professora na universidade? Essa pergunta me conduziu a outras perguntas cujas respostas (que

[1] Keller, F. S.: “Adeus, mestre”, *Ciência e cultura,* 24(3) 1972, 207-212. - artigo traduzido por M. I. Rocha e Silva, com permissão do autor e do *Journal of Applicated Behavior Analysis*, onde o artigo foi publicado originalmente no vol. 1, (1968), 79-86.

me dei) se constituíram em pressupostos nos quais se baseiam minha proposta de uma maneira não tradicional para aprender cálculo.

Os pressupostos

1. a principal tarefa de um professor é ajudar os alunos a aprenderem a aprender.
2. ensino na universidade deve promover o aprendizado tanto no nível técnico quanto no intelectual, sendo que apenas o aprendizado intelectual pode levar à transferência de processos de aquisição de conhecimentos. Em resumo, a universidade deve preparar o aluno para o auto-aprendizado, isto é, para que ele possa adquirir conhecimentos sem a intermediação de um explicador; deve transformar um aluno num autodidata.
3. em matemática, a capacidade de expressar com clareza o raciocínio é equivalente à capacidade de entender os resultados matemáticos. Em particular, o desenvolvimento da capacidade de expressão do próprio raciocínio promove o desenvolvimento da capacidade de compreensão em matemática.
4. desenvolvimento da capacidade de expressão está acoplado ao desenvolvimento da capacidade de leitura, isto é, da capacidade de aquisição de conhecimentos sem intermediários.
5. num processo de aprendizagem, um melhor resultado é alcançado se a posição passiva de "ser ensinado" (o professor ensina) é substituída pela posição ativa de "aprender".
6. Vários autores têm dado atenção ao tema aprender a aprender. Dentre eles, Novak e Gowin também discutem, em seu livro *Learning how to learn,* questòes relacionada ao desenvolvimento da capacidade de expressão.

5. A DESCRIÇÃO DO MÉTODO

O conteúdo do curso é dividido em unidades referidas a um texto específico. No primeiro dia de aula os alunos recebem um texto que expõe a forma como o curso se desenvolverá, bem como um cronograma que descreve as atividades de cada aula. Os alunos devem previamente estudar o texto e levar suas dúvidas para as aulas. No início de cada aula o professor deve não só esclarecer as dúvidas mas, a partir delas, levar os alunos a aprofundarem o entendimento dos conceitos e das técnicas contidos na unidade. Após essa etapa os alunos devem fazer um 'teste para auto-avaliação'. Este teste pode ser feito com consulta aos colegas, ao texto e/ou ao professor. Os alunos são orientados a não só buscarem a resposta às questões do teste, mas também, e principalmente, a justificarem suas respostas, isto é, a exporem com clareza o que os conduziu à resposta encontrada. Os alunos são informados de que essas justificativas serão exigidas nas provas. Após ser dado um tempo para a resolução do teste, o professor resolve o teste, chamando a atenção para os conceitos e técnicas utilizados. Após a resolução passa-se a uma nova fase de 'perguntas e respostas'.

A substituição, pela prévia leitura do texto, da aula expositiva tradicional, quando o primeiro contato do aluno com o conteúdo da aula se dá pela 'explicação do professor', tem por objetivos: (1) levar o aluno a desenvolver sua capacidade de aprender, de obter novos conhecimentos, de forma independente, isto é, não precisando de um explicador; (2) otimizar a atuação do professor: o aproveitamento das explicações do professor é muito maior quando o aluno já pensou, já tentou entender o tema em questão (isto pode ser visto pelas perguntas que são feitas, é como se o aluno, por um lado, 'soubesse perguntar' e, por outro, soubesse ouvir).

O teste para auto-avaliação tem por objetivos: (1) a auto-avaliação em si - é uma oportunidade que o aluno tem para saber se o que ele considera como tendo aprendido está em consonância com o que se espera (o professor) dele ou, simplesmente, para lembrá-lo de que ainda não estudou; (2) gerar perguntas - se, no início da aula não há perguntas, após os alunos tentarem fazer o teste, as perguntas surgem; (3) a necessidade de justificar as respostas conduz o aluno a um maior entendimento dos conceitos e ao desenvolvimento da capacidade de organizar e expor seu raciocínio e, como tudo se dá em aula, isto é, de forma interativa, o aluno tem a oportunidade de receber alguma ajuda do professor nesse processo.

6. ANÁLISE COMPARATIVA

Numa aula expositiva o aluno típico assume uma atitude totalmente passiva: é como se não raciocinasse, está preparado para apenas 'assimilar', como se tudo o que ouve fosse adentrar a sua mente e aí se estabelecer como conhecimento. Quando é levado a resolver um problema, ele começa a pensar, assumindo uma atitude ativa. Ao meu ver, neste estado ele está mais preparado para aprender. Analogamente, quando o aluno lê o texto, ele está numa atitude ativa, está 'pensando', raciocinando sobre o que está lendo (provavelmente não espera que o conhecimento se transfira do texto para sua mente). Em particular, sua postura em relação ao texto é totalmente diferente daquela em relação ao professor: ele não espera que o texto o ensine, mas sim sua expectativa é de aprender por meio dele. Eu diria que, numa aula expositiva, o professor (potencialmente) 'ensina', enquanto que numa aula interativa, o aluno (potencialmente) aprende. Acho que podemos resumir a diferença básica entre o método acima descrito e o método tradicional, pela substituição da ação 'ensinar', exercida pela professor, pela ação 'aprender', exercida pelo aluno.

A primeira objeção que se apresenta ao método proposto se configura no que eu chamaria de preconceito: *o aluno é incapaz de entender o texto* (e, portanto só pode aprender algo se nós, professores, explicamos para ele); *o aluno é definitivamente incapaz, de expressar seu raciocínio com clareza, de saber como chegou à solução de um problema* (e, portanto, não devemos cobrar isso do aluno, mas sim nos darmos por satisfeitos se o aluno chega a uma resposta correta, ou aproximadamente correta, mesmo que ele não tenha consciência do que aprendeu ou não). No que me diz respeito, acredito que o desafio é fundamental como motivação para que se possa alcançar algum objetivo: se tratarmos o aluno como uma criança ou como incapaz ele nos responderá como uma criança ou incapaz, esperando que alguém faça tudo por ele, nos responderá com a imobilidade; se o colocarmos frente a desafios adequados, juntamente com instrumental apropriado para vencê-los, estaremos impulsionando-o para o movimento, seu próprio movimento. Em particular, ao meu ver, a tarefa do professor deve ser não a de eliminar os desafios, mas sim a de selecionar aqueles que são adequados à realidade do aluno e criar, oferecer os instrumentos necessários para que os desafios sejam enfrentados e vencidos. Assim, a frase *o aluno é incapaz de entender o texto* deve ser substituída por *o aluno ainda não é capaz de ler um texto e, portanto, promover esse aprendizado (leitura de um texto) é um dos objetivos desta disciplina*. Analogamente, a frase *o aluno é definitivamente incapaz, de expressar seu raciocínio com clareza* deve ser substituída por *o aluno ainda não sabe expressar seu raciocínio com clareza e, portanto, promover o desenvolvimento dessa capacidade é um dos objetivos desta disciplina.*

7. Sobre as Experiências Realizadas

Não tenho ainda uma análise quantitativa comparativa dos resultados. Grosseiramente, quando comparamos o rendimento de turmas para as quais se adotou o método proposto com o de outras turmas, a variação do percentual de aprovação não se distingue de variações que observamos de um semestre para outro, quando as únicas mudanças são os alunos e o professor. Mas acho que podemos concluir que não é a aula expositiva que determina os resultados. Por outro lado, qualitativamente, os professores que participaram da aplicação desse método puderam notar, quando da correção das provas, um maior desenvolvimento na capacidade de expressão do conhecimento adquirido.

Todas as aplicações do método foram conduzidas por equipes de dois a cinco professores. Cada equipe tinha um coordenador responsável pela elaboração do curso. No total, doze professores participaram das experiências sendo que, com exceção de um, todos se mostraram favoráveis, com mais ou menos entusiasmo, dependendo da maior ou menor dificuldade de adaptação ao método. A dificuldade de adaptação do professor se relacionou sempre (fortemente no caso da exceção) com a convicção de que o aluno não vai aprender se o professor não ensinar (isto é, não der aulas expositivas). Esse fato nos levou a concluir que a postura do professor que vai participar de uma experiência em que se adote esse método é crucial para seu sucesso: só deve participar um professor que já esteja convencido de sua eficácia ou que esteja interessado em testar o método para poder avaliá-lo. Sem isso, como eu e meus colegas pudemos observar (e alguns a experimentar e reavaliar), o professor tem a tendência de substituir a etapa em que os alunos devem trazer suas dúvidas pela exposição de um resumo do conteúdo. A conseqüência dessa ação é imediata: os alunos param de ler o texto se colocando automaticamente na posição passiva daquele que é ensinado.

No que diz respeito à reação imediata dos alunos, a queixa básica é 'não entendo nada do que leio, quero aula expositiva (quero ser ensinado)', mas a aprovação ao teste para auto-avaliação é unânime. A tendência à posição de ser ensinado é extremamente forte e essa tendência, acredito eu, é reforçada pela dificuldade que os alunos sentem na leitura de um texto. Em minha opinião, pode-se dizer, não só, que os alunos chegam à universidade sem ainda ter aprendido a ler (no sentido de adquirir conhecimento pela leitura), mas também que eles resistem ao desenvolvimento dessa capacidade. Com esse método pretendemos, nas disciplinas iniciais, não só ajudá-los a aprender o conteúdo matemático, mas também a desenvolver sua capacidade de aprender pela leitura de um texto. Em geral, ao final do curso, a maioria reconhece que suas capacidades de entendimento, de leitura de um texto matemático e de organização e expressão do raciocínio foram desenvolvidas com esse trabalho.

Não desenvolvemos ainda nenhum processo (o que seria bastante desejável) para obter, dos alunos, avaliações posteriores, quando eles já tivessem tido oportunidade de comparar suas experiências (no aprendizado de matemática) com o método tradicional e com o método aqui descrito. Minha hipótese é que os ganhos que esse método proporciona aos alunos serão percebidos mais adiante, no desempenho nas disciplinas que serão cursadas posteriormente. Assim, penso que uma análise comparativa do desempenho posterior de alunos que foram e de alunos que não foram expostos a esse método é fundamental para a avaliação do método.

Referências:

KELLER, F. S.: *Adeus, mestre*, Ciência e cultura, 24(3) 1972, 207-12. (trad. M. I. Rocha e Silva de *Good-bye,Teacher!*, Journal of Applicated Behavior Analysis1, 1968, 79-86.)

NOVAK, J. D. e GOWIN, D. B.: *Aprender a aprender*, 2ed. Lisboa: Plátano, 1999.(trad. Carla Valadares - título original: *Learning how to learn*, Cambridge University Press, 1984.)

CAPÍTULO 20

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 221:241.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01** © 2002, Editora IME-UERJ.

PROBLEMAS CLÁSSICOS E SUA SOLUÇÃO POR DOBRADURAS ORIGAMI

Francisco Mattos[1]

Colégio Pedro II
Universidade Federal do Rio de Janeiro
endereço eletrônico: franciscorpm@ig.com.br

Resumo: *Este trabalho introduz um conjunto de axiomas formulados por Humiaki Huzita nos quais justifica a realização de construções geométricas por meio de dobraduras no papel ou construções Origami. Introduzimos o corpo dos números Origami como uma extensão do corpo dos números construídos com régua não marcada e compasso.O corpo dos números Origami coincide com os números obtidos das interseções de cônicas, isto é, o corpo obtido de números racionais por adição de raízes quadradas e cúbicas e seus conjugados. Apresentamos e resolvemos com construções Origami um conjunto de problemas elementares incluindo alguns que não podem ser resolvidos com régua não marcada e compasso, mas que podem ser resolvidos através das construções por dobraduras: Os Problemas Clássicos.*

Palavras chave: *dobraduras, construções geométricas, corpos numéricos, Origami.*

Abstract: *The present work introduces a set of axioms formulated by Humiaki Huzita which justify the realization of geometric constructions by means of paper folding or Origami constructions. We introduce the field of Origami numbers as an extension of the field of numbers constructed with straight edge and compass. This extension permits geometric constructions which are not possible with straight edge and compass. The field of Origami numbers coincides with the numbers obtained from intersections of conics, that is, the field obtained from the rational numbers by adjoining arbitrary square and cube roots and their conjugates. We present and solve with Origami constructions a set of elementary problems including some that cannot be solved with straight edge and compass, but that can be solved with paper folding constructions: The Classical Problems.*

Keywords: *paper folding, geometric constructions, field of numbers, Origami.*

[1]Rua Teixeira de Melo 50/803- Ipanema-RJ, cep: 22410 010

1. INTRODUÇÃO

O estudo do método Origami tem apresentado um maior interesse por parte de matemáticos que vêem a possibilidade de, através deste, estabelecerem alternativas possíveis que incorporem o uso da dobradura de papel ao ensino de conteúdos matemáticos. Procuramos estabelecer resultados interessantes através do uso da geometria das dobraduras de papel para soluções de problemas de construções geométricas, realizadas por métodos Origami[1].

Dentre esses problemas, podemos citar as soluções gerais de equações cúbicas, a procura por soluções para trissectar ângulos quaisquer, a procura por soluções que possibilitem a duplicação de um cubo. Os pontos construídos neste ambiente serão definidos como pertencentes ao plano complexo que, por sua vez, irão conter os chamados números Origami. Desta forma, verificaremos que a aplicação do método Origami poderá tornar possível apresentar, por meio de dobraduras, resoluções de problemas e conceitos teóricos de distintas áreas da matemática, contemplando desde a geometria à álgebra abstrata.

Estabeleceremos, a princípio, um conjunto de seis axiomas a partir dos quais obtemos o corpo das interseções de cônicas, a extensão do corpo dos racionais acrescidos das raízes quadradas arbitrárias, raízes cúbicas e seus conjugados. Tudo isso está intimamente ligado ao conjunto dos possíveis pontos construtíveis do plano, ou seja, aqueles que são acessíveis através dos instrumentos utilizados para construção.

Será de grande importância a conexão entre a dobradura Origami e as construções Euclideanas com régua e compasso, e sua extensão com régua marcada e compasso.

2. PROBLEMAS CLÁSSICOS: ORIGEM E ASPECTOS HISTÓRICOS

A duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo qualquer são dois problemas considerados clássicos da matemática grega que, juntamente com a quadratura do círculo, tiveram extrema importância para o desenvolvimento da geometria.

Duplicação do cubo

Existem duas versões sobre a origem desse problema. A primeira, quem nos apresenta é *Theon de Smyrna*, citando um trabalho feito por *Eratosthenes*:

> "Eratosthenes, em seu trabalho intitulado Platonicus, relata que, quando o deus disse para os Delianos através de um oráculo que, para livrar-se de uma praga, eles deveriam construir um altar igual ao dobro daquele existente, os artesãos ficaram altamente perplexos com suas tentativas para descobrir como um sólido poderia ser o dobro de um sólido similar; eles então foram perguntar a Platão sobre a solução, e ele respondeu que o oráculo queria dizer que o deus não desejava um

[1] Utilizaremos a formulação axiomática feita pelo matemático ítalo-japonês Humiaki Huzita, que a apresentou na Primeira Conferência Internacional sobre Origami na Educação e Terapias (COET91) [HH], sendo hoje o mais completo conjunto de axiomas que realizam as construções por dobraduras.

altar com o dobro da medida, mas que ele gostaria de, estabelecendo esta tarefa, envergonhar os Gregos por não darem a devida atenção à matemática e pelo seu desprezo por geometria" [Crhist]

A praga relatada realmente foi um acontecimento relevante na história de Athenas e cerca de um quarto da população morreu por causa dela. [Crhist] Este fato aconteceu por volta de 430 A.C. Então, se confiarmos na veracidade deste relato, podemos considerar esta data, com razoável precisão, para o aparecimento do problema de duplicação do cubo. Isto é também consistente com uma das primeiras contribuições feitas para a solução do problema por *Hippocrates*.

Hippocrates mostrou que um cubo pode ser dobrado se duas médias proporcionais podem ser determinadas entre um número e seu dobro. Isto teve uma grande influência sobre as tentativas para duplicar o cubo e todos os esforços posteriores foram direcionados para os problemas de médias proporcionais.

O primeiro grande passo no problema de duplicação do cubo foi dado, como já mencionado, por *Hippocrates*, não muito depois do problema ter surgido. Ele reduziu o problema de encontrar um cubo cuja razão em relação a um cubo dado era o dobro ao seguinte problema: sendo dados dois segmentos, encontrar duas médias proporcionais entre eles. O moderno entendimento de razão nos faz concluir que ambas as formulações são equivalentes, isto é, dados `a`,`b`, encontrar `x`,`y`, tais que:

$$a/x = x/y = y/b,$$
$$a^3/x^3 = (a/x)^3 = (a/x)(x/y)(y/b) = a/b$$

Embora muitos diferentes métodos tenham sido inventados para resolver o problema da duplicação de um cubo, e grandes descobertas e avanços tenham ocorrido por conta desta procura, na verdade a grande busca feita pelos antigos gregos era por uma solução utilizando apenas uma construção por régua e compasso. Hoje sabemos que essa solução nunca foi encontrada pois é realmente impossível de ser realizada [FM]. Por outro lado os antigos gregos não possuiam instrumentais matemáticos suficientemente desenvolvidos que lhes proporcionassem a prova da impossibilidade da construção somente por régua e compasso.

A prova da impossibilidade da construção por régua não marcada e compasso esperou pelos matemáticos até o século XIX. O argumento final foi colocado por *Pierre Wantzel* [FM], em 1837, quando publicou sua prova para um dos mais famosos problemas de todos os tempos no **Liouville's Journal**..

Trissectando um ângulo

Existem inúmeros motivos por que o problema de trissectar um ângulo qualquer difere dos outros dois problemas clássicos Gregos. Primeiramente, ele não possui nenhuma história acerca de seu aparecimento ou de como foi primeiramente estudado. Outro aspecto fundamental é o fato de existirem certos ângulos que podem ser trissectados por régua não marcada e compasso, enquanto os outros dois problemas clássicos não permitem nenhum exemplo de cubo duplicável ou círculo que possua quadratura conhecida através de uma construção que utiliza somente régua não marcada e compasso.

Pappus, em sua **Mathematical Collection**, escreve:

> "Podemos dizer que existem três tipos de problemas em geometria: os problemas \`planos', os \`sólidos' e os \`lineares'. Aqueles que podem ser resolvidos por linha reta e círculos são chamados problemas \`planos'(...). Aqueles problemas que são resolvidos por uso de uma ou mais seções do cone são chamados problemas \`sólidos'. Para estes é necessáris uma construção para usarmos as superfícies das figuras sólidas, isto é, cones. Existe ainda um terceiro tipo, que são os chamados problemas lineares. Para estes casos, as construções são de outras curvas diferentes das já mencionadas, curvas tendo uma origem mais variada e surgindo das supefícies mais irregulares e de movimentos complexos. (...). Como os problemas diferem deste modo, os primeiros geômetras não o sabiam resolver o problema sobre ângulo supra citado, pois este era por natureza sólido; por eles não terem ainda familiaridade com com as seções do cone, eles não sabiam como fazer. Mais tarde, no entanto, eles trissectaram o ângulo por meio das cônicas (...) [C-rhist]".

Os antigos Gregos poderiam ter desejado dividir um ângulo numa razão qualquer, pois assim seria possível a construção de polígonos regulares com qualquer número de lados. A construção de polígonos regulares com régua e compasso foi certamente um dos maiores objetivos dos matemáticos Gregos e nenhum outro polígono foi descoberto até a descoberta de *Gauss* de que um polígono de 17 lados poderia ser construído por régua e compasso.

Embora seja difícil dar uma data precisão de quando o problema da trissecção de um ângulo tenha aparecido primeiro, sabemos que *Hipócrates* estudou o problema, o que nos remete ao período entre 470A.C. e 410A.C., que foi o período de vida de *Hipócrate*s.

Como já mencionamos, foi *Pierre Wantzel* quem, em 1837, publicou a prova da impossibilidade da trissecção de um ângulo por régua não marcada e compasso, no **Liouville's Journal**.

3. CONSTRUÇÕES POR DOBRADURAS: AXIOMAS E PROCEDIMENTOS

Definição: Um número α é dito construtível se, através de procedimentos baseados em uma geometria, podemos construir um segmento de reta de comprimento α. Se temos as construções Euclideanas tradicionais, α será construtível apenas se o segmento pode ser obtido com uso de régua e compasso. Se temos a geometria Origami, α será construtível apenas se o segmento pode ser obtido com uso de dobraduras no papel**.**

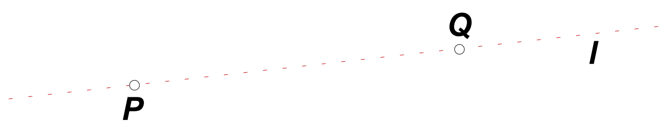
Os procedimentos referentes às construções Origami utilizando as dobraduras no papel tornam-se possíveis devido a um conjunto de axiomas, estruturados de modo a possibilitar as construções por dobraduras. Partimos de um conjunto menor de axiomas, e, ao adicionarmos cada novo axioma a um colocado anteriormente, isto implicará em novas construções geométricas que estarão relacionadas com o corpo algébrico envolvido, possibilitando assim estender o corpo anterior. Essas construções serão realizadas a partir do novo conjunto de números construtíveis [RA] formado pelo conjunto estendido.

Os axiomas estarão colocados obedecendo a uma sequência que começa com o corpo que definiremos como o dos números *Thalianos*, prosseguindo com os corpos dos números Pitagóricos, Euclideanos, até construirmos o corpo dos números Origami, obtidos nesta sequência por adição dos referidos axiomas. Assim, cada conjunto de números é obtido através dos axiomas que são acrescidos ao conjunto de axiomas já existentes. Procuramos, assim, descrever a relação existente entre a teoria algébrica que envolve a extensão de corpos e a geometria elementar.

4. AXIOMAS DE HUZITA PARA CONSTRUÇÕES POR DOBRADURAS

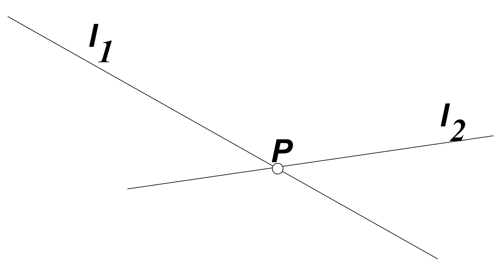
O conjunto de axiomas que segue permite-nos realizar as construções por dobraduras:

Axioma 1 : A reta l unindo dois pontos construtíveis por dobradura, **P** e **Q**, é uma reta construtível.



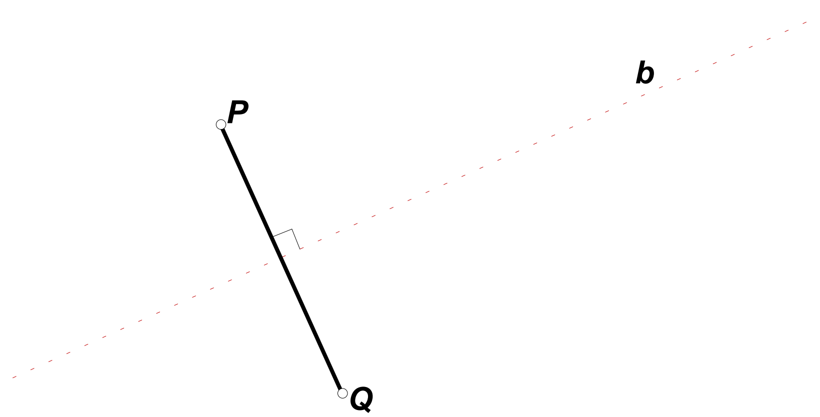
Axioma 1

Axioma 2 : O ponto **P** de interseção entre duas retas construtíveis l_1 e l_2 é um ponto construtível.



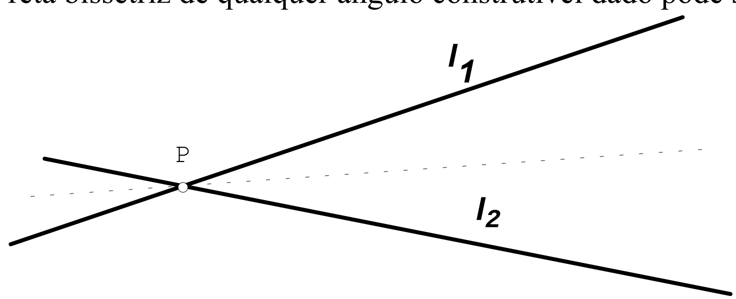
Axioma 2

Axioma 3: O bissetor perpendicular **b** do segmento que une dois pontos construtíveis, **P** e **Q**, é uma reta construtível (mediatriz).



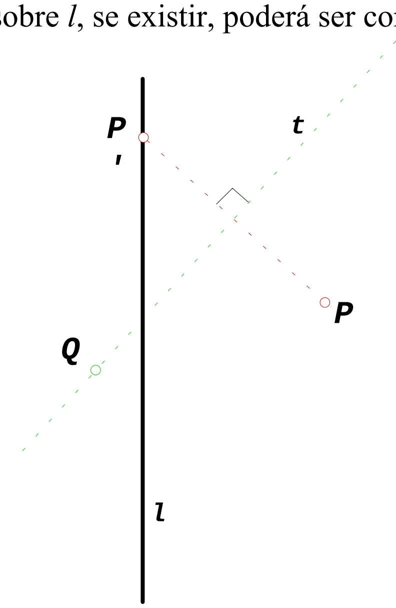
Axioma 3

Axioma 4: A reta bissetriz de qualquer ângulo construtível dado pode ser construída.



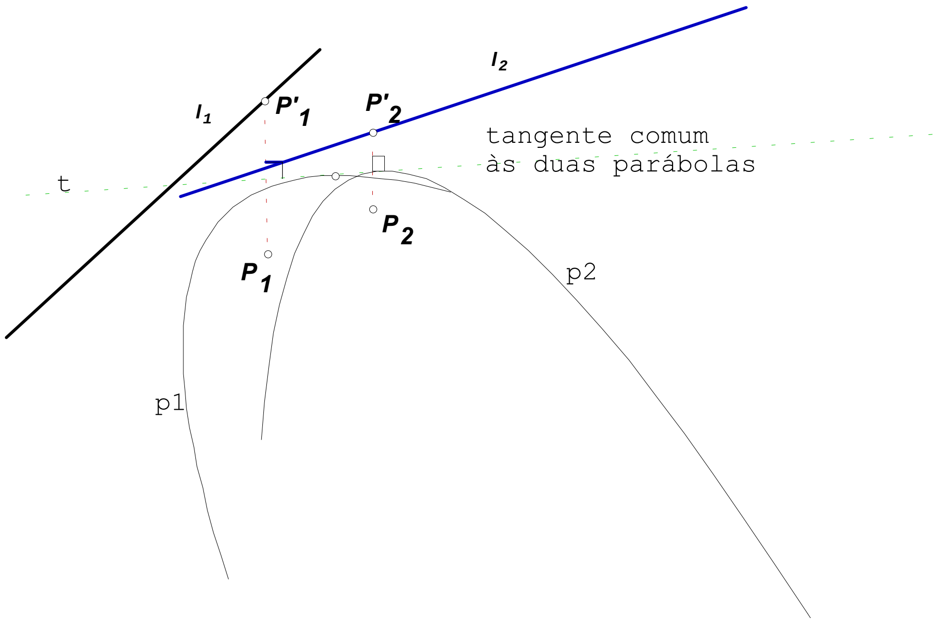
Axioma 4

Axioma 5: Dada uma reta construída *l*, e os pontos construídos **P** e **Q**, a reta que passa através de **Q**, refletindo **P** sobre *l*, se existir, poderá ser construída.



Axioma 5

Axioma 6: Dadas as retas construídas l_1 e l_2 , e os pontos construídos P_1 e P_2 , então a reta *t*, que reflete simultaneamente P_1 sobre l_1 e P_2 sobre l_2, se existir, poderá ser construída.



Axioma 6

5. Construções Geométricas e Corpos

Os axiomas (**1**), (**2**) e (**3**) são aqueles que determinam o que chamamos de construções *Thalianas*, não sendo muito fortes no conjunto total de axiomas, pois realizam somente construções de perpendiculares a segmentos conhecidos, formando mediatrizes, além da construção de retas e pontos. Este conjunto de três axiomas determina uma estrutura do corpo que denominamos *Números Thalianos*[1].

Com a introdução do axioma (**4**), que permite a bissecção de ângulos, completando num certo sentido o que poderíamos chamar de primeiro nível de axiomas, teremos construído os números Pitagóricos. Estaremos observando a relação existente entre esse conjunto de números com os números algébricos totalmente reais, em que fica estabelecida uma relação com as construções que utilizam a régua e escala unitária.

O axioma (**5**) já permite que promovamos uma ampliação em nossas construções, tornando possíveis as construções E*uclideanas*, sem para isso fazer uso do compasso mas utilizando a construção da envoltória de tangentes à parábola.

O axioma (**6**) permite as construções de raízes cúbicas, resolvendo o problema da duplicação do cubo, da mesma forma que os gregos o fizeram, usando para tal a interseção de parábolas. Ele ainda admite a construção de tangentes a duas parábolas como uma construção nova. Sua inclusão é forte o suficiente para permitir as soluções de equações de terceiro ou quarto grau, utilizando a idéia de interseção de cônicas.

Com o conjunto dos seis axiomas, (**1**) a (**6**), formamos precisamente o corpo dos números *Origami*, obtido por interseção de cônicas e da extensão dos racionais por acréscimos

[1] Como definido em [FM], cap. 4, pág. 84.

de raízes quadradas arbitrárias, e também raízes cúbicas e conjugadas, utilizando para tal os conceitos teóricos da geometria algébrica elementar, a teoria do feixe de cônicas e formas quadráticas.

6. CONSTRUÇÕES CÔNICAS E NÚMEROS ORIGAMI

Tangentes simultâneas

A construção descrita no axioma (6), realiza uma dobra no papel que determina a reta que é tangente simultaneamente às duas parábolas, das quais conhecemos focos e diretrizes. Esse processo pode não ser sempre perfeitamente realizável por procedimentos práticos, bastando para tal que a reta procurada não exista necessariamente, ou seja, não esteja presente fisicamente no plano Origami. Este seria o caso de retas no infinito, que não podemos representar por dobraduras. [CR]

Como exemplo, vamos estudar a solução real para as seguintes cônicas (parábolas):

$$\left(y-\frac{1}{2}a\right)^2=2bx,\ \ y=\frac{1}{2}x^2.$$

Essas cônicas possuem focos e diretrizes que podem ser construídos usando operações envolvendo a e b. Uma tangente simultânea às duas parábolas é uma reta com inclinação m tangenciando essas curvas nos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1), respectivamente. É importante observar que uma reta é construtível, se e somente se, sua inclinação é ou um número do corpo, ou ∞. Aplicando-o às equações dadas, podemos escrever:

$$(x_0,y_0)\in\left(y-\frac{1}{2}a\right)^2=2bx,\ \text{e}\quad (x_1,y_1)\in y=\frac{1}{2}x^2.$$

Diferenciando implicitamente cada equação, para determinarmos a inclinação da tangente, e escrevendo as coordenadas dos pontos em função de m, b, a, podemos definir a inclinação m como solução da seguinte equação:

$$m^4+mb+am^2=0\Rightarrow m(m^3+b+am)=0$$

$$\Rightarrow m=0\ ou\ m^3+b+am=0$$

O problema de duplicação de um cubo foi resolvido por *Menaechmus* utilizando esse argumento, apesar de não ter conhecimento das técnicas de geometria analítica como as conhecemos hoje. Isso pode ser feito de modo simples, se utilizarmos as parábolas descritas acima, resolvendo a equação: $m^3-2=0$.

Esse procedimento nos permite mostrar que podemos também trissectar ângulos construídos, através da resolução de uma equação cúbica através de uma satisfatória substituição de variáveis, resolvendo equações como a que segue, conhecida como equação de *Chebyshev*[1].

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta$$

$$para\ x = \cos\theta \Rightarrow 4x^3 - 3x = \cos 3\theta.$$

As raízes de equações complexas cúbicas, com coeficientes construtíveis, podem ser construídas. Isto pode ser visto pelas soluções explicitadas, a partir das fórrmulas de *Cardano*, para equações cúbicas que envolvem somente raízes quadradas e cúbicas [IH]. Em relação às resoluções de equações cúbicas $x^3+mx=n$, sabe-se que foi *del Ferro* quem primeiro as resolveu algebricamente, e *Tartaglia* quem adquiriu fama em disputas matemáticas comuns à época, resolvendo raízes cúbicas. *Tartaglia* teria mantido em segredo um método por ele descoberto, apesar de insistentes tentativas de *Cardano* para publicá-lo.

Desde que podemos bissectar e trissectar ângulos construídos, e tomar raízes quadradas e cúbicas reais, com a adição do axioma (**6**), as raízes cúbicas de um número complexo com coeficientes no conjunto dos números Origami, $\mathcal{O}$.

Pontos cônicos[2] construtíveis

Definição: Os pontos cônicos construtíveis são aqueles pertencentes ao conjunto dos números complexos, e que são obtidos das interseções de retas ou cônicas com coeficientes no subcorpo dos números complexos origami reais $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$, cujos pontos podem ser construídos pelo uso dos axiomas (**1**) a (**6**).

Esta definição é equivalente à utilizada por *Videla* [CV], onde ele utiliza construtibilidade de diretrizes, excentricidade, focos, raios, etc., como condições de construtibilidade, a partir de uma caracterização algébrica para o conjunto dos pontos cônicos construtíveis.

7. NÚMEROS ORIGAMI HARMÔNICOS

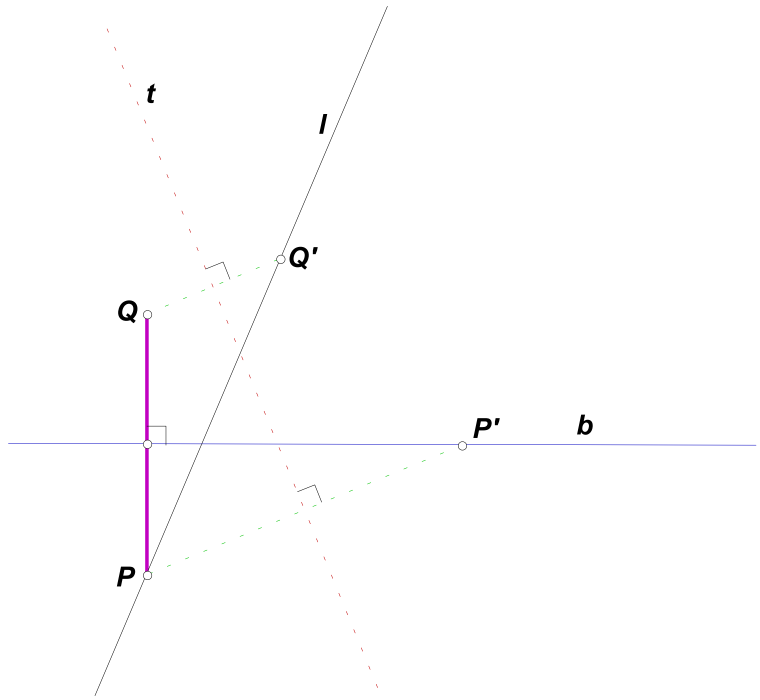
Considerado como um caso especial do axioma (**6**), introduzimos o axioma (**T**):

Axioma (T): Dados os pontos construídos **P** e **Q**, e uma reta construída l que contenha **P**, então podemos simultaneamente dobrar **Q** sobre l e **P** sobre o bissetor **b** perpendicular de **PQ**.

Este axioma forma o chamado corpo dos números harmônicos construtíveis. O procedimento que permite sua construção pode ser visto na figura abaixo. Este corpo é o menor corpo fechado para operações sobre $\sqrt{a^2+b^2}$, para a e b pertencentes ao corpo, e também fechado para a adição de qualquer número real que satisfaça a uma equação cúbica irredutí-

[1] Como escrito por Roger C. Alperin em [RA], pag.129.
[2] Obtidos por meio de construções envolvendo cônicas [CV].

vel com três raízes reais e cujos coeficientes sejam números harmônicos reais. Por este axioma (**T**), é possível realizar a trissecção de ângulos quaisquer. Um inteiro harmônico é da forma 2^a3^b, nome atribuído por *Phillip de Vitry*, um teórico musical do século XIV, estudando relações para música [RA1].



Axioma T

8. GEOMETRIA DO ORIGAMI

Uma vez definido o plano Origami, nele estaremos realizando as construções a partir de números Origami $\mathcal{O}$.

A partir de uma folha de papel, podemos realizar dobras sobre o plano determinado por ela. As dobras formam vincos que representarão as retas no plano Origami. A interseção de vincos distintos sobre o papel determinará os pontos deste plano. Através da combinação destes procedimentos simples, estabeleceremos todos os passos para as construções realizadas no Origami. Estes procedimentos formarão a base de todas as construções Origami. No plano Origami, temos a construção de retas como os elementos fundamentais, estando esta para o plano Origami como o ponto está para as construções no plano Euclideano. Isso leva em consideração que, para realizar qualquer construção no plano Origami, sempre começaremos por construir um vinco, que irá determinar uma reta. Assim, as retas e a interseção destas, que nos dão os pontos do plano, serão consideradas como os elementos fundamentais de todas as construções realizáveis por dobraduras no papel.

Os procedimentos gemétricos do Origami serão apresentados como o fez *Geretschläger*[1].

9. RELACIONANDO OS PROCEDIMENTOS EUCLIDEANOS COM O ORIGAMI

Teorema: Toda construção que pode ser feita por métodos Euclideanos, utilizando somente régua não marcada e compasso, pode também ser efetuada por métodos que utilizam os procedimentos elementares das dobraduras Origami.

Demonstração: A prova para este teorema, pode ser encontrada em [FM], Cap. 6, pág.133.

10. PROBLEMAS CLÁSSICOS RESOLVIDOS POR DOBRADURAS

Apresentamos uma solução para a trissecção de um ângulo e para a duplicação de um cubo através do método axiomático por dobraduras Origami, adicionando ainda aquele que pode ser considerado o quarto[2] problema da antiguidade: construir um heptágono regular.

Exercício1: Fazer a trissecção de um ângulo qualquer por dobraduras Origami.

Solução:Este método de trissecção foi realizado por H. Abe [PM]. Desenvolveremos essa prova apresentando mais detalhes em [FM] Cap. 7, pags 192-198.

Tomamos inicialmente um pedaço de papel retangular **ABCD**. Sem perda de generalidade, considere o ângulo agudo determinado entre o segmento **AB** e uma reta s que passa pelo vértice inferior do retângulo, como indica a fig. 1. Este ângulo será denominado $\angle$**RAB**, onde **R** é a interseção de s com a borda superior do retângulo que determina o segmento **DC**.[TH]

(a) Dobre o lado **AB** do papel, de modo a se formarem duas retas paralelas. Podemos dizer que l_1 é a paralela média entre a borda inferior do papel e l_2.

(b) Com as dobras realizadas construímos o ponto $P_2 = l_2 \cap \overline{AD}$. Aplicando o axioma (**6**) ao conjunto de pontos e retas construídas, construímos a dobra t, de modo que P_1 é levado em

[1] Robert Geretschläger apresenta no artigo [RG] uma sequência de procedimentos elementares, todos justificados pelo conjunto de axiomas que permitem as construções Origami.

[2] São considerados como os três problemas da antiguidade: duplicação do cubo, trissecção de um ângulo qualquer e quadratura do círculo.

P'', como indica a fig. 2. Denominaremos por **U** e **V** os pontos construídos pelas interseções de t com os segmentos que definem as bordas.

