II HTEM

Anais do Segundo Colóquio
de História e Tecnologia no Ensino de Matemática

1 a 3 de março de 2004

Rio de Janeiro - RJ

Editora
IME - UERJ

Editores
Luiz Mariano Carvalho
Carlos A. de Moura

ISBN
85-89498-02-6

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

C719 Colóquio de história e tecnologia no ensino de Matemática (2. : 2004 : Rio de Janeiro)
Anais... / Editores: Luiz Mariano Carvalho e Carlos A. de Moura. - Rio de Janeiro : IME-UERJ, 2004.
1 disco a laser para computador; $4\frac{3}{4}$ pol.

ISBN: 85-89498-02-6

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática - História. I. Carvalho, Luiz Mariano. II. Moura, Carlos A. de. II. Título

CDU 51.06(075.8

Anais do Segundo Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática

Editores: Luiz Mariano Carvalho e
Carlos A. de Moura

Editora IME-UERJ

capa: Aline Santiago Ferreira

março 2004

Conteúdo

Apresentação **vii**

Comitê Cientí£co **ix**

Comissão Organizadora **xi**

Revisores dos Anais **xiii**

Apoios Institucionais **xv**

Comunicações cientí£cas **1**

1 A INTEGRAL; COMO SERIA SE FOSSE CRIADA HOJE?
Renato J.C. Valladares **1**

2 ESTIMULANDO A "MENTE GRÁFICA" COM AUXÍLIO DA GEOMETRIA DINÂMICA
Maria Helena W.L. Rodrigues e Daniel W.L. Rodrigues **11**

3 MATHLETS: APPLETS JAVA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA
Angela R. dos Santos, Ricardo S. Kubrusly e Waldecir Bianchini **19**

4 O *APER*- "ARQUIVO PESSOAL EUCLIDES ROXO"
Wagner Rodrigues Valente **27**

5 E-CALCULO: UM CURSO VIRTUAL DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
Maria Cristina B. Baru£ **35**

6 HISTÓRIA E ESTÓRIAS DA MATEMÁTICA
Helena N. Cury e Carlos Eduardo M. Motta **43**

7 MATHEMATICAL METAPHORS AND POLITICAL FRAMINGS
Ivan da Costa Marques **51**

8 MARY BOOLE: DUAS ANALOGIAS SOBRE A NATUREZA DA MATEMÁ-TICA
John A. Fossa **67**

9 AS "VIDAS PARALELAS" DE GEORGE BOOLE
Giselle C. de Sousa e John A. Fossa **73**

10 UMA ABORDAGEM DA TEORIA DOS NÚMEROS DO SÉCULO XIX: PE-TER BARLOW
Marta F. dos Anjos e John A. Fossa **79**

11 PROFESSORES DE MATEMÁTICA E O USO DE TECNOLOGIAS...
Jaqueline M. Brum **85**

12 SOBRE O USO DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES
Marcos A. da Silveira **95**

13 OFICINAS DE MATEMÁTICA DISCRETA NO ENSINO MÉDIO
Samuel Jurkiewicz e Gilda Leventhal **107**

14 UM CURSO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
Bruno Alves Dassie **115**

15 COMBINANDO LINGUAGENS NAS AULAS DE GEOMETRIA
Sandra A. Santos e Maria T. M. Freitas **123**

16 VALE UTILIZAR SOFTWARES NO ENSINO DE CÁLCULO?
Marger C. V. Viana **131**

17 UM RELATO DO USO DE TECNOLOGIA NO ENSINO INTEGRADO
Yuriko Y. Baldin e Ivana A. da S. Calsani **139**

18 EXPLORANDO POSIÇÕES RELATIVAS NO APLICATIVO GNUPLOT
Roberta Naidon e Alice de J. Kozakevicius **147**

19 RECONHECIMENTO DE FORMAS ALGÉBRICAS NO ENSINO
Franck Bellemain **155**

20 UMA PROPOSTA DE PRÉ-CÁLCULO COM ENSINO COLABORATIVO
A. C. de Castro Barbosa, C. F. R. Concordido e C. G. Carvalhaes **163**

21 UMA DEMONSTRAÇÃO A PARTIR DE EXEMPLOS...
Silvana Marini R. Lopes **171**

22 UM CANDIDATO A OBSTÁCULO À APRENDIZAGEM DOS CONCEITOS ...
Paula M. Baltar Bellemain 183

23 PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA: USO DE GEOMETRIA DINÂMICA ...
Leônidas de O. Brandão 191

24 "NO ESCURINHO DO CINEMA" USANDO GEOMETRIA DINÂMICA ...
José P.Q. Carneiro e Andrea V. da Silva 203

25 UMA ABORDAGEM COMPUTACIONAL PARA O CONCEITO DE ASSÍNTOTAS
Marcelo Chaves Silva 211

26 ANÁLISE DE FUNÇÕES BIQUADRADAS ATRAVÉS DO SOFTWARE GRAPHMAT
Estela K. Fainguelernt e Franca C. Gottlieb 221

27 TABULÆ, UMA FERRAMENTA DE COLABORAÇÃO SÍNCRONA EM GEOMETRIA DINÂMICA
Rafael G. Barbastefano, Francisco Mattos e Thiago Guimarães 229

28 AS OVAIS DE MAXWELL EM GEOMETRIA DINÂMICA
Danusa C. Gani e Elizabeth Belfort 237

29 NOVAS TENDÊNCIAS SOBRE O PAPEL DO USUÁRIO DE TECNOLOGIA: OLHANDO PARA ALGUNS CAMPOS DE ESTUDO
Bibi Lins 247

30 GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO DE ÓTICA
Carlos E. Aguiar 257

31 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
Gérard E. Grimberg 265

32 ENSINO TRADICIONAL VERSUS RECURSOS COMPUTACIONAIS: UMA EXPERIÊNCIA NÃO EXCLUDENTE
Maria Hermínia de P.L. Mello e Mário Olivero M. da Silva 273

33 A ROBÓTICA EDUCACIONAL CONSTRUINDO CONCEITOS CIENTÍFICOS NO ENSINO MÉDIO: ESTRATÉGIAS DE ALGUNS PROFESSORES
Fred Santos e Monica Rabello de Castro 283

34 REPRESENTAÇÕES E INTERPRETAÇÕES DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA
Edvaldo Lima da Silva e Aguinaldo Robinson de Souza 295

35 Análise de Funções Elementares de uma Variável Complexas através do Software F(C)
Edvaldo Lima da Silva e Aguinaldo Robinson de Souza 303

36 Contribuição do desenvolvimento das habilidades de formação e de generalização de conceitos para a melhoria da aprendizagem da matemática
Roberto Lopes de Abreu 311

37 Reflexões acerca do Problema de Alhazen
Luiz Carlos Guimarães 321

38 Descrições Computacionais, Conflitos e o Conceito de Derivada
Victor Giraldo e Luiz Mariano Carvalho 329

39 Formação Continuada para Professores de Matemática
Carneiro, Faulhaber, Felisberto, Lobão, Moura e Oliveira 337

Artigos convidados 343

40 História do Cálculo Diferencial e Integral
Eduardo Sebastiani Ferreira 343

41 História do Cálculo Precursores: Arquimedes e a Escola de Galileu
Sueli I. R. Costa 345

42 História do Cálculo Pós Leibniz e Newton
Itala M. Loffredo D'Ottaviano 351

43 Considerações sobre o ensino de Cálculo Diferencial no Brasil no século XIX
Circe Mary Silva da Silva 357

44 Conexões entre conhecimentos e saberes em ambientes informatizados: a mediação do professor
Lulu Healy e Ana Paula Jahn 365

45 Matemática e Sociedade
Francisco Duarte Moura Neto 367

Resumos 383

46 Aarão Leal de Carvalho Reis
Paulo M. Cabral Junior 383

47 Números Complexos e Geometria Dinâmica
José Paulo Q. Carneiro e Magali Catarina Bastos 385

48 Uma Visão Geométrica do Teorema Fundamental do Cálculo
Ana Cristina Vieira e Luiz Mariano Carvalho 387

49 Análise do Problema de Apolônio via Geometria Dinâmica
André Luis Trevisan e Sandra A. Santos 389

50 Custo do calçamento de ruas: uma experiência com modelagem matemática e planilhas eletrônicas
Clarissa Trojack D. Nina e Helena N. Cury 391

51 O Estado da Arte do Ensino-Aprendizagem em Geometria na Região Norte Fluminense
Salvador Tavares e Vera Fazoli Viana 393

52 Jogos no Ensino de Matemática
T.C.E. Sera£m e L.C. Queiroz 395

53 Aplicações de Softwares no Ensino de Matemática
T.C.F. Campos e L.C. Queiroz 397

54 Dificuldades do Ensino Aprendizagem
V. Fagundes e L.C. Queiroz 399

55 F(C): Funções Complexas
Edvaldo Lima da Silva e Aguinaldo Robinson de Souza 401

56 Criptografia RSA no Ensino da Teoria dos Números
José Maria Magalhães, Rafael Augusto S. Nogueira e Sandra Mara Jorge 403

57 Alunos do curso de matemática $\times$ alguns conceitos básicos de Cálculo
Luciana Gastaldi S. Souza e Regina Luzia C. de Buriasco 405

Índice de Autores 406

Apresentação

Os artigos selecionados falam por si, no entanto várias entidades e pessoas tornaram possível a realização do Segundo Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (II HTEM), e em particular desses anais, e a elas é destinado esse agradecimento em forma de apresentação.

Em primeiro lugar às cinco Sociedades (SBC, SBEM, SBHMat, SBM e SBMAC) que desde o primeiro momento apoiaram, divulgaram e participaram da organização do evento.

Agradecemos também à administração da UERJ pelo apoio permanente ao evento, em especial ao Magnífico Reitor Prof. Nival Nunes de Almeida, ao Diretor do CTC Prof. Antonio Carlos Moreira da Rocha, ao ex-Diretor do IME Prof. Jorge Guilherme de Araujo Carvalho e à Diretora do IME Profa. Mariluci Ferreira Portes.

Não podemos deixar de agradecer à Decana do CCMN/UFRJ Professora Angela Rocha dos Santos pelo apoio e participação em várias fases e instâncias do Colóquio.

O trabalho dos revisores é a garantia da qualidade desses anais, a eles nosso reconhecimento.

Gostaríamos de agradecer também a todos os funcionários do IME pelo apoio e entusiasmo, em particular à D. Selma Pinheiro Aguiar de Moraes Jardim, ao Sr. Geraldo dos Reis da Conceição e à Jacqueline Telles, que com seu trabalho cotidiano são os responsáveis pela infra-estrutura do evento.

Ao pessoal do LABIME, Sandra Perello Marchiori, Roberta Barbosa Chaves Direito e Daniel Olair Ferreira, nossas palavras de agradecimento.

E mais uma vez, agradecemos à Aline Santiago Ferreira pela bela capa tanto do cd quanto dos anais.

Desejamos que todos os participantes do Colóquio e os leitores desse trabalho possam aproveitar esses anais para suas tarefas de pesquisa e compreensão da difícil e complexa realidade do ensino/aprendizagem da Matemática nos dias de hoje em nosso país.

Luiz Mariano Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)

Comitê Cientí£co

Angela Rocha (UFRJ)
Celso Costa (CEDERJ e UFF)
Circe Mary Silva da Silva (UFES)
Daniel C. Orey (California State University, Sacramento)
David Tall (University of Warwick)
Eduardo Sebastiani (UNICAMP)
Elena Nardi (University of East Anglia)
Estela Kaufman Fainguelernt (SBEM-RJ)
Franck Bellemain (UFRJ)
Gert Schubring (Universität Bielefeld)
Hermann Heusler (PUC- Rio)
João Bosco Pitombeira (PUC-Rio)
José Paulo Quinhões Carneiro (UERJ)
Márcia M. Fusaro Pinto (UFMG)
Mônica Rabello de Castro (SBEM)
Rômulo Lins (UNESP-Rio Claro)
Rubens Sampaio (SBMAC)
Sergio Nobre (SBHMat)
Suely Druck (SBM)
Yuriko Y. Baldin (UFSCar)

Comissão Organizadora

Alberto Tornaghi (C.S.Inácio e COPPE)
Ana Maria M.R. Kaleff (UFF)
Antônio C. Brolezzi (USP)
Carlile C. Lavor (UERJ)
Carlos A. de Moura (UERJ)
Helena N. Cury (PUC-RS)
John A. Fossa (UFRN)
José Paulo Carneiro (SBM)
Leônidas O. Brandão (USP)
Luiz C. Guimarães (UFRJ)
Luiz M. Carvalho (UERJ)
Marcos da Silveira (PUC-Rio)
Mônica Mandarino (UNIRIO)
Sueli I. R. Costa (UNICAMP)
Victor Giraldo (UFRJ)

Revisores dos Anais

Alberto Tornaghi (C.S.Inácio e COPPE)
Antônio C. Brolezzi (USP)
Bibi Lins (UNESP)
Carlile C. Lavor (UERJ)
Carlos A. de Moura (UERJ)
Elizabeth Belfort (UFRJ)
Franck Bellemain (UFRJ)
Gérard Grimberg (REHSEIS (CNRS-France) e Liceu Molière-Rio)
Helena N. Cury (PUC-RS)
John A. Fossa (UFRN)
Jose Paulo Q. Carneiro (SBM)
Leônidas O. Brandão (USP)
Luiz C. Guimarães (UFRJ)
Luiz M. Carvalho (UERJ)
Marcos da Silveira (PUC-Rio)
Mônica Mandarino (UNIRIO)
Sueli I. R. Costa (UNICAMP)
Victor Giraldo (UFRJ)

Apoios Institucionais

Sociedade Brasileira de Computação
Sociedade Brasileira de Educação Matemática
Sociedade Brasileira de Educação Matemática-RJ
Sociedade Brasileira de História da Matemática
Sociedade Brasileira de Matemática
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional
UERJ
UFRJ

2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 1:10
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 1

A INTEGRAL; COMO SERIA SE FOSSE CRIADA HOJE?

UMA ESPECULAÇÃO SEM SENTIDO HISTÓRICO OU UM RECURSO DE ENSINO?

Renato J.C. Valladares
Universidade Estácio de Sá
rjcv@urbi.com.br

Resumo *O principal objetivo deste trabalho é abordar a integral como inversão da derivada e como uma extensão do produto, cuja procura recai na estrutura multiplicativa usual. Esta abordagem leva rapidamente ao Teorema Fundamental do Cálculo e às propriedades da integral. Sob este ponto de vista, as somas de Riemann tornam-se desnecessárias no atendimento das prioridades do Cálculo, permanecendo necessárias, apenas, para os teoremas de existência de primitivas.*

Palavras-chave *Cultura da velocidade; extensão; inversão; evolução; produto; integral.*

Abstract *The principal aim of this paper is to approach integrals in a direct way by inversion of derivatives and searching for a function to generalize the product and by using the usual multiplicative structure. This approach leads quickly to the Fundamental Theorem of Calculus and to the properties of the integral. This procedure makes it possible to eliminate the Riemann's sums of the Integral Calculus. These sums are only needed to study the existence theorem of primitives.*

Key words *Speed culture; extension; inversion; evolution; product; integral.*

1. Introdução

PENSANDO EM TECNOLOGIA vem-nos logo à mente suas quase in£nitas interações com a industrialização e seu produto símbolo – o automóvel –, cuja in¤uência atingiu a humanidade a partir da terceira década do século XX, mudando radicalmente seus hábitos e impondo novos paradigmas tecnológicos e culturais. Dentre estes vamos nos deter na urbanização e na velocidade.

VELOCIDADE E DESLOCAMENTO passaram a integrar a vida de todos, depois do advento do automóvel. O ato de "pegar a condução", que bilhões de pessoas praticam diariamente no deslocamento "casa → trabalho → casa", faz estas pessoas viverem a velocidade que possibilita o deslocamento em pouco tempo. Aspirações pessoais, leis de trânsito, competições esportivas e mil outros motivos fazem todo mundo conviver com automóvel e velocidade. Limites legais, engarrafamentos e condições de ruas e estradas mostram a cada instante que a velocidade é uma grandeza variável. Sob o ponto de vista matemático, isto signi£ca que as funções são o instrumento adequado para estudar a velocidade e que a velocidade é um ótimo contexto para estudar as funções.

AS FUNÇÕES são realmente relacionadas com a velocidade, na abordagem convencional do Cálculo, mas quase nenhuma referência é feita ao automóvel. A propaganda a£rma que certo modelo "acelera de 0 a 100 em 10 segundos". A sinalização informa que o veículo deve estar, no máximo, a determinada velocidade no instante em que passa por certo ponto. Carros têm velocímetros que informam a velocidade no instante em que se olha para ele. Apesar de tantas evidências favoráveis, a abordagem convencional esquece o automóvel que todos conhecem e prefere estudar a velocidade de corpos em queda livre ou de pontos móveis, cujo estudo – importante, sem dúvida – motiva relativamente poucos estudantes, pois tem impacto cultural menor.

NOS TEMPOS DA CRIAÇÃO DO CÁLCULO o automóvel ainda não existia, logo sua velocidade não podia ser usada no estudo das funções. Neste ponto é bom observar que ao lado de quedas livres e pontos móveis, tangentes e áreas relacionadas a grá£cos de funções foram largamente usadas nos processos de criação do Cálculo, explorando aspectos geométricos importantes.

A ÁREA é um conceito largamente conhecido! Pode-se argumentar desta maneira, em defesa do seu uso para estudar Cálculo. É verdade, mas é bom lembrar que a urbanização levou bilhões de pessoas a morar nas cidades, ocupando edi£cações residenciais que são construídas em terrenos residenciais, cujas áreas são objeto da atenção de seus ocupantes. Entretanto, uma simples olhada às plantas destes imóveis mostra a predominância de formas quadrangulares cujas áreas podem ser calculadas por métodos elementares que dispensam os recursos do Cálculo. As formas complexas são mais comuns em imóveis rurais por serem entrecortados ou limitados por estradas e rios sinuosos. Mais uma vez entra em cena a urbanização. Uma de suas conseqüências foi reduzir o percentual de pessoas ligadas a imóveis rurais. Se nos tempos da criação do Cálculo, era grande o percentual de pessoas ligadas a estes imóveis, hoje este percentual é pequeno. Desta forma, o recurso da área motiva, relativamente, poucos estudantes, pois tem impacto cultural menor.

HOJE, a abordagem convencional ao não considerar o automóvel na introdução do Cálculo, impõe-se uma limitação que existia em tempos passados, mas deixou de existir há quase um século. Esta limitação tem o defeito de vincular o assunto – logo na introdução – à Geometria e à Cinemática, justamente em um tempo em que suas aplicações ultrapassam, em muito, estas áreas do conhecimento. Desta forma, muitos estudantes com prioridades diferentes, recusam este vínculo, desacreditam na importância do Cálculo e, conseqüentemente, têm sérias di£culdades para aprendê-lo. Neste ponto vale observar que embora o movimento dos automóveis seja um fenômeno da Cinemática, ultrapassa seus limites e se estende à cultura, da mesma maneira que a forma circular da roda ultrapassa a Geometria e se estende à vida de todos.

O OBJETIVO deste trabalho é usar o forte apelo da cultura do automóvel para facilitar os processos de ensino e aprendizagem do Cálculo. Por brevidade nos restringiremos à integral que aparecerá como conseqüência da "inversão da derivada" e da "extensão do produto". Não é demais lembrar que *inversão* e *extensão* são recursos gerais, usados em diversas áreas do conhecimento.

A APRESENTAÇÃO relaciona *deslocamento, velocidade* e *tempo*, levando ao esquema

EXPECTATIVA → EQUACIONAMENTO → RESULTADOS

que sintetiza uma forma promissora de apresentar tópicos matemáticos. Esta abordagem simpli£ca o Teorema Fundamental do Cálculo, transformando-o em um resultado esperado e de fácil demonstração, que dispensa as somas de Riemann. Estas só continuam necessárias para estudar certas questões abordadas nos cursos de Análise.

A EXTENSÃO se aplica a qualquer multiplicação e não apenas a "área = base vezes altura" da abordagem convencional. Isto possibilita contextualizar o assunto em um conceito de£nido por produto, que seja importante para a formação pro£ssional a que se destina o curso. Como é comum o professor de Cálculo ser leigo na pro£ssão a que o curso se destina, ele pode se valer da cultura do automóvel para ajudar na contextualização do assunto, especialmente para estudantes pouco motivados por "área".

AS APLICAÇÕES £cam simples, dispensando recursos complexos como aqueles usados no comprimento de arco, juros, volumes, custo de estocagem, integral de linha, integral em coordenadas polares e tantos outros. Por estas razões, a abordagem proposta possibilita notáveis simpli£cações matemáticas que se re¤etem como facilitadores nos processos de ensino e aprendizagem do Cálculo.

2. Inversão e Extensão

(1) – INVERSÃO: Como £cou claro na introdução, *velocidade* é uma função que está relacionada com *tempo* e com *deslocamento*. Expressando o deslocamento em função do tempo, a abordagem convencional da derivada mostra que *a velocidade é a derivada do deslocamento.* Este fato leva diretamente ao raciocínio inverso: *Se a velocidade é a derivada do deslocamento, então o deslocamento é uma primitiva da velocidade*. Este raciocínio deixa claro que se a velocidade de um carro for uma função f, então o deslocamento recai na *inversão da derivada*, pois é dado por uma função F cuja derivada é $F' = f$. Nestas condições, veri£ca-se facilmente que

$$F(t) - F(s) \text{ é o deslocamento entre os instantes } s \text{ e } t.$$

Se um carro desenvolver velocidade constante de *60km/h*, em t horas o deslocamento será de $60t$ quilômetros, em função do tempo. Se a velocidade for constante k, o deslocamento é dado por *F(t) = kt* e

$$k(t - s) = kt - ks \text{ é o deslocamento entre os instantes } s \text{ e } t.$$

(2) – DEFINIÇÃO POR PRODUTO: Tal como o deslocamento em velocidade constante, existem muitos conceitos de£nidos por produto. Por exemplo, se a altura de um retângulo for 12, a área é de£nida pelo produto $12x$, em função da base x. Se o quilo do arroz custar $1,50$, o custo de x quilos será $1,5x$, em função da quantidade. Este tipo de de£nição é simples, mas de uso limitado, pois o preço do arroz varia ao longo do tempo e, di£cilmente, podemos usar a multiplicação para calcular a despesa que um restaurante teve com arroz, em um ano. Da mesma forma, não podemos usar a multiplicação para calcular a área de uma região plana entre o eixo $0x$, o grá£co de uma função f e duas retas verticais.

(3) – EXTENSÃO DO PRODUTO: Desta forma, coloca-se, o problema de quanti£car uma grandeza originalmente de£nida por um produto *kx*, por fator k, na situação em que k deixa de ser constante e passa a ser uma função f. Isto conduz ao segundo procedimento, que é buscar *uma função que estenda o produto.*

Uma tentação a ser evitada: Num primeiro momento poderíamos £car tentados a substituir k por $f(x)$ e usar a função produto $f(x).x$ para resolver o problema acima. Entretanto esta idéia é inadequada. Para ver isto, lembremos que se a velocidade for uma função f, o deslocamento será quanti£cado por uma primitiva F de f. Como, quase sempre, $(f(x).x)' = f(x) + f(x)'.x \neq f$, vemos que esta tentação deve ser evitada.