(c) A reta l_3 produzida é também o prolongamento de l_1 dobrada pela aba formada, como indica a fig. 2. Esta conterá ainda, o ponto **A** após desfazermos a aba formada. Seja **W** = l_3 $\cap$ **DC** construído por dobradura. Teremos assim, por construção, as seguintes relações entre os ângulos:

$$\angle WAB = \frac{2}{3}\angle RAB \Rightarrow \angle RAW = \frac{1}{3}\angle RAB.$$

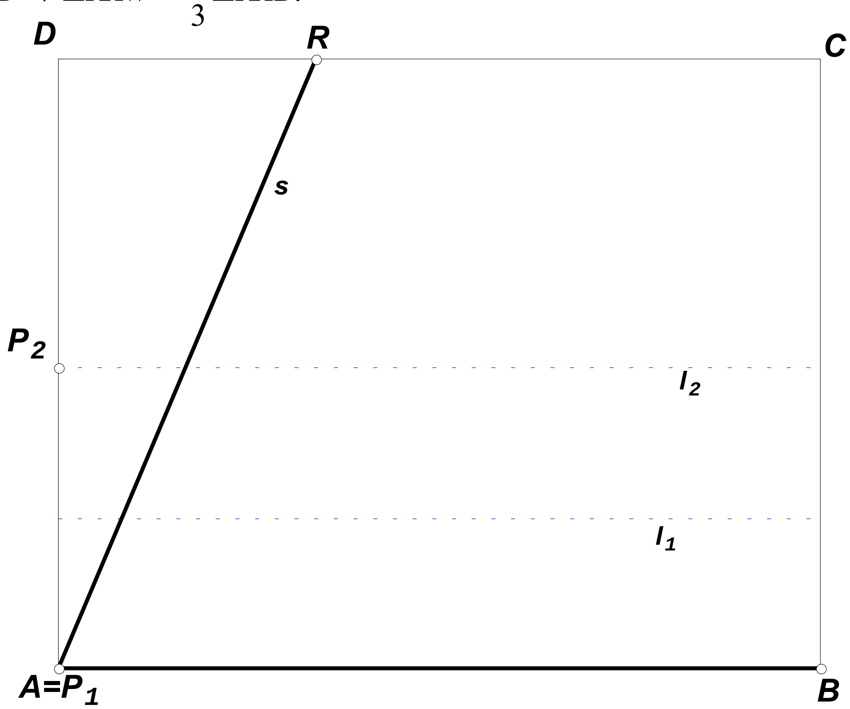


figura 1

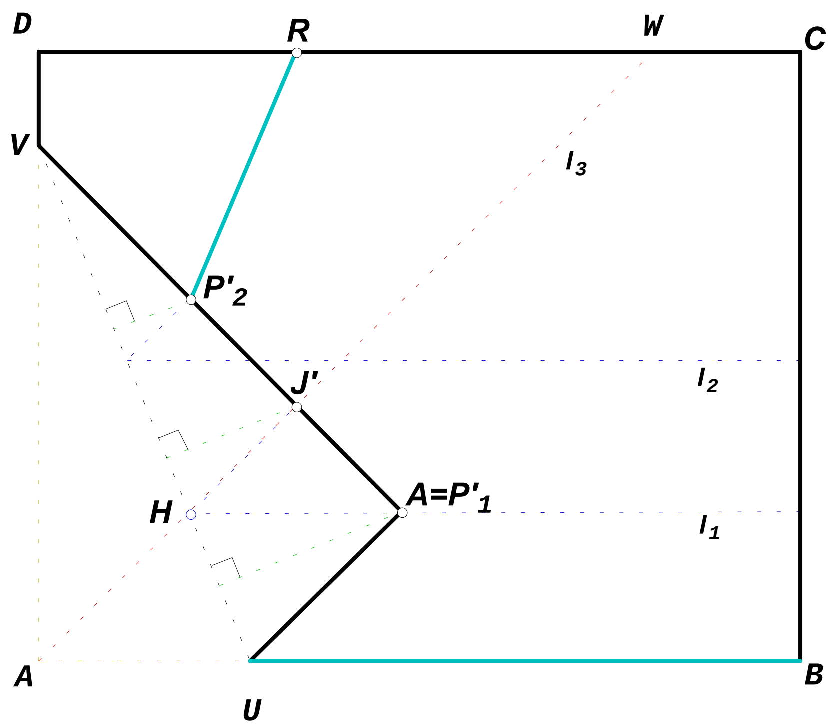


figura 2

Exercício 2: Construir um cubo com volume duplicado.

Solução: Para a solução deste exercício, estaremos construindo $\sqrt[3]{2}$, o que implica em resolver uma equação cúbica. A construção por dobraduras aqui apresentada é baseada na solução apresentada por Rabinowitz[1], e aprofundada em maiores detalhes em [FM]Cap. 7, pags 200-208 .

(a) Partindo de um pedaço de papel com a forma de um quadrado **ABCD**, dobre-o como na fig. 3, de modo a dividi-lo em três faixas iguais, construindo as retas paralelas l_2 e l_3.

(b) Podem ser construídos os pontos $P_1 = \overline{AB} \cap \overline{BC}; P_2 = l_3 \cap \overline{BC}, e\, seja\, l_1 = \overleftrightarrow{AD}$.

(c) Usando o axioma (**6**), vamos realizar uma dobra única, ***t***, que leva P_1 em l_1 nos dando P_1', e P_2 em l_2 nos dando P_2', como mostra a aba dobrada na fig. 4. Chamando [$\mathbf{P_1'D}$] = x e [$\mathbf{AP_1'}$] = y, por construção: $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$.

[1] Proposto por *Peter Messer* [PM] em 1985 , o problema 1054, como era conhecido, foi solucionado por *Stanley Rabinowitz*, e publicado em 1986 [SR].

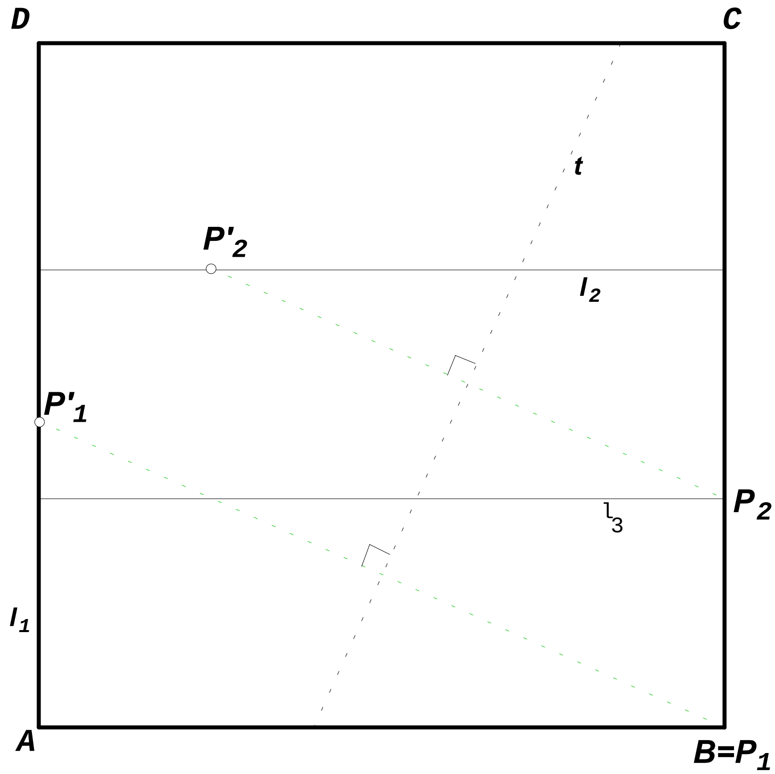


figura 3

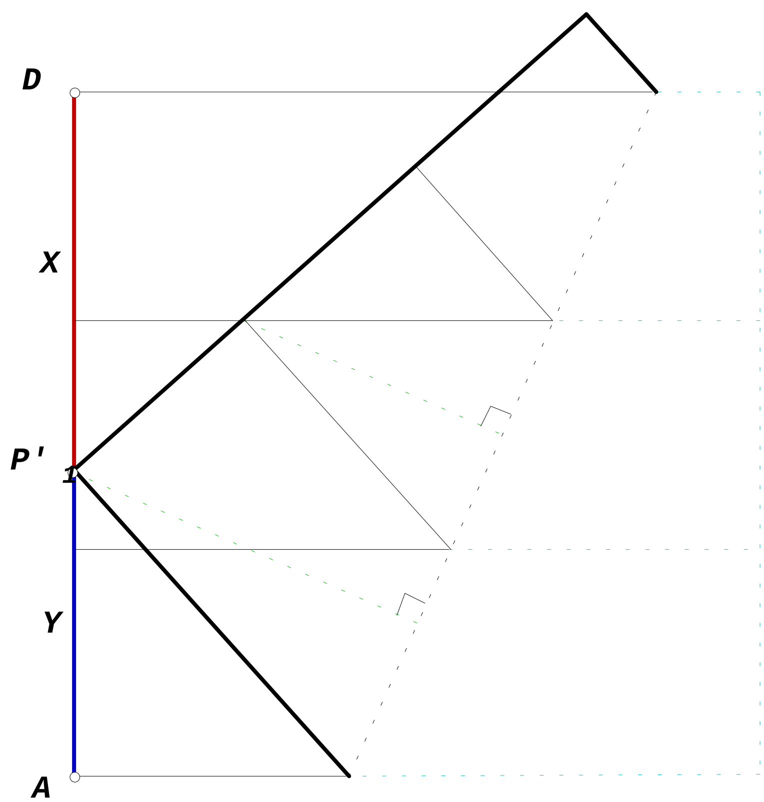


figura 4

Exercício 3: Construir um heptágono regular.

Solução: Este problema é considerado por muitos como o quarto problema da Antiguidade. Como vimos anteriormente, polígonos com 3, 4, 5, 6 lados e todos os seus derivados (por exemplo um octógono pode ser construído facilmente bissectando-se um quadrado) podem ser construídos com relativa facilidade.

Para a construção do heptágono, a divisão do círculo em sete partes iguais vai envolver a solução de uma equação[1] ciclotômica da forma $z^7-1=0$.

A construção realizada abaixo é baseada na solução apresentada por *Gleason* [GA]. Em [FM], Cap. 7, pags 208-223, encontramos uma descrição detalhada do processo de construção de um heptágono regular por dobraduras no papel. Consideremos inicialmente um papel quadrado **ABCD** de lado igual a 12 unidades.

(a) Dobramos a reta bissetora de **AD** e **BC**, e a reta bissetora de **AB** e **CD**, representando os eixos x e y, de um sistema cartesiano, de modo que tomemos **V** = (0,0) a origem e podemos construir o ponto **U**, determinando um segmento unitário **VU**.

(b) Refletir o vértice **A** sobre o *eixo-x*, de modo que a dobra formada construa a reta t_1 que contém o vertice **D**. A reflexão determina A' sobre o *eixo-x*, como na fig. 5. Seja **P** = $t_1 \cap$ *eixo-y* e seja P' = AB∩*eixo-y.* Dobrar a reta bissetora do segmento **PP'** de modo a construir a reta b_1 e teremos $\mathbf{B_1} = b_1 \cap$ *eixo-y.*

(c) Refletir **U** sobre o *eixo-x*, em relação ao *eixo-y*, de modo a determinar **VO**. Em seguida dobrar o *eixo-x* de modo que a dobra obtida determine uma reta l_1 que contém **O**. Dobrar o segmento $\mathbf{OB_1}$ como indicado na fig. 5. Trissectar o ângulo $\angle B_1OA'$ como na trissecção de um ângulo nas figs 1 e 2. Através desta trissecção, obtemos o ponto

T = **O'Q'**$\cap m$, que é a reflexão de **J** em relação à reta t_2, fig. 5.

(d) Dobrar a reta s que contém O e em seguida refletir B_1 em relação a s, e obter $\mathbf{B_2}$ como na fig. 6. Refletir $\mathbf{B_2}$ em relação ao *eixo-x* determinando $\mathbf{B_3}$ obtendo r. Seja $\mathbf{A_7}$ = **BC** ∩ *eixo-x*. Dobrar o ponto A_7 sobre a reta r de modo que a reta t_3 que contém o ponto **V**. Por essa reflexão obtemos o ponto $\mathbf{B_7}$. Refletir $\mathbf{B_7}$ em torno do eixo-x construir o vértice $\mathbf{G_7}$ do heptágono, como na fig. 6. Em seguida dobrar o eixo-x de modo que $\mathbf{A_7}$ seja refletido no segmento **AD** e $\mathbf{B_7}$ sobre o ponto que virá a ser $\mathbf{B_7}'$ por superposição. Desse modo, determinamos o segmento $\mathbf{A_7'B_7'}$ como na fig.7. Dobrar a reta bissetora b_2 ângulo $\angle B_7'VA_7'$ fazendo VB_7' coincidente com $\mathbf{VA_7'}$**.**

[1] Um polinômio ciclotômico é da forma Φ(n)=Π(x-λ), onde este produto é tomado sobre todas as raízes n-ésimas primitivas da unidade. Consideremos o polinômio x^n-1, como um elemento de ℂ[x] onde ℂ é o corpo dos números complexos. Em ℂ[x], $x^n-1=\Pi(x-\lambda)$, onde este produto é estendido a todo λ que satisfaz $\lambda^n=1$.

(e) Realizar o mesmo procedimento e encontrar os vértices $\mathbf{C_7}$, $\mathbf{E_7}$, $\mathbf{F_7}$ e $\mathbf{G_7}$ obtendo-se assim o polígono regular, como na fig. 8.

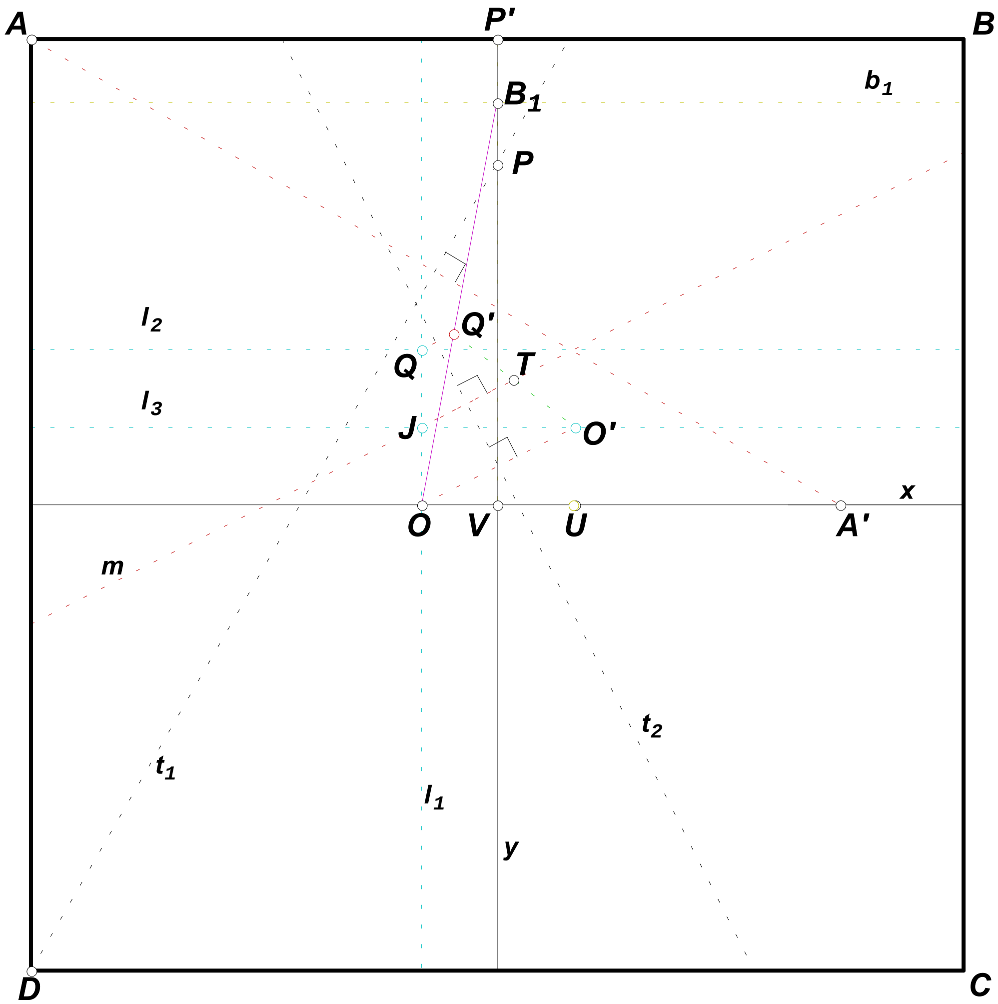


figura 5

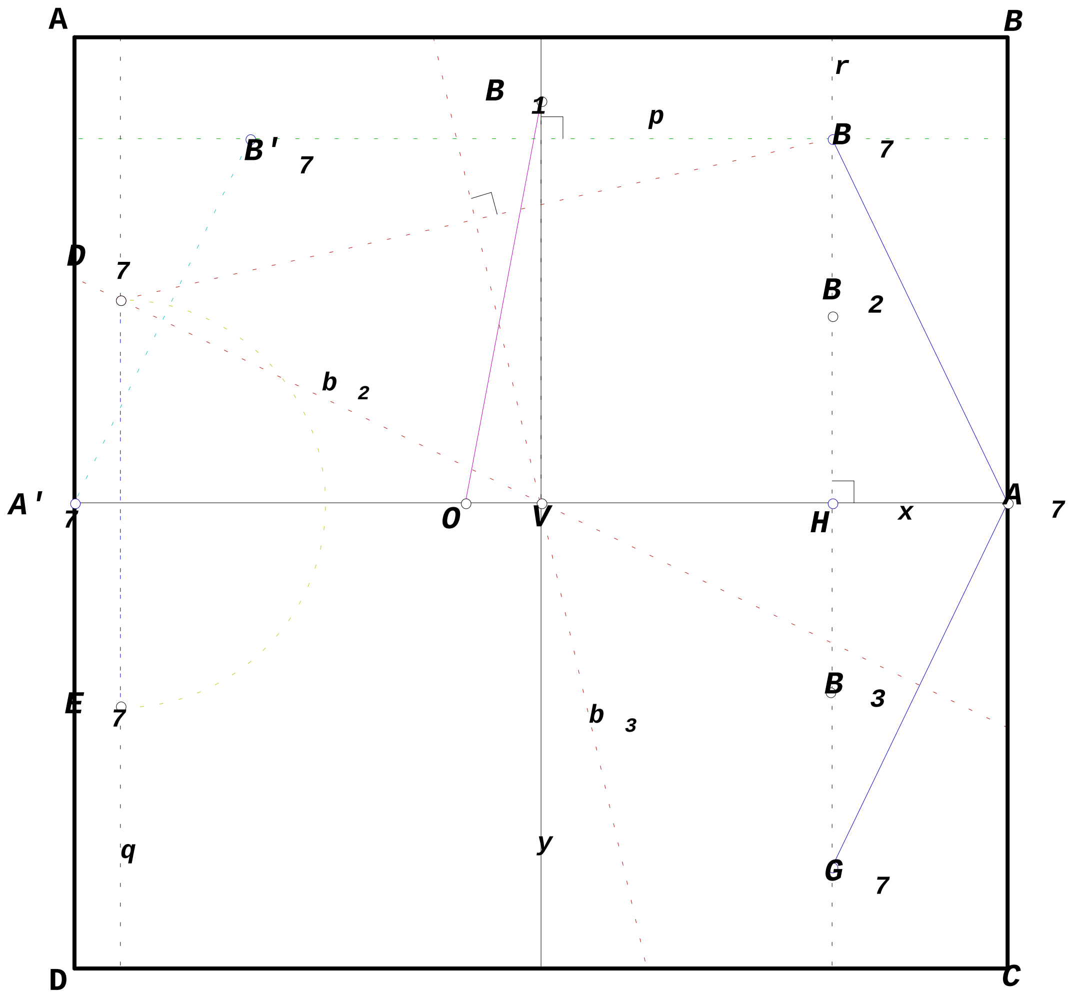


figura 6

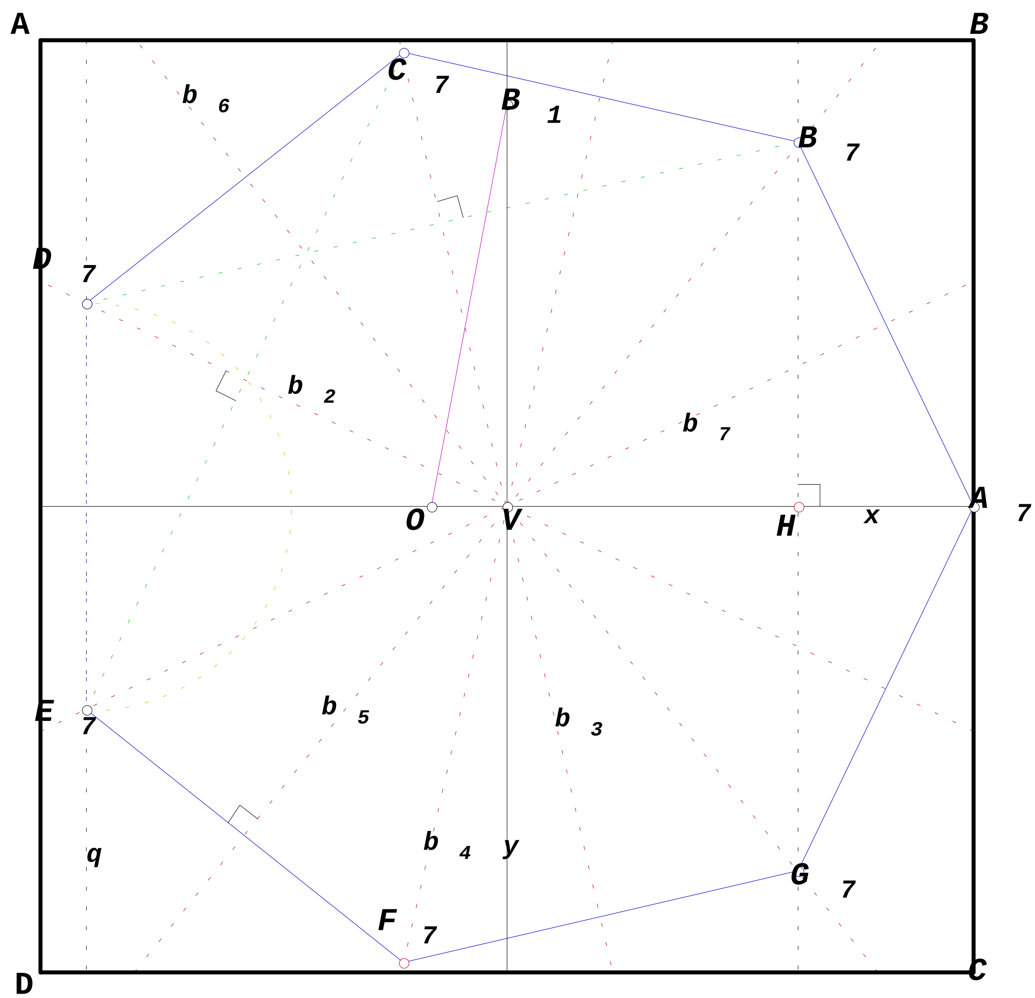


figura 7

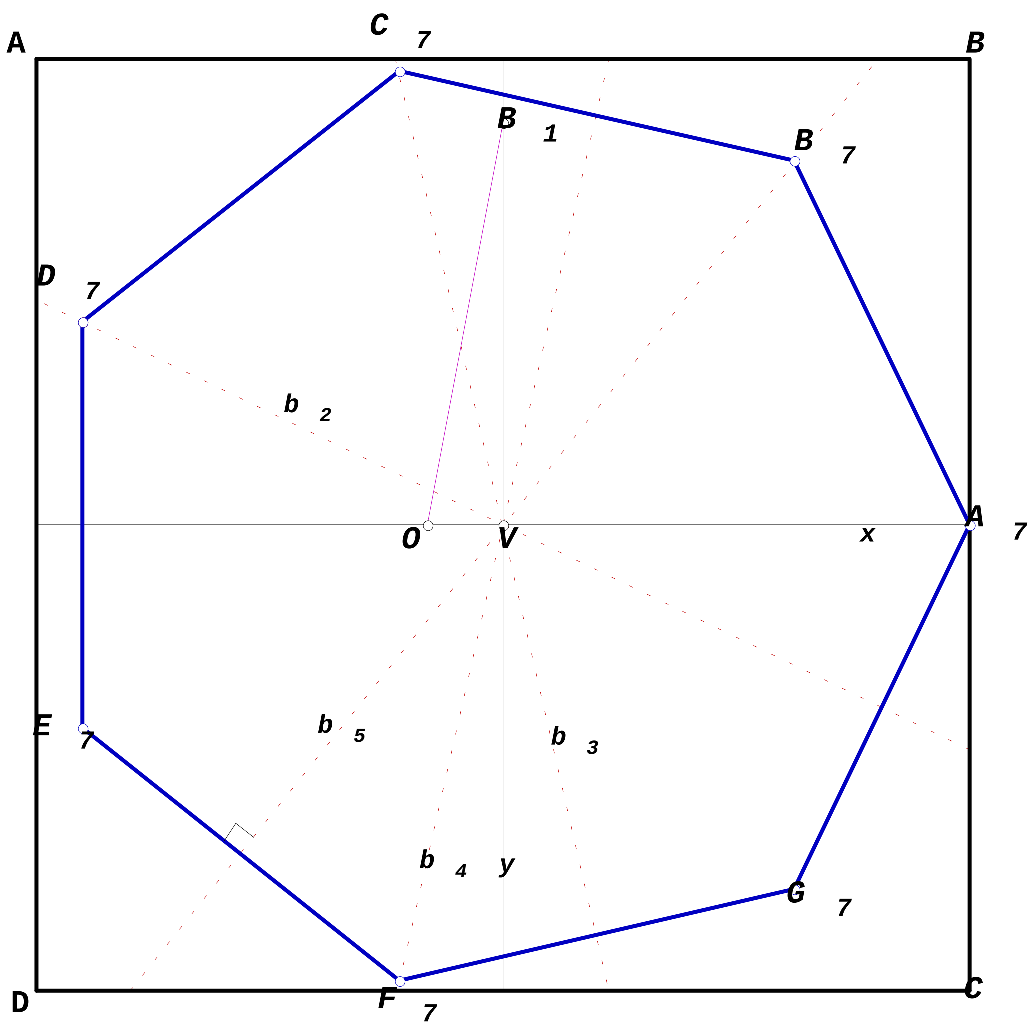


figura 8

Referências:

[BM] BIRKOFF, G., MACLANE, S. Álgebra moderna. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois S.A., 1980. 485p.

[CR] RUPP, C.A. ``On a Transformation by Paper Folding'' American Math. Monthly, volume 31, University of Texas, novembro 1924, pp.432-435.

[Crhist] O'CONNOR, J.J., ROBERTSON, E. F The Mac Tutor History of Mathematics Archive, School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland. Disponível na internet via http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/HistTopics/. Arquivo consultado em 2001.

[CV] VIDELA,C. R. "On points construtible from conics", Mathematical Intelligencer, volume 19, número 2, 1997, (1997), pp. 53-57.

[FM] MATTOS, F. R. P., Números Construtíveis por Dobraduras de Papel ou Reflexões}, Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Novembro 2001, 295p.

[GA] GLEASON, A. M. ``Angle Trisection, the Heptagon , and the Triskaidecagon'', American Math. Monthly, Harvard University, vol 95, march 1988, pp. 357-371.

[HH] HUZITA, H. ``Understanding Geometry through Origami Axioms'', Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91), J. Smith ed., British Origami Society,1992, pp. 37-70.

[IH] HERSTEIN, I. N, Topics in Algebra, University of Chicago, Blaisdell Publishing Company, 1964, 342p.

[PM] MESSER, P. "Problem 1054'', Crux Mathematicorum, M.D., Mquon, Wisconsin, USA, 1985, p.188.

[RA] ALPERIN, R.C. ``A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers'', New York Journal of Mathematics, volume 6, 2000, pp.119-133.

[RA1] ALPERIN, R.C. "Mathematical Origami: Another View of Alhazen's Optical Problem'' 3OSME, march 2001, Departament of Mathematics and Computer Sciencies, San Jose State University, California, 10 p.

[RG] GERETSCHLÄGER, R. ``Euclidean Constructions and the Geometry of Origami'' Mathematics Magazine, volume 68, número 5, 1995, pp. 357-371.

[RH] HARTSHORNE, R. Companion to Euclid, A course of geometry, based on Euclid's Elements and its modern descendants, Lecture Notes, Berkeley Mathematics, American Mathematical Society, Berkeley Center for Pure and Applied Mathematics, volume 9, Berkeley, 1999, 362p.

[SR] RABINOWITZ, S. "Solution of Problem 1054'', Crux Mathematicorum, Digital Equipment Corp., Nashua, New Hampshire, volume 12, 10, 1986, pp. 284-285.

[TH] HULL, T. "Origami and Geometric Constructions', Origami Math pages, Department of Mathematics at Merrimack College, North Andover. Disponível na internet via http://web.merrimack.edu/~thull/geoconst.html. Arquivo consultado em 2001.

CAPÍTULO 21

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1,
págs: 241:250..
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

DESENVOLVENDO A HABILIDADE DE ARGUMENTAÇÃO

Lilian Nasser

Projeto Fundão
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
endereço eletrônico: pfundao@im.ufrj.br

Lúcia Tinoco

Projeto Fundão
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
endereço eletrônico: pfundao@im.ufrj.br

Resumo*: A importância da argumentação nos processos de ensino-aprendizagem de matemática e de desenvolvimento cognitivo dos alunos vem sendo objeto de pesquisas em vários países. Entre elas, se destacam os estudos sobre as formas de argumentação usadas pelos alunos, os tipos de prova e o uso da prova nas aulas de matemática (Hoyles (1999), Hanna (1990), Balacheff (1987) e outros). Este artigo trata de resultados e conclusões de um trabalho realizado pela equipe do Projeto Fundão do IM/UFRJ, no Rio de Janeiro, sob a coordenação das autoras, a partir da constatação de que a maioria dos alunos não tem oportunidade de argumentar, nas aulas de matemática e na escola em geral. Nele, foram desenvolvidas e testadas estratégias e atividades que propiciassem o desenvolvimento da habilidade dos alunos para argumentar sobre idéias matemáticas e demonstrar afirmativas nos campos da geometria, da álgebra e da aritmética. Durante o estudo, observaram-se evidências das estreitas relações existentes do desenvolvimento da habilidade de argumentação em matemática com o domínio dos conteúdos envolvidos nas atividades e com a habilidade de o aluno se expressar na língua materna, oralmente e por escrito. O trabalho também sugeriu, entre outras coisas, que os alunos não transferem de modo natural a habilidade de argumentar em geometria para os campos algébrico e aritmético, e que atividades deste tipo devem ser apresentadas às crianças desde os primeiros anos de escolaridade.*

Palavras-chave: *Argumentação, Projeto Fundão, Geometria, Álgebra, Aritmética.*

Abstract*: The important role of argumentation in the mathematics teaching-learning processes and the cognitive development of students have been object of research in several countries. Among these, are the studies about different types of argumentation used by the students, the kinds of proof and the use of proof in the mathematics classes (Hoyles (1999), Hanna (1990), Balacheff (1987) and others). This work concerns the results and conclusions of a research project carried out by members of the Projeto Fundão (IM/UFRJ), in Rio de Janeiro, coordinated by the authors, motivated by the* *observation that the majority of students do not have the opportunity to argument at the mathematics classes, and at school, in general. It includes some strategies and activities developed and tested to provide the development in the students of the ability to argument about mathematical ideas, and to justify assertions in the fields of geometry, algebra and arithmetic. Along the study, evidences pointed the close relations of the argumentation ability in mathematics with the mastering of the content involved in the activities and with the students' ability to communicate in the mother language, orally and by written. The results suggest, among other things, that students do not transfer naturally the ability to argument in geometry to the algebraic or arithmetic fields, and that children must be exposed to these kind of activities since the first years of schooling.*

***Key words**: Argumentation, Projeto Fundão, Geometry, Algebra, Arithmetic*

É comum encontrar alunos do Ensino Médio, e até da Universidade que não conseguem raciocinar sobre uma questão, ou discutir possíveis soluções alternativas a um problema dado.

O tipo de trabalho desenvolvido nas salas de aula e a orientação dos livros didáticos não propiciam em geral o desenvolvimento, nos alunos de nível fundamental e médio, da capacidade de expressar e comunicar idéias ou justificar procedimentos e estratégias usadas na resolução de tarefas. Conseqüentemente, eles não se familiarizam com o raciocínio lógico-dedutivo e, em particular, com as demonstrações.

> A prática freqüente pelos alunos da argumentação, da justificação das próprias afirmações e da procura de uma explicação em defesa das conjecturas que formulam, no decorrer das atividades de investigação, constituem modos válidos para melhorar o seu discurso matemático e as formas de exprimir os seus raciocínios. (Veloso, 1998, p. 360)

Na realidade, grande parte de nossos alunos não tem essa prática. Os alunos raramente vêem demonstrações, e tampouco se pede que eles justifiquem suas respostas, ou a verdade de uma afirmativa. Isso acontece tanto no ensino de geometria, como no de álgebra. Em geometria, apresentam-se aos alunos definições prontas, que devem ser repetidas, e fórmulas para serem simplesmente aplicadas em problemas estereotipados. Nas aulas de álgebra, o ensino se dá com ênfase nos procedimentos: manipulação de expressões algébricas, e resolução de equações, aos quais os alunos não atribuem significado algum.

O trabalho da Matemática em sala de aula, com as características apontadas acima, não contribui para a formação de um aluno que possa exercer a cidadania de forma critica e atuante e, menos ainda, propicia o contato desse aluno com a verdadeira natureza da Matemática, que é um papel importante dessa disciplina no ensino médio.

> ...os objetivos do ensino da Matemática nos ensinos básico e secundário[1] podem indicar-nos quais os caminhos que devem ser seguidos para uma tarefa essencial a que os professores não se podem furtar – ajudar os alunos a experimentar e compreender as características da Matemática como ciência, nomeadamente o papel da demonstração e das definições na sua construção. (Veloso, 1998, p. 360)

Face à importância do tema e na tentativa de contribuir para a alteração desse quadro, um grupo, formado por duas professoras universitárias, cinco professores da rede de ensino básico do Rio de Janeiro, e quatro licenciandos do curso de Matemática, desenvolveu uma pesquisa com os objetivos de:

- identificar que tipos de argumentação e justificativa os estudantes de várias séries, a partir dos 11 anos de idade, são capazes de usar;
- sugerir caminhos e estratégias para o enriquecimento dos níveis de argumentação de alunos e de professores de matemática em formação e em serviço;
- desenvolver atividades baseadas nessas estratégias, para serem testadas pelos professores envolvidos na pesquisa.

Esta pesquisa foi motivada pelo projeto desenvolvido na Inglaterra, coordenado pela Professora Celia Hoyles, no Instituto de Educação da Universidade de Londres (Hoyles, 1997), na qual foi desenvolvido um questionário, com questões de geometria e álgebra, para avaliar a visão e o desempenho dos melhores alunos britânicos de 15 anos de idade em demonstração em matemática. Esse questionário foi respondido por mais de dois mil alunos britânicos nessa faixa etária e a conclusão foi que, em geral, os alunos sabiam justificar informalmente as afirmativas, mas não conseguiam fazer a passagem para a prova formal. O passo seguinte foi elaborar atividades usando o software *Cabri Geomètre*, a fim de melhorar o desempenho dos alunos em provas formais.

Bell afirmou:

> Visto internacionalmente, o aspecto da prova em matemática é provavelmente o que mostra a maior variação em abordagens. (Bell, 1976, p.23)

De fato, partir do último quarto do século XX, as provas e demonstrações têm sido objeto de muitos estudos e pesquisas. Hanna (1990) aborda três aspectos da prova: prova formal, prova aceitável, e o ensino de prova. Ela argumenta que as demonstrações podem ter diferentes graus de validade formal que, dependendo do nível e da maturidade dos alunos, podem ter o mesmo grau de aceitação. Segundo a teoria de van Hiele (1976), os alunos só atingem o domínio do processo dedutivo (formal) no quarto nível, mas isso não significa que eles não são capazes de dar justificativas informais antes disso. Freqüentemente, uma justificativa experimental é mais significativa para os estudantes que uma prova formal. As crianças, em geral, não sentem necessidade de demonstrar: simplesmente aceitam a verdade de uma afirmativa, e não se preocupam com a sua generalidade (De Villiers, 1991; Hersch, 1993).

---

[1] Os ensinos básico e secundário de Portugal, juntos, correspondem ao ensino básico do Brasil.

Balacheff (1987) distingue as provas pragmáticas das conceituais. Ele identificou os seguintes tipos de provas pragmáticas num estudo com alunos de 13 a 14 anos de idade: empirismo ingênuo, experimento crucial, exemplo genérico, e experimento pensado. Numa investigação realizada com calouros do curso de matemática, Rezende e Nasser (1994) identificaram os seguintes tipos de argumentação: raciocínio inconsistente, justificativa empírica, explicação gráfica, referência a uma autoridade, justificativa aceitável e prova formal. Esses resultados sugerem que, dependendo da experiência e da maturidade dos alunos, os professores devem considerar suas justificativas informais pessoais como estágios no desenvolvimento do domínio das provas formais.

A demonstração assume vários papéis na matemática (Hanna e Jahnke, 1996). Alguns desses papéis são mais relevantes à aprendizagem dessa disciplina: verificação (em relação à veracidade de uma afirmativa), explicação (clareando porque a afirmativa é verdadeira), sistematização, descoberta e comunicação. Entretanto,

> No domínio educacional, é natural ver a prova primeiro e sempre como explicação, e, em conseqüência, valorizar as provas que melhor ajudam a explicar (Hanna e Jahnke, 1996, p. 903)

Senk (1985) investigou o desempenho dos alunos na realização de demonstrações em geometria, e encontrou uma correlação positiva com os níveis de van Hiele alcançados. Ela sugeriu perspectivas para o desenvolvimento de habilidades em demonstrações, afirmando ser necessário identificar pré-requisitos cognitivos e afetivos para o domínio de demonstrações.

Como a interação é crucial para gerar a comunicação e o raciocínio argumentativo, o contexto social também deve ser levado em conta. Godino e Recio (1997) analisaram as características do significado de prova em diferentes contextos institucionais, concluindo que:

> É necessário de algum modo articular os diferentes significados de prova, nos diferentes níveis de ensino, desenvolvendo, assim, progressivamente entre os estudantes, o conhecimento, capacidade discriminativa e racionalidade necessários para aplicá-los em cada caso. Os esquemas de prova informal não podem simplesmente ser considerados incorretos, erros ou deficiências, mas sim como estágios no alcance e domínio das práticas argumentativas em matemática. (Godino e Recio, 1997, p. 48)

Como foi relatado em Nasser e Tinoco (1999), as primeiras tentativas de nossa investigação apontaram que “a maioria dos professores de matemática brasileiros não exigem que os alunos justifiquem suas respostas...”, o que o ponto crucial para as dificuldades mostradas. As observações a seguir justificam esta afirmação.

A primeira questão, do questionário britânico (Hoyles e Healy, 1999), respondida por alunos brasileiros, foi:

> Verifique se a seguinte afirmativa é verdadeira ou falsa, e justifique sua resposta:
> Quando você soma dois números pares, o resultado é sempre um número par.

Todos os alunos da 7ª e 8ª séries que responderam a essa questão disseram que a afirmativa era verdadeira, mas nenhum conseguiu explicar porque ela era verdadeira. Eles apenas sabiam mostrar que valia para alguns exemplos. A melhor justificativa que apareceu foi:

"números pares vão de dois em dois. Então, se você somar dois números pares, o resultado também vai em pares".

Analisando os resultados, observamos que nem mesmo os alunos mais velhos, habituados ao trabalho com expressões algébricas, conseguiram representar algebricamente um número par, como ***2p*** (onde p é um número inteiro). Essa dificuldade na representação algébrica foi confirmada por vários professores que observaram que, de fato, eles não ensinam seus alunos a representar um número par ou ímpar algebricamente. Raramente o aluno tem oportunidade de perceber a utilidade da linguagem algébrica para a justificativa de uma afirmação dos campos da geometria ou da aritmética ou mesmo para a tradução de problemas simples de palavras em sentenças matemáticas.

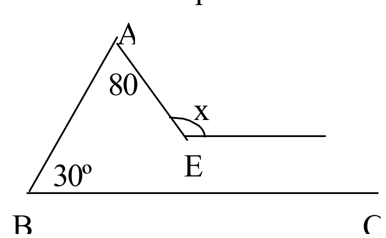
Muitas outras questões pedindo justificativas foram testadas pelos professores envolvidos no estudo, e algumas estratégias para aprimorar a habilidade de argumentação foram adotadas (Nasser e Tinoco, 1999), como: trabalho em duplas para construir uma solução (com justificativa) para problemas previamente discutidos em aula, avaliação de justificativas apresentadas por outros alunos, atividades de identificação da hipótese e da tese de uma afirmativa, resolução de problemas desafio que requerem raciocínio lógico em todas as aulas. Com essas estratégias, os professores do grupo conseguiram grandes progressos na habilidade de argumentação dos alunos, mas foi observado que um ano escolar não é suficiente para obter respostas satisfatórias; são necessários pelo menos dois anos de trabalho para conseguir sucesso nessa tarefa.

1. EXEMPLOS DE ATIVIDADES

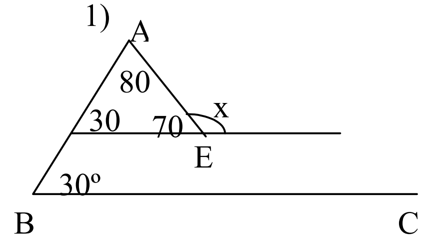
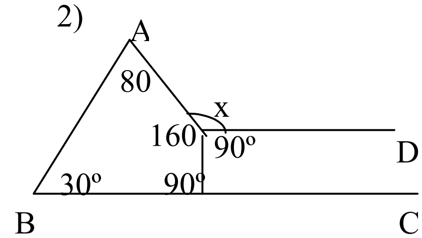
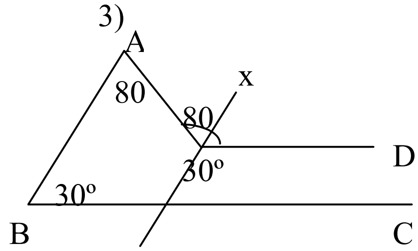
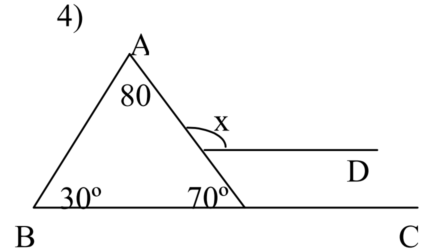
Uma professora, que participa da pesquisa desde o início, acompanhou uma turma por três anos consecutivos, desde 1998, a partir da 6ª série, com alunos de idades de 12 e 13 anos. As primeiras justificativas apresentadas por eles eram baseadas apenas na verificação de exemplos, mas, como ela insistia em justificativas para questões de geometria, eles melhoraram significativamente, e, no final do trabalho, conseguiam raciocinar logicamente, realizando provas com bastante detalhes, e justificando corretamente as suas idéias.

No segundo ano de trabalho com a turma, ela pediu aos alunos, então na 7ª série, para resolverem a seguinte questão:

> Na figura ED//BC
> Encontre a medida do ângulo AÊD
> Descrevendo seu procedimen-

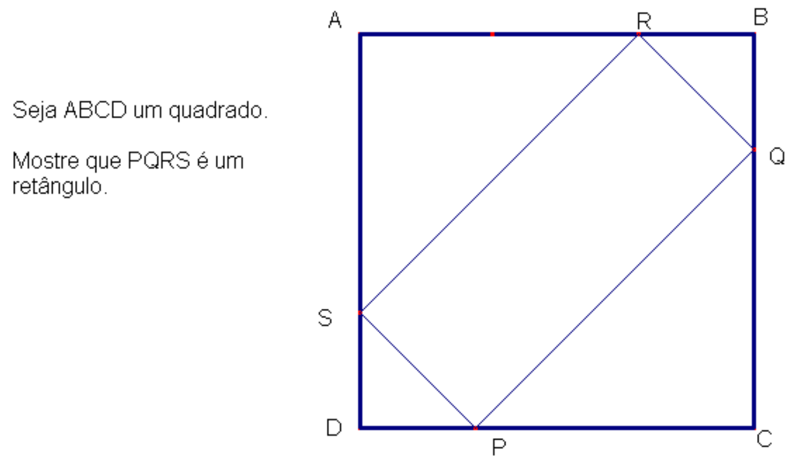


Soluções interessantes foram apresentadas a essa questão, mas grande parte dos alunos teve dificuldades, não conseguindo resolvê-la. A professora decidiu, então, estender a atividade: selecionou quatro diferentes soluções dadas pelos próprios alunos, mostrando que AÊD = 110º, e deu aos estudantes a seguinte tarefa:

<table>
<tr><td colspan="2">Escolha uma das soluções abaixo, apresentadas por seus colegas, e explique-a.:</td></tr>
<tr><td>1)
</td><td>2)
</td></tr>
<tr><td>3)
</td><td>4)
</td></tr>
</table>

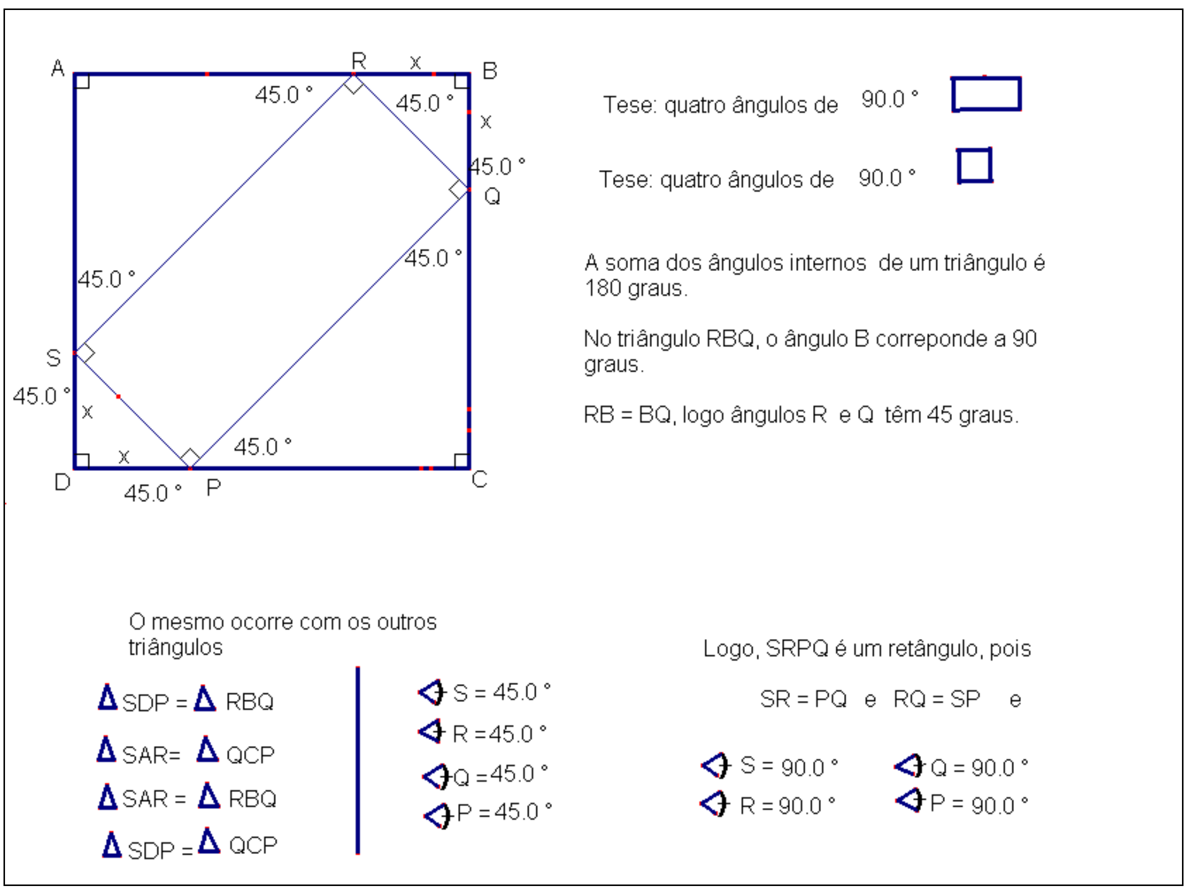
Nessa segunda tarefa, todos os alunos que não haviam conseguido mostrar que AÊD = 110º na primeira aplicação, agora conseguiram raciocinar sobre as soluções apresentadas, e tiveram sucesso. É interessante observar que as dificuldades iniciais podem ter se originado na necessidade de desenhar uma linha auxiliar na figura, e esse obstáculo desaparece quando os estudantes se vêem à frente das figuras prontas, e conseguem explicar como a medida do ângulo foi encontrada em cada caso. Alguns alunos, em vez de escolher apenas uma solução para justificar, explicaram as quatro soluções apresentadas.

No terceiro ano de trabalho com os mesmos alunos (na 8ª série), a professora pediu que eles resolvessem a seguinte questão:



Essa tarefa teve um alto índice de respostas corretas, com justificativas detalhadas.

Por exemplo, esta foi a resposta de Karen:



O raciocínio de Karen foi expresso de forma bastante clara e correta , mas ela ainda apresentou algumas falhas na linguagem matemática: considerou as condições do quadrado como tese em vez de hipótese, mas ela usou o fato de que os ângulos são retos no desenvolvimento do seu raciocínio. Ela deveria ter mencionado que SR = PQ e RQ = SP devido à congruência dos triângulos. Além disso, ela usa o mesmo símbolo para ângulos diferentes: S pode significar o ângulo DSP e o ângulo reto interno do retângulo. Mas, certamente, ela mostra uma familiarização com o processo dedutivo que foi desenvolvido ao longo dos três anos de trabalho, construindo "provas" geométricas.

Apesar disso, a mesma aluna demonstra um nível muito baixo de raciocínio na resolução de questões numéricas. Ela não conseguiu responder a seguinte questão:

> Seja N = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x . . . . . x 121.
>
> Responda às questões, justificando sua resposta:
> a) N é múltiplo de 5 ?
> b b) N é par ou ímpar?
> c) Qual é o último dígito de N ?

Também na primeira questão apresentada, sobre a soma de dois números pares, Karen deu apenas alguns exemplos, somando pares de números pares iguais. Observe que, para mostrar a veracidade da afirmativa, ela somou pares de números 'grandes':

> 2 + 2 = 4 14 + 14 = 28
> 32 + 32 = 64 122 + 122 = 244
> 1146 + 1146 = 2292

Vários alunos, de turmas diferentes, deram exemplos como esses, sempre somando pares de números iguais. Esta é uma questão de linguagem, já que em português a palavra *par* é usada com os dois significados, de número par, e de conjunto de dois elementos.

2. COMENTÁRIOS

As dificuldades com a linguagem (natural e matemática) constituem um obstáculo para o desenvolvimento das habilidades de argumentação e prova. Algumas vezes, os estudantes compreendem porque uma afirmativa é verdadeira, mas não conseguem explicar essas razões em símbolos ou palavras. Experimentos feitos em uma escola cujo trabalho em língua portuguesa é bem conduzido nos permitiram observar que alunos ainda na 5ª série elaboraram frases claras para justificar afirmações matemáticas como a que estabelece que um décimo é maior do que um vinte avos. Em relação à linguagem matemática, particularmente a algébrica, é necessário um trabalho específico, pois mesmo alunos com o hábito da justificativa, às vezes, preferem usar a língua materna para expressar as suas idéias. Isso reforça nossa conclusão de que são necessários pelo menos dois anos de trabalho árduo com uma turma para obter os primeiros resultados em argumentação. Essas observações também apontam na direção de um início precoce desse trabalho. Atividades que exigem raciocínio lógico devem ser introduzidas o mais cedo possível, nos primeiros anos de escolaridade, e estar sempre presentes.

O exemplo de Karen também indica que o domínio do raciocínio dedutivo em geometria não garante o mesmo domínio em outras áreas da Matemática: é necessário trabalhar em todas as áreas para obter o domínio completo do raciocínio lógico e dedutivo.

Apesar das dificuldades apontadas, o exemplo da questão da justificativa para a obtenção do ângulo $x = 110^{\circ}$ ilustra a satisfação do aluno quando consegue atribuir sentido para o trabalho com a matemática. De fato, a aquisição real dos conteúdos se dá concomitantemente ao desenvolvimento da habilidade de explicar e argumentar sobre eles, o que torna essencial esse desenvolvimento.

Da experiência desta pesquisa, depreende-se que a falta de domínio dos alunos em argumentação se deve à pouca atenção dos professores a essa questão. A argumentação é uma habilidade que deve ser desenvolvida nos alunos: não pode simplesmente ser 'ensinada' em algumas aulas. Como afirmou Hoyles (1997), *"devemos aspirar desenvolver modos de pensar, não apenas os seus produtos, e usá-los como guias curriculares".*

Portanto nós, professores, devemos pensar sobre isso quando planejamos nossas estratégias de ensino e currículo escolar, pois

> ... o que decidimos ensinar – ou não ensinar – e como escolhemos organizar nosso ensino fazem uma diferença crucial em o que nossos alunos aprendem. *(Hoyles e Healy, 1999, p. 21)*

Tendo isso em mente, ainda há muito a investigar sobre como aprimorar o ensino de demonstrações, ou, melhor dizendo, como desenvolver a habilidade de argumentação e prova em nossos alunos.

Referências:

BALACHEFF, N. (1987): *Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics*. Em D. Pimm (Ed.): Mathematics, Teachers and Children, 216-235. Londres: Hodder & Stoughton;

BELL, A. (1976): *A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations*. Educational Studies in Mathematics, 7, 23-40;

CLEMENTS,D.H. and BATTISTA, M.T. (1992): *Geometry and spatial reasoning*. Em: D. Grows (ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning, 420-464. Mac-Millan, New York;

DE VILLIERS, M.D. (1991): *Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry*. Atas do PME-15, vol. 1, 255-262, Assissi, Itália;

DREYFUS, T. & HADAS, N. (1987): *Euclid may stay – and even be taught*. In: M. Lindquist & A. Shulte (org.): Learning and Teaching Geometry, K-12, 47-58, NCTM, 1987 Yearbook, Reston, VI, EUA.

GALBRAITH, P. (1981): *Aspects of proving: a clinical investigation of process*. Educational Studies in Mathematics, 12, 1- 28;

GODINO, J.D. and RECIO, A.M. (1997): *Meaning of proofs in Mathematics Education*. Atas do PME-21, vol. 2, 313-320;

HANNA, G. (1990): *Some pedagogical aspects of proof.* Interchange, 21 (1), 6-13;

HANNA, G and JAHNKE, H. (1996): *Proof and proving.* Em: International Handbook of Mathematics Education, 877-908.

HERSCH, R.(1993): *Proving is convincing and explaining*. Educational Studies in Mathematics, 24(4), 389-399;

HOYLES, C. (1997): *The curricular shaping of students' approaches to proof.* For the Learning of Mathematics, 17 (1), 7-16;

HOYLES, C. and HEALY, L. (1999): *Students' views of proof*. Mathematics in School, 28, No.3;

NASSER, L. & TINOCO, L. (1999): *Helping to develop the ability of argumentation in mathematics.* Atas do PME-23, vol. 1, p. 303, Israel.

REZENDE, J. e NASSER, L. (1994): *Kinds of argumentation used in geometry.* Atas do PME-18, vol. 1, p. 66, Lisboa, Portugal;

SENK, S. (1985): *How well do students write geometry proofs?* Mathematics Teacher, 78(6), 448-456;

VAN HIELE. P. (1976): *Structure and Insight*. Orlando, FL: Academis Press.

VELOSO, E. (1998): *Formalização.* Em: *Geometria – Temas Actuais.* Instituto de Inovação Educacional, Lisboa, Portugal.

CAPÍTULO 22

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 251:260.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01** © 2002, Editora IME-UERJ.

UMA ANÁLISE DAS CONSTRUÇÕES MENTAIS SUBJACENTES À PRODUÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES [1]

Gilda de La Rocque Palis

Departamento de Matemática.
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
endereço eletrônico: gilda@mat.puc-rio.br

Resumo: *Esta pesquisa, fundamentada na perspectiva teórica Apos, cujo objetivo é modelar as construções mentais presentes na aprendizagem de matemática avançada, trabalha com as seguintes questões: Como podemos descrever as construções mentais que um estudante[2] poderia fazer para compreender 1.O conceito de gráfico cartesiano de uma função de uma variável real, dada por uma fórmula algébrica. 2. O conceito de função definida por uma curva desenhada no plano cartesiano e que obedeça o teste da linha vertical. Uma resposta à primeira dessas perguntas é aqui apresentada, ilustrada por algumas falas de sujeitos envolvidos nesta investigação.*

Palavras-chave: *Gráfico de Função, Ensino Universitário, Pesquisa Cognitiva.*

Abstract: *This research, based on the Apos Theory (Action-Process-Object-Schema) theoretical perspective, addresses the following questions: How can we describe the mental constructions that a student might make in order to develop his understanding of: 1. the concept of a Cartesian graph of a real function of one variable, given by an algebraic rule. 2. the concept of a real function defined by a vertical line test satisfying curve drawn in the Cartesian plane. During the presentation of this work we shall describe our theoretical analysis of the learning of the first of these concepts articulating it with empirical data we have collected.*

Key words: *Function Graph, Undergratuate Teaching, Research in Cognition.*

[1] Pesquisa realizada com apoio do CNPq, Processo 30.0821/81.6 e em colaboração com a Dra. Lynne Ipiña, da Universidade de Wyoming, USA.
[2] Ao longo do ensino médio e superior inicial..

1. INTRODUÇÃO

Trabalhando há alguns anos com ensino universitário e formação continuada de professores, inclusive procurando incorporar uma componente computacional em diversas seqüências didáticas, temos observado a extrema dificuldade de muitos alunos e professores com questões ligadas à produção e à interpretação de gráficos de funções de uma variável real.

Consideramos importante o desenvolvimento de habilidades de coordenação de diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, compartilhando as hipóteses cognitivas teóricas de Douady (1986) e Duval (1993). Segundo Duval (1993):

> O papel das representações matemáticas semióticas na atividade cognitiva matemática, em particular da representação gráfica, dificilmente pode ser subestimado. A apreensão conceitual de um objeto matemático é inseparável da apreensão e produção de suas representações semióticas. Ser capaz de se mover por diferentes sistemas de representação é uma condição necessária para a discriminação entre o objeto matemático e suas representações e para reconhecer o objeto matemático em cada uma das suas possíveis representações.

Assim, esta pesquisa surgiu de um desejo de entender como os estudantes compreendem a representação gráfica de uma função dada analiticamente e uma função dada somente por um gráfico, para tentar ajudá-los a desenvolver uma melhor compreensão do domínio gráfico e uma coordenação mais produtiva entre os gráficos e outras representações.

O conceito de função é certamente uma noção fundamental dentre as estudadas nos cursos de matemática no Ensino Médio e Superior. Ao mesmo tempo, o ensino e a aprendizagem deste conceito têm sido considerados bastante problemáticos. A literatura em educação matemática fornece uma abundância de evidências acerca dos aspectos desafiantes de sua aprendizagem. A questão de como o conceito de função pode ser construído por um aprendiz tem sido discutida por alguns pesquisadores, sendo o trabalho de Breidenbach, Dubinsky, Hawks e Nichols (1992) um referencial fundamental nessa área.

Ao rever a bibliografia de pesquisa, percebemos que a maior parte do trabalho realizado na área de representações gráficas de funções tem enfocado as conseqüências (desempenho, concepções errôneas) das construções internas já feitas por estudantes, por exemplo, ao esboçar o gráfico de uma função dada por uma fórmula/situação, analisar uma representação gráfica ou empregar gráficos como ferramenta na resolução de problemas. Questões relacionadas especificamente à representação gráfica de funções do ponto de vista de sua construção cognitiva, de como as idéias matemáticas pertinentes podem ser construídas, não têm sido muito enfatizadas. Um dos poucos trabalhos nessa linha é o de Baker, Cooley e Trigueros (2000). Nos parece então que muito trabalho ainda é necessário para se chegar a uma melhor compreensão das construções mentais subjacentes à produção e interpretação de gráficos de funções.

É importante salientar que representações gráficas têm sido empregadas para dar apoio intuitivo a cálculos e argumentações feitos por ocasião da introdução de definições, propriedades, teoremas e algoritmos em matemática, em particular em Cálculo, e que a eficiência desse emprego tem sido questionada. O que será que os alunos estão realmente "vendo" quando nos apoiamos em gráficos para introduzir idéias de derivadas, limites e integral? Mesmo a abordagem inicial de várias funções elementares, no ensino médio e inicial superior, pressupõe implicitamente que o estudante pode construir em sua mente uma função dada por um gráfico. É bastante usual que o ensino de certas funções elementares, por exemplo $f(x) = a^x$, consista de uma lista de algumas de suas propriedades algébricas e uma descrição verbal do seu comportamento resumida em um gráfico, o que significa que o estudante deve ser capaz de "ler" este comportamento no gráfico.

Esta pesquisa foi realizada segundo uma metodologia inspirada no marco teórico descrito em Asiala, Brown, DeVries, David, Dubinsky, Mathews, e Thomas (1996), e se baseia em uma perspectiva teórica conhecida como teoria Apos .

O objetivo da teoria Apos é modelar as construções mentais presentes na aprendizagem de matemática avançada. Segundo essa teoria, de maneira muito sucinta, a construção de um conceito matemático se inicia com a manipulação de objetos físicos ou mentais previamente construídos para formar ações: ações são então interiorizadas para formar processos que são encapsulados para formar objetos. Objetos, uma vez construídos, podem ser submetidos a novas ações e processos, e assim por diante. Finalmente, ações, processos e objetos podem ser organizados em esquemas. Daí o nome dado à teoria – Apos - por referência a essas construções.

Por exemplo, no contexto geral de funções, um aluno realiza uma ação quando, dado um número específico, ele calcula o valor da função para esse número, empregando uma fórmula dada. Neste caso ele estará executando ações com números e expressões algébricas. A presença de uma concepção ação neste domínio se evidencia quando o aluno não é capaz de realizar muito mais do que calcular valores específicos da função ou manipular sua fórmula. Já o aluno estará pensando em uma função como um processo quando ele a percebe como recebendo valores e retornando valores, um ato imaginado, sem necessidade de efetuar cálculos, raciocinando sem o apoio de uma fórmula. O aluno que tem uma concepção objeto de função já pode pensá-la como um todo e realizar ou imaginar ações sendo realizadas com este objeto como por exemplo decompo-la, derivá-la, etc. Uma descrição detalhada dessas construções e das relações entre elas pode ser encontrada no artigo mencionado acima (Asila et al., 1996).

2. A QUESTÃO ESTUDADA

A pergunta básica desta pesquisa é a seguinte:

> Como podemos descrever as construções mentais que um estudante poderia fazer para compreender 1.o conceito de gráfico cartesiano de uma função de uma variável real, dada por uma fórmula algébrica. 2. O conceito de uma função definida por uma curva desenhada no plano cartesiano e que obedeça ao teste da linha vertical.

Além disso, nós desejaríamos entender como estas construções poderiam ser feitas pelo aprendiz, que dificuldades ele poderia encontrar nesse processo e, que espécie de atividades poderiam potencialmente levar às construções pretendidas.

Realizamos uma análise teórica inicial do que significa compreender os conceitos em questão [1] e de como essa compreensão pode ser adquirida pelo aprendiz elaborando um modelo de cognição relativo a esses conceitos em termos das construções que um estudante poderia fazer para desenvolver sua compreensão. Coletamos dados empíricos empregando um questionário (conjunto de problemas) que foi proposto a 115 alunos universitários em um curso de Introdução ao Cálculo na Puc-Rio [2] e 15 professores de ensino médio que freqüentavam cursos tipicamente de formação continuada. Realizamos também algumas entrevistas baseadas nas respostas a esse questionário. Esse conjunto de dados foi analisado de forma articulada com nossa análise teórica e parte da literatura relevante. Finalmente revisamos nossa análise teórica inicial para refletir os dados empíricos e formulamos uma decomposição genética para cada um dos conceitos em estudo, isto é , um conjunto estruturado de construções mentais que pode descrever como esses conceitos podem se desenvolver na mente de um indivíduo. Este modelo de cognição pode ser ilustrado e validado por meio de transcrições de trabalhos e de falas dos sujeitos envolvidos na pesquisa.

Devido às limitações de espaço, vamos expor, a seguir, somente a decomposição genética relativa a um dos conceitos estudados.

3. RESULTADOS

Decomposição Genética do conceito de gráfico cartesiano de uma função de uma variável real, definida por uma expressão algébrica [3]

Pré-requisitos:

- O esquema numérico do aluno deve incluir pelo menos uma concepção processo de números reais. Especificamente ele pode imaginar uma infinidade de reais em um intervalo limitado por inteiros consecutivos e a “continuidade” da reta
- Compreensão da correspondência 1-1 entre $\Re\times\Re$ (pares ordenados de números reais) e o plano Cartesiano (plano coordenado retangular), incluindo compreensão acerca de escalas nos eixos e orientação bidimensional do plano. Também inclui a conscientização a respeito das aproximações de ordem prática envolvidas ao trabalhar com qualquer modelo físico de RXR.
- seu esquema de função deve abranger pelo menos uma concepção ação de função definida por fórmula como definido em Breindenbach (1992).

[1] Ao término da seqüência de cursos de cálculo.

[2] Agradeço aqui a todos os alunos e professores que colaboraram com esta pesquisa.

[3] com o significado que estamos dando às concepções ação, processo e objeto deste conceito no estágio atual desta pesquisa.

4. CONCEPÇÃO AÇÃO

A compreensão do gráfico de uma função dada por uma fórmula pode se iniciar pela consideração de alguns pares (x, y) onde y = f (x), sua marcação no plano cartesiano e a construção de uma curva suave e contínua ligando esses pontos. Isto inclui o protocolo de ligar os pontos em uma certa ordem – de acordo com valores crescentes de x - e usando arcos de curva monótonos. Não é provável que este protocolo esteja firmemente enraizado na definição de função (por exemplo, condicionado pelo teste da reta vertical) ou na expressão da função dada.

Quando um estudante está limitado a executar este tipo de ação ao ser solicitado a esboçar o gráfico de uma função, dizemos que ele tem uma concepção ação desses gráficos.

Neste nível o estudante pode considerar um gráfico como sendo uma "receita de construção" e pode reconhecer somente os pontos que ele marcou a partir de uma tabela de valores como pertencentes ao gráfico.

Quando solicitado a ler um valor f(a) em um gráfico ele pode conseguir ler somente se o ponto (a ,f (a)) foi um dos pontos que ele marcou, em parte porque as curvas ligando esses pontos, apesar de obrigatórias pela receita, são percebidas como "decorativas". Quando perguntado "O que é o gráfico de uma função?" tal estudante pode descrevê-lo somente como resultado de uma tal construção com uma função específica.

Estudantes nesse nível podem ficar prejudicados por esquemas numéricos muito restritos e hábitos de ensino segundo os quais são feitas tabelas somente com umas poucas entradas inteiras. Se perguntado quantos pontos ele precisa conhecer para desenhar um gráfico de uma função, a maior parte deles responde que no máximo 5 ou 6.

A idéia de que é suficiente saber alguns valores de uma função para construir o seu gráfico pode ser observada com uma freqüência surpreendente. Esta é uma daquelas concepções errôneas, talvez forjada por hábitos didáticos, bastante arraigada e difícil de modificar. Já testemunhamos o trabalho de uma aluna matriculada em Cálculo I, esboçando o gráfico de uma função racional, no qual ela calcula o valor da função para x = -1, 0, 1 e 2, marca os pontos correspondentes e conecta-os por segmentos de reta. Isto após ter diligentemente e corretamente estudado os sinais da função e de suas derivadas primeira e segunda e calculado os limites necessários para esboçar o gráfico.

Quando estudantes de ensino médio são introduzidos às funções afins e quadráticas, eles são informados de que seus gráficos são retas e parábolas, freqüentemente sem nenhuma justificativa, podendo então construir a concepção de que estas afirmativas são auto evidentes, sem justificativa. Muitos professores nem percebem que ao escolher uma "boa" tabela e ligar os pontos marcados de uma "certa" maneira estão usando o que já sabem sobre a função cujo gráfico está sendo esboçado. Alunos iniciantes não podem discriminar entre "boas" ou "más" tabelas e não têm nenhum motivo para ligar os pontos da maneira "correta". Como apontou Freudenthal (1983), depois que dominamos um assunto, a questão de como e porque os estudantes não o compreendem não é mais colocada, não pode nem mesmo ser entendida como uma pergunta significativa e relevante.

Um estudante que tem uma concepção ação pode não reconhecer que os pontos (x, y) do gráfico de f são tais que y = f (x), e que os pontos (x, y) fora do gráfico são tais que $y \neq f(x)$; e dentre estes quais são os que satisfazem y > f(x) ou y < f(x).

Em uma longa entrevista com a aluna Leide, que na ocasião foi um protótipo da concepção ação, vimos como ela revelava dificuldade com estas idéias. Após desenhar o gráfico de y=x+1 ligando alguns pontos que ela mesma marcou cuidadosamente, ela se esforça por responder à pergunta do entrevistador: encontrar pontos que satisfazem a inequação y< x+1. Ao tentar responder a pergunta ela chega a tomar três pontos sobre a reta que havia desenhado, substitui suas respectivas coordenadas na inequação e verifica, para sua surpresa, que não é a inequação y<x+1 que é satisfeita pelas coordenadas de cada um desses três pontos, mas sim a equação y = x+1.

Provavelmente, um aluno nesse nível não se sente à vontade com a notação simbólica f (x), preferindo trabalhar com y, como observamos em uma entrevista com a professora recém formada B, na qual ela procura explicar o que é o gráfico de f(x) = 2x +1. Inicialmente, B reformula a expressão para y = 2x +1 porque, a seu ver "esta notação é mais pertinente ao contexto gráfico". Depois ela começa a calcular alguns pontos... calcula para x = 1 e obtém y = 3... e diz " bem agora tenho um par (1,3)". O entrevistador então lhe diz "ok... você tem o par (1, f(1))..." procurando orientar a conversa para uma definição posterior formal de gráfico. A professora B retruca que não gosta desta forma..." (1,f(1))... (1,3) é completamente diferente de (1, f(1))....quando a gente escreve (1,3) ... a gente tem um par mesmo..."

5. Concepção Processo

Quando o estudante reflete sobre as ações de calcular, marcar e ligar pontos (x, f (x)) (um número finito deles), ele pode interiorizar estas ações num processo mental de considerar todos os pontos (x, f(x)) (uma infinidade) e desenhar uma curva que represente este conjunto. Aqui o sujeito é capaz de descrever um gráfico como o conjunto de todos os pares (x, f(x)) e pode se questionar sobre a representatividade do gráfico nos trechos em que os pontos não foram de fato calculados sendo consciente das escolhas que faz à medida que decide como esboçar o gráfico entre dois pontos que tenha calculado e marcado. Ele reconhece que uma tabela de pontos não pode dar informações suficientes para possibilitar o desenho de um gráfico representativo.

Dizemos que um estudante que construiu um tal processo tem uma concepção processo do conceito em estudo.

Nesse nível, o sujeito pode perceber que os pontos (x, y) no gráfico são aqueles para os quais y = f(x), e o pontos (x, y) fora do gráfico são tais que $y \neq f(x)$. Provavelmente ele se refere à segunda coordenada de um ponto sobre a curva por f(x) e pode harmonizar informações geométricas e algébricas ao longo da produção do gráfico de uma função. Para isso ele pode manipular a fórmula dada para predizer ou confirmar as propriedades de um gráfico, por exemplo: fatorando para identificar zeros da função, utilizando ferramentas de Cálculo, etc.

Neste nível o sujeito está consciente das diferenças entre gráficos qualitativos e quantitativos, em particular das convenções empregadas nos primeiros e a natureza parcial dos últimos. Ele pode ser consciente de que diferentes escolhas de escala afetam a aparência de gráficos quantitativos.

O aluno Michel, um protótipo da concepção processo quando foi entrevistado, ao ser perguntado se duas retas fazendo ângulos diferentes com o eixo horizontal[1] poderiam ambas corresponder a uma reta de inclinação 2, disse que tinha certeza que sim. Ele não conseguiu inventar escalas com as quais alguma das retas apresentasse inclinação 2 mas, começando com y = 2x + 1 ele explicou como diferentes escalas poderiam levar a gráficos fazendo diferentes ângulos com o eixo horizontal.

Neste estágio de desenvolvimento, o sujeito pode começar a coordenar o processo gráfico com outras ações ou processos para formar novos processos. Um exemplo de coordenação desse tipo consiste em situar uma dada função no contexto de uma família de funções e esboçar o seu gráfico a partir do gráfico de um membro típico da mesma, de forma mais econômica, sem precisar começar o esboço de cada gráfico da mesma família sempre do zero.

O estudante com uma concepção processo pode entender que o gráfico de $y = x^2 + 7$ pode ser construído a partir do gráfico de $y = x^2$ realizando uma translação vertical de 7 unidades. Depois de ver tabelas de valores e ter plotado alguns pontos dos gráficos de ambas as funções, ele é capaz de gerar uma imagem mental dos dois gráficos e de como eles se relacionam. De início ele pode ser capaz de esboçar gráficos de translações mas pode ter dificuldades com contrações e expansões.

Ele pode não conceber uma família parametrizada de funções, por exemplo, pensar em $y = x^2 + 7$ como um membro da família a dois parâmetros $y = ax^2 + b$, apesar de distinguir entre uma função quadrática e outra de acordo com os valores de seus coeficientes. Mas ele pode conceber um tipo particular de coordenação de ações e processos, por exemplo, a construção do gráfico de $y = 3x^2 + 7$ a partir do gráfico de $y = x^2$ como uma alternativa para melhorar seu desempenho gráfico.

[1] As duas retas estavam desenhadas em dois planos nos quais estavam desenhados dois "eixos" sem escalas explicitadas.

6. Concepção Objeto

O processo gráfico pode ser encapsulado em um objeto mental como resultado da aplicação de transformações (ações ou processos) sobre ele. Neste caso dizemos que o sujeito constrói uma concepção objeto do conceito em estudo.

O esboço gráfico de membros de famílias parametrizadas de funções é um exemplo de tais transformações e pode ser o começo da encapsulação mencionada. O estudante que construiu uma concepção objeto pode conceber famílias de funções parametrizadas e as relações entre os parâmetros e os gráficos correspondentes.

Quando ele vê uma fórmula como $f(x) = 3(x-7)^2 + 4$, ele identifica as famílias a um parâmetro $g(x) = kx^2$, $h(x) = (x-a)^2$ e $t(x) = x^2 + c$, associadas a seus gráficos, e coordena as informações que possui para obter o gráfico de f. O sujeito com uma concepção objeto pode produzir estes gráficos quase que automaticamente, no entanto ele é capaz de justificar o método empregado.

Ao mesmo tempo esse sujeito pode imaginar seqüências de transformações para ajustar um dado gráfico a uma fórmula, por exemplo, associar o gráfico de uma senóide à fórmula f(x) = a sin(3x) + b. Ao escolher um membro da família de expressões ele pode fornecer evidência de que tem uma concepção objeto de cada um de seus membros.

7. Conclusão

Segundo a literatura pertinente e nossas observações, a concepção objeto de função praticamente não é encontrada entre alunos matriculados nos cursos de Cálculo na universidade. (Breidenbach ,1992)

Podemos observar que não há uniformidade nas representações gráficas apresentadas em livros e salas de aula e, apesar de algumas serem mais adaptadas do que outras como suporte de certos raciocínios, os estudantes parecem que não se movem com facilidade entre elas. Mesmo em relação a uma habilidade simples como a de representar um ponto pertencente ao gráfico de uma função f, parece que há uma diferença cognitiva entre conceitualizar a representação de um ponto (b, f(b)): 1. somente (ou prioritariamente) como a interseção de duas linhas (x = b e y = f(b)) e 2. simultaneamente como a interseção dessas duas linhas e como a extremidade de um segmento vertical que vai do ponto (b,0) até o ponto (b, f(b)). A primeira forma parece ter mais afinidade com uma concepção ação de gráfico e a segunda parece estar mais em conformidade com uma concepção processo, enfatizando a dinâmica entrada/saída.

No estudo de funções dadas por gráficos, sem expressão algébrica subjacente, um indivíduo com uma concepção do primeiro tipo mencionado pode memorizar o método de marcar f(b) no eixo vertical a partir de um certo valor b marcado no eixo horizontal, mas não faz muita coisa além disso, inclusive podendo não reconhecer f(b) como o comprimento do segmento que vai de (b,0) a (b, f(b)). Por outro lado, ele tem dificuldades com o símbolo f(b), ficando mais seguro com a existência de números no eixo vertical; para ele é difícil imaginar valores para a função, necessitando de um número para que o valor da função assuma certo grau de realidade em sua mente ou de seu melhor sucedâneo nesse contexto, de um ponto f(b) no eixo vertical.

É interessante saber que Oresme (1323-1382) criou pela primeira vez um "gráfico" para representar grandezas variáveis (qualidades – velocidade) no qual ele representava seus valores (intensidade das qualidades) por segmentos (não por números) colocados perpendicularmente a um outro segmento representando o tempo. O gráfico ilustrava as intensidades da qualidade em diferentes instantes. Oresme nunca mediu intensidade de qualidade nenhuma. Suas considerações funcionais foram totalmente qualitativas e teóricas. (Rene de Cotret, 1987)

E finalmente, a interpretação da construção de gráficos de membros de uma família de funções como kf (a x + b), a partir do gráfico de f, como resultado de ações efetuadas no gráfico de f é carregado de dificuldades para o aluno. A discriminação necessária entre os problemas que tratam de "translações/ reflexões (distâncias preservadas, curva rígida) e de "compressões/expansões" (distâncias não preservadas, curva elástica) é difícil mesmo para aprender "como fazer". A compreensão destas construções, uma compreensão que vá além de memorização de estratégias, parece requerer uma coordenação complexa entre ações e processos em diferentes registros de representação – numérico, gráfico, simbólico, tabular e algébrico – e uma conceitualização de gráfico como conjunto de pontos. E, pelo que pudemos observar, conjecturamos que conceber f(b) como o comprimento do segmento que vai de (b,0) até (b, f(b)) pode ser mais bem adaptado á compreensão do processo de esboçar gráficos de tais famílias do que concebe-lo como um ponto no eixo vertical.

Este trabalho pretende contribuir com as reflexões sobre a aplicação de novas tecnologias computacionais no ensino aprendizagem de funções no seguinte sentido: Uma das vertentes bastante estudadas do emprego dessas tecnologias como ferramenta de ensino tem se apoiado no fato de que estas facilitam o acesso e a interação com os gráficos de funções e assim permitem, com maior facilidade, o estudo de representações múltiplas e suas associações. No entanto *é preciso assegurar-se de que* os *alunos interagem com gráficos como funções ou representações de funções, tendo já construído esses conceitos em algum nível, e não com "coisas" geradas automaticamente nas telas sem lhes atribuir significados adequados.* Acreditamos que a utilização de computadores/calculadoras pode contribuir positivamente para a construção da concepção objeto de função por permitir a ação sobre gráficos, o que é bastante dificultado se realizado a mão, e assim criar condições cognitivas para as ações mentais respectivas.

Referências:

ASIALA, M., BROWN, A., DEVRIES, D., DAVID, J., DUBINSKY, E., MATHEWS, D., THOMAS, K. A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, v.2, p.1-32, 1996.

BAKER, B., COOLEY, L., TRIGUEROS, M. A Calculus Graphing Schema. Journal for Research in Mathematics Education, v. 31. n.5, p. 557-578, 2000

BREINDENBACH, D., DUBINSKY, E., HAWKS, J., NICHOLS, D. Development of the process conception of function. Educational Studies in Mathematics, v.23, p. 247-285, 1992.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en didactique des mathématiques, v.7.2, p. 5-31, 1986.

DUVAL, R. Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitive, v. 5, p. 37-65, 1993.

FREUDENTHAL, H. Didactical Phenomenology of Mathematics Structures, Dordrecht. 1983.

RENE DE COTRET, S. La notion de fonction a travers les representations graphiques du mouvement, Une experimentation suggerée par l´ histoire. Proceedings do PME XI , p.155, 1987

CAPÍTULO 23

IHTEM

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 261:269.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01** © 2002, Editora IME-UERJ.