(4) – EXPECTATIVA: Voltando ao problema em 3, lembremos que *o deslocamento é uma primitiva da velocidade*. Por outro lado, num certo sentido, a derivada estende a divisão para situações quanti£cadas por funções (veja 12). Como divisão e multiplicação são operações inversas, somos levados à expectativa que a multiplicação é estendida por um processo que inverta a derivação.

Como esta expectativa se con£rma no caso do deslocamento, vamos usá-la para equacionar o problema da função que estende o produto.

3. Teorema Fundamental do Cálculo

(5) – EQUACIONAMENTO: Para equacionar o problema acima convém entender a função velocidade f como uma extensão do fator constante k. Sob este ponto de vista, o produto *kx* que dá o deslocamento quando a velocidade é constante, é estendido por uma função F, quando a velocidade é f. Estas considerações nos levam a estudar sob que condições, um produto da forma *kx* pode ser estendido por uma função F, quando o fator k é estendido por f. Em 7 estabeleceremos estas condições. Por ora lembremos que, de acordo com a expectativa em 4, a função F é obtida invertendo a derivação. Para estudar a validade desta expectativa, devemos derivar F, o que leva ao limite

$$\lim_{t \to s} \frac{F(t) - F(s)}{t - s}.$$

(6) – O NUMERADOR: Para estudar este limite examinemos seu numerador à luz do seguinte fato: *Se $s < t$ e se um número m satis£zer $m \leq f(x)$, para todo x entre s e t, então o deslocamento entre s e t em velocidade f, será maior ou igual que o deslocamento entre s* e *t em velocidade constante m.*

Para interpretar este fato sob o ponto de vista de uma função que estende o produto, lembremos que (reveja 1) quando a velocidade é constante m, a função deslocamento se expressa como *mx* e o deslocamento entre se t se expressa como $mt - ms = m(t - s)$. Como em velocidade *f*, $F(t) - F(s)$ é o deslocamento entre se t, concluímos que o numerador da razão incremental, $F(t) - F(s)$, estende um produto da forma $m(t - s)$. Esta observação mostra que, no caso da extensão do produto, o fato acima se escreve sob a forma: *Se $s < t$ e se um número m satis£zer $m \leq f(x)$, para todo x entre s e t, então o produto $m(t - s)$ será menor ou igual que a extensão do produto $F(t) - F(s)$.*

Estas considerações nos levam à de£nição a seguir onde, por simplicidade, f será uma função contínua cujo domínio D_f é um intervalo aberto, uma semi-reta aberta ou a reta real. Neste caso, se $s, t \in D_f$ e x estiver entre se t, então $x \in D_f$, logo $f(x)$ está de£nida. Deste ponto em diante, salvo menção em contrário, f estará nestas condições e $s, t \in D_f$.

(7) – EXTENSÃO DO PRODUTO: Diremos que uma função F é uma *extensão do produto, associada a* f se dados $s < t \in D_f$ e números reais m e M tais que para todo x entre s e t se tenha $m \leq f(x) \leq M$, então $m(t - s) \leq F(t) - F(s) \leq M(t - s)$.

Para estudar a razão incremental em 5 observemos que se $s>t$ a primeira desigualdade se inverte, o que permite concluir que

$m(t - s) \leq F(t) - F(s)$, se $s<t$ e $F(t) - F(s) \leq m(t - s)$, se $s > t$.

Para dividir estas desigualdades por $t - s$ e obter a razão incremental, observemos que na 1^a desigualdade, $t - s > 0$. Logo a divisão preserva o sentido da desigualdade.

Na 2^a desigualdade, o sentido se inverte, pois *t - s* $<$ *0*. Desta forma, a divisão por $t-s$ uni£ca as desigualdades sob a forma

$$m \leq \frac{F(t)-F(s)}{t-s}.$$

Similarmente, segue-se que

$$\frac{F(t)-F(s)}{t-s} \leq M.$$

(8) – CONCLUSÃO: *Se F for uma extensão do produto associada a f e se m, M forem números tais que m* $\leq$ *f(x)* $\leq$ *M para todo x entre s e t, então*

$$m \leq \frac{F(t)-F(s)}{t-s} \leq M.$$

(9) – TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO: *F será uma extensão do produto associada a f se, e somente se, F for uma primitiva de f, isto é, F' = f.*

PROVA: Para calcular o limite da razão incremental de F, tomemos um número real ε *>0*. Como f é contínua, existe um número real $\delta > 0$ tal que se $|t-s| < \delta$, então $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$. Nestas condições, se x estiver no intervalo de extremos s e t, segue-se que $|x-s| < \delta$ e que $|f(x) - f(s)| < \varepsilon$. Isto signi£ca que para todo x entre s e t, *f(s)* - $\varepsilon \leq$ *f(x)* $\leq$ *f(s)* + ε. Supondo $t \neq s$ e usando as desigualdades 8 com *m = f(s)* - ε e *M = f(s)* + ε tem-se

$$f(s)-\varepsilon \leq \frac{F(t)-F(s)}{t-s} \leq f(s)+\varepsilon,$$

mostrando que $\lim\limits_{t\to s} \frac{F(t)-F(s)}{t-s} = f(s)$ e que *F'(s) = f(s).*
A demonstração da recíproca será feita em 11.

(10) – INTEGRAL: A partir deste ponto pode-se seguir a abordagem convencional para de£nir a integral inde£nida e de£nida. Para as aplicações pensaremos na integral de£nida de f, como função do extremo superior. Isto é, se P for uma primitiva para f, escreveremos a integral abaixo que, nas condições do £nal de 6, independe da escolha de P:

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx = P(t) - P(a).$$

(11) – RECÍPROCA DO TFC: Precisamos do teorema da média que garante que *se f admitir primitiva e a, b* $\in D_f$ *, então existe um número c entre a e b tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Seja F uma primitiva de f e sejam números $s<t \in D_f$. O teorema da média, garante a existência de um número c entre s e t tal que

$$\int_s^t f(x)dx = f(c)(t-s),$$

o que por 10 implica que

$$F(t) - F(s) = f(c)(t-s).$$

Logo, se tomarmos números m e M tais que para todo x entre s e t $m \leq f(x) \leq M$, segue-se que $m \leq f(c) \leq M$, que $m(t-s) \leq f(c)(t-s) \leq M(t-s)$, e que $m(t-s) \leq F(t) - F(s) \leq M$. Logo (reveja 7) F é uma extensão do produto associada a f. *Cqd.*

(12) – OBSERVAÇÃO: Dando continuidade a 4 onde dissemos que a derivada estende a divisão, gostaríamos de acrescentar que esta extensão recai em um limite (da razão incremental). Na abordagem convencional, a integral recai em dois tipos de limites; o das somas Riemann e o limite usual na derivada quando se prova o teorema fundamental do cálculo. Como a abordagem deste artigo dispensa as somas de Riemann, a integral recai apenas no limite usado na derivada, que o estudante já conhece. Isto torna o assunto mais simples, podendo ser estudado simultaneamente com a derivada. Esta simplicidade também viabilizou a recíproca do TFC, o que dá grande credibilidade às aplicações.

4. Aplicações e Desdobramentos

(13) – ÁREA E VOLUME: Área é um conceito de£nido pelo produto "base vezes altura". Assim, quando a altura for dada por uma função h do ponto da base onde é medida, a área será a extensão do produto associada a h. Por exemplo, para calcular a área entre o eixo $0x$ e o grá£co de uma função f, a altura medida a partir do ponto x na base será $h(x) = |f(x)|$. Logo, a área desta região a partir da reta $x = a$ será dada pela integral abaixo (se existir):

$$A(t) = \int_a^t |f(x)|dx.$$

Similarmente, volume é "área da base vezes altura". Assim, quando a área da base for dada por uma função A do ponto da altura onde é medida, o volume será dado por uma extensão do produto associada a A. Por exemplo, para calcular o volume do sólido gerado pela revolução do grá£co de uma função f, basta notar que em cada ponto x, a base do sólido é um círculo de raio $|f(x)|$, cuja área é $A(x) = \pi f(x)^2$. Logo, o volume deste sólido a partir de um ponto a é dado pela integral abaixo, desde que ela exista,

$$V(t) = \int_a^t \pi f(x)^2 dx.$$

(14) – CUSTO DE ESTOCAGEM: Se um supermercado precisar calcular o custo para estocar 7 toneladas de arroz por t dias, basta tomar o produto $7t$ (quantidade vezes tempo) e, depois, multiplicá-lo pelo custo para estocar 1 tonelada durante 1 dia. Se em vez de constante, a quantidade estocada for dada por $f(t)$, em função do tempo, o custo de estocagem recai na extensão do produto associada a f, que é dada pela integral abaixo, em que a é o instante a partir do qual o custo começou a ser considerado

$$\int_a^t f(x)dx$$

(15) – COMPRIMENTO DE ARCO: Fixemos um ponto *(a, f(a))*. Com auxílio de uma £ta métrica podemos medir o comprimento do grá£co entre *(a, f(a))* e *(t, f(t))*. Desta forma, obtém-se uma *L(t) = comprimento do grá£co de f de (a, f(a)) até (t, f(t))*. Para descobrir como é esta função, estudemos sua derivada, o que leva à diferença *L(t) – L(s)* que é o numerador da razão incremental. Voltando à de£nição vemos que |*L(t) – L(s)*| é o comprimento do arco do grá£co de$f$ com extremos *(s, f(s))* e *(t, f(t))*. Como este comprimento é aproximado pelo comprimento do segmento com os mesmos extremos, segue-se que a razão entre estes comprimentos tende a 1 quando $t \to s$. Como sabemos da Geometria que o comprimento do segmento é $[(t-s)^2$ + *(f(t) - f(s))*$^2]^{1/2}$, o raciocínio acima nos leva a concluir que

$$\lim_{t\to s} \frac{|L(t)-L(s)|}{[(t-s)^2+(f(t)-f(s))^2]^{1/2}} \quad = \quad 1.$$

Dividindo e multiplicando por |*t – s*|, e usando a aritmética dos limites, segue-se que

$$\lim_{t\to s} \frac{|L(t)-L(s)|}{|t-s|} . \lim_{t\to s} \frac{|t-s|}{[(t-s)^2+(f(t)-f(s))^2]^{1/2}} \quad = \quad 1$$

e que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to s} \frac{|L(t)-L(s)|}{|t-s|} &= \lim_{t\to s} \frac{[(t-s)^2+(f(t)-f(s))^2]^{1/2}}{|t-s|} \\ &= \lim_{t\to s} [(\frac{t-s}{t-s})^2 + (\frac{f(t)-f(s)}{t-s})^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

Logo, se f for diferenciável, |*L'(s)*| = [*1* + *f'(s)*$^2]^{1/2}$. Orientando o crescimento dos arcos no sentido crescente de t, segue-se que L será uma função crescente, o implica que sua derivada não será negativa, o que mostra que $L'(s)$ =[*1 + f'(s)*^{2}]$^{1/2}$. Finalmente, se [*1 + f'(s)*^{2}]$^{1/2}$ admitir primitiva, L existe e

$$L(t) = \int_a^t [1 + f'(x)^2]^{1/2} dx.$$

(16) – O ARCO-SENO: Para aplicar a fórmula acima à semi-circunferência $x^2 + y^2 = 1, x \geq 0$, devemos explicitar *x = (1 – y*^{2}*)*$^{1/2}$ $= f(y)$, o que mostra que esta semi-circunferência é o grá£co *(f(y), y)*. Como cálculos diretos mostram que

$$[1 + f'(y)^2]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

segue-se que o comprimento do arco entre $y = 0$ e $y = t$, é

$$s = \int_0^t \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}}.$$

Como o seno do arco s é a ordenada se sua extremidade, segue-se que *sen s = t* e que $s =$ arco cujo seno é t ; isto é,

$$arsen(t) = \int_0^t \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}},$$

cuja derivada é

$$\frac{d}{dt} arsen(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

NOTA: O estudo do comprimento de arco em 15 é bem mais simples que o estudo usual que recai no teorema do valor médio e em somas que após algumas manipulações se transformam em somas de Riemann. Esta simplicidade permite que, em um curso de cálculo, o assunto seja antecipado o que possibilita seu uso na abordagem do arco-seno como em 16. Isto, por um lado, simpli£ca o estudo do arco-seno, por dar a ele uma abordagem geométrica. Por outro lado, as funções de£nidas por integral que, na abordagem convencional, aparecem pela primeira vez nos logaritmos, podem surgir no arco-seno, com uma motivação geométrica altamente esclarecedora.

Referências

[G] – Granville, W e outros. Elements of the Differential and Integral Calculus, Ginn and Company, New York, 1941.

[L] – Lang, Serge. Analysis, Addison-Wesley, Massachusetts, 1968.

[V1] – Valladares, Renato J.C. Do Produto à Integral, XI CIAEM, Anais do evento, Blumenau, 2003.

[V2] – Valladares, Renato J.C. INTEGRAL; Inversão da derivada e extensão do produto. Artigo em preparação.

[VF] – Valladares, Renato J.C, c/colaboração de Friedmann, C. Cálculo. Livro em preparação.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática

págs: 11:18
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 2

ESTIMULANDO A "MENTE GRÁFICA" COM AUXÍLIO DA GEOMETRIA DINÂMICA

Maria Helena Wyllie L. Rodrigues
Departamento de Técnicas de Representação
Escola de Belas Artes – CLA - UFRJ
wyllie@acd.ufrj.br

Daniel Wyllie Lacerda Rodrigues
Departamento de Técnicas de Representação
Escola de Belas Artes – CLA - UFRJ
dwyllie@superig.com.br

Resumo *Nesta comunicação, mostra-se a vantagem de utilizar ambientes de geometria dinâmica para formar competências no campo da expressão grá£ca. Os autores descrevem estratégias didáticas empregadas na condução de disciplinas de desenho geométrico e projetivo, cuja presença no currículo de todos os cursos da Escola de Belas Artes da UFRJ se justi£ca por fornecer o ferramental básico para a futura prática pro£ssional de seus graduandos.*

Palavras-chave *representação grá£ca; geometria dinâmica; estratégias didáticas.*

Abstract *In this paper we show the advantage of using dynamic geometry environments to form competencies in the £eld of graphical expression. The authors describe didactical strategies used on the leading of geometrical and projective drawing classes, which inclusion in the curriculum of all courses at the Escola de Belas Artes – UFRJ - is justi£ed as it provides students with the basic tools for their future professional practice.*

Key words *graphic representation; dynamic geometry; didactical strategies*

1. Introdução

A tecnologia grá£co-computacional tornou possível mostrar, com extrema virtuosidade, o que sucessivas gerações de geômetras foram capazes de desenhar em sua mente valendo-se de sua inteligência. Crédito maior, no desenvolvimento do gra£smo digital, tem sido dado à concepção moderna de geometria, privilegiando a dinâmica das transformações em oposição à visão euclidiana estática, ou seja, revertendo a tendência para analisar construções com base em £guras rígidas. É justamente neste ponto que acreditamos residir o maior benefício, em termos de cognição, trazido pelos ambientes de geometria dinâmica (G. Din.) aos estudantes: servir de estímulo à ampliação de sua capacidade para mentalizar estruturas geométricas não aprisionadas a uma única con£guração e localização; ou seja, levá-los a pensar dinamicamente também.

Nossa vivência em sala de aula tem-nos dado a chance de presenciar não poucas demonstrações de mudança na engenharia da resolução de problemas relacionadas com o uso da geometria dinâmica. Percebemos notáveis diferenças quando comparamos o comportamento dos alunos, face a determinados exercícios de geometria, antes e depois de lidarem com tais programas.

Pela natureza essencialmente didática de seus recursos, o *software* de G. Din. supera as limitações das metodologias e instrumentos tradicionais, constituindo, assim, um auxiliar de valor inestimável para os que se dedicam ao ensino e aprendizado das técnicas de representação (Gani & Belfort, 2000; Rodrigues et alii, 2003).

2. Utilizando Ambientes de Geometria Dinâmica na Geometrogra£a

Os conceitos e princípios de geometria referentes à construção de £guras planas são trabalhados na Escola de Belas Artes da UFRJ como pré-requisito ao estudo dos métodos projetivos. Assim, não somente é necessário familiarizar os alunos com a linguagem própria dessa área do conhecimento, como criar condições para que possam desenvolver seu raciocínio e fazer uso de traçados geométricos auxiliares na busca da solução para problemas espaciais. Essas tarefas não são assim tão simples de serem realizadas, em virtude de os estudantes, via de regra, não trazerem em seu histórico escolar quaisquer saberes relacionados às técnicas de representação grá£ca. É preciso, então, preencher tal lacuna de modo que eles tenham a oportunidade de, em pouco tempo, ampliar sua capacidade de visualização, resolver situações-problema e, paralelamente, perceber a aplicabilidade da geometria no que virão a realizar pro£ssionalmente.

Para alcançar os objetivos traçados ao longo da exploração de conteúdos do desenho geométrico e, também, estimular os alunos a usar sua criatividade – competência indispensável à formação do pro£ssional que atua no campo das artes plásticas e do *design* – costumamos fornecer alguns exemplos em que as construções estudadas podem ser empregadas na produção de imagens dinâmicas. A Figura 1 mostra estruturas que obedecem a princípios de concordância, concebidas com auxílio do ferramental da G. Din., como técnica de reproduzir planimetricamente a movimentação da pata e da mão ilustradas.

Figura 1: Reprodução do movimento da mão e de uma pata com a aplicação de princípios de concordância.

Outra grande vantagem de se trabalhar com a G. Din. faz-se presente quando são procurados os lugares geométricos do ponto-chave de um determinado problema. Seja, por exemplo, o seguinte exercício: *Sendo dados os comprimentos 2c, 2c', r e r'e os pontos O e O', construir um paralelogramo ABCD, cujas diagonais AC=2c e BD=2c' são respectivamente cordas dos círculos (O, r) e (O', r').*

O esboço de uma £gura de análise ajuda a perceber que o exercício estará praticamente resolvido quando forem localizadas as diagonais AC e BD do paralelogramo, sendo seu ponto médio M, comum, o ponto-chave da construção. O problema envolve a noção de lugar geométrico (LG)[1] dos pontos médios das cordas de comprimento constante, ilustrado na Figura 2 (esquerda) pela imagem de sucessivas posições[2] de uma corda de comprimento 2c: o círculo[3] de centro O e raio $\sqrt{}\,(r^2 - c^2)$.

Transpondo-se tal raciocínio para o problema a ser resolvido, cuida-se de desenhar

[1]Emprega-se, aqui, a abreviatura LG para Lugar Geométrico (*locus*).

[2]A trajetória da corda, ativada pela ferramenta "rastro", é registrada em tela por meio da animação de seu primeiro extremo, arbitrariamente criado. O ponto M descreve o *locus* (LG) procurado.

[3]Adotamos a "nomenclatura" recomendada por Virgílio A. Pinheiro (1974) ao conceituar o "círculo" como lugar geométrico (*locus*) dos pontos do plano α que distam de um ponto £xo (O, O$\in$ α) um comprimento constante (r, r $\neq \emptyset$).

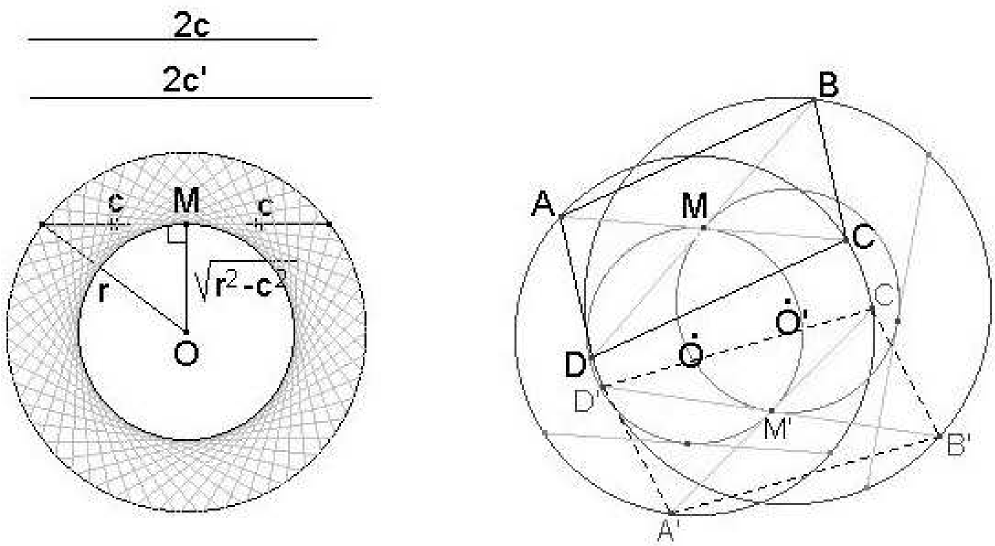


Figura 2: À esquerda, visualização dinâmica da criação do locus (LG) de M e à direita, o problema solucionado.

os elementos dados no problema, de acordo com as medidas informadas no enunciado e, a partir de cordas traçadas arbitrariamente, recorre-se à ferramenta *locus* para obter dois círculos – o de centro O e raio $\surd(r^2\text{- }c^2)$ e o de centro O' e raio $\surd(r'^2\text{– }c'^2)$ – em cuja interseção[4] encontra-se o ponto-chave M (Figura 2).

Ainda no estudo da geometria plana, é de notável efeito didático valer-se de £guras de análise previamente construídas que permitem ao aluno assistir, 'ao vivo', a transformação pontual a ser realizada na resolução de determinados problemas. Observe-se, por exemplo, a questão proposta por Pinheiro (1986, p. 98):

De bordo de uma embarcação, visam-se dois pontos em terra, P e Q, e lê-se o ângulo $\theta_x$gas visadas. Depois de percorrer uma distância d, conhecida, num rumo δ, dado, repete-se a operação e lê-se o novo ângulo θ_y das visadas. Pede-se assinalar na carta de bordo a rota do navio, entre os instantes considerados.

Uma das informações contidas no enunciado do problema chama particularmente a atenção do leitor; é aquela relacionada ao fato de se repetir a medição do ângulo das visadas após percorrer uma distância d conhecida, num rumo δ dado. A idéia ali transmitida é a de movimento. Logo, fazendo as devidas associações, pode-se considerar o ponto A' - segundo 'momento' de visada e ponto-chave da construção, cujo primeiro

[4]O programa Cabri-Géomètre II Plus permite que se determine o ponto de interseção de dois lugares geométricos traçados com auxílio da ferramenta *locus*.

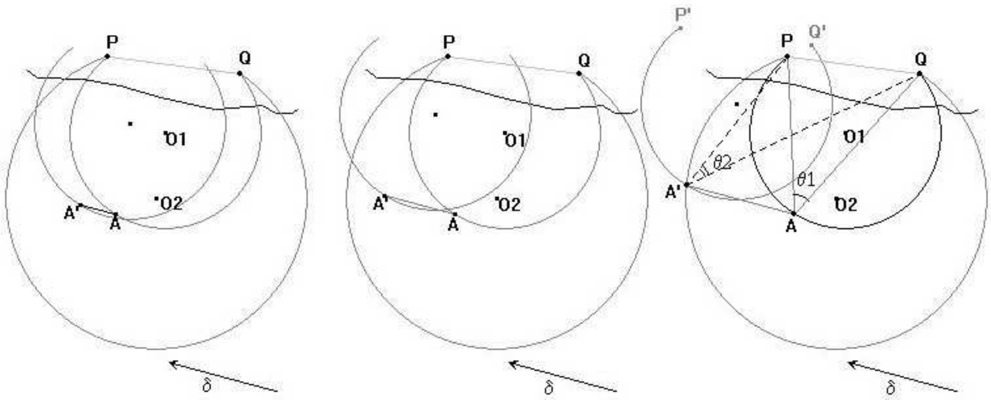


Figura 3: Figura de análise com animação.