MÁXIMOS E MÍNIMOS: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA

Virginia Maurell Lobo Pereira

Universidade Santa Úrsula, Colégio Cruzeiro
endereço eletrônico**:** vlobo@ism.com.br

Resumo*: Esta pesquisa foi motivada pela implantação de um grupo de pesquisa em Cálculo entre os professores do Instituto de Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula, que buscavam alternativas na realização de seus cursos face ao baixo rendimento de seus alunos. A pesquisa histórica deve-se ao consenso do grupo em buscar a origem, formação e desenvolvimento dos conceitos fundamentais do cálculo. Concomitante ao levantamento histórico, a análise da construção do conhecimento é observada sob o ponto de vista do estudo das formas de representação de James Kaput e da formação do pensamento matemático de David Tall. Observou-se que a construção de um conceito matemático obedece a uma lógica histórica, não necessariamente relacionada ao tempo histórico. Concluiu-se também que a evolução do conhecimento matemático será tão mais rica e abrangente quanto forem as representações distintas associadas ao conceito. A proposta do texto é a de orientar para a flexibilidade na visualização das diversas representações através da aplicação de projetos.*

Palavras-chave*: Reforma do Cálculo, História da Matemática, Máximos e Mínimos.*

Abstract: *Higher education teaching has played an important role in changing standards in calculus courses. This is manifested by the effort expended on including technology such as graphic calculators and computers on engineering courses. This text was written during research at Universidade Santa Ursula studying problem solving techniques applied on projects. Our purpose here is to discuss different mathematical representations such as graphics or algebraic expressions. We will give a general overview of the historical development of maximum and minimum value problems and their representations analyzed by James Kaput theory of representations and by David Tall words on the development of mathematical thinking.*

Key words: *Calculus Reform; History of Mathematics: Minima and Maxima.*

"É pouco provável que alguma pesquisa em geometria seja mais útil ou envolvente do que aquela relacionada a máximos e mínimos."

Maclaurin (1742)

Como resultado do trabalho desenvolvido pelo grupo de estudos da reforma do Cálculo do Instituto de Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula – Rio de Janeiro do qual faço parte, foi criado, no âmbito do Instituto, o Seminário de História e Metodologia do Cálculo como componente do curso de Mestrado em Educação Matemática da mesma Instituição. Um dos objetivos da formação do grupo era o de buscar, dentre a bibliografia existente, material de pesquisa que indicasse novas opções para o desenvolvimento de um Curso de Cálculo. A intenção principal era a de pesquisar quais novas metodologias e currículos poderiam ser utilizados nos cursos iniciais de Cálculo, sabidamente fonte de obstáculos para os alunos e um sério entrave tanto na sua vida acadêmica quanto na sua disposição de apreender novos conceitos. O ingresso nas universidades constitui a passagem do aluno para níveis mais elaborados de conhecimento matemático. Não é sem temor que esses alunos chegam às nossas aulas, principalmente porque, no tocante à experiência anterior, os alunos que tem ingressado no curso superior vivenciaram a matemática com "enorme desgaste, tanto pela falha em reter o conhecimento, quanto pelo fracasso em realizar novas conexões". Tall (1994)

A mudança do estágio cognitivo, com a introdução de métodos axiomáticos e dedutivos no ensino superior, representa uma fonte de crise com resultados bem conhecidos sob a forma de altos índices de evasão e repetência. Este momento é definido por Tall(1995) como um estado de stress cognitivo e propõe, "desenvolver os vínculos entre conceitos e processos de modo a criar habilidades nos procedimentos matemáticos para a solução de problemas", como forma de reduzi-lo,

Com o esse enfoque na percepção dos vínculos entre conceitos e processos, faz-se necessário o uso da epistemologia, definido como estudo crítico dos princípios e resultados da ciência, visando determinar fundamentos lógicos, o alcance e o valor neles contidos. É objetivo desse trabalho apresentar uma proposta pedagógica, sob a forma de orientações para práticas que privilegiem as conexões entre novos conhecimentos a estruturas já existentes, com ênfase especial na reestruturação do seu conhecimento.

A estrutura curricular adotada nos cursos de Cálculo I do IEM/USU, no molde em que era praticada, já não produziam os resultados que se esperava alcançar. O alto índice de repetência, na faixa de 40%, e a evasão dos alunos eram reflexos de mudanças que precisavam ser consideradas. Entre as sugestões encaminhadas pelo grupo, optamos por analisar os panoramas nacional e internacional, quanto a novas publicações e pesquisas, como parâmetro de comparação. Buscando material diferenciado para o curso de Cálculo, como resultado dessa pesquisa bibliográfica, optamos por realizar uma experiência seguindo a filosofia da publicação produzida pelo Consórcio Harvard, sediado junto à Universidade de

Harvard, a qual faz parte do grupo de Universidades que pesquisam uma nova estrutura para os cursos de Cálculo, tanto no contexto teórico quanto nas práticas sugeridas com forte apoio de tecnologia. Não é objetivo deste trabalho a recomendação de textos de base para um curso, nem mesmo o seu modelo curricular, mas ressaltar que a proposta alternativa apresentada pelo Consórcio nos fez repensar aspectos metodológicos do curso de Cálculo.

Com o surgimento de sistemas de computação simbólicos e a crescente participação do aluno na construção do seu conhecimento, um dos objetivos do Consórcio era mais do que uma simples revisão curricular. A proposta deveria privilegiar o processo de descoberta do aluno, reduzir a ênfase no domínio de técnicas, estimular o entendimento conceitual e o desenvolvimento de habilidades na solução de problemas que envolvessem múltiplas etapas, conforme a análise dos objetivos gerais do Consórcio, na interpretação de Amgott (1994).

Fruto das reuniões do grupo dos professores de cálculo do IEM/USU, foi feita a opção de pesquisar um novo modelo de texto de apoio que visasse introduzir novas estratégias de ensino. Essas estratégias deveriam seguir as novas tendências, em que se utilizasse o desenvolvimento de projetos como ferramenta pedagógica e a análise histórica do conteúdo escolhido para entender a gênese daquele conceito. A análise histórica não é enfocada nos textos produzidos pelo Consórcio, uma vez que a proposta está voltada para a utilização de tecnologia e desenvolvimento de habilidades de pensamento matemático.

Analisando a linha de ação proposta pelo Consórcio, percebemos a necessidade da pesquisa da análise histórica da evolução dos principais conceitos de cálculo, de forma que estivéssemos mais seguros na adoção de novo currículo ou proposta pedagógica. Mais do que o interesse histórico, o estudo da construção de uma teoria, pode ser de grande auxílio na formação de atividades motivadoras e de fixação de aprendizagem. Podemos recorrer a documentos como as propostas do ICMI (International Comission of Mathematics Education) para o período de 1997-2000, no tocante à utilização da história da matemática para a pesquisa em educação matemática cita que:

> Pode ser apropriada uma análise crítica, construtiva da visão que a ontogenia recapitula a filogenia, isto é, que o desenvolvimento individual do conhecimento matemático, segue o desenvolvimento histórico das idéias matemáticas. (pgs 5 e 6, das recomendações do comitê responsável pelo uso da História da Matemática, ICME)

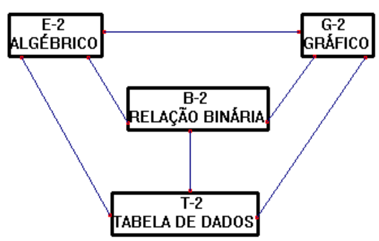
A análise e a comparação entre o processo histórico e o processo individual do aluno são defendidas por Piaget e Garcia (1989) no seu último livro, *Psicogênese e a história da ciência*. Neste livro Piaget realiza um estudo da origem e da evolução das funções psíquicas (psicogênese ou psicogenia) na formação do pensamento científico na física, álgebra e geometria. Em 1997, James Kaput, professor da Universidade de Dourthmouth, EUA, procura estender as etapas de desenvolvimento de Piaget e Garcia para analisar o desenvolvimento histórico do Cálculo, baseado no princípio da filogenia x ontogenia. Kaput (1997) resume a perspectiva de Piaget e Garcia (1989) , como:

> Acompanhar o desenvolvimento de uma idéia, significa perceber níveis crescentes de estrutura: o intraoperacional , na observação das propriedades do objeto, o interoperacional, na observação das relações entre objetos e na transoperacional em que, a partir das relações, observam-se quais as propriedades inerentes à estrutura teórica. (pg84)

Ainda pela ótica de Piaget e Garcia (1989), de modo a perceber os níveis crescentes de estrutura deve-se levar em conta que cada período de transição é mediado por fases de assimilação e acomodação, cuja definição encontramos no texto de Steffe (1996):

> A assimilação é a integração de uma realidade ou imagem a uma estrutura e a acomodação é a modificação da estrutura conceitual em resposta a uma perturbação necessária para que o desenvolvimento cognitivo ocorra.

Kaput (1997) defende que o que Piaget na verdade está postulando é que esses estágios e mecanismos não são de natureza psicológica ou histórica mais sim epistemológica. No seu modelo de representação como vemos na figura abaixo, Kaput considera que o cálculo, cuja construção dependeu de desenvolvimento do pensamento algébrico, teria como base a conexão entre diferentes sistemas de representação: o cálculo algébrico (sistema E2), a construção de gráficos (sistema G2), a análise de dados experimentais (sistema T2) e a relação binária (sistema B2) que representa as definições e todas as propriedades inerentes ao experimento realizado.



Uma vez que o desenvolvimento histórico do cálculo apresenta importantes reconstruções e reorganizações do conhecimento, destacamos os momentos e etapas de evolução dos conceitos de cálculo necessários à determinação de máximos e mínimos. Como metodologia do registro das etapas históricas da pesquisa buscou-se um tipo de organizador gráfico que permitisse visualizar as relações entre a construção dos conceitos fundamentais do cálculo e a sua evolução. Optou-se pela utilização de mapas conceituais, um dos tipos de organizadores gráficos que surgiram como visualizações de processos de abstração.

Autores como Sfard e Novak, recomendam que o paralelo entre a construção individual do conhecimento de uma teoria e o seu desenvolvimento histórico, ou seja, a psicogênese nos termos de Piaget, deve ser utilizada com cautela. Em Sfard (1994) não podemos deixar de registrar a recomendação de que "os processos de reconstrução podem não seguir os meandros dos primeiros viajantes através de uma região desconhecida." (pg195)

Certamente os processos históricos não ocorrem de modo regular e seus registros são discutíveis. Por exemplo, escolásticos como Oresme (século 14) já conheciam formas de representar quantidades variáveis graficamente antes de ser estabelecido o conceito de função, conforme entendimento de historiadores como Boyer (1949) ou Eves (1973). As datas das cartas de Fermat não refletem a cronologia esperada quanto ao desenvolvimento teórico da construção do método de maximização, segundo a versão apresentada por Stromholm (1968). Com estudo criterioso, poderíamos eleger, como no texto de Sfard (1994), a análise lógica da construção do conceito como um poderoso aliado no entendimento do processo de apreensão do conceito, conforme o paralelo que a autora realiza entre a construção histórica e o desenvolvimento da álgebra.

Ao justificar as etapas defendidas por Piaget&Garcia (1989), Novak (1998) ainda completa que na perspectiva de Piaget falta considerar

> 1) que a aprendizagem é realizada por uma complexa rede de conceitos e proposições, e 2) que fatores de natureza social e pessoal podem influir no aprendizado e na construção do conhecimento. pg 94

Esta análise feita por Novak (1998), tem raízes nas teorias de Vygotsky que, procurando entender as relações entre pensamento e linguagem para a compreensão do funcionamento psicológico do ser humano, buscou as respostas na dualidade filogenia versus ontogenia. Esta visão das teorias de Vygotsky tem sido base para outros pesquisadores que buscam comparar "o desenvolvimento da espécie humana (filogênese) com o desenvolvimento do indivíduo humano (ontogênese) para compreender a origem e a trajetória desses dois fenômenos", como encontramos no texto de Oliveira(1997).

O enfoque sociocultural das teorias de Vygotsky participa das novas tendências em educação matemática que surgiram por ocasião do Terceiro Congresso Internacional de Educação Matemática, na Alemanha em 1976. O pesquisador Ubiratan D´Ambrosio descreve em linhas gerais o que vem a ser essa tendência:

> É um programa que visa explicar os processos de geração, organização e transmissão de conhecimento em diversos sistemas culturais e as forças interativas que agem nos e entre os três processos. (1990)

Dubinsky (1997), comentando o texto de Kaput (1997) e, refletindo sobre a perspectiva de Piaget&Garcia, afirma que poucas tentativas foram feitas no sentido de

> estudar o desenvolvimento histórico e a psicogênese em conjunto, isto é olhar para a história por uma perspectiva epistemológica e simultaneamente entender o aprendizado de um indivíduo por uma perspectiva histórica. (pg158)

Atentos a essas considerações, podemos entender as fases da evolução do cálculo e o paralelo com o modelo de Kaput:

a) a contribuição dos gregos

Os problemas de maximização relacionados a este período na Antiguidade, dependem de análises fundamentadas na lógica, na argumentação e na teoria das proporções. Estas habilidades são parte integrante do que Kaput define como relação binária e formam o núcleo da prova e da demonstração.

b) contribuição do período medieval

Deve-se aos árabes e aos hindus a generalização do sistema numérico e a disassociação do número da representação geométrica no que foi um passo considerável no desenvolvimento das idéias fundamentais do cálculo. Esse avanço viria a significar que os símbolos algébricos permitiriam generalizar regularidades do sistema numérico. Seguidor de Aristóteles, Francis Bacon traz um novo enfoque no conceito de movimento. Ele introduz a idéia de ímpeto como um conceito em que o corpo, uma vez posto em movimento, continuará em movimento por uma tendência interna. A teoria de Bacon tornou mais fácil de ser aceita a noção intuitiva de velocidade instantânea, neste ponto ainda não definida, e que teve como conseqüência promover discussões sobre a variabilidade da qualidade ou do movimento.

O mais notável entre os que estudaram a variação de quantidades foi Nicole Oresme. Oresme fez uso da intuição e de diagramas geométricos e de um sistema de coordenadas em fase inicial. Esta representação gráfica determinada por Oresme, como herança da tradição grega, refletia uma necessidade de construir uma representação geométrica da variação. Temos aqui os primeiros passos da associação entre o sistema de representação gráfica (G2) e a definição de variação presente no sistema (B2) de relação binária.

c) Renascimento

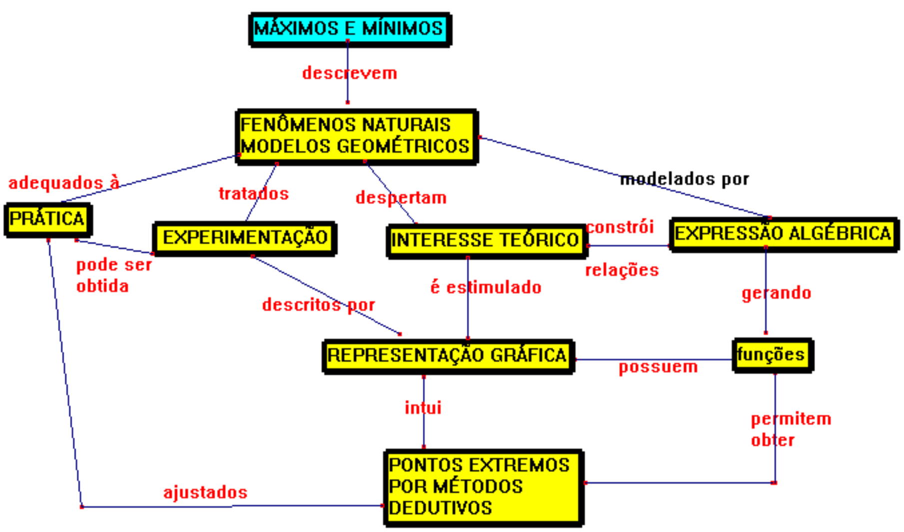
No final da Idade Média as universidades e os textos produzidos já trabalhavam com a concepção de limite e infinitésimos. Apesar da base lógica do cálculo ser aritmética, foram as tentativas de interpretação geométrica, no estudo de centros de gravidade, que criaram as conexões necessárias para se construir um dos principais conceitos da base do cálculo. Kepler empregaria a construção de tabelas para determinar o volume de um barril e observaria que a variação próxima do volume máximo tornava-se menor. A experimentação teve aqui o papel de produzir a observação de uma regularidade. O sistema (T2) dos dados experimentais só viria a produzir significado maior nas relações binárias com o advento dos métodos algébricos que produziram ferramentas que permitiam a generalização da regularidade observada.

d) A partir de Fermat e Descartes

A introdução de símbolos para representar grandezas associadas por relações algébricas também foi responsável por mudanças significativas nos desenvolvimento do cálculo. O pensamento algébrico permitiu avanços no conceito de variação e foi responsável pelo desenvolvimento da geometria analítica de Descartes que associava curvas às equações. Com Descartes e Fermat temos a primeira manifestação da união entre álgebra e geometria. A álgebra renascentista de Cardan e Viete permitiu que, a partir de Descartes, fosse possível a unificação de métodos e que evoluísse a percepção de padrões através de símbolos algébricos. Deve-se a Fermat o primeiro algoritmo de determinação de valor extremo. Durante o século XVII muito se fez para fornecer ao cálculo uma rigorosa fundamentação teórica. Reconhecidamente devemos a Newton e Leibniz o mais completo trabalho na criação das estruturas do cálculo, na aglutinação de todo conhecimento que lhes foi transmitido. Ambos contribuíram, com a estrutura notacional que criaram, para métodos gerais de busca de ótimos da função.

A busca de uma estrutura que definisse um método geral de solução de problemas de máximos e mínimos passou por um longo período de abstração e generalização. Durante os séculos XVIII e XIX os conceitos de limite, derivada e intergral evoluem lentamente, e é nesse período que devemos a Cauchy uma rigorosa fundamentação aos conceitos básicos do cálculo: o infinitesimal, derivadas como limites e diferenciais. (Kaput, 1997).

Com o rigor lógico introduzido por Cauchy, característico do sistema B2, são percorridas todas as etapas do modelo geral de Kaput. As definições formais, suas demonstrações e provas foram alcançadas quando outras representações do mesmo experimento haviam sido assimiladas. No quadro abaixo temos o mapa conceitual do sistema de representação dos métodos de obtenção de valor extremo:



Para discutir uma proposta pedagógica que enriquecesse as conexões entre as diversas representações presentes nos mapas conceituais de máximos e mínimos, foram encontrados textos de apoio que se basearam em pesquisas promovidas pelo NSF (National Science Foundation) nos Estados Unidos, no que vem sendo acompanhado por outros países como Canadá, México e Inglaterra.

Os textos publicados pelo NSF dizem respeito a grupo de estudos de diferentes universidades onde seus relatos foram coletados em publicações sobre o papel da pesquisa no aprendizado do aluno de cálculo. A criação desses grupos tem permitido a produção de livros didáticos com enfoques inovadores. Uma dos enfoques encontrados diz respeito à construção de projetos como forma de desenvolver no aluno o hábito da pesquisa e o gosto pela descoberta intelectual.

A adoção dos métodos de resolução de problemas, através da elaboração de projetos, tem sido visto como instrumento que influi diretamente na capacidade do aluno perceber as diferentes representações envolvidas no conceito de máximos e mínimos, conforme já vem sendo previsto em alguns textos mais recentes. Novas publicações têm surgido, e de certo modo acompanhando a filosofia do Consórcio Harvard, em que se estimula o investimento em atividades que envolvam tecnologia, aliadas à criação de projetos, como formas de produzir flexibilidade, evidenciar a contextualização e conexões entre as diferentes representações do problema.

Referências:

AMGOTT , STEVEN M. & JANE E. FRIEDMAN - DERIVEing a new approach to Calculus – In Eves' Circles -- *MAA* 34/94.

BACHELARD, GASTON*, (1938)* – Trad. ABREU, ESTELA - A formação do espírito científico – *Contraponto* – 1996

BOYER, CARL B. – The History of the Calculus and its conceptual development – *Dover* - 1949

DUBINSKY, ED - The Role of History in Mathematics Education, Mathematical Thinking and Problem Solving *IEA*/1997

EVES, HOWARD – The History of Calculus – *Dover* - 1973

KAPUT, JAMES Democratizing Access to Calculus: new routes to old roots –University of Massachusetts – USA, Mathematical Thinking and Problem Solving – *IEA/*1997

MOREIRA , MARCO ANTONIO & FERNANDO LANG DA SILVEIRA- Instrumento de Pesquisa em Ensino & Aprendizagem. *EDIPUCRS* 1993

NOVAK, JOSEPH – Learning Creating and Using Knowledge –*Lawrence Erlbaum Associates Publishers*, London – 1998

PIAGET&GARCIA -– Psychogenesis and the History of Science – *Columbia* – 1989

SFARD, A – On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics,* 22(1), 1- 36. 1994.

STEFFE, L – Children's multiplying and dividing schemes – G. Harel & Confrey Eds – The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany, NY: *State University of New York Press* – 1986

STROMHOLM , PER – Fermat's Methods of Maxima and Minima and of Tangents. A Reconstruction –Departamento de História da Ciência – *Harvard University* – 1968

TALL, DAVID – Cognitive development, representations and proof. – Paper – *Institute of Education, London.* – 1994 – pp. 27-38

TALL, DAVID - Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking - 1995- *Proceedings of the 19th PME* – Recife, Brasil

CAPÍTULO 24

IHTEM

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 271:282.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

PROJETO DE UM AMBIENTE DE APRENDIZADO PARA COMPLEMENTAR O ENSINO DO MÉTODO SIMPLEX EM SALA DE AULA

Raquel de Oliveira Prates
Instituto de Matemática e Estatística[1]
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
raquel@ime.uerj.br

Rosa Maria V. Figueiredo
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
rosa@ime.uerj.br

Catharine Ferreira Bach
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Resumo: *Neste trabalho é proposto um sistema de apoio ao aprendizado do método simplex, o AMPLIAR, que complementa o ensino feito em sala de aula oferecendo ao aluno um ambiente onde é possível se concentrar no entendimento dos passos a serem executados e nas decisões envolvidas a cada passo, e não nas operações algébricas necessárias. Para o projeto do AMPLIAR propomos e utilizamos um método de modelagem de tarefas, o GOMSQ. O seu objetivo é possibilitar a representação das dúvidas dos alunos durante as tarefas de aprendizado previstas pelo educador e o apoio a ser oferecido para cada uma delas.*

Palavras-chave: *Programação Linear, Informática na Educação, Interface Humano-Computador*

Abstract: *In this work we present a system named AMPLIAR designed to support the learning of the simplex method. The system offers an environment where it is possible to be concentrated in the agreement of the steps that compose the simplex method instead of being concentrated on the algebraic operations that must be done. In order to design the system AMPLIAR we propose a task modeling method, GOMSQ, which makes possible the representation of students' questions foreseen by the educator and the support to be offered to each of them.*

Key words: *Linear Programming, Technology in Teaching , Computer-Human Interface.*

---

[1] Rua São Francisco Xavier, 524 - CEP: 20550-013, Rio de Janeiro – RJ, Brasil.

1. INTRODUÇÃO

A Programação Linear (PL) é uma das áreas da Programação Matemática mais conhecidas. O seu surgimento e primeiro método de solução, o Método Simplex, é devido ao trabalho de George Dantzig em 1947. Diversos problemas práticos podem ser modelados como problemas de PL, dentre eles: planejamento e distribuição de recursos, dimensionamento de redes de telecomunicações e planejamento de produção. Devido à grande importância da PL ela é ministrada em vários cursos de graduação e, em geral, 30% da carga horária é dedicada ao ensino do Método Simplex.

A grande quantidade de operações algébricas necessárias para resolver um problema linear de grande porte utilizando o Método Simplex pode desmotivar o aluno a aprender, ou fazer com que ele priorize as operações algébricas em detrimento ao entendimento do processo. Existem diversos pacotes para resolução de problemas de PL (e.g. CPLEX, LINDO, What's Best e XPRESS) cujo objetivo é a resolução eficiente de problemas lineares de grande porte. O uso destes sistemas no ensino da PL, e do Método Simplex, se limita à exibição da solução de problemas envolvendo um número grande de variáveis.

Com o objetivo de apoiar o aprendizado do Método Simplex foi proposto o CONPLEX na década de 80. Em 1993, este sistema foi revisto e foi proposto o SIAMPLEX (Viana Júnior, 1993). Estes sistemas permitem a execução do Método Simplex passo a passo e informam os alunos dos erros cometidos a cada passo. Embora eles apóiem o aluno na execução do método, o seu apoio a um melhor entendimento do método se restringe à informação do tipo de erro ocorrido. Além disso, estes sistemas tiveram pouca preocupação com a qualidade das suas interfaces.

O design de software educacional traz novos requisitos para os processos de desenvolvimento e avaliação de software e, conseqüentemente, novos desafios para a indústria de software. Um dos aspectos fundamentais ao sucesso de um software é a qualidade da sua interface com os usuários. A interface envolve todos os aspectos de um sistema com o qual o usuário mantém contato0 (Moran, 1981), e logo tem um impacto direto no uso que as pessoas podem ou conseguem fazer dele. Uma interface deve ser projetada considerando-se métricas de qualidade como usabilidade e comunicabilidade. Uma interface tem boa usabilidade (Preece et al, 1994) quando os usuários têm facilidade em aprendê-la e utilizá-la, conseguem se lembrar como atingir os objetivos que têm e, fazem isso com alto grau de produtividade, satisfação pessoal e eficiência. Uma interface tem boa comunicabilidade (Prates et alii, 2000) quando consegue transmitir com sucesso ao usuário a mensagem do designer, de forma que o usuário compreenda para que o sistema serve, quais as vantagens de usá-lo, como funciona, e quais os princípios gerais de interação embutidos na interface.

No projeto de uma interface educacional deve-se ter em mente que, além de satisfazer aos requisitos de usabilidade e comunicabilidade, ela deve também proporcionar o aprendizado de um conteúdo pelo usuário (i.e. um aluno). Isto traz implicações não apenas para a etapa de avaliação de interfaces, mas também para o seu design. Afinal, nem sempre os modelos, técnicas e métodos desenvolvidos para interfaces de softwares genéricos são apropriados para interfaces de sistemas de aprendizado, uma vez que estes não apenas acrescentam novos requisitos ao projeto a ser desenvolvido, mas muitas vezes alteram requisitos existentes. Por exemplo, um dos novos requisitos é que as técnicas de ensino e os objetivos de aprendizado estejam representados na interface de forma a guiar as atividades dos alunos. Para isso, é necessário que o educador interaja com o projetista de interface. No projeto do sistema AMPLIAR utilizamos um método de modelagem de tarefas, o GOMSQ, proposto especificamente para a modelagem de ambientes educacionais. O seu objetivo é possibilitar a representação das dúvidas dos alunos durante a tarefa de aprendizado prevista pelo educador, e o apoio a ser oferecido para cada uma delas.

Na próxima seção descrevemos o projeto do sistema AMPLIAR, com foco no apoio oferecido ao aluno e na modelagem de tarefas utilizando o método GOMSQ. Na seção 3 apresentamos o sistema AMPLIAR propriamente dito. Em seguida apresentamos a avaliação preliminar feita e discutimos os principais indicadores obtidos. Na última seção apresentamos as conclusões do trabalho e os próximos passos a serem seguidos.

2. PROJETO DO SISTEMA AMPLIAR

Apoio ao Aprendizado

O Método Simplex requer que uma grande quantidade de operações algébricas elementares seja executada durante a resolução de um problema linear. Isto pode desmotivar o aluno a aprender o método ou fazer com que ele priorize as operações algébricas em detrimento ao entendimento do processo. Além disso, essa grande quantidade de operações algébricas pode levar o aluno a cometer erros durante a resolução de um problema. A correção destes erros implica em refazer os passos da resolução a partir do erro identificado e envolve novas operações algébricas. Esse alto custo para refazer um problema quando identificado um erro leva o aluno, muitas vezes, a desistir da resolução do problema.

Estas dificuldades limitam o professor a exemplos pequenos, definidos com poucas variáveis, e o impossibilita de trabalhar alguns conceitos em PL como ciclagem e degenerecência. Soma-se a isso o pouco tempo disponível para treinamento do método em sala de aula e a dificuldade do aluno de realizar tal treinamento em horário extraclasse quando deverá encontrar os erros cometidos e verificar a corretude de sua resposta. A utilização de sistemas comerciais de PL permitiria ao aluno conferir a solução, mas dificilmente identificar e entender os erros cometidos. Ademais, se o aluno tem dúvidas durante a resolução de um problema em horário extraclasse, com freqüência isto impossibilita a continuação da resolução até que esta dúvida seja tirada, possivelmente na próxima aula. O AMPLIAR surgiu do desejo de se complementar o ensino do Método Simplex sendo feito em sala de aula. Para atingir este objetivo ele oferece ao aluno um ambiente interativo que permite ao mesmo se concentrar no entendimento dos passos a serem executados e nas decisões envolvidas a cada passo, não nas operações algébricas necessárias.

GOMSQ

Com o objetivo de atender às necessidades descritas utilizou-se no projeto da interface o método de modelagem de tarefas para aprendizado, GOMSQ (Goals, Operators, Methods, Selection Rules and Questions). Este método é baseado no GOMS simplificado[1] (Lee, 1993) e no método de avaliação de comunicabilidade [0] e associa aos passos da tarefa de aprendizado a serem executados pelo aluno, as possíveis dúvidas dos alunos previstas pelo educador e as respostas a elas. O modelo de tarefas passa então a incluir aspectos relacionados ao entendimento do método. Com base neste modelo o projetista da interface pode então desenvolver uma solução que diminua as rupturas no processo de aprendizado dos alunos.

O primeiro passo do educador é selecionar que expressões ele gostaria de representar no seu ambiente. Feito isso, o método consiste em: (1) fazer a modelagem de tarefas utilizando o GOMS simplificado; (2) a cada meta/submeta identificada na atividade de ensino, acrescentar o conjunto de expressões definidas como desejáveis; (3) associar a cada expressão, a cada passo, as respostas fornecidas pelo educador. A Tabela 1 mostra o conjunto de expressões selecionado pelo educador no projeto AMPLIAR

O que é?	O aluno quer saber o que é determinado elemento que aparece na resolução do Simplex.
E agora?	O aluno quer saber qual o próximo passo para a resolução do Método Simplex.
Como?	O aluno quer saber como ele deve fazer para executar uma determinada tarefa ou ação durante a resolução do Simplex.
Por quê?	O aluno quer saber por que determinado elemento aparece, por que determinado elemento possui o valor apresentado ou por que ele deve executar o passo indicado pelo software para prosseguir na execução do Simplex.
Eu entendi?	O aluno quer saber se realmente entendeu o que está fazendo, justificando a sua decisão.

Tabela 1- Expressões que identificam as dúvidas previstas no AMPLIAR.

Para ilustrar apresentamos parte da modelagem de tarefa utilizando o GOMSQ do projeto AMPLIAR. O método simplex foi descrito em termos de cinco metas: (1) Colocar o problema no formato padrão; (2) Definir uma solução básica viável inicial; (3) Definir qual variável entrará na base; (4) Definir qual variável sairá da base; (5) Apresentar a solução do problema. Cada uma destas metas foi descrita em submetas e, a cada uma delas, foi acrescentado o conjunto de possíveis dúvidas dos alunos e as respectivas respostas a serem oferecidas pelo sistema. A Figura 3 mostra a modelagem da meta (3):

[1] O GOMS (Goals, Operators, Methods, and Selection Rules) é um modelo de base cognitiva que tem por objetivo representar o comportamento dinâmico do usuário durante a sua interação com o computador. Para isto ele representa o comportamento humano através metas, operadores, métodos e regras de seleção. No GOMS simplificado (Lee, 1993) os operadores são abstraídos.

[2] O método de avaliação de comunicabilidade de uma interface associa às ações dos usuários um conjunto de expressões, que o usuário poderia exprimir durante a execução de uma tarefa, e que identificariam rupturas da sua interação com a aplicação.

Meta 3: Definir a variável que entrará na base
O que é *a variável que entrará na base?*
Resposta: É uma variável não pertencente à base atual que ao assumir um valor maior que zero permitirá reduzir o valor da função objetivo.
O que é *a base?*
Resposta: A base é uma submatriz B da matriz $A \in R^{mxn}$*, com dimensão mxm* $det(B) \neq 0$*, tal que* $x_B = B^{-1}b \geq 0$*. A solução associada a tal base é denominada solução básica viável e é um ponto extremo da região viável.*
Como *faço para escolher a variável que entrará na base?*
Resposta: Procure dentre todas as variáveis fora da base uma variável x_k *com* z_k*-*$c_k > 0$*.*
Por que *tenho que escolher a variável que entrará na base?*
Resposta: Porque a solução básica associada à base atual não é ótima, e é possível diminuir o valor da função objetivo ao fazer uma variável $x_k > 0$ *se* z_k*-*$c_k > 0$*, ou seja, ao fazer* x_k *entrar na base.*
E agora, *o que faço depois de escolher a variável que entrará na base?*
Resposta: Atribua à variável escolhida para entrar na base o maior valor possível.
Eu entendi, *por que escolhi a variável* x_k *para entrar na base?*
Resposta: A variável x_k *apresenta* z_k*-*$c_k > 0$ *e então ao atribuir a ela um valor maior que zero estarei diminuindo o valor da função objetivo.*

Figura 3 - Modelagem da meta (3) utilizando o GOMSQ.

Desta forma o GOMSQ permite que se projete o apoio tanto à execução, quanto ao entendimento do método simplex durante todo o processo de resolução de exercícios.

Apoio à Recuperação de Erros

Uma das principais diretrizes de interfaces é que o software previna erros dos usuários. Em um contexto educacional no entanto pode-se fomentar um erro do aluno, para garantir o aprendizado de um determinado ponto0 (Lewis et al, 1998). No sistema AMPLIAR o aluno pode fazer escolhas erradas, no entanto, só é possível prosseguir para a próxima etapa de resolução depois de identificar e corrigir seu erro. Esta decisão foi tomada porque o método simplex é iterativo, e logo se um erro só fosse descoberto muitas iterações depois, o aluno precisaria retomar a resolução do ponto onde o erro ocorreu. Isto poderia desmotivar o aluno e fazer com que abandonasse a solução do problema.

Além de prevenir erros, cabe à interface, uma vez ocorrido o erro, oferecer ao usuário uma explicação que o informe qual o erro ocorrido, o que o causou, e o que fazer para corrigi-lo. Com o objetivo de permitir ao aluno refletir sobre seu erro, e também sobre o método, o AMPLIAR não apresenta logo ao aluno a explicação completa do erro, mas o faz de forma gradativa. Ao longo da resolução de um problema, quando ocorre um erro o aluno é informado apenas do erro ocorrido. Se o aluno insiste no mesmo erro, uma mensagem um pouco mais detalhada lhe é oferecida. A partir da terceira vez consecutiva que um erro é cometido, o aluno passa a receber uma explicação completa sobre o erro. Finalmente, a partir da quarta repetição do erro é acrescida à última mensagem uma indicação do que deve ser feito caso não deseje continuar a resolução do exercício. A Tabela 2 mostra como exemplo as mensagens do AMPLIAR relativas ao erro na escolha da variável que entrará na base .

Mensagem 1	A variável escolhida não é a opção correta.
Mensagem 2	Verifique se a variável escolhida para entrar na base causará uma diminuição no valor da função objetivo.
Mensagem 3	A variável a ser escolhida deveria diminuir o valor da função objetivo. Para isso, deve-se escolher x_k com z_k-c_k >0 para entrar na base. Assim, estamos escolhendo tornar x_k>0 o que causará a almejada diminuição no valor da função objetivo.
Mensagem 4	A variável a ser escolhida deveria diminuir o valor da função objetivo. Para isso, deve-se escolher x_k com z_k-c_k >0 para entrar na base. Assim, estamos escolhendo tornar x_k>0 o que causará a almejada diminuição no valor da função objetivo. Se não desejar continuar a resolver o problema, clique no botão sair.

Tabela 2 - Mensagens de erro apresentados pelo AMPLIAR ao aluno ao errar na escolha da variável que entrará na base.

Note que a cada mensagem de erro uma nova informação é fornecida ao aluno na tentativa de fazê-lo perceber o erro na escolha da variável a entrar na base, e entender o critério que deve ser utilizado. Obviamente, o apoio progressivo não evita o caso onde o usuário erre três vezes consecutivas, propositadamente, para obter a resposta final onde o critério de escolha é apresentado.

3. SISTEMA AMPLIAR

O AMPLIAR foi desenvolvido para plataforma Windows utilizando Visual Basic. Para resolver um problema utilizando o AMPLIAR, o aluno deverá fornecer o problema no formato padrão. A cada passo, o aluno deverá fornecer as informações necessárias (e.g. qual variável entrará na base) aos cálculos daquele passo e em seguida selecionar o próximo passo. Se o aluno seleciona o passo incorreto, o AMPLIAR apresenta uma mensagem de erro, e não dá continuidade à resolução do problema. Quando o aluno seleciona o passo correto, o sistema então executa os cálculos algébricos relacionados com aquele passo e passa para o próximo. A Figura 2 mostra como estão organizadas as telas do AMPLIAR.

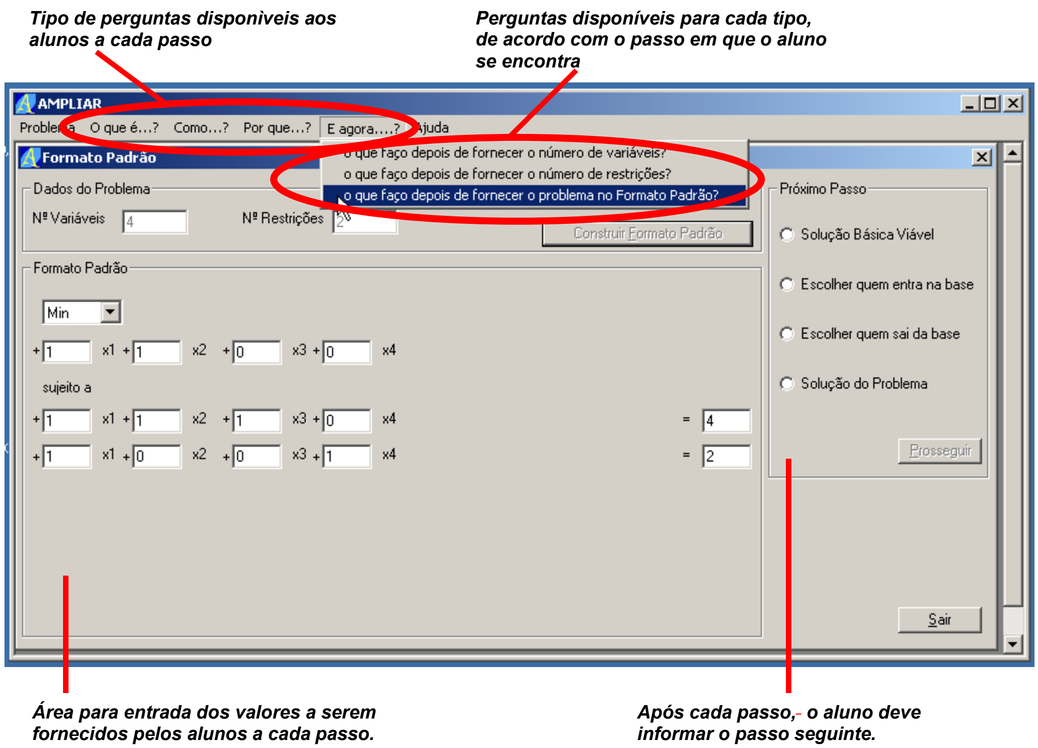


Figura 4 - Tela de entrada do formato padrão do sistema AMPLIAR.

Observe que no menu principal estão disponíveis todos os tipos de perguntas que podem ser feitas pelo aluno naquele momento[1]. Enquanto este menu está disponível durante todos os passos do método, as perguntas disponíveis a partir dele mudam de acordo com o passo do método simplex que o aluno está executando. A Figura 5 mostra uma pergunta “Como” feita pelo aluno durante o passo de definição de uma Solução Básica Viável inicial e sua respectiva resposta.