LG é o '**A**rco **c**apaz' do ângulo θ_y - Ac (θ_{ysg}Q) - como transformado de A (primeiro ponto de visada) por meio de uma translação, cujo vetor é indicado pela ¤echa δ. Uma £gura de análise dinâmica, estrategicamente elaborada, estimula o estudante a manipular o ponto A de modo a presenciar não só o seu deslocamento como, também, o de seu lugar geométrico - o '**A**rco **c**apaz' do ângulo θ_x - Ac (θ_{xsg}Q). Por meio desta operação, ilustrada em três de seus momentos na Figura 3, é possível visualizar o segundo LG de A' - o Ac (θ_{xsg}'Q'), transformado do primeiro pela translação de vetor dado[5].

3. Trabalhando com a Representação Projetiva em Ambientes de Geometria Dinâmica

Em nossa experiência no ensino da Geometria Descritiva, freqüentemente constatamos o grande desa£o que signi£ca, para o iniciante no estudo do método de Monge, conseguir fazer as devidas conexões entre o objeto, que se aloca no espaço tridimensional, e sua representação nos planos horizontal e vertical de projeção.

São inúmeras as razões para tal di£culdade, entre elas o fato de o aluno ser apresentado a um referencial projetivo diferente daquele que lhe mostra o objeto com uma imagem aproximada da que está acostumado a perceber ao mirá-lo. Ativando-se o

[5]Observe-se que, ao transformar por translação o arco capaz do ângulo θ_1, a corda PQ é deslocada pela mesma transformação, razão pela qual é anotada como P'Q' nesta nova posição.

mecanismo que permite estabelecer a integração entre as representações perspectiva e descritiva, cria-se a possibilidade de visualizar, em animação, as projeções de um mesmo objeto quando são utilizados diferentes referenciais projetivos. A partir do momento em que o estudante se depara com a imagem perspectiva de um sólido geométrico e pode compará-la com suas projeções ortogonais em geometria descritiva (embora aquela também seja uma representação bidimensional do objeto que apenas simula sua tridimensionalidade), o obstáculo inicial é geralmente ultrapassado. Ilustra-se esse recurso na Figura 4, onde são mostrados os cortes produzidos por um plano genérico numa pirâmide triangular e no cone de revolução[6] de mesmo vértice (a base do cone circunscreve o triângulo). A possibilidade de modi£car a posição do plano (αps em relação ao objeto e aos planos de projeção, permite observar as alterações que as seções resultantes vão sofrendo.

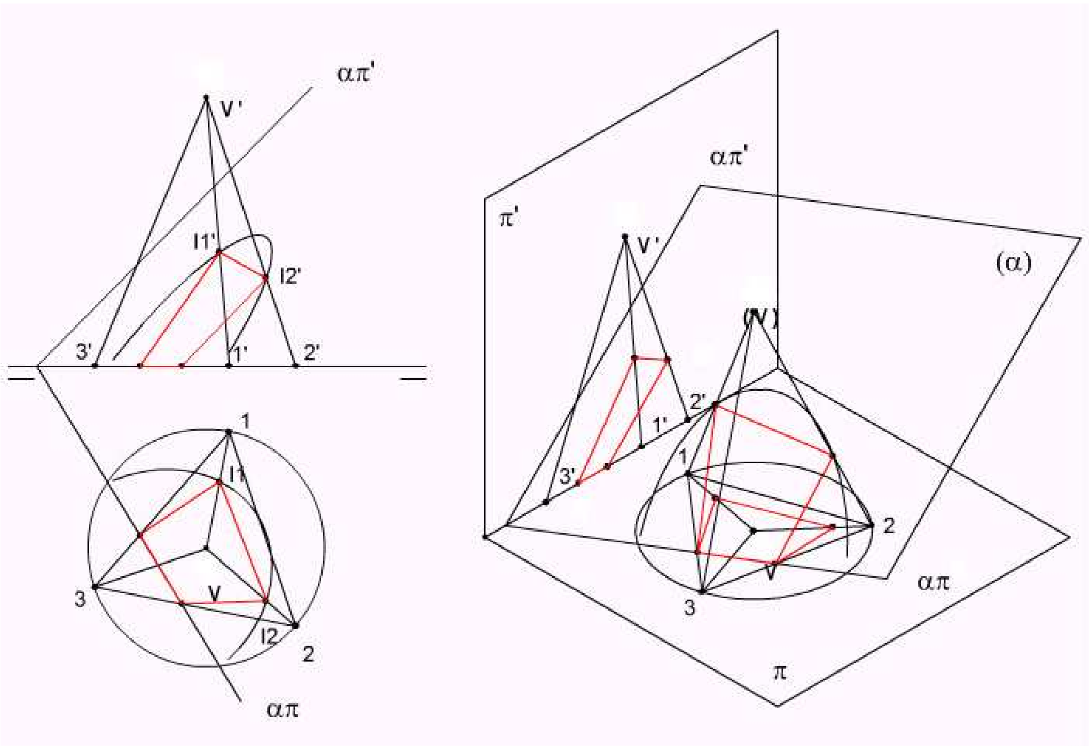


Figura 4: Épura descritiva e perspectiva axonométrica de seções planas.

Outras contribuições didáticas dos ambientes dinâmicos são vistas no estudo da perspectiva cônica de objetos e suas sombras. Uma delas se apresenta quando os alunos podem trabalhar interativamente de modo a mudar a posição do observador e/ou da

[6]O aluno é estimulado a completar mentalmente a imagem do cone de revolução, uma vez que este não está ali totalmente representado por suas projeções frontal e axonométrica. Pede-se também que identi£que as linhas que não seriam vistas pelo observador.

fonte luminosa em relação ao objeto. A Figura 5 exibe, em dois momentos, um dos conjuntos preparados para aulas de Perspectiva e Sombras onde, mudando-se a posição do foco de luz L em relação ao objeto, produz-se uma alteração no contorno e na visibilidade das áreas de sombra projetada.

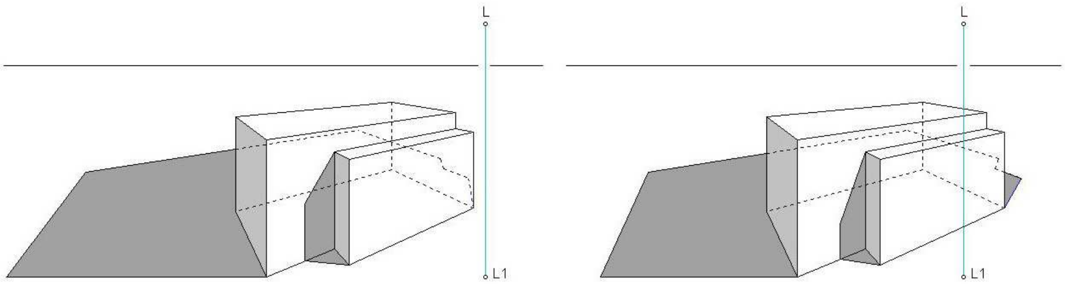


Figura 5: Visualização de sombras em perspectiva.

4. Conclusão

Quanto mais nos empenhamos em criar alternativas de trabalho que propiciem a reconstrução de conceitos, princípios e leis da geometria e o desenvolvimento da visão grá£ca, mais nos surpreendemos com o auxílio prestado aos nossos alunos pelos ambientes de geometria dinâmica, tanto no processo de resolução de problemas quanto na criação de produtos visuais. Isso nos faz acreditar que o potencial didático desses micromundos dá margem a in£nitas possibilidades de exploração e aplicação, promovendo uma parceria frutífera entre o pensamento lógico e o criativo.

Referências

GANI, Danusa Chini, BELFORT, Elizabeth (2000) Painéis em Geometria Dinâmica: novas possibilidades. In: Anais do 1^o Congresso de Educação – CEC. Rio de Janeiro: 102-110.

PINHEIRO, Virgílio Athayde (1974) Geometrogra£a 1. Rio de Janeiro: Grá£ca Editora Bahiense.

___________ (1986) Geometrogra£a 2. Rio de Janeiro: Aula Editora.

RODRIGUES, Maria Helena W. L.; BRAVIANO, Gilson; RODRIGUES, Daniel W. L. (2003) Aprendendo a Pensar Geometricamente. In: XI – Anais da Conferência Interamericana de Educação Matemática. FURB – Universidade Regional de Blumenau: 1-16.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 19:25
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 3

MATHLETS: APPLETS JAVA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Angela Rocha dos Santos
Instituto de Matemática
UFRJ
angela@im.ufrj.br

Ricardo Silva Kubrusly
Instituto de Matemática
UFRJ
risk@im.ufrj.br

Waldecir Bianchini
Instituto de Matemática
UFRJ
waldecir@im.ufrj.br

Resumo *Este trabalho se destina a compartilhar a experiência que vem sendo realizada no Instituto de Matemática da UFRJ (IM-UFRJ) com o objetivo de incorporar o uso da tecnologia baseada no binômio* java-web *no processo ensino-aprendizagem de matemática. As atividades desenvolvidas procuram valorizar o pensamento matemático e privilegiam uma abordagem exploratória baseada na cadeia* ***explorar*** → ***conjecturar*** → ***concluir*** → ***demonstrar****.*

Palavras-chave *Mathlets, EAD, Applets Java, Funções Reais.*

Abstract *The aim of this paper is to explore the educational possibilities of the development of mathlets: Java applets for teaching math. It is supported by historical and inter-disciplinary aspects of Mathematics and based on the* ***explore-conjecture-prove*** *tripod. By means of such activities, students are encouraged to explore and integrate graphical, geometrical and analytical aspects of the mathematical concepts, to make conjectures, to conclude and, £nally, to offer a proof of their results.*

Key words *Long distance education, Java Applets, web-technology.*

1. Introdução

Tanto no Brasil como no exterior, o ensino de Matemática ocupa uma porção considerável do currículo em todos os níveis de ensino e em cursos das mais diversas áreas. Este fato se justi£ca, pois desde o século XVII, a Matemática tem se revelado como a principal ferramenta para aplicações cientí£cas e tecnológicas. Os textos que utilizamos hoje para o ensino de matemática, com pequenas diferenças de conteúdo no mundo inteiro, seguem uma £loso£a educacional iniciada no século XIX, originária na concepção de um modelo de ensino estruturado e institucionalizado em torno da "École Polytechnique" de Paris cujos diversos "cursos" escritos e editados serviram, mais tarde, para o modelo de ensino de ciências e matemática em todo mundo. Estes textos e nossas aulas, neles baseadas, seguem a metodologia sumarizada na cadeia de£nição → teorema → demonstração → corolário (aplicações).

Em última análise, esta forma de apresentação da matemática como um corpo de conhecimento pronto e acabado é resultado de um processo de £ltragem que esconde os esforços criativos existentes por detrás de cada resultado obtido, oferecendo pouca margem de indagação e análise, e impedindo que o aluno seja colocado diante do desa£o de conduzir um processo de investigação cientí£ca ou de apreciá-lo com visão crítica.

Por outro lado, muito se tem falado das inúmeras possibilidades que se abrem no processo ensino-aprendizagem a partir da introdução do computador como um novo e poderoso recurso didático. Em particular, com a popularização da Internet como veículo de informação e comunicação, a cada dia parece ser mais possível canalizar sua grande funcionalidade, versatilidade e potencial de modo a obtermos um salto qualitativo no ensino de um modo geral e no ensino de matemática, em particular. Este é o grande problema-desa£o que enfrentamos no momento.

Este trabalho procura contribuir na resposta a esta questão. Por meio de "atividades matemáticas", desenvolvidas a partir de ferramentas apoiadas no binômio *java-web*, tentamos mostrar como é possível valorizar o pensamento matemático e privilegiar uma abordagem exploratória baseada na **cadeia**
explorar → conjecturar → concluir →demonstrar.
A estratégia adotada visa envolver o aluno no processo de "fazer matemática", transformando-o de <u>paciente</u> – que é alguém que consome, aceita, guarda, reproduz e obedece – em <u>agente</u> do processo educativo – alguém que pensa, re¤ete, dirige, decide e atua.

2. Mathlets: As idéias Básicas

A maioria dos "materiais educativos" disponibilizados em páginas *web* não contribui verdadeiramente para a melhoria do ensino de matemática e não usa apropriadamente a tecnologia. Alguns são somente textos, com questões de múltipla escolha. Outros, simplesmente, exibem material de um livro texto transferido para uma página *web*. Apresentadas com o pomposo rótulo de "demonstrações dinâmicas", encontramos algumas atividades extremamente simples, para dizer o mínimo, onde as linhas do texto deslizam sobre a tela, uma por vez! De fato, este não é um uso apropriado do meio eletrônico (e caro) utilizado.

Levando-se em conta o salto qualitativo que buscamos no ensino de matemática, propomos o desenvolvimento de um ambiente de aprendizagem interativo baseado no uso de *mathlets*.

O "Journal of On Line Mathematics and its Applications" (JOMA) de£ne um *mathlet* como sendo uma *pequena plataforma independente e interativa para o ensino de matemática*. Os *mathlets* utilizados no nosso trabalho são *applets java* não apenas interativos mas também grá£cos e que podem ser executados dentro de uma página *web* utilizando-se um navegador qualquer.

Ao se construir *mathlets* deve-se cuidar para que eles sejam simples de explicar e de usar, abordando um único aspecto ou característica de cada vez. Para a consecução dos seus objetivos eles devem também atender a certos critérios básicos sumarizados nas questões propostas a seguir.

1. Em relação ao conteúdo matemático: o *mathlet* contribui realmente para uma maior compreensão do conteúdo abordado? A matemática utilizada é correta e apropriada ao nível proposto? A atividade está claramente apresentada?

2. Em relação à interface e à tecnologia empregada: a aparência visual é clara e convidativa? O usuário pode iniciar a atividade rapidamente? Os controles são fáceis de usar e navegar? As instruções são claras e precisas? O *mathlet* tira vantagem da tecnologia utilizada, isto é, usa animações e cria oportunidades efetivas de interação com o usuário? O conteúdo é apresentado em pequenas seções com apontadores para maiores detalhes, quando necessário? É possível obter o mesmo resultado empregando-se texto e grá£cos da forma usual?

Além disso, sua utilização deve ser planejada de acordo com o melhor uso para o *mathlet*: apoio ao ensino presencial - demonstrações dinâmicas em sala de aula ou desenvolvimento de atividades em laboratórios com supervisão de professores e/ou monitores - ou ensino à distância.

3. Exemplos de Atividades Desenvolvidas

As atividades a seguir foram propostas para explorar e conceituar as transformações no plano - translações, rotações, re¤exões e homotetias. O ambiente desenvolvido proporciona oportunidades únicas para que os alunos explorem, visualizem e compreendam os conceitos envolvidos de diferentes maneiras. Os *mathlets* aumentam a capacidade de visualização dos alunos que são capazes de ver os efeitos de mudanças no eixo de re¤exão, no vetor de translação, no centro de rotação ou na razão da homotetia. As “experiências matemáticas” propostas, que di£cilmente poderiam ser realizadas sem o uso do meio eletrônico, ajudam o aluno a fazer e testar conjecturas e a identi£car propriedades, como é ilustrado no exemplo mostrado na £gura 1.

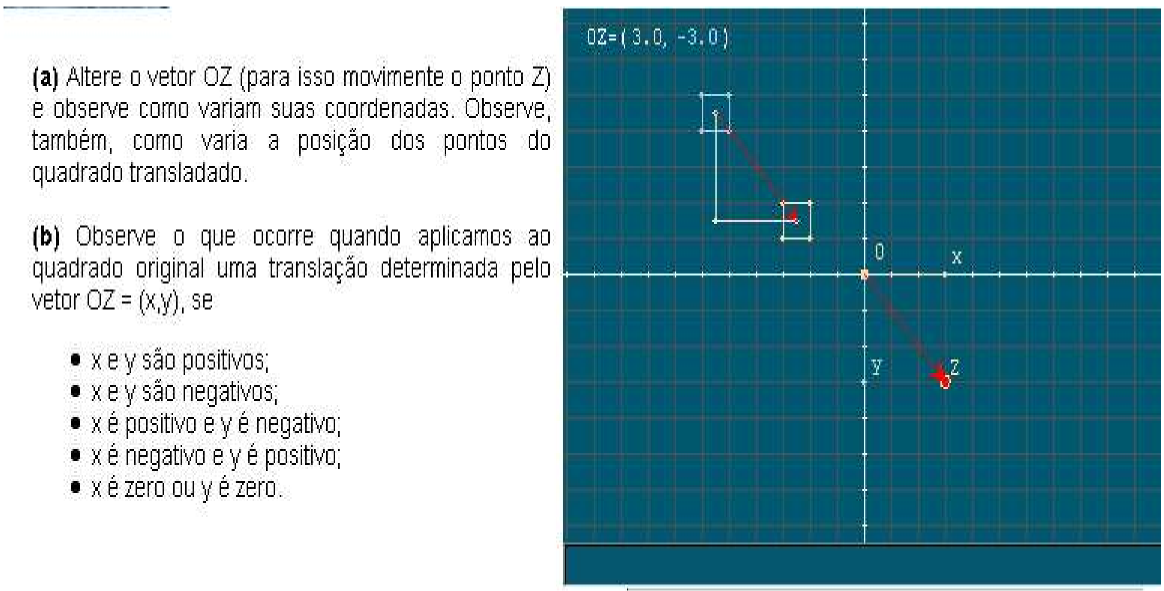


Figura 1: Atividade proposta envolvendo a transformação de translação e explorando algumas de suas propriedades.

Aplicações de transformações ao grá£co de funções são, então, facilmente obtidas, como ilustrado na £gura 2.

4. Conclusões e Propostas Futuras

Com esse trabalho procuramos mostrar o potencial da linguagem Java e do que chamamos de *mathlets* na melhoria do ensino de matemática. No entanto, para que o trabalho seja ampliado e largamente utilizado, é preciso sobrepujar os obstáculos inerentes à programação em Java. Para isso, pretendemos desenvolver uma biblioteca de *applets* con£guráveis, isto é, que possam ser alterados por qualquer professor de matemática, sem necessidade de programação extra, por meio de seus parâmetros. São *applets* desse tipo que utilizamos para o desenvolvimento das atividades propostas.

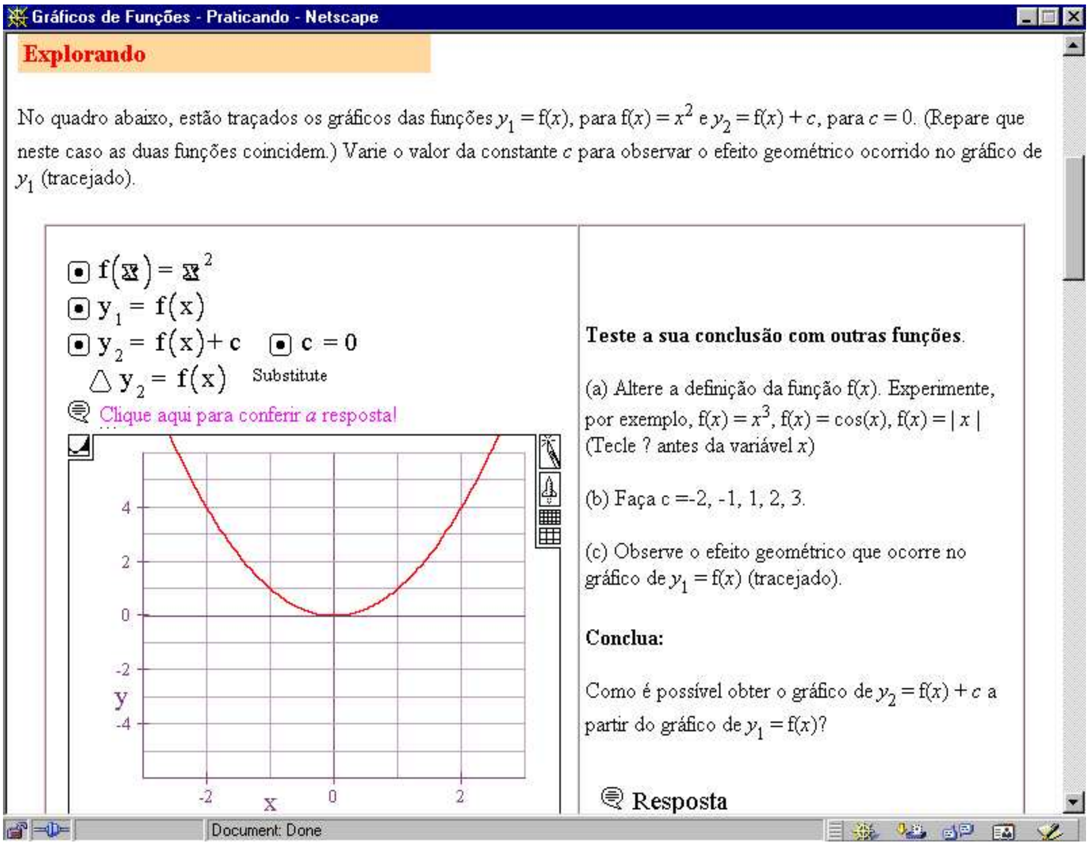


Figura 2: O efeito de translações no grá£co de uma função.

A biblioteca que propomos deve prever as várias necessidades e usos possíveis e abordar os principais conteúdos de cada série, disciplina ou tema. Para que seja possível criar *applets* desse tipo, adequados ao ensino de matemática, estamos formando equipes onde professores com prática em sala de aula trabalhem em conjunto com os desenvolvedores. No entanto, como Java é uma linguagem muito nova, é muito difícil encontrar desenvolvedores interessados em criar códigos para desenvolver ambientes apropriados, por exemplo, ao ensino médio. Para solucionar esta falta, estamos propondo que as equipes sejam formadas, também, por alunos interessados neste tipo de atividade, selecionados em diversos cursos - matemática, informática, licenciatura, comunicação, desenho industrial ... - como foi feito, de forma bem sucedida, no desenvolvimento do programa Tabulæ.

Desenvolvendo este material, procuramos mostrar como é possível utilizar a tecnologia para ensinar e aprender matemática. Esperamos que ele se constitua num valioso instrumento de capacitação e apoio ao professor e de melhoria na formação básica de nossos alunos.

Referências

BIANCHINI, W., KUBRUSLY, R. & ROCHA, A. (2002) Internet & Ensino de Matemática: um Casamento Possível. História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 1, 245-252.

BIANCHINI, W., KUBRUSLY, R. & ROCHA, A. (2002) Da passividade à Interatividade: desvendando o potencial da Internet para o Ensino de Matemática. In R. Sampaio, Editor, Anais do XXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, Rio de Janeiro, Brasil.

BIANCHINI, W., KUBRUSLY, R. & ROCHA, A. (2003) Introdução às Funções Reais. http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/index.htm

COOPER, A., LINTON, S., & SOLOMON, A. (2001) Constructing Mathlets using JavaMath. Journal of On Line Mathematics and its Application, (1), 3, http://www.joma.org

KAWASAKI, T. (2002) Applets Java, um Recurso Visual no Ensino Interativo de Cálculo Diferencial e Integral. História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 1, 161-170.