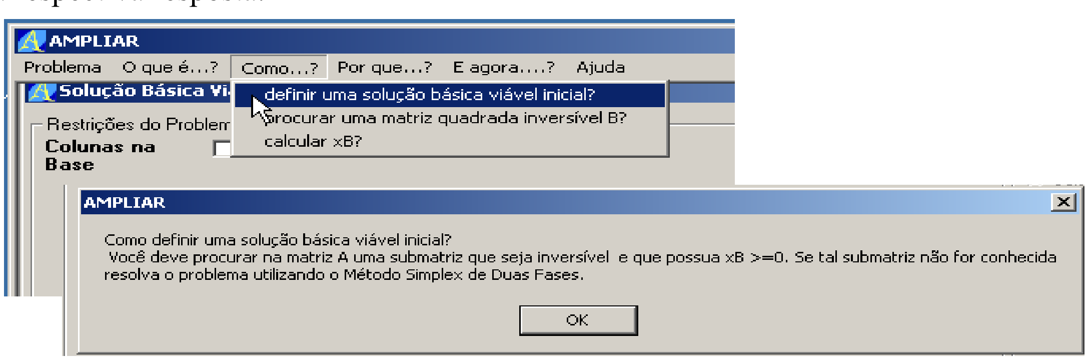


Figura 5 – Pergunta feita pelo aluno ao AMPLIAR relacionada com o passo de definição de uma solução básica viável inicial e resposta fornecida pelo AMPLIAR ao aluno.

---

[1] Nesta primeira versão do sistema não disponibilizamos a pergunta “Eu entendi?” visto que este tipo de pergunta exige que o sistema receba do aluno uma mensagem em linguagem natural e verifique a corretude da mesma. Dada a complexidade desta tarefa optamos disponibilizar a pergunta “Eu entendi?” em uma versão posterior do sistema.

4. AVALIAÇÃO PRELIMINAR

Para avaliar o AMPLIAR é necessário obtermos tanto indicadores do uso que os alunos farão do sistema, quanto do projeto e soluções propostas pelo educador e projetista. A observação do uso que os alunos farão do sistema e o impacto deste uso no seu aprendizado nos permitirá verificar se o AMPLIAR é capaz de atingir seu objetivo educacional, ou seja, apoiar o aprendizado e entendimento do método simplex por parte do aluno. Além disso, é importante sabermos qual o nível de interesse e satisfação dos alunos com relação ao o sistema, uma vez que o AMPLIAR é para ser utilizado em horário extra-classe se os alunos assim o desejarem. Para termos indicações sobre o projeto, pretendemos observar que uso os alunos fazem das expressões disponíveis, se o conjunto de perguntas e suas respostas cobrem todas as dúvidas que os alunos tiverem de fato (ou pelo menos grande parte delas) e se as mensagens de erro gradativas cumpriram o objetivo de incentivar o aluno a refletir sobre o erro cometido.

Uma avaliação preliminar do sistema AMPLIAR foi feita no curso de PL do Instituto de Matemática e Estatística da UERJ com uma turma composta de alunos dos cursos de Informática, Matemática e Estatística. Duas aulas após ser dado o método simplex em sala de aula, os alunos foram levados para o laboratório para utilizar o AMPLIAR, com o acompanhamento do educador e projetista. Como resultado desta primeira avaliação foi gerada uma lista de problemas a serem acertados e ajustes a serem feitos no AMPLIAR. Os problemas encontrados se dividem em aqueles relacionados com a proposta de apoio oferecida e aqueles de usabilidade e comunicabilidade do sistema. Os principais problemas de usabilidade e comunicabilidade observados são relacionados com a visualização dos passos do método oferecida pelo AMPLIAR. Na versão atual do AMPLIAR uma vez fornecidos os dados relativos a cada passo o aluno indica ao sistema que pode passar para o próximo, explicitando qual passo ele julga ser o próximo. O AMPLIAR automaticamente faz os cálculos necessários à execução daquele passo e novamente espera o aluno selecionar o passo seguinte. Este alto nível de abstração parece causar algumas dificuldades nos alunos. Como exemplo observamos que os alunos não conseguem perceber a dependência da escolha da variável que sairá da base com a escolha da variável que entrará na base e, com freqüência ficam sem saber se já terminaram o passo em que estão ou até mesmo em que passo estão. Além disso, foram identificadas algumas mensagens e notações que não foram bem compreendidas pelos alunos embora já tivessem sido apresentadas em sala de aula.

A nova versão do AMPLIAR sendo implementada atualmente tenta solucionar estes problemas deixando mais transparente para os alunos o que está sendo feito pelo sistema. Para isso, o aluno (e não o sistema) passará a estar em controle da execução dos cálculos e deverá requisitar explicitamente que os cálculos sejam efetuados pelo AMPLIAR. Os cálculos efetuados passarão a ser mostrados aos alunos. A nova versão contará também com um dicionário da notação sendo utilizada e com uma revisão do texto das mensagens apresentadas. Para verificar a qualidade da solução proposta, a nova versão será submetida a uma nova avaliação com os alunos de PL.

Em termos de indicações sobre a proposta de apoio ao ensino no projeto da interface do sistema AMPLIAR, a principal observação da avaliação foi relacionada com o uso que os alunos fizeram das perguntas. Em um primeiro momento, apesar de as perguntas estarem disponíveis no menu principal, os alunos não perceberam a possibilidade de as fazer para o próprio sistema. Muitas vezes eles faziam exatamente as perguntas que estavam disponíveis no sistema ao educador. Acreditamos que uma das razões que pode ter causado este comportamento é o fato de os alunos não estarem habituados à utilização de um software que ofereça respostas a questões relativas ao conteúdo com o qual estão trabalhando. Um outro fator que também pode ter contribuído é o local de apresentação das perguntas, uma vez que elas não são mostradas na janela em que os alunos estão trabalhando, mas na janela principal que a contém. A partir do momento em que o educador indicava aos alunos a possibilidade de fazer a mesma pergunta para o AMPLIAR, estes passavam a recorrer ao sistema e, apenas em caso de dúvidas sobre a resposta do sistema, recorriam ao educador. Esta observação nos leva a crer que o apoio comunicativo projetado utilizando o GOMSQ e implementado no AMPLIAR será útil aos alunos na consolidação do método em horário extraclasse. Esta observação também aponta para a necessidade de a interface enfatizar mais para o aluno a possibilidade de se fazer perguntas ao sistema.

Embora o projeto do AMPLIAR tenha pretendido explicitamente incentivar o raciocínio do aluno sobre seus erros e logo o aprendizado do método, ele não pode garantir que este será o comportamento do aluno. Durante o teste, observou-se que alguns alunos ao invés de buscar o aprendizado, tinham como objetivo único a finalização da resolução do exercício. Estes alunos não refletiam sobre suas ações ou sobre seus erros, mas simplesmente percorriam exaustivamente todas as opções oferecidas pelo sistema até descobrirem a correta. Futuramente, uma vez que se tenha uma versão consolidada sendo utilizada sistematicamente no curso de PL, pretende-se investigar possíveis formas de minimizar este comportamento.

5. CONCLUSÃO

O AMPLIAR é um sistema de apoio ao aprendizado do método simplex que complementa o ensino feito em sala de aula. Ele oferece ao aluno um ambiente onde é possível se concentrar no entendimento dos passos a serem executados e nas decisões envolvidas a cada passo, e não nas operações algébricas necessárias. A primeira versão do AMPLIAR, apesar de todos os problemas mencionados na seção anterior, foi bem recebida e utilizada pelos alunos. Este é um indicador positivo sobre o uso que os alunos poderão fazer do sistema, assim que uma versão mais robusta e consolidada esteja disponível para uso nos cursos de PL.

O AMPLIAR foi o primeiro projeto no qual foi utilizado o GOMSQ, um método de modelagem de tarefas que se propõe a representar a comunicação necessária para se prevenir rupturas no processo de aprendizado. O seu uso neste projeto mostrou que é possível utilizá-lo para se representar potenciais dúvidas dos alunos relacionadas à tarefa a ser executada e as respostas a serem oferecidas. Além disso, a avaliação preliminar forneceu indicadores dos benefícios de o educador pensar e representar esta comunicação para o aprendizado.

A partir das observações feitas na avaliação preliminar do AMPLIAR, ajustes e modificações estão sendo feitos para se obter um sistema mais robusto e cuja interface seja mais clara e usável pelos alunos. Pretendemos também instrumentalizar esta nova versão para que ela gere o log das ações executadas pelo aluno, o uso feito das perguntas a cada passo, e o nível de auxílio necessário para conseguir passar para o próximo passo, ou seja, quantas tentativas foram necessárias para se chegar à ação correta. De posse desta nova versão, poderemos fazer uma avaliação mais extensa do AMPLIAR, observando o uso que os alunos fazem do sistema durante o aprendizado do Método Simplex em exercícios em sala de aula e extraclasse. A partir destes dados poderemos avaliar a adequação das perguntas oferecidas e suas respostas, e os benefícios do uso do AMPLIAR no aprendizado do Método Simplex.

De posse de uma versão consolidada do AMPLIAR, pretendemos estender o apoio que este oferece ao aprendizado dos alunos. Para atingir este objetivo, planejamos incluir uma biblioteca de exemplos classificados por nível de dificuldade. De acordo com o seu conhecimento o aluno selecionaria os exemplos que gostaria de resolver no AMPLIAR. A partir desta biblioteca poderíamos oferecer ao aluno uma explicação completa sobre um exercício. Neste caso, o sistema executaria o problema e explicaria a cada passo toda a teoria necessária para o aprendizado do aluno. Nesta opção o aluno estaria se colocando no papel de aprendiz que observa o mestre resolver o problema. Além disso, gostaríamos de capacitar o sistema AMPLIAR com outras técnicas de PL. O primeiro passo nesta direção seria inserir uma opção para execução do método simplex de duas fases. Em seguida gostaríamos de criar um ambiente gráfico que permitisse tanto a visualização dos passos do método simplex na execução de problemas no R^2, como a própria resolução do problema.

Referências:

CARD, S.; MORAN, T.; NEWELL A. **The Psychology of Human-Computer Interaction.** Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1983.

LEE, G. **Object-Oriented GUI Application Development**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993.

LEWIS, C. et al. **Adapting User Interface Design Methods to the Design of Educational Activities**. In: CHI 98, Los Angeles, 1998. Anais. p.18-23.

MORAN, T. **The Command Language Grammars: a representation for the user interface of interactive computer systems**. International Journal of Man-Machine Studies, v. 15, p.3-50, 1981.

PRATES, R. O.; SOUZA, C. S. de; BARBOSA, S. D. J.; **A Method for Evaluating the Communicability of User Interfaces**. ACM Interactions, v.7, n. 1, p.31-38, 2000.

PREECE, J. et al **Human-Computer Interaction**. Wokingham: Addison-Wesley, 1994.

VIANA JUNIOR, W.de S.; **Siamplex: Sistema Interativo para Aprendizagem do Método Simplex.** Rio de Janeiro, 1993. 88p. Dissertação (Mestrado) – UFRJ.

CAPÍTULO 25

IHTEM

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 283:291.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01** © 2002, Editora IME-UERJ.

INTERNET & ENSINO DE MATEMÁTICA: UM CASAMENTO POSSÍVEL

Angela Rocha dos Santos

Instituto de Matemática[1]
Universidade Federal do Rio de Janeiro
angela@im.ufrj.br

Ricardo Silva Kubrusly

Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
risk@im.ufrj.br

Waldecir Bianchini

Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
waldecir@im.ufrj.br

Resumo: *Este trabalho visa conscientizar os professores do potencial da internet para o ensino da matemática, quer presencial quer a distância, e difundir o trabalho que vem sendo desenvolvido pela equipe do projeto Aplicação das Novas Tecnologias no Ensino de Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Tendo em vista as tecnologias de informação hoje disponíveis no Brasil, optamos pelo desenvolvimento de um "site" com características interativas que servisse como modelo para disciplinas "on line" e que, além de ser parte integrante de projeto de educação à distância e de formação continuada do IM-UFRJ, pudesse também ser utilizado como material de apoio ao professor no ensino presencial tradicional. A construção do "site" foi baseada em atividades interativas construídas a partir da utilização de "applets java" e "plugins" especiais tendo como princípio promover a participação ativa do estudante facilitando o aprendizado e desvendando o verdadeiro significado de "fazer matemática". Os hipertextos elaborados utilizam, intensamente, animações, mudanças de escala, variação de parâmetros e permitem uma efetiva interação com o usuário. O conteúdo valoriza aspectos históricos e interdisciplinares e contempla o desenvolvimento de "atividades matemáticas" baseadas no tripé explorar-conjecturar-demonstrar. Nestas atividades o aluno é levado a explorar e integrar aspectos gráficos-geométricos e analíticos dos conceitos abordados, a fazer conjecturas, concluir e, finalmente, demonstrar os resultados, transformando-se, dessa forma, de paciente em agente do processo educativo e desvendando o prazer e o verdadeiro significado de "fazer/estudar/entender matemática".O tema escolhido foi funções reais por ser este o ponto central e unificador de toda a análise matemática e da sua correta compreensão depender o entendimento futuro, mais ou menos penoso, de muitas outras idéias matemáticas de relevante importância. A escolha foi baseada, também, nas principais dificuldades de base apresentadas por*

[1]Caixa Postal 68530 - CEP 21945-970, Rio de Janeiro – RJ

professores de matemática do ensino médio. Dessa maneira, esta primeira disciplina-protótipo atende a múltiplos fins e clientelas variadas, permitindo uma avaliação de amplo espectro.

***Palavras-chave**: Funções Reais, Pré-Cálculo, Tecnologia no Ensino, Internet, EAD*

***Abstract:** The aim of this paper is to make teachers aware of the existing potential in the Internet for mathematics teaching both in and out of the classroom as well as to propagate the work being carried out by the project team for the Application of New Technology in Mathematics Teaching at the Math Institute of the Federal University of Rio de Janeiro (IM-UFRJ). Due to information technology already available in Brazil, we have opted for the development of an interactive site to serve as model for on-line courses and which, aside from integrating the long-distance education project and the continual IM-UFRJ training program, could also be used as back-up material for traditional teachers in the classroom. The construction of the site was based on interactive activities using java applets and special plug-ins so as to promote active participation and easier learning situations for students, showing them what "doing their math work" really means. The hypertexts that have been elaborated use a great deal of animation, change in scale, variation in parameters and afford effective interaction with users. The context is focused on historical and inter-disciplinary aspects as well as on the development of mathematical activities based on the explore-conjecture-demonstrate tripod. By means of such activities students are encouraged to explore and integrate graphic geometric and analytical aspects of the subjects broached, make conjectures, concluding and, finally, demonstrating their results. Thus they undergo the transformation from patient to agent in the educational process and discover the real pleasure and meaning behind "doing/studying/understanding mathematics." The chosen theme was Real Functions as this has been the central and unifying point in all mathematical analysis. Correct understanding of this point leads to a more or less burdensome future understanding of many other mathematical ideas of relevant importance. The choice was also based on the major basic difficulties presented by mathematics teachers at the high school level. Thus, this first course prototype serves many ends and a varied clientele, allowing for a full-spectrum evaluation.*

***Key words:** Real Functions, Pre-Calculus, Technology in Education, Internet, EAD*

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o baixo custo dos computadores e o desenvolvimento de novas tecnologias de comunicação, derrubando as barreiras geográficas e colocando os limites de tempo sob um novo prisma, vêm permitindo a aplicação, em larga escala, do computador no processo educacional, abrindo novas e desafiantes perspectivas no ensino, em particular no ensino de matemática, até então sequer imaginadas.

Vários programas governamentais vêm sendo implantados com o objetivo de possibilitar o acesso de alunos e professores a modernos equipamentos computacionais. Em nível federal, basta citar o programa ProInfo, de dotação de equipamentos computacionais para as escolas públicas e o programa recém anunciado da ANATEL, que está em vias de iniciar uma licitação no valor de R$ 700.000.000,00 para permitir a conexão de laboratórios em 13000 escolas, totalizando 300.000 computadores conectados à Internet e beneficiando pouco menos de sete milhões de estudantes.

A política brasileira apenas repete uma tendência hoje majoritária em outros países. O exemplo da Inglaterra é ilustrativo: lá, 90% das escolas, correspondendo à quinta série até o final do nosso segundo grau, dispõe de redes com um mínimo de 40 computadores conectados à Internet e a grande maioria de professores de Matemática nesse país declara usar, com freqüência, este recurso com seus alunos.

Entretanto, o número de boas experiências do uso do computador no processo ensino-aprendizagem é menor do que a sociedade poderia esperar, tendo em vista o volume de recursos disponibilizados para este fim. Ao contrário do que muitas vezes se pensa, materiais didáticos de qualidade adequados a este fim, são de difícil produção, necessitando de equipes interdisciplinares e de grande investimento em pesquisa. Em especial, existe a necessidade de se utilizar ferramentas computacionais que permitam a aplicação de novas metodologias de aprendizagem que sejam adequadas tanto ao nível do indivíduo quanto ao dos grupos sociais. Este tipo de material é raro em língua estrangeira e praticamente inexistente em português.

A disponibilidade nas escolas brasileiras, de boas ferramentas para o ensino de disciplinas específicas é fundamental para garantir que o investimento em facilidades computacionais renda os benefícios de melhoria na qualidade de ensino, esperados pela sociedade brasileira. Na ausência destas ferramentas e de material didático de qualidade a ser utilizado pelo professor na sua prática diária, em concomitância e de forma integrada com os demais materiais didáticos tradicionais (livros texto, materiais para-didáticos e materiais concretos), todo esse investimento somente terá o reflexo econômico de formar novas gerações de consumidores de que a indústria da informática necessita para obter lucros cada vez maiores.

Essa questão aponta para a necessidade urgente de desenvolvimento de ferramentas nacionais, distribuídas a baixo custo, apropriadas ao ensino de matemática associado a produção de material didático específico que integre a ferramenta a práxis docente; da redefinição de ementas e metodologias, bem como na utilização de tecnologias de informação em cursos de graduação, pós-graduação e em programas e projetos de formação e de formação continuada de professores de modo a suprir o mercado de profissionais especializados e prontos a construir a interface entre o mundo real e o mundo virtual.

Todos temos a sensação de que o ensino, em particular o ensino de matemática, pode e deve melhorar se soubermos explorar os múltiplos e variados recursos computacionais já hoje, ao nosso alcance. O caminho para concretizar este propósito é o que muitos estão buscando no momento.

Nesse sentido, o Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM-UFRJ) desenvolve um projeto pioneiro com o objetivo de desenvolver e disseminar ferramentas, metodologias, e materiais didáticos próprios incorporando e aplicando as novas tecnologias de informação ao ensino de matemática em todos os níveis, incluindo-se aí projetos de capacitação de professores e de educação à distância.

Relatar algumas das experiências realizadas e os resultados obtidos bem como apresentar o material desenvolvido, as principais propostas e possibilidades futuras é o objetivo deste trabalho.

2. Colocando as Idéias em Prática: a Escolha do Tema e do Veículo

A relação do ensino de matemática com o computador é paradoxal. Embora, desde o desenvolvimento dos primeiros computadores, a relação de proximidade entre as Ciências da Computação e a Matemática tenha induzido a experimentação do uso daquela no ensino desta última, a própria proximidade levou a demandas difíceis de satisfazer com as máquinas que estavam disponíveis até épocas recentes. Hoje, com a popularização da Internet como veículo de informação e comunicação, sua grande funcionalidade, versatilidade e potencial, parece ser possível atender a grande parte destas demandas.

As tecnologias de informação hoje disponíveis no Brasil incluem além da Internet, televisão, vídeo, vídeo-conferências e CD-ROM. Dessas, nos parece, que o potencial instrucional da Internet é o mais forte e está se fortalecendo mais a cada dia. Numa página "web", que pode consistir somente de texto e gráficos, é possível incluir animações, formulários, recursos interativos, áudio, vídeo, questões com resposta de retorno imediato, modelos de realidade virtual, discussões e muito mais.

Embora o acesso à Internet seja no momento, ainda, difícil e lento em muitos casos, esta situação parece estar se revertendo muito rapidamente e, levando-se em conta, o tempo médio para o desenvolvimento de uma disciplina a ser oferecida via Internet, é necessário começar a preparar agora o material e os cursos a entrarem em regime, a médio prazo.

Levando-se em conta estes fatores, optamos por desenvolver um "site" que servisse como modelo para disciplinas "on line" e que, além de ser parte integrante de projeto de educação à distância e de formação continuada do IM-UFRJ, pudesse também ser utilizado como apoio ao professor no ensino presencial tradicional.

O "site" é constituído por um conjunto de hipertextos interativos que permitem uma participação ativa do aluno e o estabelecimento de um canal de comunicação permanente e quase imediato com o professor.

Os hipertextos elaborados utilizam, intensamente, animações, mudanças de escala, variação de parâmetros e permitem uma efetiva interação com o usuário, levando o aluno a desenvolver "atividades matemáticas" baseadas no tripé explorar-conjecturar-concluir/demostrar. Nestas atividades o aluno é levado a explorar e integrar aspectos gráficos-geométricos e analíticos dos conceitos abordados, a fazer conjecturas, concluir e, finalmente, demonstrar os resultados, transformando-se, dessa forma, de paciente em agente do processo educativo e desvendando o prazer e o verdadeiro significado de "fazer/estudar/entender matemática".

O principal objetivo das atividades propostas é o de criar condições para que o aluno aprenda explorando, redescobrindo ou construindo, transformando-o de paciente - que é alguém que consome, aceita, guarda, reproduz e obedece - em agente do processo educativo - alguém que pensa, reflete, dirige, decide e atua.

O tema escolhido foi funções reais por ser este o ponto central e unificador de toda a análise matemática e da sua correta compreensão depender o entendimento futuro, mais ou menos penoso, de muitas outras idéias matemáticas de relevante importância. A escolha foi baseada, também, nas principais dificuldades de base apresentadas por professores de matemática do ensino médio. Dessa maneira, esta primeira disciplina-protótipo atende a múltiplos fins e clientelas variadas, permitindo uma avaliação de amplo espectro.

Os hipertextos foram elaborados utilizando-se os programas comerciais "Maple V", "Mathview" e o plugin "X-Theorist" bem como as linguagens Java e HTML, o Tabulae e o Mangaba, programas de geometria dinâmica, desenvolvidos no IM-UFRJ. A utilização conjunta destes recursos permite que se idealizem atividades que explorem os aspectos dinâmicos dos conceitos estudados, promovendo uma interação efetiva com o usuário final.

3. DESCRIÇÃO, OBJETIVOS E ESTRUTURAÇÃO DO "SITE"

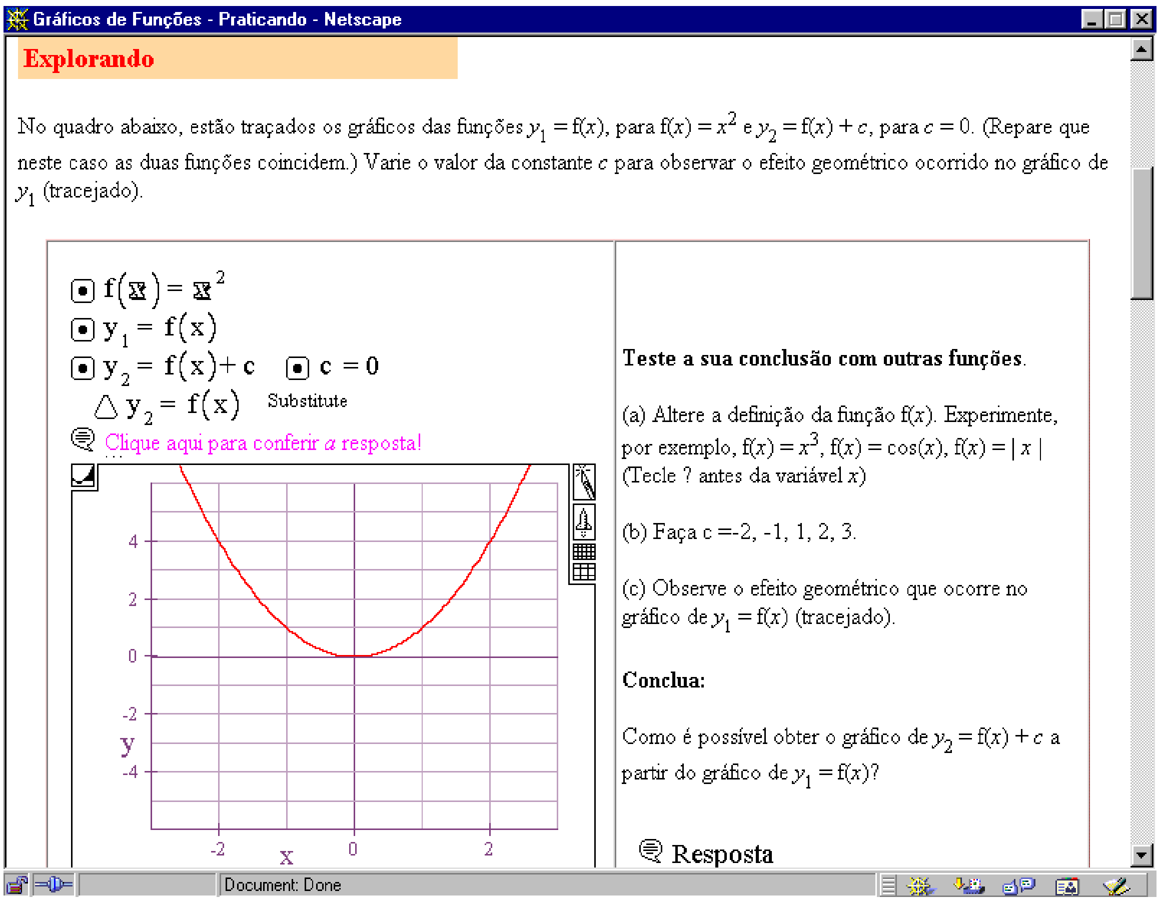
A disciplina estruturada neste "site" aborda o estudo das funções elementares: suas propriedades comuns, suas características próprias e inclui muitas aplicações. Estuda-se, também, funções definidas implícita e parametricamente, incluindo um breve estudo das seções cônicas e de lugares geométricos.

Os pré-requisitos necessários são somente, conhecimentos de álgebra elementar, em especial, resolução de equações de primeiro e segundo graus.

O público alvo são alunos do ensino médio, alunos de licenciatura em matemática e de primeiro ano de curso superior e professores de ensino médio.

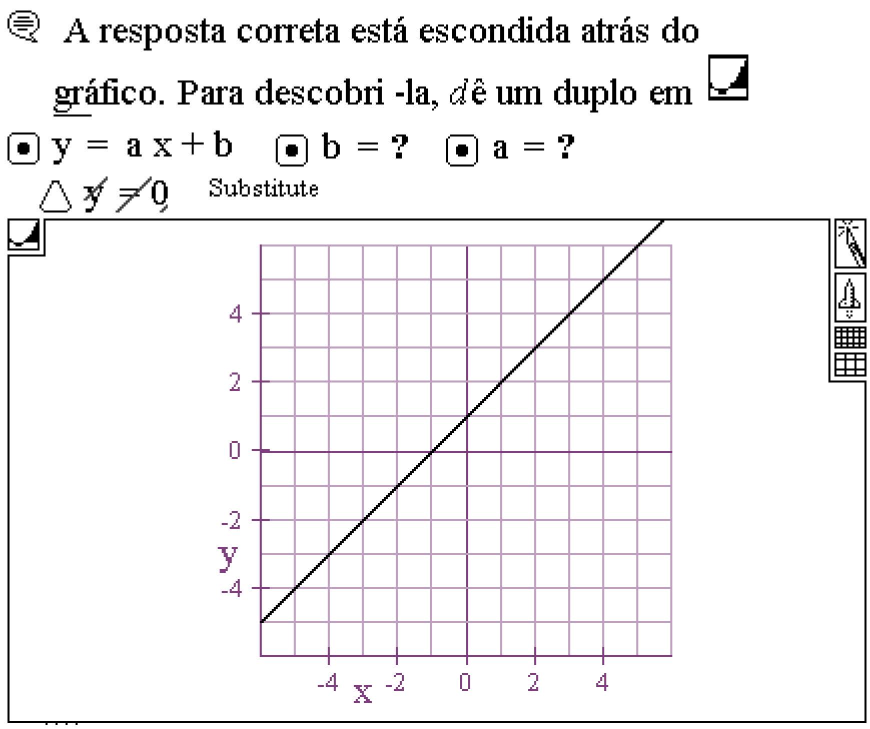
O conteúdo analítico inclui: números reais e coordenadas no plano; gráficos de equações e equações de retas; funções e seus gráficos; operações com funções e funções compostas; função linear afim, incluindo-se o estudo de movimentos uniformes e de taxas de variação média; equações paramétricas e vetores no plano; funções quadráticas e polinomiais, incluindo-se o estudo do comportamento no infinito; funções racionais com o estudo do comportamento assintótico; estudo analítico e geométrico das cônicas e de outros lugares geométricos; funções trigonométricas e suas inversas; funções logarítmicas e exponenciais com aplicações ao crescimento de populações, decaimento radioativo e em matemática financeira.

Na abordagem apresentada o enfoque é interdisciplinar e as atividades propostas são interativas, exigindo a participação ativa do aluno. Procura-se estimular a investigação levando o aluno a trilhar o caminho da construção do conhecimento científico.



4. EXEMPLOS DE ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Determine em cada caso a equação das retas cujos gráficos são dados abaixo. Para testar sua resposta substitua os valores de *a* e *b* na equação que os definem. A sua resposta será traçada em azul. Se você acertar, aparecerá na tela um único gráfico traçado em azul.



5. EXPERIÊNCIAS REALIZADAS E RESULTADOS ALCANÇADOS

Esta disciplina, elaborada inicialmente para oferecimento à distância em um curso de treinamento para os professores do Colégio Pedro II, no momento está sendo oferecida à distância para alunos de ensino médio (dentro do programa Matemática na UFRJ: Antecipando o Futuro – convênio especial que visa a integração da Universidade com o Ensino médio), para professores do ensino médio (dentro do programa permanente de capacitação docente do IM-UFRJ) e, também, como apoio ao ensino presencial para alunos do primeiro período dos cursos regulares da UFRJ e alunos de Licenciatura do IM-UFRJ, com boa aceitação e excelentes resultados.

O entusiasmo dos professores participantes dos vários projetos, incluindo os tutores da disciplina e os alunos da UFRJ, a procura cada vez maior de escolas interessadas em participar do convênio e o acesso constante e crescente à página permite que se conclua pelo acerto da estratégia e metodologias utilizadas.

6. OBSERVAÇÕES FINAIS E PROPOSTAS FUTURAS

Com a elaboração do material apropriado, pretendemos, disponibilizar na página, um leque de disciplinas que permita o oferecimento, à distância, de um curso completo de Licenciatura em matemática.

Desenvolvendo este material, procuramos mostrar como é possível utilizar a tecnologia para ensinar e aprender matemática. Esperamos que ele se constitua num valioso instrumento de capacitação e apoio ao professor e de melhoria na formação básica de nossos alunos.

Referências:

BIANCHINI, Waldecir & ROCHA, Angela – Aprendendo Cálculo com o MAPLE, Cálculo de uma Variável, 468 pg, LTC, 2002.

BIANCHINI, Waldecir & GIRALDO, Victor & KUBRUSLY, Ricardo & ROCHA, Angela – Introdução às Funções Reais – Um enfoque Computacional, IM-UFRJ, 1998.

DEMANA, F & WAITS, B.K & CLEMENS S.R & FOLEY G.D – Precalculus A Graphing Approach, Addison-Wesley, 1996.

EDWARDS,C.H.Jr. – Calculus and the Personal Computer, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1986.

NATIONAL Council of Teachers of Mathematics - Yearbooks.

TINOCO, Lucia A.A. – Construindo o Conceito de Função no 1^0 grau – IM-UFRJ, Projeto Fundão – SPEC/PADCT/CAPES, 1998.

WELLS, D & TILSON, L – Precalculus A view of the world around us – Prentice Hall, New Jersey, 1998.

Periódicos:

Revista do Professor de Matemática. SBM.

The Mathematics Teacher. NCTM

International Journal for Mathematics, Science and Technology Education

CAPÍTULO 26

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 291:300.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01** © 2002, Editora IME-UERJ.

EXAMINANDO UM PROBLEMA PREMIADO, À LUZ DA GEOMETRIA DINÂMICA

Maria Helena Wyllie Lacerda Rodrigues

Escola de Belas Artes – CLA
Universidade Federal do Rio de Janeiro
endereço eletrônico: wyllie@acd.ufrj.br

Resumo: *Este artigo visa promover um debate em torno de algumas diferenças entre o tratamento gráfico de problemas geométricos com o uso dos instrumentos tradicionais de desenho e o que lhes é dado pela 'geometria dinâmica'. Pretende, assim, comparar os diversos raciocínios seguidos, os distintos modos de operar e as capacidades cognitivas desenvolvidas em cada uma dessas práticas. Como ponto de partida, apresenta um problema, premiado para publicação numa revista em 1955, cujo enunciado foi resgatado e proposto através de uma lista de discussão com o intuito de estimular seus participantes a resolvê-lo, recorrendo ao ferramental de ambientes dinâmicos.*

Palavras-chave: *Resolução de Problemas, Geometria Dinâmica, Ensino Gráfico*

Abstract*: The goal of this article is to promote a debate around some of the differences between the treatment of geometrical problems with traditional tools and through the use of dynamic geometry. Thus, it seeks to compare the several thinking processes involved and the cognitive abilities developed along each one of these practices. An award-winning problem from a 1955 journal, posted on an online discussion group, was used as the starting point for this debate. Its goal was to stimulate the members of the group to look for a solution within a dynamic geometry setting.*

Key words: *Problem Solving, Dynamic Geometry, Graphics Teaching*

1. INTRODUÇÃO

Embora já familiarizados com programas de 'geometria dinâmica', quanto mais os exploramos mais nos surpreendemos com o seu potencial gráfico. Comparando o trabalho nesses ambientes com a prática tradicional da geometria dos esquadros e compasso – desenhos fixos no papel, traçados repetitivos, linhas e formas que, uma vez esboçadas, ocupam definitivamente um determinado espaço – encontramos ali uma fonte inesgotável para o tratamento de construções geométricas e, sobretudo, para a abordagem didática de problemas em que estas se fazem necessárias (Delmás e Rodrigues, 1999; Rodrigues e Rodrigues, 2001).

São inúmeros os depoimentos que, na literatura especializada, apontam as vantagens usufruídas nesses micromundos. Morrow (1997: p. 47), por exemplo, enaltece o uso da ‘Visualização Dinâmica’, argumentando que ela “estimula os alunos a ‘brincar’, a explorar e, com o incentivo dos professores, a formar conjecturas e pensar em problemas sobre aquilo que observam”. A ‘geometria dinâmica’ configura-se, assim, como o ambiente por excelência para experimentar caminhos alternativos na procura de respostas gráficas para problemas. Disponibiliza os meios que permitem ao usuário raciocinar a partir da manipulação de estruturas geométricas, arrastando seus elementos com a preservação das relações entre eles, e fazer descobertas ao testar idéias na tentativa de encontrar soluções para os exercícios de geometria. Possibilita, ainda, criar produtos visuais de apreciável plasticidade (Rodrigues, 1999; Rodrigues e Rodrigues, 2000; Gani e Belfort, 2000; Rodrigues 2001).

2. Como Desafio, um Problema Premiado

No ano de 1999, foi trazido a um fórum de discussão, via *web,* sobre o *Cabri-Géomètre*, um problema que havia sido publicado em 1955 na revista italiana *Sapere*[1], com o objetivo de estimular os participantes a tentarem resolvê-lo fazendo uso daquele *software*.

Eis o exercício proposto:

> Inscrever numa semicircunferência um triângulo ABC, tal que seus lados AC e CB (AB=diâmetro) cortem uma corda fixa MN, delimitando um segmento DE igual ao raio da semicircunferência (Figura 1).

Resolvemos a questão e editamos sua resposta com as ferramentas do *Cabri*, encaminhando-a para a lista. Logo após, algumas mensagens chegaram à nossa caixa de entrada, indagando sobre a heurística que nos havia inspirado, qual o caminho seguido no processo de resolução e se aquela questão pertencia a uma determinada classe de problemas.

Vale ressaltar que a via percorrida naquele momento fora a que sempre havíamos trilhado para, tradicionalmente, resolvermos questões que demandam um raciocínio mais a-

[1] p.133 - Concorsi con Premi – n^{o} 1157, exercício proposto por Gianni Aresti. O enunciado do problema foi divulg… ntes da lista Cabri (iniciativa do PROEM, … drigues e Rodrigues (2001). O mesmo exerc… étrie, como problema 10, pg. 45, da 6^{a} edi… (o original é de 1920, datando de 1875 … 101, nos Elementos de Geometria (FIC), tra… il desde o início do século XX.

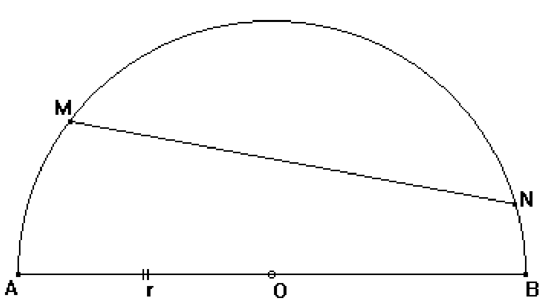


Figura 1: Dados do problema

profundado de nossa parte: desenhamos uma figura de análise (o problema supostamente resolvido); examinamos as relações entre os elementos ali presentes; elegemos um ponto-chave e procuramos identificar seus lugares geométricos. Quanto à 'geometria dinâmica', bem, esta apenas forneceu os instrumentos para que obtivéssemos, com rapidez e precisão, o traçado da resposta. A heurística inspiradora, naquela situação, era a mesma que normalmente desponta quando, com a atitude de investigadores, tentamos enxergar as pistas que se encontram camufladas no enunciado do problema.

Recentemente voltamos a trabalhar na mesma questão, já então com maior domínio das potencialidades dinâmicas do software, visando fazer uso destas para resolvê-la. Essa atividade nos levou a comparar os procedimentos gráfico-computacionais com as antigas práticas de desenho, surgindo-nos os seguintes questionamentos de ordem didática:

- Qual das estratégias usadas exige maior esforço cognitivo por parte do solucionador e caracteriza mais fielmente o que se entende por "resolução de problema"?
- Em que medida, na exploração de vias que permitem visualizar a solução, o "saber pensar" prepondera sobre o "saber fazer", ou vice-versa, e até que ponto um destes comportamentos (raciocinar; operar) pode levar ao outro?
- Que capacidades e habilidades são exigidas no decorrer de cada metodologia adotada?
- Qual a contribuição da 'geometria dinâmica' para o desenvolvimento dessas competências?

Passemos, então, à descrição dos caminhos que se abriram na busca da solução do problema, a fim de refletirmos mais criteriosamente sobre essas questões.

3. "Anatomia do Problema" - Primeiras Explorações em Ambiente Dinâmico

Uma tendência comum, quando trabalhamos com a 'geometria dinâmica' de maneira a obtermos uma configuração geométrica pedida, é a de lançarmos mão do ferramental capaz de nos fornecer, em curto tempo, uma resposta gráfica pronta e precisa. No caso aqui relatado, isso representa usar a potencialidade calculadora do programa para trazer à tela a imagem do problema resolvido. Como promover tal ação no exercício que nos serve de exemplo?

Antes de respondermos a esta pergunta, convém destacarmos uma facilidade oferecida por esse tipo de programa, particularmente útil nesta fase de experimentação: a possibilidade de deslocar elementos da figura com o cursor, recebendo simultaneamente informações sobre os dados numéricos decorrentes dessa manipulação. As figuras 2 e 3, editadas no *Cabri-Géomètre II*, apresentam dois procedimentos realizados nesse sentido.