TALL, D. (2002) Using Technology to Support na Embodied Aproach to Learning Concepts in Mathematics. História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 1, 1-25

YANIK, J. (2001) A Math Toolkit for Java Developers. Journal of On Line Mathematics and its Application, (1), 2, http://www.joma.org.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 27:34
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 4

O *APER*- "ARQUIVO PESSOAL EUCLIDES ROXO"

COMO FONTE PARA HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL

Wagner Rodrigues Valente
Centro de Estudos de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
valente@pucsp.br

Resumo *A comunicação tem por objetivos: destacar a importância que vem ganhando o uso de arquivos pessoais nas práticas historiográ£cas; salientar a relevância dos arquivos pessoais de professores para a história da educação matemática no Brasil; divulgar o Arquivo Pessoal Euclides Roxo - APER e trabalhos recentes que dele £zeram uso.*

Palavras-chave *Euclides Roxo, arquivos pessoais, matemática, educação matemática.*

Abstract *The aims of this text is to highlight the growing importance of the use of Personal Archives in contemporary historiography; to focus on the relevance of theses archives in history of mathematics education in Brazil and to relate some researches that have made use of Euclides Roxo's Archive.*

Key-words *Euclides Roxo, Personal Archives, mathematics, mathematics education.*

1. Sobre Arquivos Privados

O uso de documentos privados como fontes de pesquisa vem dando um novo rumo às práticas historiográ£cas. Segundo Prochasson (1998:21), dois parecem ser os motivos que podem esclarecer esse gosto pelos arquivos privados: o primeiro está relacionado à História Cultural e, mais especi£camente, aos estudos sobre intelectuais; o segundo, liga-se diretamente ao anterior, e diz respeito à mudança de escala de observação do social, que levou ao interesse por fontes menos seriais e mais qualitativas. Prochasson esclarece, ainda, que os papéis pessoais, inicialmente, atraíam apenas historiadores da literatura ou da arte que, com esses documentos, em punho, santi£cavam os grandes escritores ou artistas. De todo modo, foi há pouco mais de 20 anos que os historiadores voltaram seus interesses ao que podemos chamar de fontes privadas.

Os estudos sobre história da Educação Matemática no Brasil, apesar de serem ainda pouco numerosos, vêm dando os primeiros passos no sentido de ampliar o leque de fontes para escrita dessa história. Para além do uso da documentação o£cial, sobretudo da legislação escolar, pouco a pouco, os arquivos pessoais vão ganhando importância como ingredientes fundamentais para a escrita do trajeto histórico que o ensino de Matemática seguiu em nosso país. Um exemplo disso é o estudo de Dassie (2001) que, em muito, utiliza o Arquivo Gustavo Capanema para discutir a elaboração dos programas da disciplina, a partir dos anos 1940. O autor mostra como os documentos pessoais do Ministro da Educação e Saúde Pública, tomados como fontes de pesquisa histórica, permitem reconstruir o jogo político que envolveu a participação direta do exército, da igreja e de grupos de educadores, na elaboração da proposta para o ensino de Matemática, na Lei Orgânica do Ensino Secundário de 4 de abril de 1942.

Nessa perspectiva, consideramos de importância fundamental também poder contar, como fontes de pesquisa, com os papéis pessoais de professores de Matemática. Seja com documentos de pro£ssionais que mais diretamente estiveram envolvidos nos debates, nas propostas, na produção de livros didáticos e em toda sorte de atividades que, de um modo ou de outro, tiveram signi£cado para as políticas da Educação Matemática; seja com a documentação de práticas pedagógicas de professores que não tiveram lugar de destaque para fora de sua ambiência de trabalho mas que, no entanto, constituem fontes muito ricas para estudo dos processos de apropriação e diferentes modos de leitura que o cotidiano escolar fez de propostas pedagógicas, curriculares e de toda gama de determinações contidas nas diferentes políticas educacionais.

É intenção deste trabalho ressaltar a importância dos arquivos pessoais como fontes para escrita da história da Educação Matemática, em particular, destacando o APER – "Arquivo Pessoal Euclides Roxo", custodiado pelo Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

2. Quem Foi Euclides Roxo?

Euclides de Medeiros Guimarães Roxo nasceu em Aracaju, Sergipe, em 10 de dezembro de 1890. O local de seu nascimento é meramente circunstancial em razão da pro£ssão de seu pai, engenheiro, que viajava muito e realizava obras por todo o país. No Rio de Janeiro, em 1904, Euclides Roxo ingressa no Colégio Pedro II. A partir de 1915, torna-se professor substituto de Aritmética do mesmo Colégio; forma-se pela Escola Politécnica em 1916 e, três anos mais tarde, assume a cátedra de Matemática do Pedro II, substituindo Eugênio de Barros Raja Gabaglia, morto naquele ano. Em 1923, publica seu primeiro livro de circulação nacional intitulado “Lições de Arithmetica”. Dois anos mais tarde, em 1925, Roxo é nomeado Diretor do Externato do Colégio Pedro II. Em 1927, encaminha à Congregação do estabelecimento modelo para o secundário no país, uma proposta de renovação do ensino das Matemáticas, a partir da criação da disciplina Matemática, que deveria ser o resultado da fusão dos ramos Aritmética, Álgebra e Geometria, até então ensinados separadamente. A iniciativa de propor a criação de uma nova disciplina escolar que uni£casse os três ramos matemáticos representa uma apropriação, sobretudo, das idéias do matemático alemão Felix Klein e do desenvolvimento didático-pedagógico desse ideário nos Estados Unidos, a partir de 1915. Em 1929, Roxo torna-se membro do conselho diretor da Associação Brasileira de Educação - ABE. No mesmo ano, publica o primeiro volume de uma coleção de livros didáticos escritos para atender à proposta renovadora do ensino de Matemática, intitulado “Curso de Mathematica Elementar”, onde os temas da Aritmética, da Geometria e da Álgebra aparecem fundidos. Vinda a Revolução de 1930, Roxo, ligado à República Velha, pede demissão do cargo de diretor do Externato do Colégio Pedro II, retornando depois de um período de cerca de dois meses à direção do Internato do mesmo Colégio. Euclides Roxo foi o responsável pelos programas de Matemática da Reforma “Francisco Campos” e participou ativamente do grupo encarregado de elaborar os programas de Matemática, em 1942, na Reforma “Gustavo Capanema”. Ainda em 1937, foi nomeado diretor da Divisão do Ensino Secundário. No mesmo ano, publica a obra “A Matemática na educação secundária” onde detalha as in¤uências que sofreu do movimento de internacionalização do ensino da Matemática em suas propostas de ensino.

Roxo morre em 21 de setembro de 1950, deixando marcas decisivas nos rumos da Educação Matemática no Brasil, no período 1920-1950, por sua atuação no Colégio Pedro II, por sua participação nos dois primeiros ministérios da Educação e Saúde, pelos livros e artigos que escreveu e pelos diferentes cargos que exerceu.

3. O APER- “Arquivo Pessoal Euclides Roxo”

Através de contatos com o Sr. Stélio Roxo, £lho de Euclides Roxo, pudemos consultar os documentos pessoais do principal personagem da Educação Matemática brasileira no período 1920-1950. Após várias visitas feitas à residência de Stélio Roxo, conseguimos a doação do material para estudos e pesquisas com vistas à escrita da história do trajeto do ensino de Matemática no Brasil. O material foi levado ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. Foi, em seguida, elaborado um projeto objetivando a organização dos documentos e sua utilização em pesquisas. O projeto intitulado "História da Educação Matemática no Brasil, 1920-1960"obteve £nanciamento da FAPESP e vem sendo desenvolvido no interior do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

A partir do material doado, nossos orientandos tiveram, desde logo, oportunidade de tomar ciência de como se opera a transformação de um conjunto de *documentos* para *fontes* de pesquisa. De início, visitaram outras instituições, particularmente o MAST- Museu de Astronomia e Ciências A£ns, do Rio de Janeiro, onde estão guardados muitos arquivos pessoais de matemáticos e cientistas brasileiros. Ainda no MAST, puderam obter informações sobre catalogação, acondicionamento e restauração de documentos. Após essa etapa, separaram, classi£caram e catalogaram os papéis doados. Atualmente, vêm fazendo uso do fruto desse trabalho como fontes para suas próprias teses.

O APER foi organizado durante o ano de 2001, tendo sido feita a revisão do trabalho durante o mês de janeiro de 2002. O acervo constituído cobre o período de 1909 a 1955. Os documentos somam o total de 624 unidades, distribuídos em 387 textuais, 235 impressos e 2 iconográ£cos. Terminado o trabalho de organização material, publicou-se, em número especial da revista *Educação Matemática Pesquisa*, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, o texto “APER – Arquivo Pessoal Euclides Roxo – Inventário Sumário”, um guia de fontes para auxílio de qualquer pesquisador que deseje utilizar os papéis pessoais de Euclides Roxo em suas investigações. O APER encontra-se aberto à consulta de estudantes e pesquisadores no Campus Marquês de Paranaguá da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Dentre os documentos do APER estão cartas, rascunhos de livros didáticos, recortes de jornais, dentre muitos outros materiais que em muito poderão contribuir para a escrita da história da Educação Matemática no Brasil, sobretudo na era Vargas. Seguindo padrões internacionais de arquivística, os documentos foram classi£cados em quatro categorias (pessoais, produção intelectual, técnico-administrativos e complementares), a £m de melhor poderem servir como instrumentos de pesquisa. Entre os documentos classi£cados na categoria *pessoais* é possível consultar, por exemplo, um rascunho de contrato para elaboração de livros didáticos pelos autores Cécil Thiré, Mello e Souza e Euclides Roxo. Esse documento atesta o abandono, por Roxo, do projeto inicial denominado “Curso de Mathemática Elementar”, onde a Matemática seria ensinada através da fusão de seus diferentes ramos. Dentre os *técnico-administrativos*, estão vários projetos relativos ao Colégio Pedro II, entre eles, uma carta do Ministro Gustavo Capanema apresentando o arquiteto Oscar Niemayer a Euclides Roxo, indicado para elaborar o projeto do novo edifício do Colégio. A série *produção intelectual*, dentre muitos papéis, reúne toda uma documentação relativa às propostas de ensino de Matemática o£cializadas pelas Reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema. Nessa série estão, também, os recortes publicados pelo *Jornal do Commercio*, entre dezembro de 1930 e março de 1931, com os artigos de Euclides Roxo justi£cando os conteúdos da Reforma Campos, para o ensino de Matemática, a partir da reação negativa de vários professores do ensino secundário da época. Na categoria denominada *complementares* estão, por exemplo, os inúmeros recortes de vários jornais que trazem artigos referentes às reformas de ensino desde os anos 20 até £nais dos anos 1940.

4. Utilizando O APER: Alguns Trabalhos sobre História da Educação Matemática no Brasil.

Em texto intitulado “A Congregação do Colégio Pedro II e os debates sobre o ensino de Matemática”, Jane Cardote Tavares, em 2002, analisa, a partir da leitura dos Livros de Atas da Congregação do Colégio Pedro II, como se dá a penetração de um novo ideário para o ensino de Matemática naquele que era o modelo para o ensino secundário brasileiro. Tavares nos mostra como ocorrem as discussões entre os catedráticos da instituição na elaboração de novas propostas para o ensino. O foco do trabalho da autora é o entendimento de como é levada a efeito a proposta de uni£cação da Aritmética, Álgebra e Geometria, para a constituição da disciplina Matemática. A leitura e análise das Atas é cotejada com os documentos de Euclides Roxo. Assim, a autora mostra que o APER contém um documento escrito por Roxo, similar àquele anexado ao Livro de Atas da Congregação do Colégio Pedro II, onde se lê a proposta de fusão dos ramos matemáticos para dar origem a uma única disciplina. Assim, percebe-se que Roxo busca convencer – e consegue – dois terços da Congregação, para apoiarem uma proposta de ensino que elabora solitariamente. Também é possível explicar, através dos documentos do APER, as razões que fazem Roxo, com estreita ligação à República Velha, transformar-se num dos integrantes da comissão formada por Francisco Campos para elaboração da primeira reforma que organiza nacionalmente o ensino brasileiro. A adesão do diretor do Externato do Colégio Pedro II à revolução vem depois do pouquíssimo tempo decorrido entre o seu pedido de demissão em outubro de 1930 – onde alardeou publicamente seu repúdio ao golpe de Vargas - , e seu retorno à instituição, modelo do ensino secundário, em dezembro do mesmo ano pelas mãos do próprio Getúlio. É, desse modo, possível trazer para a Reforma

Campos, como ficou conhecida, as propostas de Euclides Roxo no Colégio Pedro II relativamente ao ensino de Matemática. Houve assim uma continuidade, das propostas elaboradas no âmbito da República Velha, para o ensino de matemática, no interior da nova ordem revolucionária.

A dissertação de Arlete Petry Terra Werneck, "Euclides Roxo e a Reforma Francisco Campos: A gênese do primeiro programa de ensino de Matemática brasileiro" faz do APER o local privilegiado de suas fontes de pesquisa. Werneck analisa toda a documentação de Euclides Roxo em busca da resposta sobre as origens do primeiro programa nacional de Matemática. Em meio aos documentos de Roxo, Arlete analisa um conjunto de programas da disciplina, vindos de outros países e conclui que o professor brasileiro não decalca a proposta contida na Reforma Campos de qualquer desses programas. Cotejando datas e outros documentos do acervo, a autora revela que Roxo escreveu concomitantemente seu livro "Curso de Mathematica Elementar" e o programa de ensino de Matemática. Assim, a gênese do primeiro programa está associada diretamente à estruturação de um livro didático.

O APER também constituiu fonte privilegiada de pesquisa para elaboração da obra coletiva "Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil", escrita por Gert Schubring, João Bosco Pitombeira de Carvalho, Wagner Rodrigues Valente e com texto, em seu capítulo final do próprio Euclides Roxo. O arquivo foi utilizado, em grande medida, para escrita do capítulo segundo do livro que analisa, a partir dos documentos pessoais de Euclides Roxo, as razões do hiato transcorrido entre o movimento internacional das propostas de renovação do ensino de Matemática e sua repercussão no Brasil.

O texto "O nascimento da Matemática do ginásio", publicado pela Sociedade Brasileira de História da Matemática, para servir de apoio ao mini-curso de mesmo nome, ministrado no último Seminário Nacional de História da Matemática, ocorrido na UNESP- Rio Claro, SP é outro trabalho que lança mão do APER. O livro usa o arquivo como subsídio para escrita de como se constitui a Matemática a ser ensinada num nível escolar criado a partir dos anos 1930, que deu origem ao ginásio, nos anos 40. Para elaboração da obra, foram utilizados os resultados parciais das dissertações anteriormente mencionadas neste texto e, ainda, o trabalho de Vera Cristina Machado Santos, "A Matemática escolar nos anos 1920: Uma análise de suas disciplinas através das provas dos alunos do Ginásio da Capital do Estado de São Paulo". A esses textos somam-se a análise de um conjunto de correspondências do arquivo que evidencia as ligações entre Roxo e o movimento educacional organizado a partir da criação da ABE – Associação Brasileira de Educação.

Além dos textos acima mencionados, muitos outros trabalhos pontuais foram produzidos e apresentados em seminários e congressos, a partir da documentação contida no APER, especialmente pelos participantes do grupo de pesquisa "A Matemática na organização curricular: história e perspectivas atuais" do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. Todos esses trabalhos tomam como referência teórico-metodológica as produções da História Cultural, da Nova História das Ciências e da História das Disciplinas Escolares.

5. Considerações Finais

Como foi possível observar, os arquivos privados podem trazer uma contribuição importante para a escrita da história da educação, em especí£co, para a história da educação matemática. No entanto, apesar da valorização que vem sendo atribuída aos arquivos privados, ao que tudo indica, essa valorização ainda não incluiu os documentos pessoais de professores. Renomados autores no âmbito político, intelectual, cientí£co, têm seus arquivos hoje disputados para guarda e utilização na pesquisa. No entanto, há de se levar em conta, também, aqueles arquivos de personagens que £zeram história na escola, nas práticas cotidianas de seu trabalho didático-pedagógico. Os documentos desses professores têm interesse não necessariamente em sua singularidade, mas na possibilidade de revelar as apropriações e leituras que professores de outras épocas £zeram de contextos políticos e econômicos, de ambiências culturais, de políticas educacionais, de correntes pedagógicas predominantes em seu tempo, dentre outras coisas, para comporem suas práticas de trabalho docente. Assim, bem ao gosto da Nova História, da História Cultural, inventariar, organizar e fazer uso de testemunhos de práticas culturais, permite que sejam escritas histórias diferentes daquelas dos grandes eventos, dos grandes personagens.

Ao pensar a educação matemática como prática cultural, somos levados à escrita de sua história no âmbito da cultura escolar. Os produtos dessa cultura tornam-se, desse modo, fontes para a escrita dessa história. A£nal, que historiador da educação, hoje, não £caria maravilhado com o encontro de papéis pessoais, por exemplo, de mestres do início do século XIX? Rascunhos de aulas, cadernos, apontamentos, resumos de leituras, correspondências e toda uma gama de documentos que ajudassem a compor o cotidiano de trabalho daqueles professores?

Referências

APER- Arquivo Pessoal Euclides Roxo. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

DASSIE, B. (2001): **A Matemática na Reforma Gustavo Capanema**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Departamento de Matemática. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001.

DUARTE, A. R. S. **Henri Poincaré e Euclides Roxo: subsídios para a história das relações entre Filoso£a da Matemática e Educação Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2002.

PROCHASSON, C. Atenção: verdade! - Arquivos Privados e Renovação das Práticas Historiográ£cas. **Revista Estudos Históricos da Fundação Getúlio Vargas**. Número Especial Arquivos Pessoais. Vol. 11, no. 21. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1998.

TAVARES, J. C. **A Congregação do Colégio Pedro II e os debates sobre o ensino de Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2002.

VALENTE, W. R. (org.) **Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil**. Biblioteca do Educador Matemático. Coleção SBEM. São Paulo, 2003.

VALENTE, W. R. (org.) **O nascimento da Matemática do ginásio**. SBHMat, São Paulo, 2003.

WERNECK, A. P. T. **Euclides Roxo e a Reforma Francisco Campos: A gênese do primeiro programa de ensino de Matemática brasileiro**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 35:41
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 5

E-CALCULO: UM CURSO VIRTUAL DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Maria Cristina Bonomi Baru£
Departamento de Matemática
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
crisb@ime.usp.br

Resumo *Neste artigo apresentamos o site **e-calculo**, que foi desenvolvido para apoio a disciplinas regulares do primeiro ano do Curso de Licenciatura em Matemática do IME-USP. A construção e a utilização do site propiciou novas perspectivas no que diz respeito à ampliação do espaço sala de aula, bem como à possibilidade dos alunos construírem conhecimento matemático em nível universitário de uma forma mais autônoma e independente.*

Palavras-chave *Ensino de Cálculo, Cálculo Diferencial e Integral na Web, Espaços de Aprendizagem, Um site de Cálculo.*

Abstract *In this article we present the site **e-calculo**, developed to support the regular disciplines of the £rst year of the University degree in Mathematics with Teaching Certi£cation at IME-USP. The production and usage of the site create new promising perspectives when we think about expanding the classroom limits, as well as providing to students a more independent way to construct mathematical knowledge on university level.*

Key words *Teaching Calculus, Differential and Integral Calculus on the Web, Learning Spaces, An Website of Calculus.*

1. Introdução

Este trabalho é fruto de um projeto apoiado pela Pró-Reitoria de Graduação da Universidade de São Paulo e foi desenvolvido em parceria com a equipe técnica do Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada do Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

Trata-se da criação de um *site* para apoio a disciplinas regulares do primeiro ano do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Especi£camente, essas disciplinas são Cálculo Diferencial e Integral para funções de uma variável real e Laboratório de Matemática, ambas com duração de dois semestres letivos.

O *site* **e-calculo** está disponível no endereço:

http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo

2. A rede hipertextual

De um modo geral, a comunicação estabelecida na *Internet* está se tornando essencial para uns, uma rica descoberta para outros, enquanto que, para alguns ainda constitui uma interrogação. As comunidades virtuais estabelecem-se a partir de interesses; a proximidade física não é mais essencial, sequer necessária. Apesar de £sicamente "não-presente", uma comunidade virtual está repleta de paixões e de projetos, de con¤itos e de amizades. Para Pierre Lévy [1995],

> a virtualização reinventa uma cultura nômade, não por uma volta ao paleolítico nem às antigas civilizações de pastores, mas fazendo surgir um meio de interações sociais onde as relações se recon£guram com um mínimo de inércia.

Não se trata mais de discutir ou defender a existência de cursos presenciais ou virtuais, em paralelo ou não. Trata-se muito mais de potencializar a utilização de um novo espaço, talvez nem mais tão novo, que pode se tornar extremamente profícuo em qualquer sistema educacional. É uma outra maneira de buscar e viabilizar a construção do conhecimento, de maneira mais autônoma e independente, num novo ambiente, onde os movimentos e as interações são diferentes e obedecem a novos modelos.

Na verdade, é o reconhecimento de que o universo no qual trafegam o conhecimento e as mudanças no saber foi ampliado, atingiu outro patamar e está disponível de uma forma que tende a ser cada vez mais igualitária, tornando a informação democraticamente acessível. Trata-se, pois, de descobrir maneiras de utilizar esse novo espaço, através de novas estratégias de ensino, pesquisadas e desenvolvidas em ambiente didático seja de competência, seja de criatividade.

A escrita, como adianta P. Lévy [1995] "cava uma distância entre o saber e seu sujeito". A passagem da escrita para a imprensa, com a conseqüente disseminação e socialização do saber, também gerou perplexidade e insegurança. Para Lévy [1997]

> efetivamente, a impressão transformou de maneira radical o dispositivo de comunicação no grupo dos letrados. ... Um processo cumulativo, que iria levar à explosão do saber, é engatilhado. ... A informática parece reencenar, em algumas décadas, o destino da escrita: usada primeiro para cálculos, estatísticas, a gestão mais prosaica dos homens e das coisas, tornou-se rapidamente uma mídia de comunicação de massa, ainda mais geral, talvez, que a escrita manuscrita ou a impressão, pois também permite processar e difundir o som e a imagem enquanto tais.

Nesse sentido, a criação de hipertextos, ultrapassa de longe os textos convencionais, lineares. O hipertexto explode em miríades de notícias cuja ausência de homogeneidade traz novas perspectivas para a construção do conhecimento pelo aluno/usuário. Deste modo, os microcomputadores abriram um novo leque de possibilidades quando examinamos as inúmeras simulações que podem ser realizadas e os questionamentos que podem e precisam ser estabelecidos. A formulação de perguntas é fundamental para a produção de conhecimento, que, para Bachelard, sempre é resposta a uma pergunta.

3. O *site* E-CALCULO

O objetivo principal do projeto foi a criação de um ambiente interativo multimídia para o ensino de Matemática superior, especi£camente para o acompanhamento de disciplinas regulares ministradas para alunos ingressantes na Universidade.