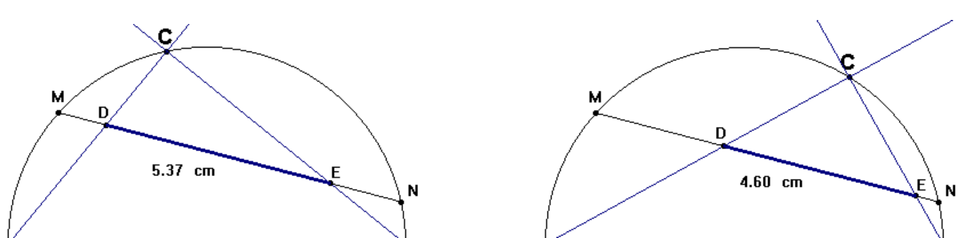
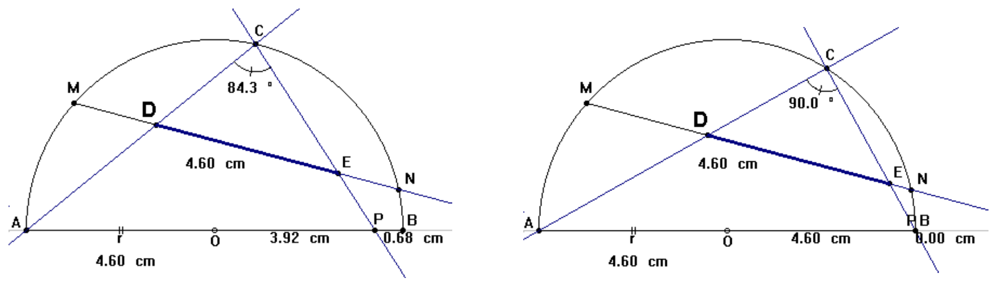


Figura 2: Deslocamento do ponto C



Na figura 2, à esquerda, a partir de um ponto C arbitrário pertencente à semicircunferência, traçamos as retas AC e BC, cujas respectivas interseções com a corda MN delimitam o segmento DE. Segundo o enunciado, tal segmento deveria ter o mesmo comprimento do raio da semicircunferência. Pelo fato de o ponto ter sido aleatoriamente alocado, constatamos, através da informação fornecida pelo programa, que aquela medida não se iguala à do raio. Nossa ação consiste em fazer o ponto C “deslizar” na semicircunferência, observando com atenção as decorrentes alterações numéricas registradas a partir do cálculo feito, silenciosamente, pelo *Cabri*. Paramos o processo, no instante em que o comprimento de DE torna-se igual ao de ‘r’, o que é mostrado na figura 2 à direita.

Operações similares são realizadas nos procedimentos ilustrados pela figura 3. A idéia consiste em alocarmos um ponto D qualquer na corda MN e a partir dele transferirmos, sobre esta, a medida do raio, determinando o ponto E. Em seguida, a reta AD é delineada, marcando-se C em sua interseção com a semicircunferência e, logo após, traçando-se a reta CE. Na interseção de CE com a reta suporte do diâmetro AB, indicamos um ponto P. Solicitamos ao *Cabri* que nos informe sobre as medidas dos segmentos OP e PB, bem como a do ângulo ACP (figura 3 à esquerda). Vale lembrar que o ponto arbitrário, marcado inicialmente, vem a ser aquele que se deixa manipular no processo de transformação. É a partir do deslocamento de D (ponto aleatório, nesta alternativa) que novas configurações vão surgindo e, conseqüentemente, suas medidas de referência sendo modificadas.

Comparando as imagens apresentadas na figura 3, podem ser constatados os efeitos da sucessiva alteração no posicionamento do ponto D: o comprimento de OP iguala-se ao de OB, tendo-se então PB=0 e o ângulo ACP=90 graus[1] (figura 3, à direita).

O leitor poderá argumentar, ao refletir sobre as estratégias ilustradas pelas figuras 2 e 3 que, por enquanto, a questão não está resolvida, ou seja, que obtivemos apenas a configuração final de sua resposta. Se assim se manifestar, concordaremos com a sua opinião, embora defendamos que a execução dessas operações tenha não somente exigido um conhecimento sobre o poder dinâmico do programa, mas também a habilidade de utilizá-lo, "brincando", observando e fazendo conjecturas nessas experimentações. Tal prática, a nosso ver, contribui para que o interessado em resolver o problema examine mais de perto sua 'anatomia', os elementos e relações relevantes existentes entre eles e o posicionamento (ou, ao menos, um dos possíveis) para o triângulo ABC. Isso faz com que o ambiente em que se trabalha atue como um excelente campo de construção do conhecimento, constituindo assim um instrumento didático de inestimável valor.

4. *LOCUS* – UM PODEROSO FACILITADOR DINÂMICO

Um outro tipo de tratamento, explorado no exercício, conta com o auxílio da ferramenta *locus*; é quando podemos avaliar com mais propriedade o potencial gráfico do programa, comparando-o ao uso tradicional da régua e do compasso.

A figura 4 mostra os passos preparatórios dados nessa alternativa: (1) arbitramos na corda MN um segmento DE com a grandeza requerida; (2) traçamos retas pelos pares de pontos A,D e B,E; (3) determinamos o ponto C, em sua interseção, tomando-o como chave no problema.

Note-se ainda na figura 4 que, por ter sido aleatório o posicionamento de DE, o ponto C não pertence à semicircunferência, como exigido na proposição. Nosso esforço se concentra, a partir daí, na tarefa de identificar os lugares geométricos de C - terceiro vértice do triângulo procurado. Um destes lugares geométricos, como condição imposta de início, é a

[1] Observe-se, no da ser 90 graus,
não é caracterist 3.

semicircunferência, ou seja, o arco capaz do ângulo de 90 graus cujo diâmetro é AB. O outro … bem, neste momento entra o *locus* em ação.

O traçado do *locus* de C, em função do deslocamento do ponto D ao longo da reta suporte da corda MN, é mostrado a seguir em telas do *Cabri-Géomètre II* (Laborde & Bellemain, 1994), *The Geometer's Sketchpad* (Jackiw, 1990) e *Cinderella* (Richter-Gebert & KortenKamp, 1999). Embora algumas diferenças entre os programas citados interfiram na localização exata do vértice C, como falaremos adiante, pode-se visualizar o segundo lugar geométrico deste ponto como sendo uma hipérbole.

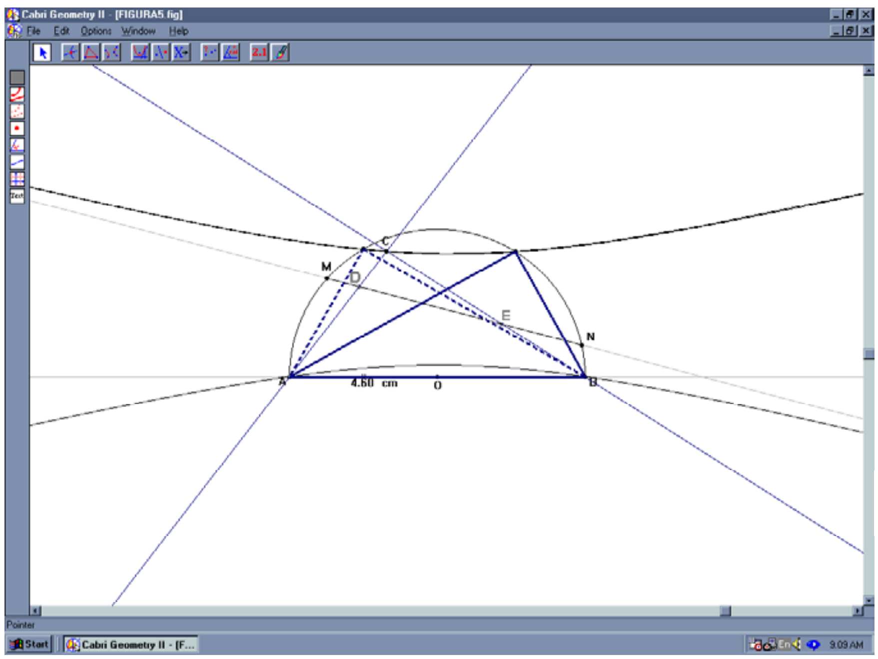


Figura 5: Recurso ao *locus* no *Cabri-Géomètre II*

A figura 5 mostra, na interface do *Cabri-Géomètre II*, a tela onde se construiu a hipérbole através de 5 pontos indicados sobre o *locus* traçado pelo programa. O passo seguinte destinou-se a determinar a interseção da cônica com a semicircunferência, onde foram alocadas as possíveis respostas para o vértice C do triângulo pedido.

Observe-se na figura 6 que, no entanto, não nos foi possível determinar as posições corretas para o ponto C. Isso se deve ao fato de o programa *The Geometer's Sketchpad* não trabalhar com as cônicas. Assim, embora obtivéssemos o *locus* de C (traçado através dos sucessivos posicionamentos deste ponto à medida que o extremo D do segmento delimitado na corda MN percorria sua trajetória), sem que este fosse identificado pelo *software* como uma hipérbole, obviamente não nos seria dada a chance de determinarmos sua interseção com a semicircunferência.

Já o *Cinderella*, cuja interface é apresentada na figura 7, apesar de não admitir a alocação

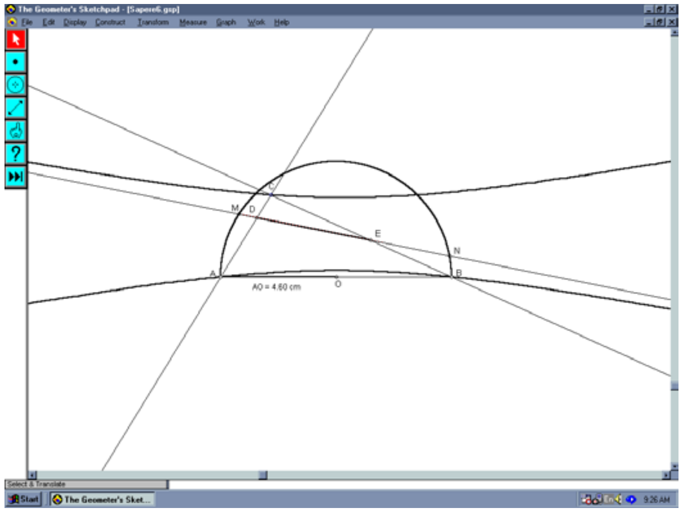


Figura 6: Recurso ao *locus* no *Geometer's Sketchpad*

de pontos sobre o *locus* impedindo assim a definição de uma hipérbole, reconhece o próprio lugar geométrico como uma cônica, tanto é que, ao ativar-se a ferramenta "define centro da

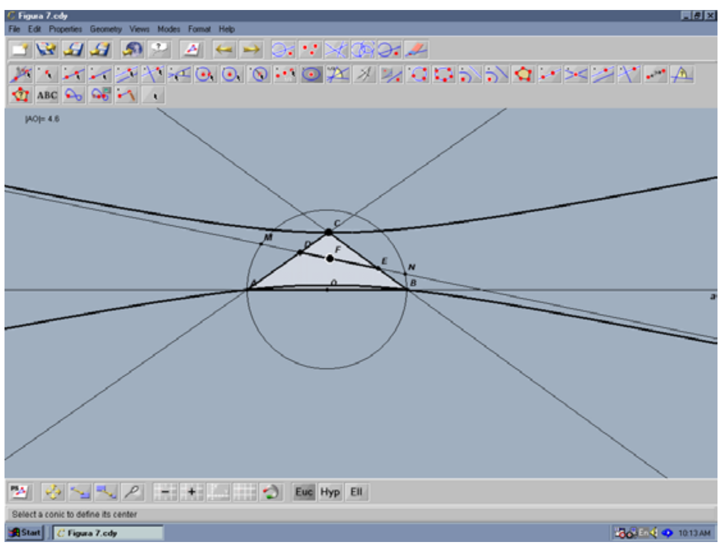


Figura 7 Recurso ao *locus* no *Cinderella.*

cônica", este ponto é automaticamente marcado (anotado com a letra F na figura 7). Mesmo assim, não oferece a possibilidade de determinar-se a interseção deste '*locus* dito hipérbole' com a semicircunferência, o que, mais uma vez, nos impede de localizar com exatidão as respostas para o vértice C.

5. FIGURA DE ANÁLISE – "O MAPA DA MINA"

Até aqui, mostramos como podem ser usados certos recursos da geometria dinâmica para se encontrar, por diferentes vias, uma configuração que satisfaça as imposições do problema. As primeiras incursões nesse sentido certamente tornaram mais aparentes as relações entre os elementos daquela construção geométrica. Esta última, em que lançamos mão do *locus*, nos levou a uma descoberta que talvez não tivéssemos feito (ao menos não tão rapidamente) se optássemos pelo uso dos instrumentos tradicionais de desenho. É hora, então, de resgatarmos o caminho que tomamos no momento em que o desafio nos chegou pela lista de discussão – a prática de fazer um esboço do problema supostamente resolvido e, a partir das 'pistas' dadas no enunciado, buscar na memória os conceitos ali embutidos, de modo a vislumbrar as operações a serem realizadas. Conciliando a dinâmica do grafismo computacional com o hábito de raciocionar a partir da figura de análise, adquirido ao longo dos nossos estudos de geometria, construímos no *Cabri*, como instrumento didático, uma figura de análise manipulável ilustrada pela figura 8, em dois de seus momentos.

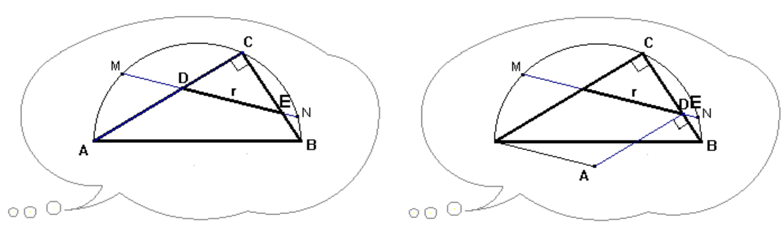


Figura 8: Figura de análise antes e depois da animação de A.

Nosso ponto-chave, neste processo de resolução, passa a ser o extremo E[1] do segmento delimitado na corda MN. O fato de o segmento DE, por imposição do problema, estar contido na reta MN (indicadora de uma direção) e ter um comprimento fixo 'r' igual ao do raio da semicircunferência nos faz imaginar um vetor e concluir que aplica-se, ali, uma translação. O extremo E do segmento DE vem a ser o transformado de D por uma translação de vetor 'v', cuja direção é a da reta MN, o sentido é o mesmo de M para N e o comprimento é

[1] Também poderia ter sido eleito como chave o ponto D, caso se utilizasse o vetor em sentido contrário, fazendo a translação de B, de modo a obter B', e traçando o arco capaz (90º, B'A).

igual ao de ‘r’. Observamos também a preservação do perpendicularismo entre as retas que contêm AD (A’E) e BC, dado importante para prosseguirmos em nosso raciocínio. Fica assim desvendado o mistério que envolve o problema, trazendo à luz os lugares geométricos do ponto E, eleito como chave (Figura 9).

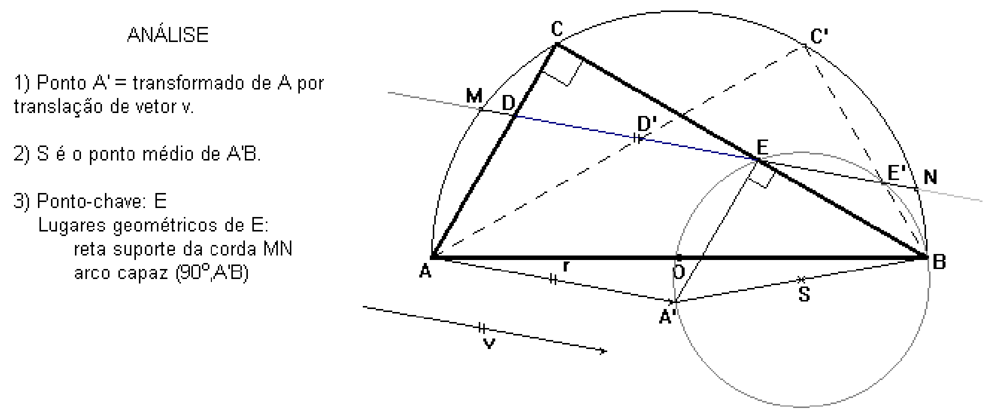


Figura 9: Problema resolvido

6. Considerações Finais

Com base em nossa experiência e tentando responder de alguma forma aos questionamentos levantados inicialmente, entendemos que, ao usar-se a ‘geometria dinâmica’ como ambiente de trabalho, ora a “mente dirige a mão” que ativa as ferramentas adequadas, ora dá-se o oposto, isto é, os ensaios realizados com os recursos computacionais estimulam a raciocinar e a buscar explicações para as respostas gráficas encontradas. O fenômeno pode ser interpretado dialeticamente, pelo fato de ocorrer ali uma espécie de ‘luta’ entre comportamentos aparentemente contrários, que acaba por propulsionar um movimento de reorganização e realimentação das idéias anteriormente instaladas. A ambientação dinâmica vem a ser, assim, um campo fecundo para a execução de atividades com potencial para ampliar consideravelmente o “pensamento geométrico”.

Referências:

DELMÁS, Anita de S. e B.; RODRIGUES, Maria Helena W. L. Aplicações do Círculo de Apolônio: usando a criatividade com o Cabri-géomètre. In: CABRI WORLD 99, São Paulo. http://www.cabri.com.br. 1999.

GANI, Danusa Chini, BELFORT, Elizabeth. Painéis em Geometria Dinâmica: novas possibilidades. In: 1º CONGRESSO DE EDUCAÇÃO – CEC. Rio de Janeiro, 2000. p.102-110.

JACKIW, Nicholas. **The Geometer’s Sketchpad**. Berkeley: Key Curriculum Press, 1990.

LABORDE, Jean Marie, BELLEMAIN, Frank. **Cabri-geometry II**. Dallas: Texas Instruments, 1994.

MORROW, J. Dynamic Visualization from Middle School Through College. In: **Geometry Turned On – dynamic software in learning, teaching and research**, eds. James R. King and Doris Schattschneider. Washington: Mathematical Association of America, 1997. p. 47-54.

RITCHER-GEBERT, Jürgen & KORTENKAMP, Ulrich H. **The Interactive Geometry Software Cinderella**. Berlin: Springer, 1999.

RODRIGUES, M. H. W. L. A Contribuição do Cabri–Géomètre para um Projeto de Integração das Disciplinas Gráficas. In: CABRI WORLD 99, São Paulo. http://www.cabri.com.br. 1999.

______Simulando a Tridimensionalidade com Software de Geometria Dinâmica. In: GRAPHICA 2001: IV CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENGENHARIA GRÁFICA NAS ARTES E NO DESENHO e 15º SIMPÓSIO NACIONAL DE GEOMETRIA DESCRITIVA E DESENHO TÉCNICO, 2001, *Anais*... São Paulo: USP, ABEG. 2001.

RODRIGUES, M. H. W. L; RODRIGUES, Daniel Wyllie L. "Transpontuais": Uma Alternativa Dinâmica para o Estudo Interdisciplinar de Conceitos Geométricos. In: **Educação Gráfica** vol .4, Bauru: 2000. p. 51-60.

RODRIGUES, M. H. W. L; RODRIGUES, Daniel Wyllie L. Entre a Geometria dos Esquadros e Compasso e a Geometria Dinâmica In: **Educação Gráfica** vol .5, Bauru: 2001. p. 27-37.

CAPÍTULO 27

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 301:308.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

PARA ENTENDER OS FUNDAMENTOS DO CÁLCULO EM LEIBNIZ

Tatiana Roque

Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
endereço eletrônico: tati@im.ufrj.br

Resumo: *O artigo pretende abordar um momento da história da matemática, mais especificamente alguns aspectos do pensamento de Leibniz, para esclarecer algumas dificuldades intrínsecas à compreensão dos conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial.*

Palavras-chave: *Leibniz, Fundamentos do Cálculo Diferencial.*

Abstract: *This article focuses on a moment of the history of mathematics, specifically, on some aspects of the Leibnizian thinking, in order to explain some intrinsic difficulties in the comprehension of the fundamental concepts of Calculus.*

Key words: *Leibniz, Foundations of Differential Calculus.*

> *"Não houve descoberta que tivesse produzido, nas ciências matemáticas, uma revolução tão feliz e tão rápida quanto a da Análise Infinitesimal; nenhuma forneceu meios mais simples, nem mais eficazes, para penetrar no conhecimento das leis da natureza. Decompondo, por assim dizer, os corpos até os seus elementos, ela parece ter indicado sua estrutura interior e sua organização; mas, como tudo o que é extremo escapa aos sentidos e à imaginação, só pôde-se formar uma idéia imperfeita destes elementos, espécies de seres singulares que tanto fazem o papel de quantidades verdadeiras, quanto devem ser tratados como absolutamente nulos e parecem, pelas suas propriedades equívocas, permanecer a meio caminho entre a grandeza e o zero, entre a existência e o nada". (Lazare Carnot)*[1]

---

[1] CARNOT, *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*.

Apesar de famosa, a querela sobre a prioridade na invenção do Cálculo no século XVII, por Leibniz ou Newton, não foi, de modo algum, relevante. Já o problema dos fundamentos do Cálculo, que ocupou os matemáticos durante todo o século XVIII e início do século XIX, mostrou-se uma das mais frutíferas polêmicas de toda a história da matemática, tendo envolvido os maiores matemáticos daquele século e originado diversos outros ramos da matemática atual.

A questão inicial, que se colocava tanto em relação aos trabalhos de Leibniz quanto aos de Newton e que foi a fonte das duras críticas que ambos sofreram, poderia ser resumida do seguinte modo: como é possível entender e justificar a razão entre duas quantidades que deixaram de existir?

Pretendemos analisar, neste artigo, o modo como Leibniz formulava esta pergunta e enfatizar que sua resposta, absolutamente rigorosa, não poderia ser considerada independentemente de sua filosofia.

Todo o problema consistia, inicialmente, em fundamentar o uso de quantidades infinitamente pequenas, os "elementos infinitesimais", também chamados de "diferenciais". Nossa argumentação foi subdividida em cinco pontos, organizados segundo critérios puramente pedagógicos, nos quais procuramos explicar, muito brevemente, os diferentes estatutos dos infinitesimais para Leibniz.

1. ABSTRAÇÕES BEM FUNDADAS

Todo o problema dos fundamentos deriva do fato de que o Cálculo leibniziano empregava os chamados "elementos infinitesimais", designados na notação de Leibniz (e na atual) por dx e dy. Tais quantidades eram utilizadas nos cálculos como quantidades auxiliares, e com muito êxito. Por exemplo, para derivar a função x^2, era preciso tomar a diferença entre as ordenadas de dois pontos vizinhos, obtendo-se que $d(x^2) = (x+dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2$. No resultado, o último termo deveria ser desprezado, uma vez que possui, comparativamente, ordem de grandeza bem menor que a do primeiro.

Este procedimento obtinha sucesso nos cálculos e nas aplicações e o que estava em jogo, portanto, na discussão sobre os fundamentos, não era a utilização destas quantidades não finitas nos cálculos, mas sim o estatuto metafísico destas mesmas quantidades. A tentativa de resolver este problema metafísico, e os métodos que Leibniz propôs para tratá-lo, irão influenciar o próprio desenvolvimento de seu Cálculo.

As justificativas fornecidas por Leibniz foram numerosas e a mais simples delas sugeria que os infinitesimais deveriam ser entendidos como meras ficções. Como parte desta argumentação, que será refutada mais tarde por ele mesmo, Leibniz propõe que infinitesimais como dx são noções ideais, abstratas, que, assim como as raízes imaginárias, não possuem nenhuma realidade ontológica. Essa resposta, todavia, nunca o satisfez verdadeiramente pois, já que os infinitesimais não introduziam irregularidades nos cálculos, deveriam ser bem fundados. Mas como dar consistência a abstrações bem fundadas?

2. OS INFINITESIMAIS DEIXAM DE SER QUANTIDADES

Sobre o estatuto dos infinitesimais, a resposta mais convincente fornecida por Leibniz baseia-se em não mais considerar os infinitesimais como quantidades. A citação seguinte já indica como Leibniz enxergava a diferença matemática entre uma quantidade e uma diferencial:

> "Eu concordo com Euclides Livro V Definição V que somente as quantidades homogêneas são comparáveis, das quais uma pode tornar-se maior que a outra se multiplicada por um número que é um número finito. Afirmo que entidades, entre as quais a diferença não é uma tal quantidade, são iguais. (…) Isto é precisamente o que significa dizer que a diferença é menor do que qualquer quantidade dada"[1].

Indo mais além, Leibniz afirmará que dx não é uma quantidade infinitamente pequena, destinada a desaparecer nos cálculos, mas exprime a possibilidade ilimitada de, dado um valor qualquer para x, encontrar um valor entre 0 e x. Note-se que a pequenez de dx pode variar sem alterar nada em x, o que legitima a afirmação de que dx e x possuem naturezas distintas, x sendo uma quantidade e dx não. Pelo que acabamos de dizer, dx é a entidade que testemunha, de algum modo, a inesgotabilidade do poder de recorrência da razão pois, dadas duas quantidades 0 e x, é sempre possível encontrar dx entre as duas[2].

Identificamos, assim, a principal fonte das freqüentes incompreensões da obra de Leibniz: entender dx como a quantidade x tornada infinitamente pequena, o que a faria desaparecer. Se pensamos no problema do fundamento, dx deve ser anterior a x, pois exprime uma variabilidade possível da qual a própria noção de *variável* será conseqüência. Neste caso, deve-se admitir como ponto de partida que dx é de uma natureza distinta de x e que as duas são incomparáveis, incomparáveis em um sentido que foi assim explicitado por Leibniz:

> "Quando comparamos um termo ordinário, um termo infinito e um termo infinitamente infinito é exatamente como se comparássemos, em ordem crescente, o diâmetro de um grão de poeira, o diâmetro da terra, e o das esferas fixas, ou grandezas de grau sempre maiores ou menores que estes"[3].

Mas este argumento pode significar apenas que dx não é uma quantidade como x e está longe de justificar o fato crucial de que dx não é uma quantidade. O que seria então?

---

[1] GERHARDT, *Leibnizens mathematische Schriften* (M.S.), t.V, pp.356-357, 1702b.

[2] É importante observar aqui que procuramos justificar o entendimento de dx não é uma quantidade como x, o que nos impede de entender essa propriedade de recorrência como o equivalente de uma propriedade de densidade.

[3] LEIBNIZ, *Nota sobre a ausência de razão e de proporção com grandezas menores que zero, e sobre o significado verdadeiro do método infinitesimal,* M.S. t.V, pp387-389, 1712. Publicado em francês em LEIBNIZ, *Naissance du calcul différentielle*.

3. O ESTATUTO DE UMA RELAÇÃO

Partiremos novamente de um princípio de recorrência, ainda que de outro tipo. Se há uma relação c de a e b, podemos formar uma relação d de a e c e assim por diante, indefinidamente, estabelecendo, de modo recorrente, relações de relações. No entanto, a relação c pode não ser uma quantidade e, neste caso, a relação c não interfere no cálculo quantitativo que pode ser efetuado com as quantidades a e b.

Considerando as diferenciais como ficções, o postulado acima serviria para justificar o fato de que as diferenciais serem tidas por ficções não torna o cálculo fictício. Isto indica que há, em Leibniz, uma separação entre o problema da fundamentação das grandezas infinitesimais e o problema da legitimação do cálculo diferencial. Para compreender do que se trata é preciso pensar em como Leibniz entendia a autonomia de uma relação frente aos termos que a constituem.

Tomemos um primeiro tipo de relação, as razões, e para Leibniz, razão é diferente de fração. Uma fração é a divisão de dois números, logo é uma quantidade obtida pela divisão de duas quantidades.

> "Mesmo se é verdade que as duas frações $\frac{+1}{-1}$ e $\frac{-1}{+1}$ são iguais, frações não são, todavia, o mesmo que razões, mesmo se essas são expressas por aquelas"[1].

A quantidade de uma razão pode ser expressa por uma fração mais a razão em si é uma relação independente dos termos que a compõem. Basta pensar, como dizia Leibniz, que é possível, sobre os habitantes de uma cidade qualquer, afirmar que o número de olhos é o dobro do número de narizes, independente do conhecimento do número efetivo de olhos e de narizes na cidade. A igualdade de razões seria, assim, uma relação de analogia entre duas relações, distinta da relação de igualdade entre o produto dos meios e o produto dos extremos que é designada por uma igualdade de frações. A razão teria, portanto, uma natureza qualitativa, ao passo que a fração uma natureza quantitativa[2].

Partindo da diferença entre razão e fração, e da conclusão de que a razão não é quantitativa, Leibniz propõe que o logaritmo pode ser entendido como a medida de uma razão, como indica a própria etimologia da palavra "logaritmo". Esta sugestão suscitou uma discussão com Jean Bernoulli a propósito dos logaritmos de números negativos. Mesmo não tendo resultado em nenhuma novidade importante sobre a extensão da definição de logaritmo,

---

[1] Carta a Jean Bernoulli, M.S., t.III, p.906, 1713.

[2] O estatuto da relação é fundamental na filosofia de Leibniz, onde é entendida de modo não muito distinto do que apresentamos a partir de seus escritos matemáticos: a relação possui uma realidade metafísica própria que testemunha de uma certa tensão interna às substâncias simples, sendo a razão apenas um dos casos mais triviais de relação.

os argumentos propostos pelo alemão fornecem pistas não desprezíveis sobre o problema dos infinitesimais:

> Quando escrevemos o quociente de dois infinitesimais $\frac{dy}{dx}$ designamos uma razão e não uma fração.

Não se trata, portanto, da divisão infundada de duas quantidades infinitamente pequenas dy e dx, mas de uma relação entre elas, cujo estatuto é independente do estatuto dos termos que a compõem. Mesmo não sendo uma quantidade, esta relação pode ser expressa por uma quantidade, por exemplo quando escrevemos $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Sendo assim, não cabe perguntar qual a justificativa dos infinitesimais mas sublinhar que eles sempre aparecem em relação. A inversão deste ponto de vista é apontado por H.J.M Bos[1] como um dos principais enganos dos estudos sobre as origens do Cálculo, dos quais o trabalho de Boyer é mencionado em particular: "A preocupação comum dos historiadores com as dificuldades associadas a infinita pequenez das diferenciais distraiu sua atenção do fato de que, na prática do cálculo leibniziano, as diferenciais quase nunca aparecem como entidades solitárias. As diferenciais estão localizadas em seqüências sobre os eixos, sobre a curva e sobre os domínios das outras variáveis; são variáveis que dependem, elas mesmas, das outras variáveis envolvidas no problema, e esta dependência é estudada em termos de equações diferenciais".

Uma das circunstâncias em que é fundamental perceber o estatuto singular da relação diferencial no Cálculo leibniziano é dada pela consideração de $\frac{dy}{dx}$ como uma variável que pode ser, por sua vez, diferenciada. Como isto pode ser concebido se a relação não é uma quantidade?

4. DERIVADAS DE ORDENS SUPERIORES

Neste ponto, se os infinitesimais não são abstrações, nem existem no mesmo sentido em que uma quantidade (por exemplo, um número) existe, cabe perguntar de que realidade se trata.

Lembrando que as diferenciais são infinitesimais não relacionadas, partimos da constatação concreta de que é possível praticar um cálculo diferencial sem diferenciais, operando sobre as relações entre estas diferenciais, relações tidas por entidades autônomas e submetidas a regras próprias. Do mesmo modo que dissemos que a relação $\frac{dy}{dx}$ entre dois infinitesimais não é um infinitesimal, podemos afirmar que ela é resultado de uma operação e as derivadas de ordens superiores resultarão da mesma operação reiterada. A riqueza da nota-

[1] BOS, *Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus*.

ção proposta por Leibniz é justamente a de ter introduzido o operador "d", ao mesmo tempo, separando-o da quantidade a qual ele se relaciona e indicando a ligação entre ambos (entre dx e x por exemplo).

Se dx fosse uma quantidade infinitamente pequena, que sentido teria a diferencial de ordem superior (chamada diferencio-diferencial) ddx ? Esta última seria também uma quantidade infinitamente pequena, logo equivalente à primeira, a menos que fossem admitidos tipos distintos de infinito. Mesmo que o infinito para Leibniz seja qualitativo e não quantitativo - o que legitimaria a consideração de diversos infinitos -, não explicitaremos neste momento os argumentos metafísicos, mas as estratégias matemáticas empregadas por este filósofo. Estas baseiam-se na introdução das relações diferenciais e, principalmente, na possibilidade de diferenciação destas relações: não é dx que iremos diferenciar mas $\frac{dy}{dx}$. Esta relação não é uma diferencial, mas é resultado de uma operação de diferenciação e as ordens superiores resultarão da mesma operação reiterada. Tal procedimento, e todas as conseqüências que dele provêm, supõem um princípio subjacente que demonstra ainda a extrema potência do Cálculo leibniziano, e sua incompreendida modernidade, princípio que, em linguagem atual, estabelece o seguinte: é sempre necessário determinar a variável em relação a qual se quer derivar.

Vejam em quantas transformações implica a consideração das **relações diferenciais** no lugar dos infinitesimais; transformações das quais a mais importante sugere, explicitamente, a substituição da noção de diferencial pela idéia de diferenciação, vindo a requerer, tacitamente, em um segundo momento, a introdução da noção de derivada.

A autonomia da relação é filosoficamente fundada na observação de que, na relação entre duas diferenciais, as diferenciais são evanescentes, o que abre a possibilidade de um cálculo diferencial virtual. Note-se que não estamos dizendo que a diferencial, ou o infinitésimo, é virtual, pois isto nos aproximaria muito da concepção apresentada no primeiro tópico, no qual as diferenciais eram tidas por meras ficções, como quantidades abstratas. Ao invés de **quantidades diferenciais fictícias**, falamos agora de um **cálculo diferencial virtual**.

O fato de que há, efetivamente, um "cálculo" não é acessório pois, apesar de não serem quantidades, as relações diferenciais apresentam ao cálculo uma face quantitativa, operatória, permitindo que se opere sobre elas. Mas há uma outra face, cega- pois não é vista pelo cálculo- e não quantitativa, que é seu suporte operatório. Como afirma Marc Parmentier, ao introduzir a nova publicação dos artigos de Leibniz[1], as diferenciais são indeterminações no sentido em que elas não são somente quantidades, mas seres anfíbios de duas faces dos quais o anverso é quantitativo mas o reverso é a face cega que elas apresentam ao Cálculo

[1] LEIBNIZ, *Naissance du calcul différentiel,* p.37.

5. EPÍLOGO: SOBRE O PROTAGONISMO DO CONCEITO DE FUNÇÃO PARA TERMINAR DE RESOLVER MATEMATICAMENTE O PROBLEMA

Supondo uma circunferência com centro no ponto *(0,b)*, *b* pode ser considerada como uma quantidade que é uma constante genérica da equação. No entanto, em certos problemas, Leibniz irá considerar uma família de circunferências, da qual *b* é um parâmetro e, neste contexto, admite-se uma variabilidade para *b* que o leva a empregar explicitamente a expressão "diferenciar segundo *b*". Este fato é crucial porque nos leva a observar que não há, para Leibniz, grandezas absolutamente variáveis, nem constantes e, portanto, também não há grandezas infinitamente pequenas por natureza. As infinitesimais são indeterminadas e, por isto mesmo, pressupõem uma variabilidade intrínseca que só poderá adquirir consistência em um cálculo efetivo, a partir das relações que estas infinitesimais podem engendrar entre si.

Não é sobre a diferencial, como objeto, que se funda o Cálculo leibniziano mas sobre a idéia de diferenciabilidade. Daí a importância de se introduzir a expressão "diferenciar em relação a", indicando a percepção clara de que a diferenciação é a noção central do Cálculo e não as diferenciais. Escolher a variável em relação a qual se quer diferenciar indica uma dupla variação, uma variabilidade combinada que será associada à relação diferencial, que é o fundamento do Cálculo para Leibniz.

Filosoficamente, esta variabilidade está ligada à possibilidade de atualização do virtual. Ou seja, a face operatória do cálculo, que é atual, torna-se possível porque seu suporte virtual, a relação diferencial, é atualizado por uma operação de diferenciação. Que o leitor nos perdoe, pois reconhecemos nossa extrema concisão, mas seria impossível ir adiante nesta afirmação, devido à sua complexidade e ao escopo de nosso artigo[1].

Matematicamente, o problema só começará a ser resolvido com a introdução do conceito de função, que estabelece bases sólidas para a consideração desta variabilidade combinada, permitindo a substituição definitiva da "diferencial" pela "derivada" que é, esta última, uma função. Vimos, no entanto, como Leibniz estava ciente desta necessidade ao escolher, antes de tudo, na aplicação de seu Cálculo a problemas geométricos, qual seria a variável independente, mesmo que ele ainda não a denominasse deste modo.

Uma função, sabemos hoje, nada mais é do que o modo efetivo de uma variação combinada que possui, como condição de possibilidade, uma variabilidade virtual da qual as diferenciais, em relação, são o correlato simbólico. Surpreendentemente, isto já havia sido, de alguma forma, proposto por Leibniz. A absoluta novidade introduzida por este mestre da invenção é ter realizado um Cálculo diferencial sem diferenciais, não esquecendo jamais de que estas diferenciais, que serão eliminadas no cálculo efetivo, são o que o torna possível. Melhor dizendo, são as determinações virtuais que dão consistência ao caráter operatório

[1] Para o leitor interessado em filosofia, o que dissemos neste parágrafo pode ser encontrado no quarto capítulo do livro de Gilles Deleuze, *Diferença e Repetição*.

do Cálculo, logo não é à toa que o Cálculo é um ponto chave, muitas vezes de difícil transposição, no aprendizado da matemática superior.

Referências

BOS, H.J.M. Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus, Archive for History of Exact Sciences, Vol.14, pp.1-90, 1974.

CARNOT, L. Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal, Blanchard, Paris, 1970(nouveau tirage).

DELEUZE, G. Diferença e Repetição, Graal, RJ, 1988.

GERHARDT, C.I. Leibnizens mathematische Schriften (M.S.).

LEIBNIZ, G.W. Naissance du calcul différentiell, Vrin, Paris, 1995.

CAPÍTULO 28

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 309:320.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01**

MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS COM MAPLE V: RESOLUÇÃO E VISUALIZAÇÃO GRÁFICA

José Antonio Salvador

Departamento de Matemática - CCT - UFSCar
Via Washington Luís, Km 235, CP 676
13 565- 905 - São Carlos - SP
endereço eletrônico: salvador@dm.ufscar.br

Resumo: *Neste trabalho discutimos o processo de ensino–aprendizagem–avaliação herdado da época colonial e os seus desafios na era da informação. Questionamos os recursos didáticos usados e como a tecnologia disponível vem influenciando a área acadêmica, principalmente no ensino das ciências exatas. Apresentamos uma abordagem computacional para uma disciplina de Métodos de Matemática Aplicada, que trata das equações diferenciais parciais e suas aplicações. Usamos os recursos de um laboratório computacional, onde temos o software Maple V instalado em rede com um projetor multimídia para fixar conceitos e explorar soluções de problemas reais. A busca de soluções de problemas é feita no computador, passo a passo para fixar os métodos matemáticos de resolução dos mesmos, como se estivéssemos fazendo à mão. Com essa prática pedagógica adotada, discutimos algumas facilidades, vantagens e também algumas dificuldades encontradas, mas que podem ser superadas com a experiência adquirida.*

Palavras-chave: *História do Ensino-Aprendizagem–Avaliação, Matemática Aplicada, Equações Diferenciais Parciais.*

1. INTRODUÇÃO

O aumento das facilidades computacionais no meio acadêmico tem propiciado várias iniciativas com o uso das ferramentas tecnológicas no processo de ensino-aprendizagem-avaliação. Parece-nos natural tentar alternativas modernas para melhor compreensão e motivação do conteúdo matemático, onde nosso próprio aluno das disciplinas de ciências exatas possa ser orientado a buscar/formular problemas e elaborar modelos matemáticos a partir de situações reais. A orientação dos alunos para estabelecer e selecionar as variáveis mais importantes de um problema, equacionar e entender os conceitos envolvidos, familiarizando-se com os mesmos, e o estimulo, para que tente resolver e obter soluções analíticas e/ou numéricas, visualize graficamente e interprete os resultados bem como fazer simulações e conjecturas baseadas nos resultados obtidos. Estes são caminhos alternativos que buscamos e cremos que é o nosso real desafio nesta era da informação.

Moreira [11] em sua análise do trabalho de Gowin [6] destaca a importância de observarmos uma relação triádica entre professor, materiais didáticos e alunos para que o processo educativo leve a uma aprendizagem significativa. Afirmam estes autores que o processo de ensino-aprendizagem significativo ocorre pela inter relação entre aluno e professor sobre os conhecimentos veiculados pelos materiais didáticos. Mason [10] também afirma que a orientação dos métodos de ensino através de jogos e atividades práticas vem sendo proclamada ao longo dos tempos, pelo menos para o ensino fundamental e médio, desde os antigos egípcios.

Entretanto, no ensino universitário das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Vetores e Geometria Analítica, Álgebra Linear, Cálculo Numérico, Equações Diferenciais, Métodos de Matemática Aplicada, Instrumentação para o Ensino de Matemática, Informática no Ensino assim como outras disciplinas de ciências exatas, exceto raríssimas exceções, em que o professor usa tradicionalmente a lousa, giz, apagador e o incansável malabarismo artístico, enquanto que o aluno copia timidamente, usando mais o lápis e papel do que o próprio cérebro deve ser repensado.