Uma preocupação esteve presente de modo essencial: o estabelecimento de uma ponte com a Matemática normalmente trabalhada na Escola Básica. Assim, o tratamento dado ao tema Funções Elementares pretendeu estabelecer justamente essa ligação. De fato, as funções elementares, em geral, são estudadas no Ensino Médio. No *site* elas foram todas apresentadas segundo um enfoque importante para o Cálculo, sem pressupor um conhecimento prévio por parte dos alunos, que, normalmente trazem algumas regras memorizadas a respeito, sem signi£cado.

Além disso, uma questão que mereceu um cuidado todo especial foi o fato de ser importante apresentar os conceitos de uma maneira tal que se garantisse o convencimento do estudante quanto à sua necessidade e pertinência. Mas também foi necessário apresentar uma certa formalização, a £m de tornar possível a percepção da maneira pela qual a Matemática vai sendo construída, constituindo um corpo de conhecimento articulado e consistente.

Evidentemente, a construção da rede hipertextual, com seus inúmeros *links*, animações e *applets*, exigiu um grande empenho na busca da melhor maneira de estabelecer a negociação dos signi£cados, a £m de possibilitar a construção de conhecimento signi£cativo por parte dos estudantes que constituem o público alvo.

Num universo virtual, a construção de *links* elimina a linearidade do texto, a natural estrutura presente nos livros didáticos e, ao contrário, cria movimento e a possibilidade de trazer as referências sempre próximas, quando necessário, construindo uma rede semântica, integrando os assuntos abordados a uma memória que pode ser tornada presente a todo instante. Por outro lado, os *applets* possibilitam a simulação e a interação do estudante/usuário, no contexto que está sendo trabalhado.

Através do fórum, é possível estabelecer mais questionamentos e colocar novos problemas para os alunos, provocando-os e estimulando-os. Aí os alunos colocam suas dúvidas, discutindo-as entre si e com o professor. Dessa forma possibilita-se a criação de comunidades de aprendizagem, que podem ser virtuais ou não, enquanto grupos que têm como objetivo a discussão de idéias e problemas comuns, buscando sua solução.

A perspectiva de utilização de *e-learning spaces* parece ser cada vez mais próxima em nosso ambiente universitário, abrindo possivelmente novas perspectivas para um ajuste no que diz respeito ao acesso à Universidade Pública, tornando-a efetivamente mais próxima de seu público-alvo.

Na esfera educacional a colocação de problemas instigadores e interessantes está se sobrepondo às antigas maneiras de transmissão pura e simples de conteúdos. Nesse aspecto, a utilização do microcomputador é um campo que abre, sem dúvida, inúmeras possibilidades, principalmente devido às suas características intrínsecas que permitem simulações e variadas interações. Os estudantes podem utilizar uma ferramenta muito ¤exível e adaptável ao per£l individual de cada um. As possibilidades de desenvolver a própria criatividade são inúmeras. Num *e-learning space*, o conhecimento, necessariamente, deixa de ser visto numa perspectiva estática e passa a ser encarado como processo.

Atualmente é quase impossível fazer ciência, engenharia e matemática sem ferramentas computacionais. O mesmo pode ser dito com relação à aprendizagem desses assuntos. As vantagens na utilização do microcomputador principalmente com ferramentas exploratórias são enormes. Atribui-se um novo *status* epistemológico aos objetos matemáticos – pois se possibilita uma certa aproximação dos materiais concretos, ajudando os estudantes na construção de raciocínios formais – dando-lhes mesmo a idéia de estar usando *o estado da arte* das ferramentas cientí£cas para aprender e simular ciência e matemática, medindo, controlando, comunicando.

Segundo Papert, declaradamente comprometido com a opção democrática,

> ... a Informática, em todas as suas diversas manifestações, está oferecendo aos Inovadores novas oportunidades para criar alternativas. A pergunta que permanece é: em essência, a educação pública mostrará o caminho ou, como na maioria das coisas, a mudança primeiro melhorará as vidas dos

> £lhos dos ricos e poderosos e apenas lentamente e com um certo grau de esforço entrará nas vidas dos £lhos do resto de nós? A escola continuará a impor a todos um único modo de saber ou se adaptará a um pluralismo epistemológico?

4. Resultados

No contexto do curso universitário, onde as disciplinas normalmente são desenvolvidas de maneira bastante tradicional, durante o ano de 2002, foi possível observar que os alunos, considerados na totalidade, têm uma certa di£culdade em participar do fórum. Aliás, essa di£culdade é semelhante àquela que muitos apresentam quando precisam se expor ou participar ativamente do trabalho em sala de aula, seja individualmente como em pequenos grupos. Entretanto, ao £nal do período letivo, dada a proposta de trabalho em sala de aula, essa di£culdade, no nível presencial, acabou sendo bastante resolvida e a maioria dos alunos aprendeu a se envolver.

No caso da participação no fórum, alguns estudantes, com bastante naturalidade, passaram a interagir. A possibilidade de colocar dúvidas e de responder a questões propostas foi assumida por eles. Fomos surpreendidos, inclusive, com a criação espontânea de um *e-group* através do qual oito alunos passaram a interagir em suas discussões a respeito de Cálculo, ampliando suas possibilidades de diálogo, sem encontros presenciais.

Por outro lado e, lamentavelmente, outros alunos simplesmente ignoraram a existência do *site* e do fórum, o que sinaliza a necessidade de insistir e estimular essa participação. As reais perspectivas de melhoria nos sistemas de conexão nos levam a crer que propostas desse tipo serão facilitadas e se tornarão mais viáveis. Dado o pioneirismo dentro do Departamento de Matemática do IME-USP, acreditamos que através da persistência e dos ajustes necessários, brevemente o desenvolvimento de cursos nesses moldes será reconhecido institucionalmente e terá a aprovação da totalidade dos alunos.

5. Conclusão

Com o desenvolvimento desse projeto, aprendemos que é possível criar uma rede hipertextual para um assunto que envolve a Matemática de nível superior. Vencemos diversas di£culdades. Aprendemos que é possível sair da proposta linear, envolvendo um esquema de pré-requisitos, normalmente presente nos livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral. Estamos conscientes de que ainda há diversos aspectos que podem ser melhorados ou ampliados, alguns externos, bem como outros relativos ao conteúdo que foi desenvolvido. Entretanto, sempre existe a possibilidade de transformar ou mesmo ampliar a rede que foi estabelecida, dada a mobilidade criada.

Entretanto, temos clareza de que estamos apresentando aos nossos alunos, professores de um futuro bastante próximo e, em certo sentido, previsível sob alguns aspectos, algo novo e possível. Esses professores saberão que é viável trabalhar num ambiente que ultrapassa os limites da sala de aula, utilizando um universo que possibilita interações não necessariamente presenciais, que permite a construção do conhecimento de forma mais autônoma e independente.

Segundo Najmanovich,

> há comenzado a gestarse una cultura que no piensa el universo como un reloj sino como “archipiélagos de orden en un mar de caos”: la cultura de la complejidad. La civilización que creyó en las certezas de£nitivas, en el conocimiento absoluto y el progreso permanente se derrumba y están abriéndose paso nuevos modos de pensar, de sentir, de actuar y vivir en el mundo.

No mundo em constante e cada vez mais rápida transformação, a busca por soluções aos grandes problemas que a¤igem a humanidade tem-se tornado uma necessidade também progressivamente maior. Nesse sentido, é imprescindível formar pessoas cada vez mais criativas e críticas. A escola em qualquer nível deve preparar o ser humano para exercer o monopólio da atividade criativa.

Referências

ARSAC, G. et al., 1989. **La transposition didactique en mathématiques, en physique, en biologie**. IREM de Lyon, Lirdis.

BACHELARD, G. , 1979. **La Formación del Espíritu Cientí£co**.México: Siglo XXI.

BARUFI, M. C. B., 1999. **A construção/negociação de signi£cados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

BROUSSEAU, G., 1994. Los diferentes roles del maestro in PARRA, C e SAIZ, I., (compiladoras). **Didáctica de Matemáticas**: Aportes y Re¤exiones. Buenos Aires: Paidós Educador.

CLEARY, B. A. and DUNCAN, S. J., 1997. **Tools and techniques to inspire classroom learning**. Milwaukee Wiscounsin: Asq Quality Press.

KORTEMEYER, G. and BAUER, W. Multimedia Collaborative Center Creation, http://www.eoe.org .

LÉVY, P., 1995. **As Tecnologias da Inteligência**: o Futuro do pensamento na Era da Informática. Trad. Carlos Irineu da Costa. Rio de Janeiro: Editora 34.

_______, 1997. **O que é virtual?** Trad. Paulo Neves. São Paulo: Editora 34.

MACHADO, N. J., 1995. **Epistemologia e Didática**. São Paulo: Cortez.

NAJMANOVICH, D., 1995. **El lenguaje de los vínculos**. De la independencia absoluta a la autonomía relativa. in DABAS E. y NAJMANOVICH D. (compiladoras). Redes - El lenguaje de los vínculos: Hacia la reconstrución y el fortalecimiento de la sociedad civil. Buenos Aires: Paidós, Ideas & Perspectivas.

PAPERT, S., 1994. **A máquina das crianças**: repensando a escola na era da informática. Trad. Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas.

SANDHOLTZ, J. H., RINGSTAFF, C., DWYER, D. C., 1997. **Ensinando com Tecnologia**: Criando Salas de Aula Centradas nos Alunos. Trad. Marcos Antonio Guirado Domingues. Porto Alegre: Artes Médicas.

SCHOENFELD, A. H., 1992. **Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics** Chapter 15, pp. 334-370, of the *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (D.Grouws, Ed.).New York: MacMillan: http://www-gse.berkeley.edu/

___________________, 2000. Purposes and Methods of Research in Mathematics Education, *Notices of the American Mathematical Society*, volume 47, n. 6, páginas 641-649.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática

págs: 43:49
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 6

HISTÓRIA E ESTÓRIAS DA MATEMÁTICA:

UMA ENTREVISTA COM HERON NOS DIAS ATUAIS

Helena Noronha Cury
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
curyhn@pucrs.br

Carlos Eduardo Mathias Motta
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
drummath@yahoo.com

Resumo *A partir de uma entrevista imaginária com Heron de Alexandria, os autores criam um ambiente de fantasia, discussão e comparação entre métodos matemáticos do passado e do presente. Além de propor novas formas de lidar com alguns tópicos de geometria, os autores também sugerem o uso de computadores para estabelecer uma certa tensão entre motivos históricos, £ccionais e pedagógicos.*

Palavras-chave *História da Matemática; Triângulos de Heron; Uso de Tecnologia.*

Abstract *Through an imaginary interview with Hero of Alexandria, the authors create an environment of fantasy, discussion and comparison between the mathematical methods from the past and the present era. Besides proposing new ways of dealing with some topics from Geometry, the authors also propose computer-oriented methodologies in order to build up some tension over historical, £ctional and pedagogical motifs.*

Key words *History of Mathematics; Heronian Triangles; Use of Technology.*

1. Introdução

Entrevistas hipotéticas podem ser aproveitadas no ensino de formas diversas, de acordo com os objetivos do professor que for utilizá-las, pois, em qualquer nível, isso deverá exigir um aprofundamento dos itens abordados, um exercício da capacidade de argumentação.

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de uso da História da Matemática e de tecnologias computacionais para o ensino de conteúdos de Geometria na Educação Básica, adaptável às necessidades e possibilidades de professores e alunos de qualquer nível de ensino, a partir de uma entrevista hipotética com Heron de Alexandria.

2. História da Matemática e Uso de Tecnologias

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Médio (Brasil, 1999), a referência à contextualização sócio-cultural comporta, entre competências e habilidades a serem desenvolvidas, o "relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade" e "utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades"(p. 259).

A. Miguel (1997), ao listar argumentos que reforçam as potencialidades pedagógicas da História da Matemática, aponta a História como fonte de métodos adequados de ensino, criticando, no entanto, uma postura linear e considerando "mais razoável defender existência de várias formas possíveis de se realizar reconstituições históricas" (p. 80).

Quase sempre utilizamos a História da Matemática para motivar uma discussão sobre um certo objeto, seu signi£cado e sua função. Discorremos sobre a questão histórica e passamos a um novo debate: o contexto presente, a realidade e as novas atribuições do objeto nos dias de hoje. Mas como poderíamos viver a passagem entre o passado e o atual?

Mesmo baseados em fontes históricas con£áveis, não conseguimos nos livrar dos "cacoetes" pedagógicos, acabamos impregnando a ordem histórica de um tom "estórico", cuja função é subvertê-la em nome de uma nova ordem, a didática. E se £zéssemos o oposto? E se nós impregnássemos uma ordem pedagógica, considerada favorável, de um teor histórico?

Como recurso capaz de desenvolver nossa proposta, sugerimos o uso de calculadoras e computadores, considerando que eles podem permitir, aos estudantes, a familiaridade com padrões que se repetem, levando-os a fazer hipóteses, testá-las e levando os professores a juntarem-se a eles, num ambiente de pesquisa.

Nossa proposta consiste, então, em imaginar uma apresentação de Heron de Alexandria aos recursos tecnológicos, discutindo com ele questões de forma, conteúdo e posturas epistemológicas. Segundo Eves (1997, p. 205),

Há muita controvérsia a respeito da época exata em que ele (Herão) viveu, havendo estimativas que variam de 150a.C. a 250d.C. Mais recentemente tem sido colocado na segunda metade do século Id.C.

Estamos supondo, portanto, que ele tenha recebido in¤uências de muitos matemáticos da "idade de ouro" da Geometria grega.

3. A Entrevista

Vamos transcrever aqui apenas alguns trechos da longa conversa hipotética que tivemos com Heron, indicando por "A" as intervenções feitas por nós e por "H", as de Heron. As referências entre parênteses foram inseridas após o diálogo com Heron, apenas para que você, leitor, possa reportar-se às nossas fontes. As omissões de algumas partes da entrevista, necessárias pelas limitações de espaço, são indicadas por uma linha tracejada.

A: – Heron, queremos mostrar a você alguns instrumentos que usamos em nossas aulas, para trabalhar com conteúdos de Geometria. Vimos as representações no seu livro *Métrica* e achamos que você podia trabalhar de uma forma mais simples se usasse um computador para lhe auxiliar nos desenhos.

H: – Não estou interessado em simpli£car, estou interessado em deduzir geometricamente a fórmula que Arquimedes já conhecia (Boyer, 1968).

A: – Muito bem, mas há uma maneira de fazer desenhos nesse aparelho, usando um recurso que chamamos de *software* de Geometria Dinâmica.

H: – Em que sentido vocês usam a palavra "dinâmica"?

A: – Dinâmico é algo relativo a movimento. Mas deixemos isto de lado por instantes, Heron. Veja apenas como podemos desenhar um triângulo e uma circunferência inscrita nele. Qualquer dos segmentos que você precisou traçar, nós o fazemos aqui, com a vantagem de que os números que representam suas medidas vão sendo apresentados instantaneamente.

A: – Heron, em épocas mais recentes, um matemático chamado Seseman construiu uma tabela, com colunas preenchidas por números inteiros, representando lados e área de triângulos que hoje recebem seu nome, Heron, em homenagem à sua obra (Rade & Nelson, 1984).

H: – E como é essa de£nição?

A: – "Se os comprimentos dos três lados de um dado triângulo são inteiros e sua área também, então ele é chamado *Triângulo de Heron*." (Fleenor, 1997, p. 113).

H: – Muito bem! E o que este Seseman fez?

A: – Ora, ele tomou as medidas dos lados e calculou a área de cada triângulo usando a fórmula que você demonstrou. Mas sua tabela é pequena, porque os cálculos eram difíceis para os poucos recursos de sua época. Hoje temos recursos computacionais. Olhe novamente para a tela do computador, Heron. Veja, posso simular a tabela de Seseman com um outro programa chamado "planilha eletrônica" e, sem cálculos tediosos, obter a área do triângulo, para decidir se ele merece ser chamado por seu nome!

H: – Vocês não me convencem de que isso seja importante, pois eu vejo um problema nessa geração de números. Nem todos podem representar lados de um triângulo. A£nal, Euclides já provou que cada lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois!

A: – Heron, ainda há uma outra propriedade que permite discutir conceitos que Zenon de Elea já conhecia, quando este propôs o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, lembra-se? Estamos nos referindo à noção de limite.

H: – O que é isso?!

A: – Algo intimamente ligado à questão do movimento e sua matematização.

H: – Vejamos o que vocês sabem sobre isso, já fui muito questionado sobre o assunto. Vocês chamam este problema de limite? Limite de quê?

A: – Espere, voltemos ao computador e vamos construir uma nova tabela em nossa planilha eletrônica, com lados de triângulos de Heron representados por inteiros consecutivos, a_{n-1}, a_n , a_{n+1}, em que n indica a linha da tabela. Se tomarmos a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ como termo geral de uma seqüência, ela parece convergir para $\sqrt{3}+2$. É limite neste sentido!

H: – Caros senhores, vocês me surpreendem! Em primeiro lugar, não conheço essa notação usada para representar esses números. Em segundo lugar, vocês insistem em usar termos que traduzem movimentos, como "dinâmica" e "convergência". Parece-me claro que uma diferença entre nossas épocas repousa sobre isso. Vocês matematizaram o movimento.

A: – Na realidade, Heron, não fomos nós, foi Newton, no século XVII !

H: – Quem?

H: – Digam-me, então, qual é a área do círculo cujo raio é 1? Quero ver o quanto vocês avançaram em relação a Apolônio de Perga ! (Boyer, 1968).

A: – Deste número, que depois foi simbolizado por π, já conhecemos muito, mas no £nal das contas, talvez utilizemos o mesmo valor calculado por Apolônio.

H: – Vocês estão me dizendo que sabem muito, mas não ensinam aos seus alunos?

A: – Não é isso...com o advento do computador, acabamos por tornar-nos mais pragmáticos, somos mais práticos. Nossa postura diante dos fatos geométricos tornou-se mais qualitativa, Heron. Parece-nos claro que a di£culdade que vocês tiveram em superar as questões quantitativas de sua época acabaram por velar o desenvolvimento qualitativo das mesmas questões.

H: – Eu sou conhecido por meus experimentos e construções, senhores. Eu não dou nomes, nem tampouco categorizo minha criatividade ou minha postura. O que me parece claro é que vocês escolheram esta caixa de luz (o monitor do computador) para exibir seu pensamento e analisá-lo como espectadores de vocês mesmos. Será por causa do movimento? Eu imagino com clareza a £gura que quiser e meço tudo o que lhe torna única, em termos absolutos e suas relações.Vocês trocaram o prazer da descoberta pela precisão da descrição. Vocês favorecem o "como" em detrimento do "o quê".

A: –Sobre a sobrevalorização do "como" em detrimento do "o quê", não saberia dizer, talvez você esteja certo...No entanto, estamos tendo esta conversa porque queremos levar a descoberta para a escola, queremos unir elementos numéricos e geométricos, tecnologia e ação.

H: – Eu uni tais elementos, deveras. No entanto, creio que nossa percepção do "logo" é distinto, assim como o respectivo uso do "techno" também. É claro que os avanços de seu tempo me surpreendem, mas eles são avanços do tempo. O que, no entanto, vocês não parecem perceber é que, se voltarem ao meu tempo para retribuir minha visita, vocês o farão acreditando que estão retrocedendo. Vocês não acreditarão que também estão vivendo um avanço. Pois creiam, em muitas questões estamos, ainda, à frente de vocês. A conquista do pensamento acerca do movimento, feito por vocês exteriormente, só ganhará sentido na ação a que se referiram. Vejo que vocês conseguem desenhar um heptágono nessa caixa. Mas a e£cácia os cegou com relação às regras. Parece que não existe o questionamento sobre a possibilidade real da construção por régua e compasso!!! Talvez vocês saibam da impossibilidade da construção daquele polígono através de instrumentos, mas é provável que vocês não saibam que o apótema de um hexágono regular fornece uma excelente aproximação para o lado do heptágono inscrito no mesmo círculo. Seu processo investigativo não permite tal percepção, ele me parece ser apenas estético ou brutalmente analítico. Vocês perderam o meio termo. Talvez sejam estes processos investigativos de médio porte que vocês devam levar para as suas escolas. Vocês devem reaprendê-los. Será difícil, no entanto, vencer a inércia do pensamento.

4. Considerações Finais

Ao introduzirmos conceitos de Geometria, tais como a fórmula para o cálculo da área de um triângulo e as propriedades dos triângulos de Heron, queremos percorrer um caminho que nos parece pedagogicamente favorável, haja vista a importância do uso de recursos computacionais. Mas a escolha dos temas está baseada em um trabalho realizado há séculos, em resultados que outros matemáticos já validaram. Como fazer para compatibilizar essas idéias? Nossa proposta é usar uma estória, a da conversa com Heron, e transformá-la em um motivo para buscar elementos na História da Matemática, que garantam um saudável intercâmbio entre os pensamentos matemáticos do passado e do presente, evitando a simples apresentação de dados sobre os matemáticos e suas obras absolutamente descontextualizados.

A partir dessa idéia inicial, podemos lançar um desa£o aos alunos: quais são os triângulos de Heron? Sabendo que temos in£nitos triângulos desse tipo, precisamos limitar nossa busca e, então, reformular a questão, estabelecendo um valor máximo para o maior dos lados (digamos N) e lembrando o fato de não podermos tomar quaisquer valores inteiros para os lados do triângulo, ainda que menores ou iguais a N, uma vez que cada lado tem que ser menor que a soma dos outros dois. Essa condição é equivalente a tomar p(p-a)(p-b)(p-c) maior que zero, sendo a, b, c os lados e p o semiperímetro do triângulo escolhido. Assim, já se esboça um plano, visto que a área A pode ser calculada pela fórmula de Heron.

Ao tomarmos valores a,b,c menores ou iguais a N, aplicando na fórmula, obtendo A e decidindo se o triângulo é de Heron, o aluno deverá perceber que o trabalho é difícil e tedioso. Esse é o momento de fazermos um retrospecto e perguntar: e se houvesse um computador no qual ele pudesse programar os cálculos em uma planilha eletrônica?

Mas qual a importância de tais triângulos, que outros conteúdos podem ser desenvolvidos a partir desses cálculos? Fleenor (1997) aponta propriedades interessantes dos triângulos de Heron que têm lados representados por inteiros consecutivos. Tomando dois deles (com exceção do que tem lados 3, 4 e 5), se traçarmos a altura relativa ao lado representado por um número par, ela vai dividir o triângulo em outros dois, retângulos, cada um deles também um triângulo de Heron.

Podemos, então, alternar os questionamentos e os recursos, pois agora estamos trabalhando com Geometria (altura de triângulos) e há a possibilidade de usar softwares de Geometria Dinâmica, como o Cinderella, para construir os triângulos e determinar lados e áreas (Cinderella, 2003). Nossa proposta, portanto, engloba a contextualização, com a entrevista, o desa£o aos alunos e o uso de computadores, quando a necessidade se impuser, pelos cálculos complicados ou pela impossibilidade de traçar £guras apenas com régua e compasso.

Referências:

BOYER, C.B. (1968). A history of mathematics. New York: John Wiley & Sons.

BRASIL. (1999). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Ministério da Educação, Brasília.

CINDERELLA. (2003). Disponível em http://cinderella.lmc.fc.ul.pt/ . Acesso em 27 nov. 2003.

EVES, H. (1997). Introdução à História da Matemática. 2. ed. Ed. da UNICAMP, Campinas.

FLEENOR, C.R. (1997). Heronian triangles with consecutive integer sides. J. Recreational Mathematics, (28), 2, 113-115.

MIGUEL, Antonio. (1997). As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. Zetetiké, (5), 5, 73-105.

RADE, L.; NELSON, R.D. (1984). Adventures with your computer. Penguin Books, Harmondsworth, England.

2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 51:65
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 7

MATHEMATICAL METAPHORS AND POLITICAL FRAMINGS

Ivan da Costa Marques
Programa de Pós-graduação em Informática
UFRJ
imarques@ufrj.br

Resumo *Embora as formas matemáticas sejam historicamente adquiridas e aprendidas, elas são subseqüentemente naturalizadas, apreendidas, e largamente usadas para colocar em cena uma versão da realidade dita pré-dada, um mundo das "coisas em si" (Natureza), separado e acima do mundo dos "humanos entre si" (Sociedade). As formas matematicamente estáveis (teoremas), mobilizadas como metáforas em diversas situações do mundo real, e apoiadas pela metrologia, se tornam ferramentas políticas ontológicas invencíveis.*

Palavras-chave *matemática, metáforas, política, Natureza, Sociedade, conhecimento*

Abstract *While mathematical shapes are historically acquired and learned they are subsequently naturalised, apprehended, and widely used in enacting one version of a pregiven reality, the world of "things in themselves" (Nature), separated from the world of "men (humans) among themselves" (Society). Mathematically stable shapes (theorems), mobilized as metaphors in diverse real world situations, and supported by metrology, become invincible ontological tools.*

Key words *mathematics, metaphors, politics, Nature, Society, knowledge*

1. Introduction

Mathematics and mathematical metaphors are important because they help to make heterogeneous processes – including those of globalisation – seem uni£ed. Like the theology they have replaced, they have the effect of putting human beings in contact with the transcendent. The argument, then, is that while mathematical shapes are historically acquired and learned they are subsequently naturalised, apprehended, and widely used in enacting the real world.

How does this work? To answer this question we need to note that mathematical referents are powerfully located and enacted in texts. In science, and especially in mathematical texts, a '£gure' or an inscription is combined with a legend. The referent – the £gure – is right there in the text. So mathematics endlessly creates new referents, and a few are converted into representations of the real world. This happens because they are embedded in metrology, the art of measuring. Metrology strengthens the capacity of mathematics to convince. It helps to frame what is to be taken into account or forgotten, made present or absent. So the argument is that mathematically stable shapes (theorems), mobilized as metaphors in diverse real world situations, and supported by metrology, become invincible ontological tools.

Mathematics is important in contemporary reality partly because of its metaphorical plasticity. On the one hand, it is taken to be certain, determined, exact, and decidable. On the other hand, in the £rst half of the 20^{th} century mathematicians concluded that it is impossible to determine the logical consistency of any reasonably large mathematical system. For instance, the logical consistency of arithmetic can be neither proved nor disproved. At the beginning of the 21^{st} century uncertainty is recognised in mathematics in two more ways. First, it is argued that any shape (or 'order') will always be present in a space (a 'universe') that is suf£ciently large. This means that the appearance of disorder in the world can be understood as a matter of scale. Second, it is argued that the radical indeterminacy (i.e. the non decidability or calculability) of most 'objects' that populate mathematical spaces means that they cannot be caught in any kind of regular network ('order').

In what follows I will work these arguments through by considering £rst the enactment of mathematics, and what one might think of as the practical transcendence of mathematical shapes or theorems. Then I will explore its character as an ontological tool. I will next consider the mathematics of order and scale on the one hand, and non-calculability on the other. I will conclude with a few observations about the potentially subversive character of these 20^{th} century forms of mathematics to the global and the local.

2. Globalisation, ¤uid, and unity of the global as mathematical performance

‘Globalisation’ is a process best thought of in terms of verbs, movements, and ¤uxes. At the same time everything that happens, happens in particular. It is local. This means that the global and the local shape themselves together and do not exist outside particular actions. It also means that they, or so I shall argue, that they are the ephemeral effects of scaling or relative quantities/positions (densities).

So everything is in ¤ux and everything is locally enacted. But how does the global end up as the global while the local is considered local? How is an inter-subjective unity to/with the global achieved? This is my proposal. Like any other ‘entity’[1], globalisation is a unity that depends on performances of provisionally stable patterns of links between heterogeneous materials heterogeneously juxtaposed in ¤ux. Husserl (1970:25) tells us that all entities, “in general and in all their properties, ¤uctuate in the sphere of the mere typical”. Callon (1995:320) similarly suggests that entities provisionally con£gure “networks of similarity”. So similarity is always approximate – and it is a con£guration. More precisely, it depends on the enactment of approximately the same provisionally stable patterns or shapes in different networks of similarity. But how are such patterns held stable? How are they made intersubjectively transmittable? How are they bundled into networks that are strong enough to make it possible to talk about ‘unity’? My suggestion is that this is achieved in the shapes given in the ‘mathematization of the world’. As Husserl (1970:48-49) puts it, the ‘mathematization of the world’ is

> “the surreptitious [translation] of our daily life-world – the world that is given in its actuality through perception, which is always experienced and experienceable – to a [measured] world of mathematically substructured shapes”.

This implies that certain sites for witnessing, predicting, and truth making are particularly important the networks of the contemporary world. At these sites Euclidean and Cartesian ways of thinking global space-time are performed. As they are, read and written they bind relations and ‘inscriptions’[2], enacting an approximate, though shifting, pattern in global actors and techniques. The global is constituted as an ephemeral effect of scaling, and of contingent differences in relative quantities/positions (densities). The global is not intrinsically different from the local, but it is identi£able as global.

In the ‘mathematization of the world’ shapes are made more or less coincident. If they satisfy special practical interests then they are taken to coincide; for example,

[1] Entity: a term which designates a location in a semiotic network of relations. An attempt to designate such locations (which may include subject- and object-positions of all kinds including human and non-humans) in a neutral and symmetrical manner. See Law (2002). To de£ne an entity, one will not look for an essence, or for a correspondence with a state of affairs, but the list of all the syntagms or associations into which one element enters. See Latour (Pandora’s Hope, p. 161).

[2] Inscriptions: a general term that refers to all the types of transformations through which an entity becomes materialized into a sign, an archive, a document, a piece of paper, a trace. See Latour (1999: 306).

two approximate con£gurations are accepted as occurrences of the same shape in the ¤ux of networks of similarities in incessant movement. If those interests change it may or may not be possible to keep the networks of similarities approximately stable[3]. Unity might be sought beyond the mathematical – for instance in religious faith. But I do not intend to explore the reasons for 'mathematisation of the world' as opposed to the 'evangelisation of the world'. My question is more limited: it is to ask how the 'mathematisation of the world' might work to make the global uni£ed.

3. Mathematics and unity in the modern world

The history the mathematisation of the world grows out of the loss of authority of religion in the so-called West. The divine body of the king is translated as a £gure of unity into the modern nation state where the political body is united in a social contract as intangible as a mathematical shape.It also grows out of the impossibility of Platonism in a world of incessant movement where any stability or shape is sensed as provisional[4]. But in mathematics the complexity of unity and its many possible shapes is constructed, explored and decomposed within professional communities. For instance in mathematics the number 1 and the notion of an integer number, a collection of 1s, individuals with de£ned stable boundaries, is its own £eld. Again, the boundaries between the £elds of integer numbers and those of rational, real, and complex numbers, are negotiated in detail. The professional division of labour means that an immense collection of theorems[5] has been established and stabilized as facts that

[3]Important researchers have shown and insisted that such limits appear in the negotiations with non humans. Although non humans have no voice, they do not accept arbitrary limits. I am not trying to render these streams of Science and Technology Studies fully or generally compatible with Husserl's thinking, but teasing out similarities in their networks. We may say that, with his strict focus around geometric shapes, (Husserl 1970:25) contemplates these limits of negotiation with non human materials from another angle, claiming that "it is clear that there is a limit for what can be done by means of the normal technical capacity to perfect, that is, to make the [approximate] straight more straight and the [approximate] plane more plane." In a similar way, focusing on techniques of economic accounting, Callon (1998) suggests that there is a limit for the internalization of externalities, or for the framing of over¤ows, by means of, or preserving, existing networks of similarities.

[4]"The ontology of postclassical theory has a distinctly Heraclitean ¤avor ... dominated by images and models of ¤ux – not simple mutability but complex and usually in(de)terminable dynamics, often involving signi£cantly reciprocal interactions." Smith and Plotnitsky (1995:379).

[5]A theorem is an axiomatic (self-evident) de£nition of mathematical shapes followed by the statement of a relation between them that has been or is to be proved true. It has been estimated that nowadays 250,000 theorems are published per year. Hoffman (1998:204).

mathematicians usually treat as discoveries[6]. For example[7]:

THEOREM AND LEGEND 1

THEOREM: In the £eld of integer numbers, prime numbers are de£ned as those numbers that are divisible only by themselves and the number 1. The supply of prime numbers is inexhaustible (a mathematical fact well established since Euclid; as of January 27, 1998 the largest known prime number was a 909,526-digit number, $2^{3,021,377}$-1) ... There is always a prime number between 2 and 2n ...

LEGEND: We happen to have ten £ngers, and our number system is conveniently based on ten digits. But the same primes, with all the same properties, exist in any number system. If we had twenty-six £ngers and constructed our number system accordingly, there would still be primes. (Hoffman 1998:33-37)

THEOREM AND LEGEND 2

THEOREM: If you add the reciprocals of the £rst n integer numbers, you never get an integer. In other words, 1/1+1/2+1/3+1/4+...+1/n never sums to an integer. Actually, if you add the reciprocals of any uniformly spaced integers you won't get an integer.

LEGEND: Copying older mathematical documents, scribe Ahmes in ancient Egypt "promised insights into all that exists, knowledge of all obscure secrets." ... Reciprocals were prized by the ancient Egyptians, who refused to deal with any fractions that weren't unit fractions (with the sole exception of 2/3, which had its own special hieroglyph) ... Once asked about why the Egyptians did this, André Weil, the legendary mathematician who is also a superb historian, simply said that "they took the wrong turn". (Hoffman 1998:153-4)

[6] About "the old debate about whether you create mathematics or just discover it; in other words, are the truths already there, even if we don't yet know them?", the famous mathematician Paul Erdös always invoked "this trans£nite Book – trans£nite being a concept in mathematics that is larger than in£nite – that contains the best proofs of all mathematical theorems, proofs that are elegant and perfect." ... "The strongest compliment Erdös gave to a colleague's work was to say 'It's straight from the Book'" (Hoffman 1998:6).

[7] The following classical theorems about integer numbers and the material I that I have presented as their legends come from Paul Hoffman's marvelous biography of Paul Erdös: Hoffman (1988).

THEOREM AND LEGEND 3

THEOREM: The length of the diagonal of a unit square (the square root of 2) can be expressed neither as a integer number nor as a simple fraction.

LEGEND: In the sixth century B.C. Pythagoras made a kind of religion out of integer numbers, believing that they were not mere instruments of enumeration but friendly, perfect, lucky, or evil. ... when Pythagoras had his world view challenged by the above theorem, he became distraught and swore his disciples to secrecy. When one of his followers subsequently betrayed him, Pythagoras had him executed – what is called the “Pythagorean scandal” among mathematicians. (Hoffman 1998:45)

In this kind of work mathematics seems to provide a direct channel to something that is “hidden but stable, coherent, and incorruptible”. When she studied high energy physics Traweek (1988:2) asked how a £eld of apparently such restricted interest could secure billions of dollars. One of the answers, she suggests, is that the £eld enlists “the emotional force of cosmology”. It “bring[s to the modern world] news of another world: hidden but stable, coherent, and incorruptible”. Just, indeed, as did the Pythagorean inspiration of Galileo’s investigation. The argument is that modern science confers autonomy to mathematical shapes, and treats numbers in science as a trace of transcendence[8]. And that this autonomy is carefully nurtured in texts where theorems are presented with legends[9] that perform the *salto mortale*[10] towards transcendence.

The legends above £ll the epistemological gap between theorems and their meanings: between selected shapes and ¤ux. If links are made between an extraterrestrial’s £ngers and prime numbers then mathematics and transcendence are being joined. Polanyi (1958:2) notes that Pythagoras and his followers listened to the sound of an octave but heard the sound of the numerical ratio $1/2$. Kepler considered numbers to be the substance and the ultimate shape of things and processes (he noted the tone of each planet). Descartes sought in his universal mathematics to apprehend clear and distinct ideas which would therefore be necessarily true. And as the box below suggests, jumps between the transcendent and the empirical are also to be found in the nineteenth and the twentieth centuries in the so-called “paradox of mathematics”.

[8]“I have wished to understand the hearts of men. I have wished to know why the stars shine. And I have tried to apprehend the Pythagorean power by which numbers holds sway above the ¤ux”. Bertrand Russel.

[9]In a much similar way that graphics and inscriptions are presented in scienti£c papers and textbooks, as so nicely described by Latour (1987).

[10]Latour (1999:74) describes a *salto mortale* – this movement executed by an idea “in ‘meaning’ an object separated by an ‘epistemological chasm’ from itself” – by referring to William James.

PARADOX of MATHEMATICS

For no particular reason the Greeks decide to study a curve called an ellipse. 2,000 years later astronomers discover that it describes the way the planets move around the sun. Again, for no particular reason, in 1854 a German mathematician, Bernhard Riemann, wonders what would happen if he discards one of the hallowed postulates of Euclid's plane geometry. He builds a seemingly ridiculous assumption that it's not possible to draw two lines parallel to each other. His non-Euclidean plane replaces that of Euclid with a bizarre abstraction called curved space, and then, 60 years later, Einstein announces that this is the shape of the universe.

This paradox is the the belief expressed by Tierney (1984) that "no matter how determinedly [mathematicians] ignore the world, they consistently produce the best tools for understanding it". This capacity to bring news from a hidden, stable, coherent, and incorruptible world, brings the divine right back into provinces inhabited by the gatekeepers of the uniqueness of modern materiality[11]. And some at least assume that this kind of service to Unity in the temple of human rational knowledge is precious because it enlists emotional forces in favour of convergence and similarity.

4. Mathematics as an ontological tool

Given the 'paradox of mathematics', to what extent can it be said that mathematicians "determinedly ignore the [life-]world"?

There has always been movement of goods, people and symbols between different locations. Indeed it was Mercator's projection that £rst performed the globe as a unity divided into regions. This, or so it seems, is a mathematical conception of space. But is it an example of the 'paradox of mathematics'? Do the maths come before the map? The answer is no! Mercator's map was invented *before* the creation of the mathematics imputed to it[12]. Mercator did not ignore the world. Instead he was interested in

[11]The gates or frontiers that separate a hidden, stable, coherent, and incorruptible world, Nature, from Society.

[12]Mercator invented the now called Mecator projection in 1569 – *before* the necessary mathematics was invented. The equations for this projection involve a logarithm. Napier didn't invent logarithms until 1614. Deriving the equations requires calculus and differential geometry. Newton and Leibniz (who invented calculus) were not born until 50 years after Mercator died. Gauss (who invented differential geometry) was born in 1777. (norris.weimer@ualberta.ca)

producing a map which could be used by sailors. This is what science and technology studies leads us to expect: intellectual production bears the imprint of its location. So differential and integral calculus is to artillery as contemporary mathematics of interactive systems is to missiles that correct their trajectories. Boolean algebra is not like an isolated sleeping beauty waiting for an enchanted prince in the form of the electronic computer. It is the other way round. Mathematics – and science in general – is shaped by and bears the imprint of asymmetrical relations of power.

Husserl (1970:xxxvii) insisted that mathematics and scienti£c thinking have historicity, that they involve tradition in their inherited ways of perceiving the world and their taken-for-granted hypotheses. He also argued that long-term intersubjectively negotiated idealisations within communities of mathematicians create a repertoire of mathematical shapes that can be habitually used and be applied to new phenomena. Husserl (1970:26) argues that there is no need for their meanings to be explicitly formulated or renewed. Based instead in sensible (material) incorporations (embodiments) such as speech, writing, drawings, papers and textbooks, mathematical shapes are simply apprehended and operationalised in practice.

But mathematics is also important in the *labour of division* that creates entities and perceptual categories. Thus mathematics goes with calm, reason or 'coldness'. For instance, Hirschman (1977:65) shows that at the time of early capitalism mathematisation was used to distinguish between economic passions:

> "The criterion by which Hutcheson here divides the 'calm desire of wealth' (note that 'calm' is the English equivalent of *doux*) from avarice is not intensity of desire, but willingness to pay high costs to achieve even higher bene£ts. A calm desire is thus de£ned as one that acts with *calculation and rationality*, and is therefore exactly equivalent to what in the seventeenth century was understood by interest" (my emphasis).

The idea that the calm desire for wealth links expenditure and gain while avarice refuses the connection makes the link between capitalist accumulation and mathematised shapes for passions, emotions, and behaviours explicit. "Benevolent passions and calm motions of the will" are more easily mathematisable or framed than "sel£sh passions and violent motions of the will". Hume solved a "problem with the new terminology" by equating calm passion with interests, and by stressing the distinction "between a calm and weak passion; between a violent and a strong one"[13]. Adam Smith similarly de£ned the desire to better one's condition as "a desire which, *though generally calm and dispassionate*, comes with us from the womb, and never leaves us until we go into the grave". In the 20^{th} century Schumpeter contended that

[13]"... while a victory of the interests over the passions could be readily visualized, language makes it rather more dif£cult to see how the calm passions could come out on top in a contest with the violent ones" Hirschman (1977:65)

> "capitalism itself could not possibly lead to contest and war, for its *spirit was rational, calculating,* and therefore averse to risk-taking on the scale implicit in war making and other heroic antics"[14]

Mathematization has often enacted ontologies with far-reaching social, political, and economic effects. Malthus' calculations of food production and demographic expansion are a case in point. Frederic Taylor's scienti£c administration of labour is a second. And its introduction in 20^{th} century economics was used to impose solutions to controversies, often with direct effects on developing nations. For example in 1952 the Nobel prize in Economics was granted to Paul Samuelson who had treated the community of expert economists to an elegant mathematisation that strongly invigorated the so called 'law of comparative advantages' between nations as opposed to other approaches derived from 'more realistic though [mathematically] less rigorous' theories proposed by Raul Prebisch[15]. The list is almost inexhaustible.

5. Mathematics and order(ing)

But contemporary mathematics also suggests that as scale increases one cannot escape structure, and that the appearance of disorder is really a matter of scale. Why?

[14]Apud Hirschman (1977:135). My emphasis. Hirschman points out how these statements concerning the aversion of mature capitalism to war making do not resist the trials of strength in historical con£gurations of capitalism, but here I am not interested in seeing them as £xed shapes on a fact-£ction gradient, but rather to point out their ontological performance in the struggles of construction of entity's identities during a determined period.

[15]McCloskey (1990:153) contends that "[i]t is not surprising that an economics taking itself to be value-free social engineering should do a poor job in advising poor countries. Economics around 1950 gave up social philosophy and social history to become a blackboard subject. The poor countries provided convenient laboratories to try out what was discovered on the blackboard".

THEOREM AND LEGEND 4

If you write the numbers from 1 to 17 in any order it will always be possible to pick 5 numbers that form either an increasing sequence or a decreasing sequence going from right to left or from left to right along the row. You don't have to pick the numbers consecutively, you can jump. But this is not necessarily the case if you write only 16 numbers. Consider the following row of 16 numbers:

13 14 15 16 9 10 11 12 5 6 7 8 1 2 3 4

One cannot pick a sequence of 5 numbers in increasing or decreasing order going from right to left or from left to right. But this changes if we add the number 17 anywhere. For example, consider

13 14 <u>17</u> 15 16 9 10 11 12 5 6 7 8 1 2 3 4

Indeed many sequences can be chosen. Similarly, if we write down 101 numbers in any order[16],it will always be possible to £nd a sequence of 11 increasing or decreasing numbers. This result can be generalised.
THEOREM: In a row of $n^2 + 1$ numbers you will always £nd a rising or falling sequence of length n +1; in a row of n^2 numbers you this is not the case.

LEGEND: ONE CAN ALWAYS TEASE OUT A GRAND NARRATIVE FROM A SUFFICIENTLY ENLARGED FRAME.

Ramsey theory suggests that one may £nd a given mathematical shape if the universe is large enough. Or, to put it differently, that large enough universes always contain (partial) ordering processes[17]. The implication is that it is always possible to tease a *grand narrative* out of a universe that is suf£ciently large[18]. On the other hand, Ramsey theory also suggests any mathematical shape can be found if the universe is large enough:

> "In the TV series Cosmos, Carl Sagan appealed to Ramsey theory without knowing that was what he was doing: People often look up and see, say, eight stars that are almost in a straight line. Since the stars are lined up,

[17]Mathematical shapes may be thought of as [provisional] "immutable and combinable mobiles" at the end of long networks. See (Latour (1987:227). And universes are constructed, invented, discovering, and conventional (Latour (1999:66-67). For instance, the presence of elements that suit the integration of shape and matter so well described in "Circulating Reference – Sampling the Soil in the Amazon Forest", Chapter 2 of Latour (1999).

[18]"In a large enough set of points, convex polygons cannot be avoided", a theorem established in the 1930s, is the solution of Paul Erdös's Happy End Problem. Hoffman (1998:76).

> people are tempted to think they were artificially put there, as beacons for an interstellar trade route, perhaps. Well, Sagan said, if you look at a large enough group of stars, you can see almost anything you want. That's Ramsey theory in action."[19]

Mathematicians working on Ramsey's theory seek the smallest universe that will contain a given (defined) mathematical shape.

THEORY AND LEGEND

RAMSEY THEORY IN ACTION: if you consider a large enough (mathematical) universe, you will always be able to find any mathematical shape.

LEGEND: A respectful (that is, logically consistent) story is all one needs to go to trial with in a sufficiently enlarged courtroom[20].

This suggests, for instance, that the expansion of the universe with genetic engineering means that it is possible to discover new shapes such as cyborgs or mixtures, shapes that could not be found in smaller universes. It also suggests that a sufficiently large contractual universe will guarantee the presence of a certain configuration of relationships among agents[21]. In short, Ramsey theory suggests something that recent sociology and anthropology of knowledge has also established: that *the kinds of orders that can be found or constructed depend on, and change, with scope and scale*.

6. Mathematics, locality, and fluid presence/absence

A further branch of mathematics – ancient in origin – argues that certain mathematical shapes cannot be exactly quantified. Such 'irrational numbers' (for instance the square root of 2) can be approximated, but no computational procedure can ever complete their expression in digits. Any computation is an imperfect approximation to their "irrational" value. But is there any systematic way of distinguishing between those calculations which lead to a determinate solution, and those that go on for ever? The 20^{th} century response to this question is 'no'. The implication is that it is not possible to construct a systematic method to separate computer programs that give an output from those that loop around and go on indefinitely[22]. The 'halting problem', as it is known in mathematical literature, is insoluble. This means that a whole series of apparently simple questions about computer programs cannot be recursively solved – that is, they cannot be systematically analysed and solved for all programs. This can be presented formally as follows:

[19] Story told by Ronald Graham to Hoffman (1988:51).

[20] See Bowker (1994:124).

[21] Reference to Callon (1998).

[22] A computer programme can be treated as a computational procedure.