Sabemos que aulas expositivas são centradas no professor e baseiam praticamente em conteúdos prontos. Estes geralmente são retransmitidos do mesmo modo em que se encontram estabelecidos nos livros. O aluno tem uma atitude passiva: pensa, critica ou cria muito pouco durante as aulas e mesmo durante a disciplina ou curso. O complemento do estudo fora da sala de aula resume-se à consulta dos livros recomendados e à resolução de exercícios propostos, em geral com as mesmas estruturas já apresentadas na sala de aula e muitas vezes longe da realidade e do interesse do aluno, não despertando motivação alguma.

A situação ideal que encontramos pronta nos livros é bem diferente da realidade em que vive o aluno e do que ele encontrará na sua futura vida profissional. Os problemas que eles enfrentarão, geralmente não seguem um roteiro bem definido para se obter soluções, nem sequer sabe se elas existem ou se apresentam diversas soluções ou mesmo se eles são bem formulados.

Nesta busca de motivação para o estudo de equações diferenciais e suas ricas aplicações, a fim de tornar os conceitos matemáticos mais claros e compreensíveis, não encontramos muitas referências de tentativas de modificações substanciais no sentido de modernizá-lo e adequá-lo aos tempos atuais contando com o avanço tecnológico e os recursos computacionais, salvo alguns grupos nas universidades brasileiras [21] e nas edições mais novas de alguns livros de cálculo, e de equações diferenciais [1] e publicações da AMS [10] apresentam alternativas para o ensino universitário usando a tecnologia moderna.

Hoje é possível pensarmos no uso do computador como um recurso didático no processo educativo. O estudo das disciplinas matemáticas através de problemas reais usando o potencial do computador serve para motivar, provocar discussão, melhor entendimento de conceitos, além de fixá-los, estabelecer resultados básicos, simular numérica e graficamente situações reais que antes eram impossíveis de serem tratadas numa disciplina tradicional. Entretanto, nossa preocupação de usar as ferramentas tecnológicas é para transformar o aluno num ser consciente, pensante, crítico, criativo e participativo e não apenas um mero copiador ou digitador de teclas previamente decoradas.

Sabemos que existem razoáveis softwares que podem ser usados no processo de ensino aprendizagem voltados para as ciências exatas, tais como o Maple V [8], Mathematica, MatLab, Cabri-Géomètre II, etc. e que sem dúvida são bastante úteis. Escolhemos um sistema de computação simbólica, no caso o Maple V, desenvolvido pela Waterloo Maple Inc. ON, Canadá, para usarmos nas disciplinas básicas dos cursos oferecidos pelo Departamento de Matemática da UFSCar [3], onde pudéssemos introduzir os conceitos matemáticos a partir de modelos matemáticos de problemas reais. Muitos desses projetos foram trazidos pelos próprios alunos e a reação dos alunos frente a este novo enfoque foi analisada.

O software Maple V possui uma linguagem de programação própria e oferece um ambiente moderno onde professor e alunos podem construir todo o material da disciplina junto. Com ele o aluno pode adquirir uma atitude exploratória bastante versátil, manipulando textos, cálculos numéricos e simbólicos e as facilidades de animação de uma seqüência de gráficos e de programação.

Este trabalho procura mostrar alguns dos resultados de nossas tentativas de utilização deste software para ilustrar conceitos, explorar idéias e resolver problemas que implementamos desde 1996 na disciplina de Métodos de Matemática Aplicada na UFSCar [15-19], embora já tivéssemos usado com sucesso o software Mathematica para o processo de ensino aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para turmas experimentais de alunos do curso de Economia e Administração da UFRJ [12-14], em 1995, onde atuávamos naquela época.

2. A EDUCAÇÃO QUE HERDAMOS DA COLONIZAÇÃO

O que herdamos e o modo como fomos preparados didaticamente nos leva a refletir um pouco mais sobre a história de nossa educação. No contexto geral, é bom lembrarmos um pouco da história da Educação no nosso país. Desde a época colonial (1500-1822), seguida pela época imperial (1822-1889) e até o início da República praticamente tivemos uma educação religiosa feita pelos jesuítas, em que se priorizava a educação para elite e para o homem branco. Uma marca interessante é que durante todo este tempo, o método de ensino predominante foi baseado na rigidez e a disciplina, em que os professores abafavam a originalidade e a criatividade dos alunos. Além disso, era valorizado o saber contido nos livros; a crença no aprender passivamente; a crença no aprender ouvindo e memorizando.

Nos dias de hoje novas posturas são colocadas pela educação e várias contradições ainda são observadas. O professor atual necessita de um novo perfil generalista, além da produção e divulgação do conhecimento, necessita de uma formação continuada para que ele possa atuar multi /inter /trans/disciplinarmente. Um processo de ensino-aprendizagem interativo, dinâmico, crítico, cooperativo e continuamente aperfeiçoado que nem sempre é fácil de ser aceito pelos mesmos. É uma resistência ao novo que os acompanha.

As ações pedagógicas devem estar fundamentadas na aprendizagem ativa e em metodologias cooperativas. Não podemos desprezar o material didático clássico, mas incluir novas metodologias e o uso consciente das ferramentas tecnológicas disponíveis, sincronizando com o mundo atual.

A disponibilidade da internet, CDs, projetor multimídia e softwares como Derive, MatLab, Mathematica, Maple V, Cabri-Géomètre II e outros nos fazem enfrentar os desafios e questionamentos de como usar cuidadosamente estas ferramentas, digamos até, com sabedoria e consciência para não serem desastrosas no processo de ensino-aprendizagem-avaliação.

Acreditamos que devemos questionar o quanto de computação matemática é apropriado para uma determinada disciplina ou curso. Também questionamos "O que, em que, como, quando e quanto" o bom uso do computador pode enriquecer nossas disciplinas e nossos cursos? Como o computador pode ser usado na seqüência de estudos básicos e específicos? Este é um desafio contínuo para os educadores de hoje, romper com os dogmas da sociedade e das instituições educacionais, e cabe a cada um de nós, superar as dificuldades encontradas no processo de ensino - aprendizagem – avaliação e tentarmos inovar e revolucionar o sistema de ensino para sair do marasmo tradicional estabelecido como afirma Mason [10].

Como fazer com que os nossos alunos ultrapassem os limites da sala de aula, do laboratório, etc. e adquira informações precisas, autoconfiança, independência, ... não só para a vida acadêmica, mas também para a vida profissional e pessoal? Cabe a nós, orientarmos o aluno a desenvolver suas competências e habilidades e então formarmos um cidadão consciente, crítico, criativo, capaz de aprender sempre e de enfrentar novos desafios que a sociedade lhe apresentar neste mundo globalizado.

3. AS FERRAMENTAS DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Que ferramentas auxiliares ou que equipamentos são necessários para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática nos dias de hoje?

No livro A Experiência Matemática, Davis e Hersh [4] discutem as ferramentas que tem sido usada no ofício matemático. Eles lembram uma passagem famosa em que Arquimedes aparece meditando sobre um problema traçado na areia enquanto os soldados romanos do imperador Marcelo o espreitavam ameaçadoramente ao fundo. Dizem-nos que a Matemática é feita com um mínimo de ferramentas, talvez um pouco de areia e muito cérebro. Será que a Matemática é feita/construída/reconstruída totalmente no cérebro? Talvez em épocas primitivas, a Matemática e as ciências exatas fossem transmitidas oralmente, passando de pai para filho, de mestre para discípulo assim como os grandes poemas épicos, as religiões, etc. Mas na verdade a Matemática nunca precisou de muitos equipamentos, como acontece com outras ciências, o que ela sempre necessitou foram os experimentos imaginários, a criatividade e a intuição humana. Sem dúvida não tardou a necessidade de instrumentos de escrita, de registro, duplicação dos conhecimentos e em particular dos resultados matemáticos desvendados que foram evoluindo até os meios eletrônicos de hoje.

Halmos [7] por sua vez, citou que é difícil aprender matemática sem lápis e papel. De fato, lápis, papel, borracha, régua, compasso e transferidor sempre foram nossas ferramentas no estudo da matemática e na ilustração de projetos, enquanto que a aritmética dos matemáticos e de outros cientistas tem sido auxiliada por muitos instrumentos e dispositivos ao longo dos anos. Os de maior sucesso tem sido o ábaco, as tabelas trigonométricas, a tábua de logaritmos, a régua de cálculo, as calculadoras numéricas. A partir da década de 1980 surgem as calculadoras gráficas e os computadores pessoais. Hoje porém, as potencialidades lógicas do computador não se resumem apenas nas habilidades numéricas e na visualização gráfica. A capacidade dos softwares computacionais algébricos de efetuar operações simbólicas que aparecem formalmente, a facilidade de obter soluções de equações algébricas e equações diferenciais, de fazer gráficos coloridos como se fossem belas fotografias e de realizar animações de fenômenos dinâmicos como se fossem verdadeiros filmes, nos atraiu e despertou para esta nova ferramenta didática.

A relação entre computadores e a matemática é bastante estreita e antiga. Sabemos que a maioria dos matemáticos era indiferente ao uso dos computadores, mas nos últimos anos, com o impacto da computação algébrica, o correio eletrônico e a internet, etc. a presença de cada vez mais computadores nas escolas brasileiras, um terminal de computador praticamente em cada sala de professor universitário e até nas casas dos próprios alunos, o computador vai se tornando tão familiar como qualquer outro aparelho eletrônico. Para os cientistas que trabalham com problemas práticos buscando respostas numéricas, o computador já vinha prestando uma assistência substancial há muitos anos. Nos últimos anos, o computador tem propiciado a intensificação dos estudos em diversas áreas de conhecimento. Em especial, a computação algébrica ou simbólica usada conscientemente está se tornando uma ferramenta muito importante e viável no processo de ensino-aprendizagem-avaliação.

4. MINHAS PRIMEIRAS EXPERIÊNCIAS DE ENSINO–APRENDIZAGEM USANDO O COMPUTADOR

Algumas de minhas primeiras experiências de ensino usando o computador como ferramenta didática começaram timidamente na década de 1980 com alguns alunos de iniciação científica. Naquela época se propunha projeto de iniciação científica apenas para os melhores alunos. Este mesmo modelo, ainda predomina nos dias de hoje; ignora-se os alunos considerados de nível médio ou fraco, os que mais necessitam de motivação e/ou de uma orientação diferenciada. Pergunto sempre aos meus colegas: será que este é o caminho certo?

Temos sempre procurado orientar alunos de iniciação científica, considerados médios para que pudéssemos fazê-los crescer academicamente. É mais gratificante ver que eles podem ir muito mais longe do que iriam sem uma orientação adequada. A nossa idéia sempre foi a de explorar modelos matemáticos, aprender algoritmos e os recursos de programação nas linguagens usadas nos primeiros anos do curso de graduação para obter soluções numéricas dos problemas abordados.

O uso de softwares como uma ferramenta adicional na exploração e compreensão de conceitos de uma disciplina, em conjunto com a adoção de projetos de problemas mais realistas foi por nós implementada em diversas classes com sucesso a partir de 1995, embora a idéia dos projetos já fosse defendida por professores de algumas universidades brasileiras, principalmente os da Universidade Estadual de Campinas.

É interessante relatar aqui que usamos o software Mathematica numa turma de primeiro ano de Economia e Administração na disciplina de Matemática I, cuja ementa corresponde a uma disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral, lá na Universidade Federal do Rio de Janeiro onde complementávamos às 4 horas aulas semanais de atividades na classe regular acrescentando 2 horas aulas semanais extras no Laboratório de Computadores. Percebemos que este novo enfoque no ensino gerava bastante motivação, principalmente naquela turma em que os alunos não viam a Matemática como uma disciplina fundamental do curso. Questionamentos dos alunos não somente sobre tópicos específicos da disciplina como também sobre o software aumentam. Conjecturas interessantes surgiram bem como o aumento da participação colaborativa dos alunos e principalmente da interação aluno-aluno, aluno-professor (orientador), ao contrário de outra turma do mesmo curso e do mesmo nível, que adotamos para comparação na época, e que serviu de controle. No segundo semestre do mesmo ano, repetimos o experimento, com o material do semestre anterior revisado e aperfeiçoado, alternamos aulas regulares na classe e no laboratório. Concluímos que era possível obter sucesso no processo de ensino-aprendizagem com o uso do computador [12-14]. Quatro alunos voluntários desta turma continuaram trabalhos de exploração de problemas com o computador sob nossa orientação num programa de Iniciação Científica.

Em 1996, viemos para a Universidade Federal de São Carlos, e com a implantação do laboratório REENGE numa sala equipada com 30 microcomputadores ligados em rede e projetor multimídia, foi possível continuar testando inovações didáticas em várias disciplinas oferecidas pelo Departamento de Matemática para os cursos básicos das áreas de ciências exatas [19]. Testamos o uso do software Maple V como um dos recursos didáticos para motivar e ilustrar as nossas aulas nas várias disciplinas que ministramos desde então, buscando trabalhar com problemas reais, e mais interessantes, muitos deles procurados e trazidos pelos próprios alunos [24]. Escolhemos o software Maple V porque é um software matemático relativamente simples e poderoso. Tem uma grande flexibilidade para elaborar hipertextos, cálculo numérico, simbólico, animação gráfica e programação. Além disso, o estudante poderá trabalhar com ele durante toda a vida acadêmica e profissional elaborando os seus próprios programas.

No presente trabalho, descrevemos experiências que realizamos na disciplina de Métodos de Matemática Aplicada. Esta disciplina geralmente consiste no estudo de modelos matemáticos de fenômenos físicos e técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais, e as ferramentas usadas para resolvê-las, tais como as Transformadas de Laplace e de Fourier, Séries de Fourier, Método de Separação de Variáveis, etc. As aplicações quando exploradas, geralmente são tratadas timidamente bem no final de cada tópico ou mesmo no final do semestre. Geralmente segue-se um livro texto, onde a exposição dos tópicos e os exercícios são padronizados, poucos diferentes dos exemplos e a maioria deles não tem nada a ver com a realidade do aluno ou de sua área. Nas avaliações também, geralmente se cobra pequena variação dos modelos de exemplos e exercícios apresentados nas aulas ou estabelecidos no livro. Enfim, começamos questionando: onde esta a criatividade do aluno e do professor?

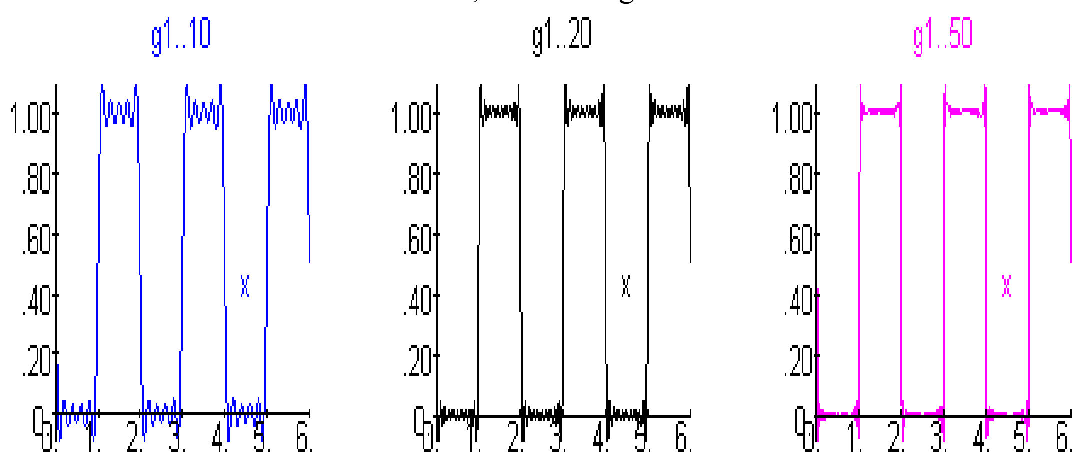
Apesar das dificuldades iniciais encontradas e graças às tentativas de nos adequarmos ao enfoque que queríamos dar aos Métodos de Matemática Aplicada, por exemplo, foi possível realizar uma mudança gradativa. Aplicamos a proposta didática num período regular onde sugerimos que o ponto central do curso fosse o estudo de modelos e a resolução dos problemas inicialmente "à mão" e em seguida motivados pelo aprendizado e pelas descobertas das facilidades do software, conferir os resultados dos problemas e visualiza-los graficamente. Em seguida, fazíamos comentários e provocávamos os alunos a raciocinarem e discutirem os problemas e a validade das soluções encontradas, sempre incentivando os alunos a tentarem fazer simulações próprias de situações análogas e em seguida pesquisarem situações novas e mais gerais no computador, despertando a curiosidade e a motivação dos alunos.

5. PROJETOS DE PROBLEMAS REAIS

Os problemas práticos que geralmente aparecem na natureza, geralmente não aparecem equacionados numa forma bem definida e acabada, sequer traduzida por uma função matemática ou representada por uma expressão analítica explicita, como na maioria das vezes encontramos tudo pronto nos livros textos. Resultados de um experimento, por exemplo, geralmente são representados por um conjunto de dados, uma tabela contendo dados numéricos observados sobre um determinado fenômeno. Com base nesta idéia, solicitamos que os alunos elaborassem projetos relacionados com o dia a dia, ou que buscassem projetos nos departamentos e nas empresas relacionadas com o futuro profissional de cada um. Muitos dados e assuntos interessantes foram trazidos pelos alunos. Discutimos e orientamos os trabalhos de modo que eles pudessem gerar funções, trabalhar os conceitos e explorar resultados matemáticos bem como fazer conjecturas.

Citaremos alguns tópicos que exploramos na disciplina de Métodos de Matemática Aplicada usando o computador e relatados no ambiente do Maple V, incluindo animações gráficas para entendimento e análise do comportamento das soluções dos problemas quando se variava algum parâmetro. Exploramos gráficos de dados reais de experimentos da engenharia e ajuste de funções para obter condições de iniciais e/ou de contorno; Gráficos e entendimento das Funções de Heaviside e Delta de Dirac; Transformadas de Laplace e de Fourier; Séries de Fourier. Aplicações à resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais; Modelos que nos levaram ao estudo das Equações do calor; da onda e do potencial. Exemplos trazidos pelos alunos como os de análise de reações químicas; resistência mecânica de materiais; deflexão de estruturas submetidas a cargas; comportamento elástico e viscoelásticos de materiais; propagação de onda unidimensional e bidimensional representando por exemplo, as vibrações das cordas de uma guitarra ou de um tambor; distribuição de temperatura em placas cerâmicas bidimensionais modeladas pela propagação de calor e da equação do potencial com condições iniciais e/ou de contorno, foram explorados conscientemente por eles. Ressaltamos que os alunos ficaram bastante envolvidos com os projetos, pois procurou assuntos de interesse geralmente relacionados com o próprio curso, laboratórios de estágios.

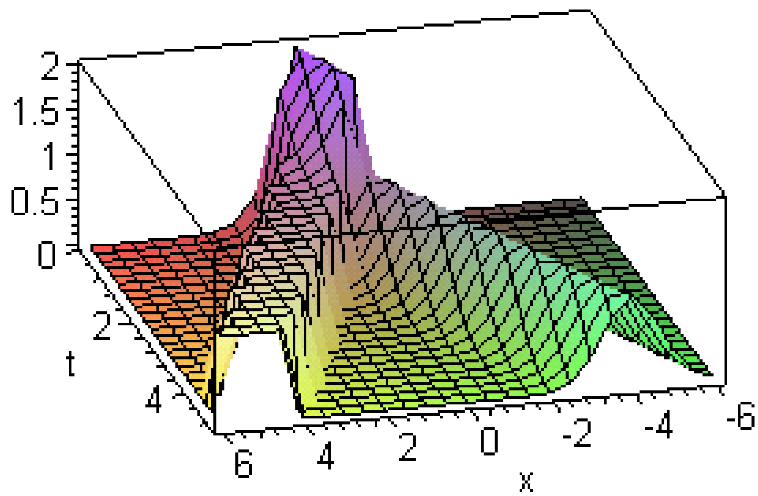
Exemplos de projetos envolvendo a análise da convergência da Série de Fourier nos pontos de descontinuidade de uma função g, onde as oscilações próximas dos pontos de descontinuidade permanecem, mesmo acrescentando o número de termos da série, visualizando o chamado Fenômeno de Gibbs, conforme gráficos abaixo.



Convergência não uniforme da Série de Fourier nos pontos de descontinuidade de g(t), quando aproximada com 10, 20 ou 30 termos respectivamente.

Com as facilidades gráficas e de animação do Maple V foram explorados conceitos como o do Fenômeno de Gibbs representado acima, fato difícil de ser observado sem o uso do computador.

No final do semestre os alunos apresentaram os seus projetos e resultados obtidos para a classe usando o projetor multimídia. A seguir, um exemplo de um gráfico simulando a propagação de frentes de ondas apresentada pelos alunos.



6. CONCLUSÃO

Neste trabalho, descrevemos uma experiência sobre o ensino de Equações Diferenciais quando incorporamos o estudo de problemas reais e o uso do computador como ferramenta auxiliar no processo educativo. Ilustramos, motivamos e exploramos os conceitos matemáticos teóricos e práticos envolvidos na formulação e resolução dos problemas. Mostramos que é possível, tanto para o professor quanto para os alunos, aprender a aprender quando usamos o computador como ferramenta didática. Além disso, verificamos que a dinâmica da sala de aula torna-se mais intensa e propicia para uma aprendizagem significativa. As interações do professor orientador-aluno e aluno-aluno durante as explorações de conceitos matemáticos foram muito mais ricas e permitiram criar uma classe mais interessada na matemática usando as ferramentas computacionais.

Observamos também que o processo de adaptação inicial dos alunos é lento e que varia de um para outro. É mais rápido com turmas em que os alunos já usaram o computador como ferramenta didática nas disciplinas cursadas anteriormente.

No início, das nossas experiências existiram muitos pedidos de atenção e expectativa com relação ao sucesso imediato, tanto por parte dos alunos como dos próprios colegas professores.

Para nós, este experimento de ensino é muito gratificante, pois envolve uma procura constante de como se pode adequar uma disciplina tradicional usando os recursos computacionais disponíveis. É evidente que este trabalho inovador exige muito mais envolvimento do professor no planejamento e na execução do que é geralmente adotado numa disciplina tradicional. À medida que os alunos vão se adaptando ao computador e ao uso do software todo o trabalho vai se tornando mais fácil.

Desenvolvimento de atitudes autônomas e independentes em alguns estudantes a respeito dos seus conhecimentos e compreensão de conceitos e resultados são logo observadas. Os alunos entendem facilmente as técnicas quando usadas para resolver problemas surgidos nos seus próprios projetos. Basta facilitar/orientar alguns alunos sobre algum tópico ou particularidade do assunto para que o resto da turma capte imediatamente a idéia. Quando os alunos interagem com o professor e de fato procuram entender, explicar e argumentar sobre o que está sendo estudado / pesquisado, a possibilidade é de que os conhecimentos são adquiridos mais significativamente. Realmente, este processo de interação social aluno - professor e aluno - aluno facilita o desenvolvimento da zona próximal discutida nos trabalhos de Vigotsky [22].

É certo que ganhamos mais tempo para pensar e desenvolver questões mais importantes e críticas dos tópicos cruciais durante a disciplina, muito mais, do que a simples memorização de conceitos, resultados e a realização de cálculos repetitivos ou tediosos. Tivemos maior participação e o questionamento contínuo dos alunos e muitos deles, continuam explorando seus trabalhos e projetos mesmo depois de concluírem a disciplina. A liberação do estudante para explorar conteúdo através de questionamentos possibilitando o aumento do aprendizado significativo e a possibilidade de introduzir conceitos de níveis mais elevados integrando a disciplina com pesquisa de ponta, uma vez que muitos deles traziam problemas que estavam vivenciando no laboratório ou estágios que estavam fazendo. A possibilidade de resolver problemas reais nas disciplinas é realmente um desafio interessante e motivador para a classe.

As capacidades gráficas, de animação e de programação no computador proporcionam a realização de mais tentativas de descobertas em um tempo bem menor.

Além disso, é possível colocar nossas notas de aulas e alguns projetos da disciplina na forma de hipertextos "on line" para alunos e servir de auxílio para uma educação continuada de ex-alunos. O ponto central do curso não deve ser o software, ou computador em si, mas a "sábia" exploração do conteúdo com o mesmo!

Acreditamos que ainda temos que aprender muito nesta área, e estes desafios deveriam ser uma preocupação constante das Universidades, potencialmente detentoras do saber, das pesquisas de ponta e na sua função disseminadora do saber e de preparação de alunos críticos, construtivos e capazes de efetuar a transformação clamada pela sociedade. A orientação do processo de ensino-aprendizagem–avaliação sintonizada com o tempo atual, nos faz com que o uso do computador em conjunto com uma reforma apropriada dos currículos ajuda os estudantes entenderem alguns conceitos de Matemática com mais facilidades.

Introduzir links com lições extras, exercícios, estudo dirigido, elaboração de mapas conceituais, busca de problemas reais, trabalhos de pesquisa e projetos, são idéias que também contribuem para o entendimento do conteúdo e um aprendizado mais significativo da disciplina.

Na fase de aplicação desta proposta didática, é recomendável que o professor-orientador tenha adquirido uma visão geral bem clara da disciplina, do software e que tenha elaborado um roteiro preliminar de atividades e projetos, bem como estar aberto a outros projetos possíveis de serem explorados com o conteúdo da disciplina. Assim é possível intercalar aulas expositivas com aulas práticas no laboratório de computação. Nesta experiência os alunos já podiam acessar arquivos com as instruções principais sobre o uso do software na rede e exemplos de como usá-los no curso e de como solicitar ajuda do software "on line" ou em CD-ROM como o de nossa equipe [3]. Podiam resolver os problemas na classe e discutir as soluções com os colegas e o professor - orientador. Os trabalhos de pesquisa de modelos e a resolução dos mesmos pelos alunos podiam ser entregues em disquete tudo no mesmo ambiente do Maple V. Após revisá-los, fazíamos as observações e comentários junto com os alunos e os devolvia para que eles o corrigissem, e reestudassem as técnicas usadas e aperfeiçoassem o projeto. Ficou evidente o crescimento do interesse dos alunos e inclusive do próprio professor-orientador, pois muitos problemas trazidos pelos alunos nos levaram a pesquisar e discutir os projetos, interpretações etc. com professores de outras áreas. Finalmente, gostaria de ressaltar um comentário dos alunos:

> Computadores e softwares ajudam mas nunca excluirão nem substituirão o professor.

Referências:

[1] ABELL, M. L ., BRASELTON, J. P., Differential equations with Maple V, Ap Professional, Academic Press (1994).

[2] BOYCE, W. E. e DIPRIMA, R. C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 6ª Ed. (1999)

[3] COSTA, I. M., SALVADOR, J. A., MALAGUTTI, P. L. A., PATERLINI, R. R., RODRIGUES, S., FURUYA, Y. K e BALDIN, Y. Y., Hipertexto de Matemática Universitária Básica com Maple V, CD-ROM, EdUFSCar (2000).

[4] DAVIS, P. J. e HERSH, R., A experiência Matemática, Trad. J. B. Pitombeira, 4a. ed., Ed. Francisco Alves (1989)

[5] FARLOW, S. J., Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Wiley (1982).

[6] GOWIN, D. B., Educating , Holt, Rinhart and Winston, NY (1978).

[7] HALMOS, P. R. , The teaching of problem solving, in the The problem of Learning to Teach, Am. Math. Monthly, 82, 5, (1975).

[8] HEAL, K. M., HANSEN, M. L. e RICHARD, K. M., Maple V, Learning Guide, Springer (1996).

[9] KALLAHER, M. J. (ed) Revolutions in Differential equations - Exploring ODEs with Modern Technology, MAA Notes #50, The Mathematical Association of America (1999)

[10] MASON, J., What, why and how in mathematics, Micromath, no. 11(1), Springer (1995).

[11] MOREIRA, M. A., A teoria de educação de Novak e o modelo de Ensino-aprendizagem de Gowin, Fascículos do CIEF, Série Ensino-Aprendizagem, no. 4, (1993).

[12] SALVADOR, J. A. e SANTOS, V. M. P. , Calculus Computer, ICME8, Spain, (1996).

[13] SALVADOR, J. A., Cálculo com Mathematica, Oficina do 25o. Encontro do Projeto Fundão, CCMN-IMUFRJ (1995)

[14] SALVADOR, J. A., SALVADOR, J. e SANTOS, V. M. P., O Processo de Ensino-Aprendizagem na Era da Informação, XIX CNMAC, UFG/UCG - Goiânia - GO (1996).

[15] SALVADOR, J. A. , Hipertexto de Métodos de Matemática Aplicada com Maple V, Série Apontamentos, EdUFSCar (2001).

[16] SALVADOR, J. A. , Equações Diferenciais Parciais com Maple V, Série Apontamentos, EdUFSCar (2002).

[17] SALVADOR, J. A., As Inovações Tecnológicas e o Ensino de Métodos de Matemática Aplicada, XX CNMAC, Gramado - RS , (1997).

[18] SALVADOR, J. A. e MALAGUTTI, P. L. A. , Explorando Métodos de Matemática Aplicada à Engenharia com Maple V, Anais do XXV Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, Salvador, BA, vol. 2, 819-833, (1997).

[19] SALVADOR , J. A. e BALDIN, N. As Inovações Tecnológicas e o Processo de Ensino - Aprendizagem de Matemática na UFSCar, CD-ROM CLATE'98 (Congresso Latinoamericano de Tecnologias Educativas) Agosto 98, UTN - Faculdad de San Nicolás, Argentina.(1998)

[20] SALVADOR, J. A. e ARAÚJO, J. L. Mathematical Modelling in Calculus Courses, in Modelling and Mathematics Education, ICTMA9: Applications in Science and Technology, Ed. J. F. Matos, W. Blum, K. Houston, and S. P. Carreira, Horwood Publishing Series: Mathematics and Applications (2001)

[21] SANTOS, S. , FIGUEIREDO, V. L. X. e MELLO, M., Cálculo com Aplicações: um ambiente de ensino e aprendizagem, UNICAMP (2000)

[22] VIGOSTKI, L. S., Aprendizagem e Desenvolvimento intelectual na idade escolar, in Psicologia e Pedagogia, ed. Riunitti, Roma (1974).

CAPÍTULO 29

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 321:328.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01** © 2002, Editora IME-UERJ.

A HISTÓRIA DO PRINCÍPIO DO MÁXIMO: A DIFÍCIL RELAÇÃO ENTRE A MATEMÁTICA E SUAS APLICAÇÕES

Marcos Azevedo da Silveira

Departamento de Engenharia Elétrica
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rua Marquês de São Vicente, 225
22453-900, Rio de Janeiro, RJ, BRASIL.
endereço eletrônico: marcos@ele.puc-rio.br

Resumo: *Discute-se a relação entre a Matemática e as suas aplicações, exemplificando com a história do Princípio do Máximo de Pontreaguine: Porque este Princípio não é atribuído a McShane? Conclui-se sobre a necessidade de imergir os matemáticos em um campo onde as aplicações da Matemática sejam necessárias, mesmo que deles não seja exigido o desenvolvimento de aplicações.*

Palavras-chave: *História da Matemática, Controle Ótimo, Matemática Aplicada.*

Abstract: *The relation between Mathematics and its applications is discussed, using as example the history of Pontreaguin's Maximum Principle: Why this Principle is not atributed to McShane? A conclusion is that mathematicians need to be imerged in a field where applications of Mathematics are represented, even when there is no immediat clame for the development of such applications.*

Key words: *History of Mathematics, Optimal Control, Applied Mathematics.*

Para iniciar esta discussão sobre a relação entre a Matemática e suas aplicações, citaremos uma frase provocativa atribuída a Paul Oterson:

> "A **matemática pura** é a parte da **matemática aplicada** cujas aplicações se restringem à própria **matemática**".

Além de mostrar que só há uma Matemática (como sugerimos no título deste artigo), uma análise cuidadosa dessa frase, passada a surpresa da inversão da ordem habitual "pura → aplicada", mostra que os adjetivos aí utilizados dependem mais de uma questão do escopo ou do interesse do matemático (aquele que constrói a Matemática) que da essência do assunto (isto é, do "tipo" de Matemática).

O comentário acima pode ser refraseado como:

"Não há matemática pura ou aplicada, mas **matemáticos puros** e **matemáticos aplicados**".

Matemáticos puros, neste sentido, estão apenas preocupados com o desenvolvimento de sua própria disciplina, jogando seu próprio jogo, referenciados essencialmente a si próprios. Matemáticos aplicados, nesta frase, estão produzindo Matemática, mas conscientes de outras disciplinas e de suas necessidades. Trabalham conectados a um campo mais vasto, onde a Matemática apresenta soluções a problemas exteriores a suas preocupações internas, mesmo que seus teoremas possam ser apresentados em obras dedicadas apenas à Matemática (quando então se torna "pura"). Exemplos históricos não faltam, desde Arquimedes, passando por Newton, Leibniz, Lagrange, Fourier e Gauss, até o momento em que, já no século XIX, a necessidade do desenvolvimento formal da Matemática como ciência autônoma e o aumento de sua extensão (fazendo aparecer os especialistas de áreas determinadas), gerou a divisão entre "puros" e "aplicados". Mesmo assim, grandes matemáticos, como Hilbert, Von Neumann e Laurent Schwartz ligaram seus desenvolvimentos "puros" às necessidades da Física e da Engenharia.

Não estamos afirmando que cada matemático deva estar conectado ao exterior de sua disciplina, mas que convém que trabalhe em um campo onde circulem problemas e necessidades externas à esta, onde influências externas possam ser exercidas, onde se estabeleça contato com outras linguagens e outros valores. Matemáticos aplicados (neste sentido lato aqui apresentado) podem estar diretamente motivados ou voltados para as aplicações externas ao campo matemático (seriam "matemáticos aplicados *strictu senso*"), ou indiretamente influenciáveis através do grupo de pesquisadores onde se inserem[1]. A questão que aqui colocamos é mais estrutural que individual, como será mostrado pelo exemplo histórico que apresentaremos.

O Princípio do Máximo é um resultado estendendo o Cálculo das Variações a sistemas de controle, isto é, a sistemas dinâmicos (descritos por equações diferenciais ordinárias) onde o termo forçante pode ser escolhido em uma classe de funções pré-determinada. A escolha deverá ser feita otimizando um critério integral previamente definido, sob condições iniciais e/ou finais estabelecidas (ou livres), e sob restrições aos valores assumidos pela função de controle e/ou pelo estado do sistema. De uma forma simplificada, busca-se maximizar:

$$\int_{t_0}^{t_f} L[x(t),u(t),t]dt + K_0[x(t_0),t_0] + K_f[x(t_f),t_f]$$

sob o conjunto de condições:

$$x(t_0) \in \Theta_0,\ x(t_f) \in \Theta_f,\ T_0 \le t_0 < t < t_f \le T_f,\ u(t) \in \Omega(t),\ x(t) \in \Theta(t),$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = f[x(t),u(t),t],$$

[1] Fariam "Matemática Aplicável" e não "Matemática Aplicada"?

onde x(t) representa o estado do sistema no instante t; Θ_0 e Θ_f podem ser vetores fixos, ou todo o espaço, ou ainda conjuntos fechados, tais como superfícies e curvas; Ω(t) representando restrições na variável de controle (eventualmente independentes do tempo) e Θ(t) restrições no estado (eventualmente independentes do tempo); instantes iniciais e finais t_0 e t_f podendo ser fixos ou livres. Este problema é o chamado Problema de Controle Ótimo.

Um exemplo típico é a tentativa de parar um automóvel a uma distância dada (a posição do sinal vermelho, por exemplo), minimizando o tempo despendido na operação. Aqui, o controle é dado pelos valores da aceleração (resultado da posição do acelerador, se positiva, ou do freio, se negativa). Naturalmente, posição e velocidade iniciais são conhecidas, assim como a aceleração e a frenagem são limitadas. Na notação acima, $m \le u(t) \le M$, $m < 0$ e $M > 0$. Neste caso, $\Omega(t) = \Omega$ é um conjunto fechado. Note que a posição e a velocidade finais são dadas (o automóvel deve chegar à posição do sinal com velocidade nula, sem ultrapassá-la). O tempo final é livre, sendo a variável a ser minimizada. Para isto, faz-se $L[x(t),u(t),t] \equiv 1$, sendo nulos os custos final e inicial.

Fazendo $f[x(t),u(t),t] = u(t)$ e obrigando as restrições a serem vetores fixos, ou todo o espaço, ou curvas, ou superfícies, encontramos os problemas tratados pelo Cálculo Variacional. Assim, o critério integral pode ser reescrito como:

$$\int_{t_0}^{t_f} L[x(t),\frac{dx}{dt}(t),t]dt + K_0[x(t_0),t_0] + K_f[x(t_f),t_f],$$

a restrição diferencial desaparecendo, as demais sendo devidamente adaptadas.

A origem do Cálculo Variacional pode ser reportada ao problema de encontrar o sólido que enfrenta mínima resistência ao movimento dentro de um líquido, estudado por Newton nos *Principia* (Livro II, Proposição XXXIV, Teorema XXVIII), ou ao problema do braquistócrono, proposto por Jean Bernoulli em 1696 (e resolvido pelo próprio, por seu irmão Jacques, e por Newton), ou aos trabalhos formais de Euler e Lagrange justificando e estendendo os princípios variacionais então em voga, como o Princípio de Fermat ou o Princípio da Mínima Ação de Maupertuis[1]. É preciso dizer que todos estes desenvolvimentos foram produzidos ao longo do desenvolvimento da Mecânica, em particular da Mecânica Racional.

Euler e Lagrange desenvolveram condições necessárias para a curva ótima x(t), supondo todas as funções envolvidas regulares à vontade, assim obtendo as equações diferenciais de Euler-Lagrange:

$$L'_x - L''_{x't} - x'L''_{x'x} - x''L''_{x'x'} = 0,$$

[1] Virgílio relata que Dido, ao fundar Cartago, resolveu o problema de delimitar a maior área que poderia circunscrever com a ajuda de uma fita cortada da pele de um único touro. Cabe também lembrar que os gregos definiam o segmento de reta como a curva minimizando a distância entre dois pontos. Também, em torno de 290, Pappus resolveu o problema de encontrar a curva que junta dois pontos com comprimento dado, o protótipo do problema variacional "isoperimétrico", usando propriedades de cônicas.

$x'(t) = dx(t)/dt$. Encontraram esta equação estudando as variações "admissíveis" para a solução ótima, calculando a variação correspondente no critério, e obrigando esta última a se anular no limite.

Ao longo do século XVIII e XIX muitos outros resultados foram adicionados à teoria de Euler e Lagrange, incluindo as condições suficientes para mínimos e máximos (Legendre e Jacobi) e a reestruturação das equações de Euler-Lagrange em termos dos momentos associados, por Hamilton. Legendre definiu, de certa forma, a noção de derivada direcional, as direções dadas pelas variações "admissíveis" de Euler e Lagrange. Estudando as derivadas direcionais de segunda ordem pode estabelecer condições suficientes. Já Hamilton reescreveu a Mecânica Racional na chamada "formulação Hamiltoniana", que facilita compreender a estrutura geométrica subjacente ao problema (as equações de Hamilton formam um sistema de equações de primeira ordem, substituindo a equação de Euler-Lagrange) e encontrar as leis de conservação a partir das simetrias do problema[1].

Importante para a nossa história é a obtenção, por Weierstrass e Erdmann, de condições necessárias para a solução de problemas onde x(t) é suposta continuamente diferenciável por partes, e não continuamente diferenciável, como até então. Estudaram este caso para tratar situações limites das situações físicas habituais, onde a força aplicada sofre uma descontinuidade. Diríamos hoje que Weierstrass "relaxou" o problema, considerando um conjunto de soluções admissíveis maior que o anterior.

Até então eram considerados mínimos relativos "fracos", onde a norma usada para medir as variações era a do espaço $C^1(t_0,t_f)$. Os métodos de Weierstrass permitiram-lhe encontrar, em 1879, condições necessárias para mínimos relativos "fortes", onde a norma usada para medir as variações era a do espaço $C^0(t_0,t_f)$. A notar que Weierstrass foi influenciado não mais por problemas de Mecânica, mas por problemas técnicos internos ao Cálculo Variacional, embora estes sejam sugeridos a partir do significado físico inicial do problema, considerados os casos limites.

Os métodos de Legendre, Weierstrass e Jacobi geraram todo um desenvolvimento do Cálculo Variacional, tomado agora como teoria autônoma, independentemente de seus significados físicos. Ver, sobre isso, a obra clássica de Caratheodory.

Os primeiros resultados de existência foram demonstrados por Hilbert, no início do século XX, para problemas sem restrições outras que o de x(t) pertencer a uma superfície regular. Os resultados de Hilbert, conseqüência do Teorema da Função Implícita, foram demonstrados em função de suas tentativas (bem sucedidas no âmbito de problemas regulares) de formalizar matematicamente a Mecânica Racional. Problemas isoperimétricos (restrições integrais) só puderam ser considerados com a introdução das "curvas generalizadas" de L. C. Young, em 1937, uma das antevisões das distribuições de Laurent Schwartz. "Curvas generalizadas" são funcionais sobre classes de integrandos, permitindo tratar desconti-

[1] Ver a equação de Hamilton-Jacobi e o posterior Teorema de Noether.

nuidades iniciais e finais. Correspondem, de certa forma, a resolver o problema variacional sobre classes de medidas, relaxando mais uma vez o problema.

O livro clássico de Bliss não repertoria os resultados de Young, que permaneceram incompreendidos por um bom tempo. Um aluno de Bliss, McShane, estudou por conta própria a relaxação do problema, considerando perturbações apenas mensuráveis. No *tour de force* que representa esta generalização, motivada pelo simples desejo de ampliação da teoria (palavras do próprio McShane), demonstrou o Lema de McShane, mostrando que estas perturbações geram um conjunto de variações na condição final que pode ser aproximado por um cone convexo. Esta condição é, de certa forma, equivalente ao Princípio do Máximo de Pontreaguine, como aparece no livro clássico de Berkowitz, publicado já nos anos 70. Mas a formulação de McShane permanecia dentro do Cálculo Variacional, onde a hipótese de $dx(t)/dt$ ser apenas mensurável tem como única motivação a generalização matemática.

Hestenes, aluno de McShane, em 1950, reescreveu este Lema no formato do Problema de Controle Ótimo, fazendo $dx(t)/dt = u(t)$, sendo $u(t)$ uma função contínua por partes, admitindo perturbações apenas mensuráveis. Esta formulação facilita as demonstrações e permite tratar restrições $\Omega(t)$ fechadas, o que não era possível pelas formulações anteriores. Mas o resultado de Hestenes, publicado em um relatório da RAND Corporation, ficou desconhecido. O Cálculo Variacional estava desacreditado na comunidade matemática, suas recentes generalizações tratadas como detalhes de uma teoria que já havia atingido seu fim. A notar que L. M. Graves, em 1933, já havia publicado um artigo (na Trans. Am. Math. Society) com esta formulação, mas válido somente quando não havia restrições na variável de controle $u(t)$.

Mas, em 1952, L. Pontreaguine, um "matemático puro" russo responsável por belos teoremas em Análise Harmônica, apresentou um Princípio, sem demonstração, que, segundo ele, seria aplicável a importantes problemas de Engenharia. Este Princípio, fornecendo condições necessárias para a solução do Problema de Controle Ótimo definido acima, permitia tratar restrições $\Omega(t)$ fechadas com interior não vazio no espaço dos valores para a variável de controle. Pontreaguine argüiu, com aguda perspicácia, que a forma como o problema estava enunciado era especialmente útil para os engenheiros do momento, pois os sistemas de controle em estudo – o controle de lançadores de satélites, em especial – possuíam restrições deste tipo nas variáveis de controle, além de restrições integrais, como a limitação do combustível total, quando $u(t)$ representava o seu fluxo.

A formulação de Pontreaguine caiu como uma bomba no ambiente de Matemática Aplicada. *Et pour cause*: diversos problemas particulares deste tipo tinham sido apresentados e resolvidos nos últimos anos, sempre usando técnicas de Análise Funcional, aplicáveis em casos particulares. Podemos afirmar que estes problemas eram relacionados à corrida espacial, como uma rápida pesquisa às publicações da época pode confirmar.

O anúncio do enunciado foi acompanhado de uma demonstração para o caso em que o Princípio podia ser reduzido ao Cálculo Variacional tradicional, e do comentário sobre a necessidade de considerar restrições no controle e no estado na forma de conjuntos fechados de interior não vazio, além de controles contínuos por partes ou meramente na classe L^p, condições naturais nos problemas de controle oriundos da Engenharia.

Ao longo dos cinco anos seguintes apareceu um grande número de demonstrações do Princípio, usando ferramentas diversas, mas sempre apoiadas na relaxação do problema para considerar perturbações admissíveis apenas mensuráveis (sob hipóteses de existência de soluções das equações diferenciais envolvidas e de finitude da integral definindo o critério a ser otimizado). A demonstração apresentada por Pontreaguine e seus colaboradores (Gamkrelidze, Mishenko e Boltianski), dois anos depois do anúncio, era explicitamente baseada no Lema de McShane. Outras demonstrações são as de Lee & Markus, Dubovtskii & Myliutin (baseada no estudo de funcionais lineares em espaços vetoriais topológicos localmente convexos), Rozooner (a mais geométrica de todas, considerando em detalhe restrições na variável de estado), Falb, e, naturalmente, Young e Hestenes & McShane. A nova formulação justificou um conjunto de resultados de existência (ver o livro de Berkowitz), o estudo da obtenção de leis de controle ótimo em malha fechada (Feldbaum, Kalman, Athans, etc.) e o estudo de condições suficientes, baseadas no Lema de Hilbert e na equação de Hamilton-Jacobi estendida por Bellman via Programação Dinâmica (Falb, Vinter, Fleming & Rishel, etc.).

O final dos anos 50 e os anos 60 foram ocupados com aperfeiçoamento e generalizações dos resultados, o desenvolvimento de métodos numéricos para o cálculo do controle ótimo e um número enorme de aplicações. No início dos anos 70 era comum dizer que a Teoria de Controle seria completamente reduzida à Teoria do Controle Ótimo, desde que definidos os critérios a otimizar convenientes. Este programa mostrou-se errôneo, mas não está muito longe do que ocorre hoje, quando boa parte dos objetivos de controle é descrita no formato de minimização de algum critério.

O resultado inicial desta proliferação de demonstrações lembra o que ocorreu após a divulgação da Teoria das Distribuições de Laurent Schwartz: cada autor tinha o "seu" Princípio do Máximo, defendido a unhas e dentes nos inúmeros congressos dedicados ao assunto ocorridos nesta época. A maior diatribe foi a movida por Hestenes na defesa da primazia de McShane. Em um desses artigos Hestenes mostrou que bastava aplicar uma mudança de variáveis a um resultado de McShane para obter uma demonstração do Princípio do Máximo! Ora, este é o caminho de boa parte das demonstrações de teoremas novos em Matemática, sempre demonstrados, é claro, a partir de outros já conhecidos. Em outro artigo assinalou que a formulação de Pontreaguine já havia sido descrita em seu artigo para a RAND Corporation, antes que o grupo russo se dedicasse ao assunto. Infelizmente, o mundo matemático não a percebeu, pois se colocava dentro do quadro do Cálculo Variacional, não relacionando o resultado a novas necessidades ou a propriedades interessantes para além de uma generalização abstrusa. Outro a invocar precedência foi Young (em seu livro sobre Controle), embora suas técnicas não fossem gerais o suficiente para abordar o problema colocado por Pontreaguine.

Finalmente McShane capitulou, em um artigo apresentado em 1977, discutindo o porque da atribuição do resultado a Pontreaguine, e não a outros. McShane considera, e com razão, que a forma do Princípio, exatamente como proposta por Pontreaguine, era de imediata utilização na resolução de problemas de Engenharia. Em especial a consideração dos diferentes tipos de variedades finais e a dos diferentes tipos de restrição para a variável de controle. Pontreaguine achara a boa linguagem, adaptada às necessidades da época. Mais ainda, relacionara seu problema às discussões tecnológicas do momento, em especial às geradas pela corrida espacial.

Mas porque os matemáticos norte-americanos dedicados ao Cálculo Variacional não haviam chegado à boa formulação[1]? McShane respondeu que ele e seus colegas estavam voltados para interesses internos ao Cálculo Variacional, voltados para a lógica interna desta teoria vista como puramente matemática. Acusou a comunidade matemática norte-americana de ter se isolado, com arrogância, do mundo das aplicações, fechando-se em sua parte da Academia, de forma quase autista. Ao contrário, os matemáticos russos, em especial os do Instituto Lemossov, por mais famosos e "puros" que fossem, eram obrigados a ministrar cursos nas Escolas de Engenharia. Cursos para calouros (Cálculo, Álgebra) e cursos mais avançados, mas que fossem de interesse para os alunos e professores de Engenharia, interesse definido por estes! Seminários, inclusive, sem arrogância. Este contato obrigatório trazia as discussões em Engenharia à atenção dos matemáticos russos mais importantes ... e este elo faltava nos USA.

A História foi dura com McShane. Além do Princípio do Máximo, perdeu por pouco a primazia das integrais de Ito e de Hewitt. A integral de McShane precedeu a integral de Ito de pouco, mas não estava apresentada de forma apropriada para a aplicação a Processos Estocásticos, nem permitia o desenvolvimento imediato do Lema de Ito e de martingales. Diz McShane (eu não estou convencido) que era geral demais, a particularização correspondendo à integral de Ito não sendo clara, a não ser depois de um longo estudo. E a integral de Hewitt (que formaliza as integrais de Feyman e de Wiener) está próxima à de McShane, mas, de novo, falta à última o tempero certo...

Voltando à discussão inicial, podemos ver que não basta o resultado útil ser demonstrável, mas é preciso encontrar a linguagem certa. Mas como saber onde está a necessidade? A motivação depende do indivíduo, é certo, mas também de seu ambiente, isto é, das solicitações e das experiências às quais o indivíduo é submetido. Daí, como acabou percebendo McShane, a importância do contato com os valores e as necessidades de outras áreas e de suas realidades.

Finalmente, qual a utilidade desta discussão para a educação de matemáticos? Perguntando aos colegas sobre as possibilidades profissionais de matemáticos, tenho escutado que estes podem ser professores (secundários ou universitários), pesquisadores ou autores de livros (técnicos ou didáticos). Ora, matemáticos trabalham em todo o mundo como consul-

[1] Lembro que eram tempos de guerra fria, com a disputa USA x URSS no auge.

tores para empresas de engenharia, para o mercado financeiro, para o governo. No Brasil, inclusive (e conheço vários exemplos). Mais ainda, matemáticos, enquanto professores, não estão dedicados a apenas formar outros matemáticos, mas, principalmente, a formar engenheiros, economistas, biólogos, etc., além de fornecer à população em geral o ferramental matemático para que esta enfrente os problemas cotidianos e assuma a sua cidadania. Se pretendem atuar nestas áreas, ser professores eficientes, precisam, desde sua formação, ter contato com outros problemas e valores que os da comunidade matemática.

Primeiro, porque, como professores, estarão se dirigindo a alunos que nem sempre pretendem se formar matemáticos, tendo outros interesses. Segundo, porque alunos aprendem a partir do que já conhecem, de seus "universos de significados", e a referência contextualizada a problemas que lhes façam sentido facilita o aprendizado sem sofrimento[1] - sofrimento este gerado pela apresentação desencarnada das idéias abstratas, sem referência ao mundo da vida. Assim, falando para matemáticos e apenas de problemas que nascem da própria matemática, correm o risco de acabar falando apenas para si próprios - e aí mesmo os outros matemáticos não lhe prestarão atenção - *McShane dixit*.

Referências:

L. D. Berkovitz, *Optimal Control Theory*, Berlin: Springer, 1974.

G. A. Bliss, *Lectures on Calculus of Variations*, Chicago: Un. Chicago Press, 1946.

L. M. Graves, *Trans. Math. Society*, 1933.

E. J. McShane, On multipliers for Lagrange problems, *Amer. J. Math*., 1939, pp. 809-819.

E. J. McShane, Necessary conditions in generalized-curve problems in the calculus of variations, *Duke Math. J*., 1940, pp. 1-27.

E. J. McShane, Integration, Princeton: Princeton Un. Press, 1944.

E. J. McShane, The calculus of variations from the beginning trhough optimal control theory, in A. B. Schwarzkopf, W. G. Kelley e S. B. Eliason (editores), *Optimal Control and Differential Equations*, NY: Academic Press, 1978, pp. 3-50.

L. S. Pontreaguine, V. G. Boltianskii, R. V. Gamkrelidze e E. F. Mishenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes* (tradução), NY: John Wiley & Sons, 1962.

[1] Ver BARUK, S. L'Âge du Capitaine. Paris: Éditions du Seuil, 1985.

CAPÍTULO 30

História e Tecnologia no Ensino da Matemática, volume 1, **págs: 329:340.**.
Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores)
ISBN: **85-89498-01** © 2002, Editora IME-UERJ.

CURRÍCULOS PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

TRANSFORMAÇÕES CURRICULARES E SITUAÇÃO SOCIAL NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO BRASIL

Marger da Conceição Ventura Viana [1]

Departamento. de Matemática da
Universidade Federal de Ouro Preto
endereço eletrônico: Venturaviana@aol.com

***Resumo**: Este trabalho apresenta uma pequena discussão sobre currículo, levando em consideração ser um tema ainda polêmico. Aborda também conceitos propostos por pesquisadores da área e propõe um conceito próprio de currículo para formação de professores. A seguir, apresenta um pequeno histórico da trajetória do currículo no Brasil, ensaiando uma incursão crítica pelas reformas ocorridas no Brasil. Aborda ainda os currículos para a formação de professores de Matemática no Brasil. Apresenta, no final, anexos às referências bibliográficas, outros títulos relacionados ao tema.*

***Palavras-chave:** Currículo, Currículo para Formação de Professores, Currículos para Formação de Professores de Matemática no Brasil.*

***Abstract:** This work presents a brief discussion on the theme Curriculum, regarding the fact that it is still a polemical issue. It also discusses the concepts proposed by the researchers in this area and proposes a new concept of Curriculum aiming the formation of teachers. Then a brief historic of the Curriculum development in Brazil is presented, in an attempt to approach critically the various changes it has undergone. Another issue presented here is the Curriculum for the formation of Mathematics teachers in Brazil. Finally, at the end of this paper one can find the annexes to the bibliographical references and other titles regarding this theme.*

***Key words:** Curriculum, Curriculum for the Formation of Teachers, Curriculum for the Formation of Mathematics Teachers in Brazil*

[1] Professora adjunta doutora

1. ANÁLISE DE DIFERENTES CONCEITOS DE CURRÍCULO

O currículo, objeto de estudo da Teoria Curricular, orienta a formação profissional ou escolar no sistema educacional, segundo o objetivo para o qual esteja dirigido. Assim sendo, a Teoria Curricular, como ciência, está subordinada à Pedagogia, porque a formação profissional faz parte do processo educativo do ser humano, que é o objeto de estudo da Pedagogia.

No entanto Moreira e Silva (1995, p.21) afirmam o seguinte: *"O currículo é uma área contestada"*. De fato, segundo esses autores (1995, p.14-16), na Universidade de Rochester, Estados Unidos, realizou-se uma Conferência, em 1973, com o objetivo de reconceituar o campo de estudo do currículo. A partir desse evento, desenvolveram-se duas correntes: uma na Universidade de Ohio, associada à tradição humanista e representada por William Pinar; outra associada às Universidades de Wisconsin e Colúmbia e fundamentada no neo-marxismo e na teoria crítica, sendo Michael Apple e Henry Giroux seus representantes e os precursores do que se chamou Sociologia do Currículo, que, para Moreira e Silva, (1995, p.21), estuda

> "relações entre currículo e estrutura social, currículo e cultura, currículo e poder, currículo e ideologia, currículo e controle social, etc. Reitere-se a preocupação maior do novo enfoque: entender a favor de quem o currículo trabalha e como fazê-lo trabalhar a favor dos grupos e classes oprimidas".

Ao mesmo tempo, na Inglaterra, Michael Young definiu novos rumos para a Sociologia da Educação, principalmente no Instituto de Educação da Universidade de Londres, concebendo-a como uma sociologia do conhecimento escolar, ou seja, como uma nova sociologia do currículo. *"A matriz desses esforços recebeu o nome de Nova Sociologia da Educação (NSE)"*.

Por outro lado, Cherryholmes (1988, p.130), citado por Gimeno Sacristán (2000, p.145), assinala:

> "O currículo não é uma derivação, como outros subcampos da Educação, que proceda de diferentes disciplinas acadêmicas aplicadas. Assim, por exemplo, a psicologia educativa tem suas raízes na psicologia; os fundamentos sociais da educação, na história e na sociologia; a filosofia da educação, na filosofia;(...) O currículo trata de problemas que são especificamente educativos".

Isso corrobora nossa asserção de ser a Teoria Curricular um ramo da Pedagogia, pois os problemas educativos são pertinentes ao processo educativo.

Como a teoria curricular é bastante recente, o desenho curricular, isto é, o processo de elaboração do currículo muitas vezes se constitui um ajuntamento de conteúdos reunidos em disciplinas que compõem a grade curricular, geralmente organizada por grupos de professores das diversas disciplinas com base em experiência empírica e nos conteúdos que lecionam. Por isso mesmo, ainda é polêmico o que se compreende por *currículo.* Assim, para algumas pessoas*,* currículo são os conteúdos que se estudam numa determinada disciplina; para outras, trata-se da grade curricular do curso ou, ainda, é o que consta do manual do curso: são todas as disciplinas com os créditos, forma de avaliação, etc. Para uma parcela de educadores, currículo é o programa de uma disciplina. De qualquer forma, em geral, quando se entende currículo como grade curricular, há rigidez e não se permite mudança.

Vamos nos deter na opinião de alguns pesquisadores para uma reflexão acerca do que é ou se compreende por currículo.

Segundo César Coll (1997, p.45),

> "o projeto que preside as atividades educativas escolares, define suas intenções e proporciona guias de ação adequadas e úteis para os professores, que são diretamente responsáveis pela sua execução. Para isso, o currículo proporciona informações concretas sobre o que ensinar, quando ensinar, como ensinar e que, como e quando avaliar".

Para Stenhouse (1998, p.29): "Un currículo es una tentativa de comunicar los princípios y rasgos esenciales de un propósito educativo, de forma tal que permanezca abierto a discusión crítica y pueda ser trasladado efectivamente a la práctica".

Para Valle Lima (2000, p.85):

> "El sistema de actividades docentes y extradocentes, que permiten la formación del futuro profesional a partir de los objetivos derivados de las exigencias sociales, las nuevas tendencias en la formación profesional, las condiciones institucionales y los niveles de ingreso de este".

Cada uma destas definições encerra um ponto de vista diferente. Por exemplo: para Coll o currículo é um projeto, enquanto para Valle Lima é o processo de formação posto em prática, e Stenhouse o apresenta como uma intenção.

Considerando os aspectos positivos das definições anteriores, podemos assumir que o currículo pode ser concebido como um sistema de componentes psicopedagógicos que orientam a formação profissional, no sistema educacional, relacionando teoria, prática e investigação. No caso da formação profissional, o sistema está marcado pelo perfil do profissional, por objetivos, áreas de estudo, disciplinas, concepção da prática pedagógica, da investigação, do componente acadêmico, da relação entre teoria/prática/investigação, do processo de ensino aprendizagem e do sistema de avaliação.

No processo de formação escolar, principalmente nas disciplinas ou áreas, encontra-se o objeto da Didática, que é o processo de ensino/aprendizagem, aqui compreendido como o processo pelo qual o educando (sob a direção do professor) desenvolve capacidades, hábitos e habilidades que lhe permitem apropriar-se da cultura (sentido amplo) e dos meios para conhecê-la e enriquecê-la. Assim também se formam os sentimentos, interesses, valores, todas as esferas da personalidade. Portanto, não podemos aceitar a definição estreita de currículo como grade curricular, muito menos programa de uma disciplina, embora esses façam parte do currículo.

Também se esclarece que a Teoria Curricular não se confunde com a Didática, já que há objetos de estudo distintos.

De qualquer forma, por causa das mudanças que estão ocorrendo com grande rapidez na sociedade, é necessário que o currículo tenha certa flexibilidade. Segundo Valle Lima (1998, p.2)

> "... la tendencia en la elaboración del currículo se encamina a la determinación de un núcleo considerado como estable, alrededor del cual se pueden ir incorporando o eliminando propuestas en dependencia de las necesidades sociales, las características de los nuevos estudiantes y los avances de la ciencia y la técnica."

Temos, assim, o currículo aberto. Em oposição, quando tudo está concebido de antemão, sem possibilidade de seleção por parte do professor e/ou do aluno, ocorre o currículo fechado.

O desenho curricular deve estar fundamentado nos referenciais teóricos coerentes com a base de formação do estudante: processo de conhecimento e processo de ensino-aprendizagem. Atualmente, em conformidade com as exigências sociais e os avanços científicos advindos do desenvolvimento da ciência, já não se admite trabalhar simplesmente com ajuntamento de conteúdos e disciplinas na elaboração de currículos. Apesar disso, existem várias tendências na elaboração do desenho curricular.

2. TRANSFORMAÇÕES CURRICULARES E SITUAÇÃO SOCIAL NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO BRASIL

No Brasil, até a década de vinte, não havia uma proposta sistemática de abordagem de questões curriculares, apenas tradições curriculares fundamentadas em uma base filosófica que mesclava Herbart, Pestalozzi e a influência jesuítica. Conforme Moreira, as primeiras infra-estruturas (sugestões sobre a organização dos currículos e programas), no Brasil, ocorreram na década de vinte, com as reformas educacionais dos Estados da Bahia e de Minas Gerais e do Distrito Federal, "*nas quais sugestões referentes à organização de currículos e programas podem ser encontradas. Tais sugestões constituíram em nosso país o primeiro esforço de sistematização do processo curricular*" (Moreira, 1997, p.84). Em seguida, segundo o mesmo autor, pode ser considerada a influência, até hoje, do Instituto de Pesquisas Educacionais (INEP) e anteriormente, do Programa de Assistência Brasileiro-Americana à Educação Elementar (PABAEE), sendo o enfoque curricular derivado principalmente das idéias de John Dewey e Kilpatrick. Anísio Teixeira, após elaborar a reforma educacional na Bahia, foi aos Estados Unidos estudar com John Dewey na Universidade de

Colúmbia. E, de acordo com Saviani (citado por Moreira em 1997, p.82) essa influência durou, no cenário brasileiro, até o início da década de sessenta. O PABAEE resultou de um acordo firmado, no governo de Juscelino Kubitschek (11/04/1956), entre o Brasil e os Estados Unidos, para treinar professores de escolas normais e supervisores de ensino primário e selecionar professores competentes para treiná-los em Educação Elementar, nos Estados Unidos (Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, vol. XLI, nº 93, 1964, p.56). Além disso, conforme Moreira, a bibliografia utilizada pelo PABAEE era fundamentalmente americana e de autores brasileiros que estudaram nos Estados Unidos (Marina Couto, Dalila Sperb e Lina Lady Traldi). Esses fatores contribuem para a compreensão do por quê da influência de Ralph Tyler até nossos dias.

Em 1962, foi criada a disciplina "Currículos e Programas" nas Faculdades de Educação, pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional- (Lei nº 4024/1961), como eletiva, que, com a Reforma Universitária de 1968 (Lei nº 5540/1968), passou a fazer parte do currículo mínimo dos cursos de Pedagogia. O que se estudava era:

> "Organização curricular e programas no jardim da infância e em turmas iniciais da escola elementar; orientação da aprendizagem no jardim da infância e em turmas iniciais da escola elementar; currículos e programas de linguagem e de leitura na escola de primeiro grau; organização curricular e programas do curso normal; currículos e programas de ciências naturais, sociais e de matemática na escola elementar e no curso normal". (Moreira, 1997, p. 126).

Desse estudo decorreu o desenvolvimento da área do currículo no Brasil. Observa-se, porém, que o conceito de currículo estava restrito aos níveis primário e secundário. Assim, Paraíso (1994, p. 108) afirma

> "Se as teorias críticas estão começando a se fazer presentes nos estudos dos autores brasileiros preocupados com os currículos dos cursos de primeiro grau, o mesmo não anda acontecendo com os cursos de nível técnico e superior". " ... quando falam em currículo de qualquer curso de graduação, quase sempre estão se referindo à grade curricular."

Já Silva, (1994, p.85) diz o seguinte:

> "Há na literatura educacional, uma ausência intrigante de análises e estudos dos currículos e das pedagogias universitárias. Essa ausência é tanto mais notável quando se pensa na perspectiva crítica que tem dominado a área de educação nos últimos anos. Trata-se de uma crítica que raramente tem se voltado para seus próprios meios e recursos pedagógicos. É quase sempre uma crítica dos currículos e das pedagogias dos outros, em geral dos outros níveis de ensino"

As reformas curriculares no ensino fundamental e médio, até a década de 80, muitas vezes ficaram apenas no plano teórico. Uma das possíveis causas disso pode ter sido a falta de preocupação com a formação dos professores do nível primário. De acordo com Moreira

(1997, p.121), *"... era preciso que um imenso número de professores com pouco ou nenhum treinamento viesse a ensinar, eficientemente, crianças até então excluídas das salas de aulas do país".* Além disso, ainda segundo Moreira (1997, p.211), "*os teóricos brasileiros que têm discutido a questão do conhecimento da escola de primeiro grau no Brasil são, fundamentalmente, filósofos e sociólogos ao invés de curriculistas".*

No entanto, os pesquisadores da Sociologia do Currículo estão conscientes de que, como se pode observar em Silva (Moreira, 1994, p. 90),

> "A Sociologia da Educação não está normativamente preocupada com as finalidades da Educação, com a natureza do conhecimento educacional, com as melhores formas de organizar o sistema educacional ou de desenvolver melhores métodos de ensino ou de avaliação, embora todas essas preocupações sejam legítimas e possam ser iluminadas por meio da sociologia da educação".

Ainda de acordo com esse autor, ela se preocupa mais "*em compreender de que modo a educação institucionalizada está envolvida na dinâmica social e quais são suas relações mútuas"* do que em saber que ela por si só não pode dar resposta a todos os problemas educacionais.

Em tal contexto, é de se esperar que filósofos e sociólogos não ofereçam sugestões concretas que orientem a prática curricular, já que ambos possuem níveis de teorização muito geral. Como conseqüência, os professores acabam recorrendo aos autores tradicionais na falta de diretrizes norteadoras.

Quanto à Reforma Universitária (promulgada após 64), ela acabou por incrementar o ensino universitário de acordo com os padrões da racionalidade tecnológica. Isso não fez desenvolver o pensamento crítico que estava divulgado na Universidade antes de 1964 (Cunha, 1983). A razão é que a universidade estava em uma situação de crise e, ao mesmo tempo, era crítica de si mesma e da sociedade. O novo regime político tentou eliminar a universidade crítica, expulsando professores, fazendo a "seleção" político-ideológica dos novos docentes e reprimindo o movimento estudantil. Assim, promoveu a reforma de 1968, desejando colocar a universidade a serviço do desenvolvimento capitalista.

Não é, portanto, por acaso que os esquemas dos currículos das licenciaturas, no Brasil, são os "chamados 3 + 1". No caso da Licenciatura de Matemática, por exemplo, há três anos só de Matemática e depois um ano de disciplinas pedagógicas. Dá-se grande ênfase aos estudos de Matemática Superior, sem qualquer preocupação de usá-los para o desenvolvimento das competências próprias do futuro professor de Matemática. Em tais "esquemas", o aluno estuda, nos primeiros anos, disciplinas ligadas à Matemática: Cálculo Diferencial e Integral I, II e III, Geometria Analítica, Álgebra Abstrata, Álgebra Linear, Equações Diferenciais, Cálculo Numérico, Análise Real, Funções de uma Variável Complexa, Probabilidade e Estatística, Introdução à Ciência da Computação, Física Geral I e II, às vezes Física III, Geometria Diferencial e até Topologia. Somente no último ano cursa disciplinas da área de formação pedagógica: Psicologia, Didática, Fundamentos da Educação e o Estágio, em que, muitas vezes, o estudante nem leciona, pois, além de não se sentir seguro, a escola não permite.

Esse tipo de concepção curricular baseia-se na lógica da racionalidade técnica; isto é, sendo o professor um técnico, sua prática profissional não passa de atividade tecnológica (concepção epistemológica da prática, herdada do positivismo). Assim, o desenvolvimento de competências profissionais deve ser colocado após o conhecimento científico básico e aplicado, conforme explica Schön (Perez,1983, p.98): "*Em primeiro lugar, não se podem aprender competências e capacidades de aplicação enquanto não se tiver aprendido o conhecimento aplicável e, em segundo lugar, as competências são um tipo de conhecimento ambíguo e de menor relevo"*..

Alguns anos depois, o próprio Schön (1987, p. 6-7) escreveu:

> "As zonas indeterminadas da prática - incerteza, singularidade e conflitos de valores - escapam aos cânones da racionalidade técnica. Quando uma situação problemática é incerta, a solução técnica do problema depende da construção prévia de um modelo bem definido - o que em si mesmo não é uma tarefa técnica. Quando um prático reconhece uma situação como única, não pode tratá-la apenas através da aplicação de teorias e técnicas derivadas do seu conhecimento profissional. E, em situações de conflito de valores, não há metas claras e consistentes que guiem a seleção técnica dos meios".

Contudo, são precisamente estas zonas indeterminadas da prática aquelas que os profissionais práticos e os observadores críticos têm vindo a considerar, ao longo das últimas duas décadas e de uma forma cada vez mais clara, como centrais como para sua prática profissional".

Desta forma, não é por acaso que o "esquema 3+1" não tem logrado alcançar seus objetivos. Paradoxalmente a esse licenciado em cuja formação a Matemática de nível superior teve ênfase nega-s,e com freqüência, o acesso imediato à Pós-Graduação em Matemática e, como conseqüência, à docência no ensino superior, mesmo nos cursos de Licenciatura. Como conseqüência, os professores do ensino superior quase nunca tiveram matérias pedagógicas e a arte de ensinar passa longe de suas preocupações primordiais.

Assim, esse sistema se auto-alimenta continuamente, pois os professores universitários encarregados das matérias de Matemática, em geral, fizeram apenas o Bacharelado e ingressaram na Pós-Graduação, sem ter tido contato algum com a área de Educação Matemática, pois a legislação brasileira não exige do professor do ensino superior os conhecimentos psicopedagógicos necessários para a boa condução de seus trabalhos, mas somente os conhecimentos específicos.(LDBEN nº 9.394/96 Título VI,Art.66: *A preparação para o exercício do magistério superior se fará em nível de pós-graduação, prioritariamente em programas de mestrado e doutorado*).

A partir de Programas Institucionais do Ministério da Educação do Brasil, como "Integração da Universidade com o Ensino de 1º Grau" e Educação para a Ciência, no início dos anos 80, e da criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), em fevereiro de 1986[1], na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, durante o 1º Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), há uma tendência de se trabalhar em currículos dos cursos de Licenciatura de Matemática, com a finalidade precípua de aperfeiçoar a formação do professor. Note-se que se entende currículo no sentido restrito: aperfeiçoamento de metodologias de ensino, formação continuada de professores, criação de materiais(meios) para auxiliar o processo de ensino/aprendizagem, estudos teóricos sobre teorias da aprendizagem de Matemática, sobretudo em Psicologia Cognitiva, estudos filosóficos e sociológicos da Educação Matemática e outros assuntos relacionados.

Nos últimos anos, têm surgido algumas propostas de reestruturação dos cursos de Licenciatura em Matemática, que, em sua maioria continuam presas à lógica racionalista, já que advogam apenas mudanças na ordem seqüencial das disciplinas e/ou a criação de alguma disciplina nova. O que se pretende é distribuir as disciplinas pedagógicas ao longo dos 4 anos ou ao longo de três. Assim, o licenciando depara com matérias pedagógicas sem quaisquer conexões com as matérias matemáticas, à exceção do Estágio. E é apenas nessa oportunidade que aprende algo que faz sentido e tem alguma ligação com as competências necessárias para sua atuação profissional. Mas parece pouco provável que isso seja suficiente para lograr uma formação eficiente do Professor de Matemática, de modo que esteja apto a ministrar aulas de Matemática Elementar, cujo conteúdo está presente nos onze anos da vida escolar do cidadão. E esse professor de Matemática é o egresso do Curso de Licenciatura Plena habilitado a dar aulas para alunos do terceiro e quartos ciclos do ensino fundamental (crianças de 11 a 14 anos) ao 3º ano do Ensino Médio (jovens de 15 a 17 anos).

Outro problema é a defasagem dos currículos dos cursos de licenciatura quando comparados com os programas do Ensino Fundamental e Médio, e o grande despreparo dos formandos do "chamado 3+1", pois os conteúdos que serão abordados na escola fundamental e média e os do curso de formação de professores de Matemática não guardam uma vinculação estreita entre si.

---

[1] Oficialmente (com registro em cartório, etc.) a SBEM foi criada em 1987 no II ENEM realizado na Universidade Estadual de Maringá (UEM)-PR.

Por outro lado, se o licenciado quer seguir carreira fazendo o mestrado em Matemática, possivelmente não está preparado, pois necessita, para isso, fazer um curso de aperfeiçoamento. Para atuar como professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, também não está preparado. Basta lembrar os inúmeros programas de melhoria de ensino financiados pelas agências governamentais e implementados pelas IES em todo o Brasil. Concluímos, que o Licenciado está habilitado, mas não tem as habilidades suficientes para o exercício da profissão, quando formado pelos currículos em questão.

Referências:

BICUDO, Maria Aparecida V. Licenciatura e Formação Continuada - O exemplo da UNESP.In: MENEZES, L. C.(Org.) *Professores: Formação e Profissão.* Campinas: Autores Associados, 1996. 448p.

BRAGA, M. M.A licenciatura no Brasil: um breve histórico sobre o período 1973-1987.IN: Ciência e Cultura 40(2). pp.151 – 157,Feb. 1988.

BRANDÃO, C. R. Refletir, discutir, propor: as dimensões de militância intelectual que há no educador. In: BRANDÃO, C. R. (org.) *O educador: vida e morte*. Rio de Janeiro: Graal, 1982. p. 78.

BRASIL, Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional-LDBEN. Diário Oficial da União, Brasília, 23 de dezembro de 1996. Seção I.

BROLEZZI, A. Carlos e VIANA, Marger C. V. Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto, 1998.

COLL, C. *Psicologia e Currículo*. Trad. Cláudia Schilling. 2ª ed. São Paulo: Ática. 1997. 200p.

CUNHA, L. A. *A Universidade Crítica*. Rio de Janeiro: Francisco Alves. 1983.260 p.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan Tempo da Escola e Tempo da Sociedade In: SERBINO, R. V. Ribeiro, R., Barbosa, R. L. L., Gebran, R. A. Org. *Formação de Professores.* São Paulo: Ed. UNESP. 1998. 357p.

DOLL, William E., *Currículo: uma perspectiva pós-moderna* Trad. Maria Adriana V. Veronese. Porto Alegre: Artmed. 1997,2 24 p.

DEMO, Pedro. Formação permanente de Formadores - Educar pela Pesquisa. In: MENEZES, L. C., Org. *Professores: Formação e Profissão.* Campinas, São Paulo: Autores Associados, 1996. 448p.

_____. *A nova LDB Ranços e Avanços*. 10ª ed. Campinas: Papirus, 2000, 111 p.

GIMENO SACRISTÁN, J. y PERÉZ GOMÉZ, A. I. *Compreender e Transformar o Ensino*. Trad. Ernani F. Fonseca Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2000, 396 p.

MOREIRA, Antônio F. B. *Currículos e Programas no Brasil*. 3ª Ed.Campinas: Papirus, 1997, 232 p.

MOREIRA, Antônio F. B.(org). *Conhecimento Educacional e Formação do professor.* Campinas: Papirus1994. 138 p.

MOREIRA, Antônio F. B. e SILVA, Tomaz Tadeu (org). *Currículo Cultura e Sociedade*. 2ª Ed. São Paulo: Cortez. 1995. 154 p.

NASSER, L., SANTOS, V. M. Formação e aperfeiçoamento de professores de Matemática: uma investigação do processo de mudança. Dynanis Revista Tecno-Científica, 1(7), p. 41-53, 1994.

NÓVOA, A. Formação de professores e profissão docente. In: NÓVOA, A. (Coord.) *Os professores e a sua formação.* 3ª ed. Lisboa: Dom Quixote, 1997.158p.

PARAÍSO, M. A. *Estudos sobre currículo no Brasil: tendências das publicações de uma década*. In: Educação e Realidade. 19(2):95-114.jul/dez.1994.

PEREZ GÓMEZ, A. I. "*Calidad de la enseñanza y desarrollo profesional del docente*". In Sociedad y Educación. Madrid: Fernandez Enguita. 1990.

______.O Pensamento Prático do Professor. In: NÓVOA, A. (Coord.) *Os professores e a sua formação.* 3ª ed. Lisboa: Dom Quixote, 1997. 158 p.

PIRES, Célia M. C. *Currículos de Matemática: Da Organização Linear à Idéia de Rede.* Dissertação (Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 1995.

______. Novos Desafios para os Cursos de Licenciatura em Matemática. *Educação Matemática em Revista,* São Paulo, Ano 7, nº .8, pp.10-15, jun.2000.

RIANI, Dirce C. Formação do Professor: A construção dos estágios Supervisionados. São Paulo: Lúmen.1996. 145p.

RODRIGUES, A. ESTEVES, M. *A análise de necessidades na formação de professores.* Porto: Porto Editora, 1993. 158p.

SAVIANI, D. Os Saberes Implicados na Formação do Educador. In: BICUDO, M. Aparecida. V. Silva Junior, Celestino Alves (Orgs.) *Formação do Educador.* V. 1 São Paulo: UNESP, 1996. 155 p.

SCHÖN, D. The Reflexive Practitioner. New York: Basic Books, 1983.

______.Educating the Reflexive Practitioner. San Francisco:Jossey-Bass,1987.

STENHOUSE, L. *Investigación y desarrollo del curriculum*. Madrid: Morata. (An introduction to curriculum search and development. London, Henemann, 1981) 1998. 319 p.

TYLER, Ralph W. *Basic Principles of Curriculum and Instruction*. Chicago: University of Chicago Press, 1949. [Ed. Brasileira: Princípios básicos de currículo e ensino. Porto Alegre, Globo, 1974. Pág.1-2]

VIANA, M. C. V. *Perfeccionamiento del currículo para la formación de profesores de Matematica en la UFOP.* Tese (Doutorado em Ciências Pedagógicas)- Instituto Central de Ciências Pedagógicas, Mined, La Habana, Cuba, 2002.

______.*A teoria , a prática e a investigação na formação do professor de Matemática.*In:GT-7 Formação de professores que ensinam Matemática. Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática. Rio de Janeiro. UFRJ. 2001.

______. Currículo: O que é isso? Currículos para a formação de professores de Matemática. In: Anais do II Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto: Gráfica Mundial. 2001, v. único, p. 34-39.

______. *Comparando Currículos para a formação de professores de Matemática*. In: Anais do II Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto. Ouro Preto: Gráfica Mundial, 2001. v.único, p. 46-53.

______.*Formación de profesores de Matemática: análisis del currículo*. In: Anais do Seminário Interinstitucional em Pesquisa Educacional. Ouro Preto. 2000.

______.*Estudio Comparativo de Currículos.* In: Revista de Educação Pública.Homepage de la UFMT. 2000. ISSN/01045962.

______. *Tendências do Desenho Curricular*. In: Educação e o Novo Milênio, 2000, Mariana. Anais do Seminário Educação e o Novo Milênio. Mariana: Gráfica Monumento, 2000. v. único. p.15.

______. *O Perfil do Professor/Educador.* In Caderno de Resumos -Interdisciplinaridade e Práticas de Pesquisa em Ciências Sociais. Mariana,1999. v. único, p. 06.

______. *Perfeccionamiento del currículo para la formación de profesores de Matemática en la UFOP*. In: Resúmenes del III Simposio Iberoamericano de Investigación y Educación: la formación y Desarrollo del Niño y del adolescente. La Habana,1999. v. único.

VIANA, Marger da Conceição Ventura; PIRES, Fabíola Batista. *Exigências atuais para a formação do professor de Matemática: uma utilização do QSR NUD*IST 4*. In: Anais do VIII Seminário de Iniciação Científica da UFOP.Ouro Preto: Coordenadoria de Imprensa UFOP, 2000. v. único, p. 150

VALLE LIMA, A. D. *Maestro: Perspectivas y Retos.* México DF:Editorial del Magisterio “Benito Juarez”. 2000.