THEOREM AND LEGEND 5

Lets us take the list of all computer programs in alphabetical order, call P_x the x^{th} program on this list[23] and let $P_x(y)$ be the computation executed by P_x with input y. "We consider the following problems:

a) The problem of deciding, for any x, whether or not P_x computes a constant function.

b) The problem of deciding, for any x and y, whether y is the range of P_x.

c) The problem of deciding, for any x, y, and z, whether P_x (y) = z.

d) The problem of deciding, for any x and y, whether $P_x = P_y$.

e) The problem of deciding, for any x, whether P_x has in£nite range.

f) ...

g) For each £xed x^0, the problem of deciding, for any given y, whether y is in the range of P_{x^0}.

THEOREM: Problems a), b), c), d), and e) are recursively unsolvable. Problem g) may or may not be recursively unsolvable, depending on the choice of x^0."[24]

LEGEND: Calculable mathematical shapes only can be found in speci£cally determined, localized and sparse spaces. Unsolvability (non calculability) con£gures much more ubiquitous and denser regions of mathematical shapes of elusive presence / absence. ... Calm predictable calculable motions of the will happen only inside rare carefully endured thin networks while violent unpredictable incalculable motions of the will £ll most part of a dense space-time of possibilities. ... NO UNIVERSAL DECISION PROCEDURE CAN EXIST. EVERY QUESTION MUST BE TREATED AS A SINGULAR EMPIRICAL ONE.

Mathematics is often identi£ed with certainty, with what is determined, exact, and unequivocally decidable[25]. But this theorem establishes the conditions of possibility of

[25]In the words of mathematician Ronald Graham: "I was delighted with this world of mathematics. I was good at it, and mathematics, although not a complete refuge for me, was a world unto itself, a world that was clear, logical, and self-contained, a world that offered *certainty*.". Apud Hoffman, ibid, p. 149. Donald MacKensie made a beautiful study that shows how this certainty was absent from and could not be evoked to solve controversies in implementing computer ¤oating-point arithmetic, which were settled by convention in the last decades of the 20^{th} century (MacKensie, Donald. 1996. Knowing

a radical indeterminacy for agency. It shows that computable shapes are all localised in a mathematically restricted space within the universe of the enumerable[26]. This means that in the universe of mathematical shapes the world of decidable shapes[27] is rare£ed – that there are many fewer decidable than undecidable shapes. In the 1930s Gödel showed that it is impossible to prove the consistency of any given large mathematical system. Contradictions may appear at unexpected times and places. He also showed that the completeness of a set of axioms can only survive in rather restricted spaces; that any formal system of axioms and rules, if it is large enough to contain arithmetic, must contain some statements that are neither provable nor disprovable within the system.

So what are the implications of this? If, as I have argued, mathematics is important in the *work of division* (*£xing of frames*) – that is, that it is used as a tool in ordering the social – then in its 20^{th} century versions it presents us with a challenge. The need, or at least the possibility, to recognise that particular divisions are uncertain – indeed refusable. It becomes a tool for thinking what Hetherington (1999:10-11) called the "possibilities offered by the complexity and refusal of division contained within the paradoxical spaces of the marked bodies ... marked by female gender, colour, poverty and subaltern status." It becomes a tool for refusing particular decidable versions of the global. The present absence of undecidable shapes may be elusive and deferred[28].

7. Conclusion: Mathematics as a framing tool

I have suggested that the local and the global, like any other entities, are always enacted in speci£c locations. This means that the local and the global are separated out, as it were, locally, instance by instance. I have also argued that that general forms such as the global rest in the provisional enactment of particular similarities. I have argued that mathematics has become a major, perhaps the dominant, ontological tool in the *labour of division*. It has become a major tool in the enactment of the practical similarities which allow the creation of general entities – including those of the local and the global. I have also noted that mathematics, like other forms of knowledge, is

---

Machines – Essays on Technical Change. The MIT Press).

[26]This universe is extremely rare£ed, since its elements correspond bi-univocally to the integer numbers. The "real" numbers, for example, are not enumerable and have greater density than the "integer" numbers. Between 1 and 2, for example, there exists an in£nity of "real" numbers, but most "real" numbers are not computable since only an enumerable in£nity of them are (like the "rational numbers").

[27]Statements that can be systematically decided to be true or false in £nite time or number of steps.

[28]After Gödel "2+2=5" became a possibility in an unknown logical system. An odd possibility indeed. But Riemann space was odd too. Perhaps Gödel's work suggests mathematical shapes that provide "an escape from ... the network ... [from] £xing the uncertainties [about heterogeneity and homogeneity in a ¤uid world] within a mixture of Euclidean and Cartesian ways of thinking about social space". Hetherington (1999:9).

complicit in, draws from, and contributes to

> asymmetrical relations of power. And I have observed that mathematics is powerful in part because of its plasticity.

So what is the purpose of this exercise? What are the lessons we should draw from it? No doubt there are various possibilities. However the one that I want to end with is this: if mathematics is plastic, then it is also more ¤exible – it offers us a wider range of tools – than is sometimes understood to be the case. So if it is an ontological resource, it is also one that is comes in many forms and may be used in many ways. This is why I have touched on Ramsay theory and calculability. This is mathematics as it shifts and moves. As it does different jobs. I want us to be more conscious of the nature of those jobs.

The arguments from Ramsey theory outlined above suggest that ordering is always possible if the universe is made large enough. They also tell us that any given order can be discovered if the universe is large enough. At the same time the arguments about calculability related to Gödel's theorem reveal the essential indeterminacy of much calculation. They also reveal the inability to determine calculability in general. Both of these are resources that tend to press up against the conditions of possibility set by global/local distinctions as often enacted. In short, they are potentially subversive. Both, in one way or another, insist on the indeterminacy of particular versions of order, scale, and the division of labour. Ramsey theory implies that *other orders can be made*. And that if the universe gets larger particular orders (more desirable orders?) might be enacted into being. For instance cyborgs. For instance non-transitive scale relations. Gödel's theorem and associated work suggests that orders are porous. That in general they cannot be rendered watertight. That in general any order, any version of the large and the small, the global and the local, is undecidable, incomplete.

The links between mathematical ontologies and contemporary social theories about undecidability are obvious. But if mathematics is as important in the making of the real as I believe it to be, then it is a matter of urgency to make those links explicit. While it is neither possible nor desirable to escape asymmetries and differences into a thermodynamic and semiotic grave, I do believe that actors and techniques will be better equipped to handle the global if we make mathematical metaphors more explicit. As Deirdre McCloskey (1990:155) has put it, "an explicit metaphor doesn't bite".

Acknowledgement

I am in debt to John Law who has completely revised the manuscript and re-written it *à la Law* in a gesture of extreme generosity and sympathy. Of course I am the sole responsible for whatever inappropriateness or error may be found in this exercise.

Bibliography

Bowker, Geoffrey C. 1994. *Science on the Run – Information management and Industrial Geophysics at Schlumberger.* Cambridge: The MIT Press.

Callon, Michel. 1995. "Technological Conception and Adoption Network: Lessons for the CTA Practitioner" in Rip, A. et alii. 1995. *Managing Technology in Society – The Approach of Constructive Technology Assessment*. London: Pinter. p. 307- 330.

Callon, Michel. 1998. *The Laws of the Markets*. Oxford: Blackwell / The Sociological Review.

Hetherington, Kevin. 1999. "Whither the World? The Presence and Absence of the Globe" in *Conference: A construção do tempo e os futuros possíveis*. Rio de Janeiro: Unesco, Universidade Cândido Mendes. Mimeo.

Hirschman, Albert O. 1977. *The Passions and the Interests – Political Arguments for Capitalism before Its Triumph*. Princeton University Press.

Hoffman, Paul. 1998. *The Man Who Loved Only Numbers*. New York: Hyperon.

Husserl, Edmund. 1970 (1954). *The crisis of European Sciences and transcendental phenomenology.* Northwestern University Press.

Latour, Bruno. 1987. *Science in Action*. Harvard University Press.

Latour, Bruno. 1999. *Pandora's Hope – Essays on the Reality of Science Studies.* Harvard University Press.

Law, John. 2002. *Aircraft Stories – Decentering the Object in Technoscience*. Duke University Press.

McCloskey, Deirdre N. 1990. *If You're So Smart – The Narrative of Economic Expertise*. University of Chicago Press. p. 153.

Polanyi, Michael. 1958. *Personal Knowledge – Towards a Post-Critical Philosophy*. The University of Chicago Press.

Rogers Jr., Hartley. 1967. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. The MIT Press.

Smith, Barbara Herrnstein and Plotnitsky, Arkady. 1995. "Mathematics, Science, and Postclassical Theory" in *The South Atlantic Quarterly*, 94:2, Spring 1995, Duke University Press.

Tierney, John. 1984. "Paul Erdös is in Town. His Brain is Open." in *Science* 84, vol.5, no. 8.

Traweek, Sharon. 1988. *Beamtimes and Lifetimes – The World of High Energy Physicists*. Harvard University Press.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 67:72
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 8

MARY BOOLE: DUAS ANALOGIAS SOBRE A NATUREZA DA MATEMÁTICA

John A. Fossa
Programa de Pós-Graduação em Educação
UFRN
fosfun@digi.com.br

Resumo *Mary Everest Boole rejeitou a caracterização da matemática como sendo a ciência de números e formas. Na analogia da chaleira e na analogia da escada, ela caracterizou a matemática como sendo tanto uma preparação para episódios de intuição, quanto o £ador da validade desses episódios. Percebe-se a in¤uência de Immanuel Kant e, em especial, embora indiretamente, de Platão no seu pensamento.*

Palavras-chave *Educação Matemática: História da Matemática; História da Educação Matemática; Mary Everest Boole; George Boole.*

Abstract *Mary Everest Boole rejected the conception of mathematics as the science of number and form. In two analogies, the teapot and the ladder, she characterized mathematics as being both a preparation for episodes of inspiration and the guarantor of the validity of these episodes. The in¤uence of Immanuel Kant and, especially, although indirectly, Plato is evident in her thought.*

Key words *Mathematics Education; History of Mathematics; History of Mathematics Education; Mary Everest Boole; George Boole.*

1. Introdução

A matemática é freqüentemente de£nida como a ciência do número e da forma, pelo menos como uma primeira aproximação. A de£nição proposta faz uma classi£cação primária – a matemática é uma ciência – e, então, uma especi£cação secundária – entre as ciências, a matemática é a que trata de número e forma. No entanto, a de£nição das várias ciências em termos do objeto do seu estudo não tem se mostrado muito e£caz no caso das ciências naturais e, portanto, há *prima facie* razões para duvidar da sua e£cácia no caso da matemática. Além do mais, devemos observar que a matemática é tão radicalmente diferente das ciências naturais, no que se refere à maneira em que valida proposições, que é até questionável se a matemática pode ser classi£cada, em primeiro lugar, como uma ciência.

Um dos mais importantes pensadores que rejeitaram a referida concepção da matemática foi George Boole (1815-1864). De fato, o sistema algébrico de lógica desenvolvido por Boole mostrou claramente que a álgebra, como uma estrutura matemática, é muito mais que uma mera codi£cação das propriedades dos números.[1] Mary Boole, sua esposa, articulou e aprofundou essa nova concepção da matemática nos seus escritos. Uma das características mais interessantes dos escritos de Mary Boole é o uso intensivo do que ela chama de “parábolas”, isto é, de analogias. No presente trabalho, apresentaremos duas “parábolas” de Mary Boole sobre a natureza da matemática.

2. Um Pouco sobre Mary Boole

Mary Boole nasceu Mary Everest, em 1932 na sul da Inglaterra. Seu pai, Thomas Roupell Everest, era o pastor do lugarejo (Wickwar), onde ela nasceu, e seguidor do médico homeopa Samuel Hahnemann. Um dos seus tios era George Everest, o o£cial inglês cujo nome perdura em Monte Everest. As estórias do tio sobre a Índia, bem como os interesses do próprio pai, levaram Mary Boole a se interessar profundamente por questões religiosas, especialmente pela “sabedoria oculta” dos hindus e, posteriormente, pela teoso£a. Também desenvolveu um interesse profundo na matemática e desde jovem mostrou muita aptidão para estudos matemáticos.[2]

Em 1855, Mary Everest casou se com George Boole e se mudou para Cork, na Irlanda, onde George Boole tinha a posição de Professor de Matemática na recém fundada Queen’s College (agora University College, Cork). Tiveram um vida conjunta muito feliz até que George Boole faleceu, em 1864, devido, parcialmente, às ministrações homeopáticas da sua esposa.[3] Mary Boole eventualmente mudou-se para Londres com as suas cinco £lhas, onde escreveu muitas obras sobre a Educação Matemática e teve grande in¤uência no Movimento Progressista de Educação Matemática no início

[1] Veja Sousa e Fossa, neste volume.

[2] Para mais informação sobre a intolerância religiosa e a descriminação contra mulheres na matemática sofridas por Mary Boole, veja dos Anjos & Fossa (2002).

[3] Para mais detalhes, veja MacHale (1985).

do século XX. Faleceu em 1916.

3. A Analogia da Chaleira

Em *Philosophy and Fun of Algebra*[4] (ver Boole, 1931), um livrinho paradidático sobre a álgebra, Mary Boole a£rmou explicitamente que a álgebra não é uma ciência de números:

Many people think that it is impossible to make Algebra about anything except number. This is a complete mistake. We make an Algebra whenever we arrange facts that we know round a centre which is a statement of what it is that we want to know and do not know; and then proceed to deal logically with all the statements, including the statement of our own ignorance.[5] (Boole, 1931, p. 1233.)

Queremos voltar a nossa atenção aqui para a sua caracterização do conhecimento matemático. Para tanto, Boole relata uma estória sobre duas crianças pequenas. A primeira, quando vê uma chaleira, £ca alegre e quer brincar com a criança re¤etida na sua superfície metálica. A segunda, em contraste, chora sem parar até que a chaleira seja removida. As duas crianças, observou Boole, aprenderam pela experiência: a primeira já havia brincado com chaleiras frias e, assim, aprendeu que chaleiras são ótimos brinquedos; a segunda havia tocado numa chaleira quente e, assim, aprendeu que chaleiras são coisas perigosas. No entanto, as duas não podem ter razão porque as suas conclusões são contraditórias.

Parece que a moral da estória é que o conhecimento matemático não é conhecimento empírico. De fato, é parcialmente isto. Conhecimento empírico é sempre, para Boole, conhecimento inseguro, que dá margem a interpretações diferentes (e até opostas!). Em contraste, o conhecimento matemático é seguro e, portanto, único. No entanto, isto não é a estória completa, pois o objeto do conhecimento, no caso relatado, é uma questão empírica sobre a temperatura da chaleira! A matemática não resolve esta questão. Mesmo assim, a matemática nos diz que a imagem visual da chaleira não é uma condição su£ciente para determinar a temperatura da mesma. Isto, segundo Boole, não é uma questão empírica, embora seja ocasionada por uma situação empírica. É uma questão de uma relação entre o eu cognoscente, as propriedades empíricas do objeto dado na apreensão e a consciência do eu sobre o que é dado pelo modo de apreensão empregado naquela ocasião. Assim, o pensamento matemático, neste caso, não determina a temperatura da chaleira, mas identi£ca os limites do nosso conhecimento

[4] *A Filoso£a e a Alegria da Álgebra*. Veja Boole (em preparação).

[5] "Muitas pessoas pensam que é impossível fazer Álgebra com qualquer coisa exceto números. Isto é um completo engano. Fazemos uma Álgebra sempre que organizamos os fatos que conhecemos em torno de um ponto central, o qual é a a£rmação que queremos conhecer, mas que não conhecemos; e então procedemos a lidar logicamente com todas essas a£rmações, incluindo a da nossa própria ignorância." [Tradução de dos Anjos e Fossa.]

e dita o tipo de investigação que deve ser feita para determinar a resposta.

Como o referido livro tinha sido escrito para crianças, Boole não podia ali eliciar todas as implicações da analogia. Assim, voltaremos a nossa atenção agora para outra analogia em que as implicações são discutidas mais sistematicamente.

4. A Analogia da Escada

Em *Mathematical Psychology of Gratry and Boole* (veja Boole, 1931), Mary Boole analisou o conhecimento matemático. Ela citou um longo trecho de uma obra, *Laws of Thought*, do seu marido, da qual destacamos o seguinte trecho:

On the other hand, the knowledge of the laws of mind does not require as its basis any extensive collection of observations. The general truth is seen in the particular instance, and it is not con£rmed by the repetition of instances ... the perception of such general truths is not derived from an induction from many instances, but is involved in the clear apprehension of a single instance.[6] (Boole, 1931, p. 701.)

Mas, devemos perguntar como é possível que o conhecimento de uma verdade geral seja ocasionado por uma experiência empírica. Uma resposta já havia sido dada por Immanuel Kant:

Wenn aber gleich alle unsere Erkenntnis mit der Erfahrung abhebt, so entspringt sie darum doch nicht eben alle aus der Erfahrung. Denn es könnte wohl sein, dass selbst unsere Erfahrungserkenntnis ein Zusammengesetztes aus dem sei, was wir durch Eindrücke empfangen, und dem, was unser eigenes Erkenntnisvermögen (durch sinnliche Eindrücke bloss veranlasst,) aus sich selbst hergibt ...[7] (Kant, 1970 [originalmente, 1787], p. 50.)

De fato, tanto George Boole, quanto Mary Boole, freqüentemente parecem ter sido in¤uenciados por Kant. Mary Boole, por exemplo, rea£rmou a tese kantiana de que as proposições matemáticas não são analíticas, nem *a posteriori*. Como evidência neste sentido, alegou que fazer 2481749×365 envolve mais do que a lógica e certamente não é o resultado de conhecimento empírico.

Na mesma obra, Mary Boole perguntou o que aconteceria se aos habitantes de Marte fosse dados uma escada. A única informação adicional que receberiam é que se tratava de um objeto usado pelos seres inteligentes da Terra para obter frutas que

[6] "Por outro lado, conhecimento das leis da mente não requer, como sua base, qualquer grande quantia de observações. A verdade universal é vista na instância particular, e [a verdade universal] não é con£rmada pela repetição de instâncias ... a percepção de tais verdades universais não origina de uma indução de várias instâncias, mas da apreensão clara de uma única instância."[Tradução do autor.]

[7] "Mesmo que toda o nosso conhecimento é retirado da experiência, isto não signi£ca que todo o conhecimento origina da experiência. Pois, é bem possível que mesmo o nosso conhecimento empírico seja um composto de que recebemos através de impressões sensoriais e de que a nossa própria faculdade de conhecimento apresenta para si mesma, (impressões empíricas sendo apenas a ocasião [dessa apresentação]]." [Tradução do autor.]

estão fora do seu alcance. Ela então relatou algumas das hipóteses que os marcianos poderiam inventar para explicar o funcionamento da escada, partindo da idéia de que a escada é de alguma forma relacionada à natureza das frutas a serem colhidas. Eventualmente, porém, chegam à conclusão de que a escada não é relacionada às frutas, mas às necessidades da anatomia humana. O mesmo acontece com a matemática:

The science of mathematics is an intellectual ladder. The rather usual assumption that it is a “science of number, size, and form” is as erroneous as would be the assumption that a ladder is an instrument specially adapted to draw cherries from their natural level.[8] (Boole, 1931, p. 695.)

A matemática é, para Mary Boole, um instrumento para a consecução de novas verdades através da apuração de momentos fugidios de inspiração. Isto acontece de duas formas. Primeiro, a mente recebe intuições quando é preparada através do pensamento matemático. Segundo, a matemática faz uma “accurate distinction between the sane inspirations of genius and its aberrations”[9] (Boole, 1931, p. 704).

5. Conclusão

Embora a concepção da matemática de Mary Boole tenha um certo parentesco com as idéias kantianas sobre a natureza desta disciplina, o papel que atribui à intuição é mais parecido com o de *nóesis* no pensamento de Platão. No entanto, para Platão, a dialética, não a matemática, prepara a alma para o momento da inspiração. Isso pode indicar que a in¤uência platônica sobre Mary Boole era indireta. De fato, possuía uma compreensão do teoso£smo e outras doutrinas semelhantes que, por sua vez, eram in¤uenciadas pelo platonismo.[10]

---

[8]“A ciência da matemática é uma escada intelectual. A hipótese usual de que [a matemática] é uma ’ciência de número, tamanho e forma’ é tão errônea quanto a hipótese de que a escada é um instrumento especialmente adequado para puxar cerejas do seu nível natural [nas alturas das arvores].” [Tradução do autor.]

[9]“distinção exata entre as inspirações do gênio e suas aberrações” [Tradução do autor.]

[10]Agradeço a dois revisores anônimos cujas sugestões sobre a correção gramatical do texto contribuíram para o melhoramento do mesmo.

6. Referências

BOOLE, MARY EVEREST. (1931) Collected Works. E. M. Cobham, Editor, 4 volumes. The C. W. Daniel Company, London.

BOOLE, MARY EVEREST. (em preparação). A Filoso£a e a Alegria da Álgebra. Marta Figueredo dos Anjos e John A. Fossa (Trad.).

DOS ANJOS, MARTA FIGUEREDO & FOSSA, JOHN A. . (2002) O Método de Boole. In Luiz M. Carvalho e Luiz C. Guimarães, Organizadores, História e Tecnologia no Ensino de Matemática. Vol. 1. CD-ROM. IME-UERJ, Rio de Janeiro.

SOUSA, GISELLE COSTA DE & FOSSA, JOHN A. . As “Vidas Paralelas” de George Boole. No presente volume.

2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 73:78
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 9

AS "VIDAS PARALELAS" DE GEORGE BOOLE

Giselle Costa de Sousa
Universidade Federal do
Rio Grande do Norte
elagisa@ig.com.br

John A. Fossa
Universidade Federal do
Rio Grande do Norte
fosfun@digi.com.br

Resumo *George Boole havia notado certos paralelos entre o seu trabalho e os de Robert Grosseteste e de Isaac Newton. Estes paralelos são investigados e é sugerida a existência de outro paralelo ainda mais importante entre o trabalho de Boole e o de Eudoxo.*

Palavras-chave *História da Matemática; História da Álgebra; História da Lógica; Matemática do Século XIX; Matemática Inglesa; George Boole.*

Abstract *George Boole noticed certain parallels between his work and that of Robert Grosseteste and Isaac Newton. These parallels are investigated and it is suggested that there is an even more important parallel between the work of Boole and that of Eudoxus.*

Key Words *History of Mathematics; History of Algebra; History of Logic; Mathematics of the 19th Century; British Mathematics; George Boole.*

1. Introdução

George Boole nasceu no dia 02 de novembro de 1815 na cidade inglesa de Lincoln. Foi o primogênito de uma família humildade mas respeitada na comunidade. Começou sua instrução estudando latim com a ajuda de um livreiro amigo de seu pai. Sem auxílio externo, seguiu para o grego, francês, italiano e por £m, o alemão (MacFarlane, 1916, p. 51). Foi introduzido por seu pai aos rudimentos da matemática e experimentou a construção de instrumentos como câmeras, caleidoscópios, telescópios, microscópios e um relógio de sol. Por razões econômicas, Boole teve de encerrar seus estudos escolares aos 17 anos, mas continuou a estudar como autodidata.

Aos 19 anos Boole tomou algumas decisões importantes como envolver-se com questões sociais e abrir sua própria escola (em sua terra natal) onde pôde aplicar com mais liberdade suas idéias e concepções sobre educação (MacHale, 1985, p. 20 e 30). A partir de então, passou também a produzir diversos artigos que contemplam áreas diversas como equações diferenciais, teoria da probabilidade, teoria de invariantes, teoria de operadores, lógica matemática e outros. Destas pesquisas surgiram os seguintes quatro livros: *The Mathematical Analysis of Logic* (1847), *An Investigation of the Laws of Thought* (1854), considerado sua obra prima, *Differential Equations* (1859) e *Finite Differences* (1860). No ano de 1849, foi apontado para a cadeira de matemática no Queen's College em Cork onde permaneceu até sua morte no dia 08 de dezembro de 1864.

Segundo Kneale & Kneale (1980, p. 410), a maior contribuição de Boole à matemática foi a renovação da lógica a partir da sua ruptura com a tradição aristotélica. De fato, Boole foi o primeiro a desenvolver um sistema formal que havia várias interpretações. Desta forma, a álgebra foi vista, pela primeira vez, não como a mera sistematização da aritmética, mas como uma estrutura independente. Houve duas conseqüências. Em primeiro lugar, a álgebra foi libertada da aritmética e estruturas algébricas que não obedeciam as leis da aritmética se tornaram contempláveis. Em segundo lugar, o próprio conceito da matemática deixou de ser a ciência de números e formas para ser uma ciência de relações.[1] George Boole era muito consciente da sua inovação e se comparava com Newton e Grosseteste, dois estudiosos que nasceram na mesma região da Inglaterra que Boole. No que segue, investigaremos a comparação de Boole com Newton e Grosseteste, bem como o matemático grego Eudoxo.

2. Newton, Grosseteste e Boole

Sir Isaac Newton nasceu no dia 04 de janeiro de 1643 em Woolsthorpe, localizada no estado inglês de Lincolnshire. Estudou em Trinity College, Cambridge, onde a instrução era dominada pela £loso£a aristotélica. Mesmo assim, ele quebrou com esta

[1] Veja Fossa (neste volume).

tradição e desenvolveu idéias revolucionárias em relação à matemática, óptica, física e astronomia. Obteve a posição de Lacasian Professor de Cambridge, onde desenvolveu sua teoria de gravitação universal. Tornou-se diretor da Royal Mint em 1696 e, em 1703, foi eleito presidente da Royal Society, permanecendo no posto até sua morte em março de 1727.

Robert Grosseteste nasceu em 1168 na cidade de Suffork. Estudou na universidade de Oxford, assumiu algumas posições eclesiásticas e eventualmente tornou-se bispo de Lincoln, onde £cou até seu falecimento em outubro de 1253. Fez investigações sobre geometria, óptica e astronomia. Assim, Grosseteste fez inovações para o campo da física a partir de estudos matemáticos. No entanto, suas inovações não foram muito apreciadas pelos seus contemporâneos.

George Boole teve muito orgulho da sua cidade natal de Lincoln e dos homens famosos desta cidade. O homem mais celebre da região foi Isaac Newton e, desde jovem, Boole teve muito respeito por este grande cientista. De fato, uma das suas primeiras publicações foi uma palestra que proferiu sobre Newton. A referida palestra é interessante porque não é um mero elogio a Newton e a sua obra, mas uma análise penetrante tanto das suas inovações, quanto das suas falhas. Seja isto como foi, é claro que Boole tinha muito estima para com Newton e apreciava a maneira como Newton havia enfrentado a autoridade da doutrina aristotélica para estabelecer uma teoria inovadora no campo da física. Da mesma forma, Boole apreciava muito o trabalho de Grosseteste por razões semelhantes. Embora não um nativo de Lincolnshire, Grosseteste foi bispo de Lincoln por muitos anos e o orgulho que Boole tinha de sua cidade já o atraía a Grosseteste. Além disto, Grosseteste também enfrentou a autoridade aristotélica nas ciências físicas para defender o método indutivo nas ciências. Em 1853, Boole fez uma palestra sobre Grosseteste, em que descreveu um trabalho esquecido deste cientista. Segundo Boole, Grosseteste havia, no referido trabalho, antecipado o importante *Principle of Least Action.* Como já relacionamos, Boole era muito ciente da maneira como ele próprio precisava enfrentar a autoridade aristotélica no campo de lógica para efetuar as suas inovações. Assim, ele certamente viu e apreciava os paralelos entre os três inovadores: Grosseteste, Newton e Boole!

Desmond MacHale, um dos biógrafos de Boole, sugere que

> it is interesting to speculate on whether Boole was attempting to bring about the same changes in mathematics and logic that Grosseteste brought about in physical science[2] (MacHale, 1985, p. 120).

Como já vimos, Boole certamente avaliou o seu próprio trabalho da forma indicado por MacHale, não somente em relação a Grosseteste, mas também em relação a Newton. No entanto, é quase tão certo que a sugestão de MacHale não foi a motivação das suas inovações – isto é, ele não estava, no desenvolvimento da sua teoria lógica, tentando imitar o feito de Newton e de Grosseteste. Em primeiro lugar, seu primeiro

[2]"é interessante especular sobre a possibilidade de que Boole estava tentando efetuar as mesmas mudanças na matemática que Grosseteste havia efetuado nas ciências físicas." [Tradução dos autores.]

livro sobre a lógica, *The Mathematical Analysis of Logic*, que já continha suas idéias inovadoras sobre esta disciplina, foi publicado em 1847, muito anterior de ter ele descoberto Grosseteste. Além disto, Mary Boole testemunhou[3] que George Boole havia descoberto, num ¤*ash* de intuição, as suas idéias sobre a lógica quando ainda muito jovem. No entanto, sempre ocupado com outras assuntos, não as publicou para muitos anos.

3. Boole e Eudoxo

Apesar dos paralelos que o próprio Boole via com Grosseteste e Newton, queremos voltar a nossa atenção agora para um paralelo entre o trabalho de Boole e o de Eudoxo (408-355 a.C.). Eudoxo, contemporâneo de Platão e membro da Academia, foi um matemático da tradição pitagórica e trabalhou no problema da duplicação do cubo e na proto-integração grega através do método de exaustão. Sua maior contribuição à matemática, porém, foi a sua teoria da proporção, que se encontra no Livro V d'*Os Elementos* de Euclides. A teoria anterior, a dos pitagóricos (encontrada no Livro VII d'*Os Elementos*), era baseada na existência de apenas números inteiros positivos. No entanto, a descoberta da incomensurabilidade pela segunda geração dos pitagóricos não somente revelou uma nova realidade matemática, mas mostrou que os velhos métodos de demonstração eram inadequados, pois não lidava com esta nova realidade.

A teoria de proporção de Eudoxo resolveu exatamente este problema. Através de uma rede£nição dos conceitos de "razão" e "proporção", bem como uma nova de£nição de "quantidades na mesma proporção", a teoria de Eudoxo permitiu aos matemáticos atribuir sentido a esta nova realidade matemática e incluí-la nas suas teorias. Do ponto de visto moderno, a teoria de Eudoxo permitiu a ampliação do conceito de número para incluir não somente os números naturais e racionais (positivos), mas também os irracionais (positivos).[4] De fato, a teoria de Boole fez exatamente a mesma coisa com relação à álgebra. Antes de Boole, a álgebra era vista como uma maneira conveniente de sistematizar as propriedades mais importantes dos números; isto é, a álgebra era nada mais do que a estrutura dos números. O trabalho de Boole, porém, revelou que há outras realidades algébricas além da dos números. Isto é, há outras estruturas matemáticas, diferentes da estrutura dos números. Assim, o trabalho de Boole ampliou o conceito de "álgebra" da mesma forma como o trabalho de Eudoxo havia ampliado o conceito de "número". Por esta razão, o segundo autor deste trabalho, tem se referido a Boole como "o Eudoxo do século XIX".[5]

[3]Em *Home-Side of a Scienti£c Mind*; veja Boole (1931).

[4]Para mais detalhes sobre a teoria de proporção de Eudoxo e sua importância histórica, veja Fossa e Erickson, "The Divided Line and the Golden Mean", (em preparação).

[5]John A. Fossa, "George Boole: O Eudoxo do Século XIX": apresentação na I Semana de Matemática da UERN. Mossoró (RN). 20-24 de outubro de 2003. Não publicada.

4. Conclusão

O biógrafo grego Plutarco (50? - 120?) escreveu uma grande obra em que colocou as vidas de gregos eminentes lado ao lado com as de romanos eminentes, notando os paralelos entre as biogra£as de cada par selecionado. Interessantemente, George Boole também notou vários paralelos entre seu próprio trabalho cientí£co e o de Robert Grosseteste e de Isaac Newton. A observação de Boole parece ser o resultado da análise do seu próprio trabalho e uma avaliação crítica dos de Grosseteste e de Newton. Isto implica que Boole tinha de fazer as suas inovações primeiro e somente depois perceber as relações que o mesmo tem com as inovações dos seus ilustres predecessores. Embora a comparação implicque que Boole foi bastante consciente da importância da sua contribuição à matemática, não parece ser uma atitude de auto-engrandecimento da parte de Boole. Antes, parece uma tentativa de enaltecer a sua querida cidade natal, Lincoln.

Parece-nos, porém, que há paralelos muito mais fortes ente o trabalho cientí£co de Boole e o de Eudoxo – mesmo observando que Eudoxo não teve relação notável alguma com a cidade de Lincoln! A maneira em que Eudoxo expandiu o conceito de "número" é exatamente paralela à maneira em que Boole expandiu o conceito de "álgebra". Ainda mais, os dois momentos históricos citados fazem parte do mesmo processo de generalização nesta subárea da matemática.[6]

[6] Agradeçamos a um revisor anônimo cujas sugestões sobre a correção gramatical do texto contribuíram para o melhoramento do mesmo.

Referências

BOOLE, MARY EVEREST. (1931) Works. E. M. Cobham, Editor, 4 volumes. The C. W. Daniel Company, London.

KNEALE, WILLIAM & MARTHA KNEALE. (1980) O Desenvolvimento da Lógica. (Trad. M. S. Lourenço.) Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

MACFARLANE, ALEXANDER. (1916) Ten British Mathematicians. John Wiley, New York.

MACHALE, DESMOND. (1985) George Boole: His Life and Work. Boole Press, Dublin.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 79:84
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 10

UMA ABORDAGEM DA TEORIA DOS NÚMEROS DO SÉCULO XIX: PETER BARLOW

Marta Figueredo dos Anjos
Universidade Federal do
Rio Grande do Norte
marta£gueredo@yahoo.com.br

John A. Fossa
Universidade Federal do
Rio Grande do Norte
fosfun@digi.com.br

Resumo *O presente trabalho analisa alguns aspectos da* Teoria dos Números *de Peter Barlow, escrito no inicio o século XIX. A comparação do texto de Barlow com textos modernos revela que há uma inatenção nos textos modernos em levar o aluno à apreciação da profundidade de certos resultados e ainda mostra como remediar esta falha.*

Palavras-chave *História da Matemática; Educação Matemática; Matemática do Século XIX; Matemática Inglesa; Teoria dos Números; Peter Barlow.*

Abstract *The present work analyses some aspects of Peter Barlow's 19th century tract,* Theory of Numbers. *A comparison of Barlow's book with modern textbooks reveals that the modern textbooks do not pay enough attention to the relative profundity of the results they present. Barlow's work also shows how this ¤aw can be remedied.*

Key Words *History of Mathematics; Mathematics Education; Mathematics in the 19th Century; British Mathematics; Number Theory; Peter Barlow.*

1. Introdução

A Teoria dos Números desenvolveu-se continuamente no estilo pitagórico de Pitágoras até Diofanto.[1] A partir deste ponto, porém, a continuidade da tradição se torna mais tênue. No século XVII, o matemático francês Pierre de Fermat obteve uma cópia da *Aritmética* de Diofanto e retomou alguns dos problemas pitagóricos, embora com alguns métodos novos. Seu interesse neste ramo da matemática não foi muito compartilhado por seus contemporâneos. De fato, propôs a Blaise Pascal uma colaboração para escrever um tratado sobre o assunto, mas este recusou (ver Weil, 2001, p. 2). Foi somente no século seguinte que o estudo da Teoria dos Números ressurgiria e tomaria praticamente seu formato atual com as investigações de Euler, Lagrange, Legendre, e Gauss. Segundo Howard Eves (1995, p. 488), o *Essai sur la Théorie des Nombres*, publicado por Adrien-Marie Legendre em dois volumes em 1797 e 1798, foi o primeiro tratado sistemático e exclusivo da moderna Teoria dos Números. Pouco depois, em 1801, Gauss publicou as *Disquisitiones Arithmeticae*, um trabalho de importância fundamental para a Teoria dos Números.

Nesta época, na Inglaterra, surgiram apenas artigos esporádicos sobre a Teoria dos Números, quase todos aparecendo em jornais semi-populares. De fato, a Inglaterra estava bastante isolada, tanto politicamente quanto cienti£camente, da Europa não-insular. Assim, foi só em 1811 que Peter Barlow publicou o primeiro tratado sistemático da Teoria dos Números na língua inglesa, intitulado *An Elementary Investigation of the Theory of Numbers*. Nesta obra, Barlow explicitamente tentou apresentar à comunidade inglesa os importantes resultados de Euler, Lagrange, Legendre e Gauss.

2. Um Pouco da Vida e Obra de Peter Barlow

Peter Barlow nasceu em 15 de outubro de 1776 em Norwich, Inglaterra. Escreveu vários artigos matemáticos, entre os quais há muitos sobre tópicos da Teoria dos Números, para almanaques e revistas. Estes artigos chamaram a atenção do editor do almanaque *Ladies' Diary* e, através do interesse deste, Barlow, em 1801, foi nomeado o primeiro professor assistente da Royal Military Academy, Woolwich, onde £caria até o £nal de sua vida pro£ssional.

Como já vimos, Barlow publicou *An Elementary Investigation of the Theory of Numbers* em 1811. Pouco tempo depois, em 1814, publicou *A New Mathematical and Philosophical Dictionary*, bem como *New Mathematical Tables*. Este foi altamente apreciado pela sua utilidade e exatidão, e foi muitas vezes republicado. Em 1817, publicou um livro direcionado aos construtores civis, cuja £nalidade era descrever as

[1] Para mais detalhes sobre a história da Teoria dos Números, veja Fossa (no prelo).

atividades e experiências com madeira realizadas na Academia Militar. Por volta de 1819, começou a trabalhar com magnetismo, investigando a divergência em bússolas navais, devida à presença de grandes quantidades de ferro nas novas embarcações. A sua solução deste problema foi reconhecida pelo recebimento da Medalha de Cowley, o prémio mais prestigioso da Royal Society.

Barlow também se dedicou a pesquisas relacionadas à óptica, tendo por objetivo corrigir a aberração cromática de lentes usadas em telescópios. Inventou um novo tipo de lente que é ainda usado, sendo conhecido hoje como *lentes de Barlow*. Peter Barlow também foi muito ativo nas pesquisas sobre locomoção a vapor e pontes de suspensão e ainda participou várias vezes da comissão de estradas de ferro da Inglaterra. Faleceu em 1^0 de março de 1862, em Woolwich.

3. Considerações sobre a Abordagem de Barlow para a Teoria dos Números

Não é nosso propósito fazer aqui um resumo sistemático do conteúdo do livro de Barlow sobre a Teoria dos Números[2]. Antes, queremos apresentar uma amostra desta obra e compará-la com a pedagogia usual da Teoria dos Números dos nossos cursos universitários de hoje em dia. Para tanto, nos limitaremos a analisar a abordagem que Barlow fez da teoria da divisibilidade e questões a£ns.

A maneira usual de iniciar o estudo da divisibilidade de números inteiros é de£nir "a divide b" como "existe um inteiro k, tal que b=*ka*". Barlow não utilizou esta de£nição, mas de£niu "fatores" como números que produzem um outro número por multiplicação. "Divisor" não foi de£nido, mas é subentendido que um divisor é um fator. Aceitou, como um axioma explicito, que, se $a < b$, b não pode ser um divisor de a. Assim, quando Barlow precisava a£rmar que "a divide b," ele expressava isto por dizer que "*b*/$a = k$, um inteiro", e depois multiplicava por a para obter b=*ak*. Claramente, o procedimento de Barlow é equivalente ao procedimento moderno.

Os primeiros cinco teoremas (e vários corolários) abordam em muito detalhe as operações aritméticas sobre números pares e ímpares. Esses resultados geralmente não são abordados em textos modernos, pelo menos ao mesmo nível de detalhamento, nem como exercícios. A Proposição VI mostra que um divisor de dois números é também divisor de qualquer combinação linear deles. No entanto, Barlow não utilizou essa terminologia, usando, no seu lugar, "múltiplos" desses números. Na demonstração, usou a soma de frações, mas a essência da demonstração é a mesma da abordagem moderna: o fechamento dos inteiros sobre as operações de soma e diferença. Em seguida, Barlow apresentou vários fatos relacionados a números primos entre si. Curiosamente, usou o termo "incomensurabilidade" para referir-se a esse conceito. Há precedentes

[2]Para tanto, veja dos Anjos e Fossa (no prelo).

históricos para esta terminologia. Mesmo assim, no seu *A New Mathematical and Philosophical Dictionary*, Barlow distinguiu entre a incomensurabilidade entre linhas (nenhuma medida em comum) e incomensurabilidade entre números (nenhum divisor maior do que 1 em comum). O elo entre os dois conceitos é a linguagem euclidiana de "medida" para "divisor", que Barlow usou com freqüência. O algoritmo da divisão é tratado como um corolário do caso do mesmo algoritmo tendo o quociente primo com o dividendo. Conseqüentemente, o resultado cabe nitidamente na seqüência de teoremas tratando de números primos entre si, mas não dá a devida ênfase ao algoritmo da divisão como um resultado de fundamental importância.

O Teorema Fundamental da Aritmética não é formulado nem demonstrado com cuidado (tanto para a existência, quanto para a unicidade). Mesmo assim, é usado nas de£nições de MDC (Máximo Divisor Comum) e MMC (Mínimo Múltiplo Comum). Em seguida, alguns fatos sobre a divisibilidade de números quadrados são apresentados usando o Teorema Fundamental. A vantagem desse procedimento é que ele evidencia, para o leitor, a importância e a utilidade do Teorema Fundamental, sem necessidade de tentativas de convencimento de sua parte. Muitos livros modernos tendem a apresentar o Teorema Fundamental seguido de aplicações triviais, ou passando rapidamente para outros assuntos, sem explorar adequadamente esse resultado. Em conseqüência, o aluno freqüentemente não compreende por que o Teorema é chamado de Fundamental!

Esse relato parece su£ciente para tornar plausíveis algumas conclusões. Assim, Barlow tende a apresentar muito mais detalhes sobre aspectos da Teoria dos Números que os escritores modernos. Esses detalhes são muitas vezes resultados substanciais e dão uma organicidade agradável à sua obra. No entanto, pelo menos pelos padrões de hoje, parece que, para Barlow, todos os teoremas têm o mesmo valor. Isto é, ele não parece ter uma apreciação do fato de que certos resultados são mais profundos do que outros e, portanto, merecem um destaque maior. A grande exceção é a supramencionada maneira de realçar o Teorema Fundamental. A linguagem de Barlow, embora um pouco antiquada e inapropriadamente colorida por uma terminologia geométrica, é muito agradável e o leitor geralmente é conduzido com muita habilidade através do texto. Há, porém, momentos em que essa linguagem deixa de ter a precisão desejável numa obra deste tipo. O mesmo acontece com as demonstrações; geralmente são claras e freqüentemente equivalentes às demonstrações modernas. Há, porém, alguns poucos erros, não discutidos neste trabalho, por não ser esse nosso objetivo.

Podemos observar que há alguns pontos no texto em que Barlow deixa entrever suas próprias convicções sobre alguns assuntos. Por exemplo, é curiosa a seguinte passagem da página 43:

> Euler ascertained, that 2^{31}-1=2147483647 is a prime number; and this is the greatest at present known to be such, and, consequentely, the last of the above perfect numbers [$2^{30}(2^{31}$-1)=2305843008139952128, dado no parágrafo anterior do texto de Barlow], which depends upon this, is the greatest perfect number known at present, and probably the greatest

> that ever will be discovered; for, as they are merely curious without being useful, it is not likely that any person will attempt to £nd one beyond it.[3]

O que, então, levou este construtor de pontes e vias rodoviárias a se interessar na Teoria de Números – uma parte da matemática notoriamente isenta de aplicações práticas – a ponto de escrever um tratado de mais de 500 páginas sobre o assunto? No momento, só podemos especular. É muito provável que Barlow pensava que o estudo da Teoria dos Números seria um bom treinamento para a mente e, portanto, teria alguma utilidade prática, embora não em aplicações diretas. Além disto, é perfeitamente provável que a sua intenção fosse a de preparar um lugar de destaque para a Inglaterra neste campo de investigação que até então era restrito à Europa não-insular.

4. Considerações Finais

Uma leitura da obra de Barlow pode ajudar a mostrar uma possível falha – pouca notada na literatura especializada – da atual pedagogia da matemática e ao mesmo tempo nos mostra como isto pode ser trabalhado. Referimos-nos a desatenção sobre a profundidade dos resultados apresentados nos textos. O procedimento de Barlow referente ao Teorema Fundamental da Aritmética parece ser adequado para levar o aluno a uma apreciação maior destes resultados. Isso é, os teoremas fundamentais devem ser explorados para obter outros resultados substanciais em várias subáreas relacionadas à do teorema. Isso pode ser feito tanto dentro do próprio texto, quanto dentro dos exercícios.[4]

[3]"Euler mostrou que 2^{31}-1=2147483647 é um número primo; é o maior atualmente conhecido e, em conseqüência, o último dos números perfeitos acima mencionados, que depende desse, é o maior número perfeito atualmente conhecido, e provavelmente o maior a ser descoberto; pois, como são meras curiosidades sem ser úteis, não é muito provável que alguém tentará achar um maior." [Tradução dos autores.]

[4]Agradeçamos a dois revisores anônimos cujas sugestões sobre a correção gramatical do texto contribuíram para o melhoramento do mesmo.

Referências

BARLOW, PETER. (1811) An Elementary Investigation of the Theory of Numbers with its Application to the Indeterminate and Diophantine Analysis, The Analytical and Geometrical Division of the Circle and Several Other Curious Algebraical and Arithmetical Problems. J. Johnson and Co., London.

BARLOW, PETER. (1814) A New Mathematical and Philosophical Dictionary. G. and S. Robinson, London.

DOS ANJOS, MARTA FIGUEREDO & JOHN A. FOSSA (no prelo) A Teoria dos Números de Peter Barlow. In Sergio Nobre e Marcos Vieira Teixeira, Editores, Anais do V Seminário Nacional de História da Matemática. SBHMat, Rio Claro.

EVES, H. (1995) *Introdução à História da Matemática* (Trad. Hygino H. Domingues). Editora da UNICAMP, Campinas.

FOSSA, JOHN A. (no prelo) História da Teoria dos Números de Pitágoras a Fermat. In Sergio Nobre e Marcos Vieira Teixeira, Editores, Anais do V Seminário Nacional de História da Matemática. SBHMat, Rio Claro.

WEIL, ANDRÉ. (2001) Number Theory: An Approach through History from Hammurapi to Legendre. Birkhäuser, Boston.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 85:94
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 11

PROFESSORES DE MATEMÁTICA E O USO DE TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO[1]

Jaqueline M. Brum
Faculdades Integradas Espírito-Santenses - FAESA
jackie_magalhaes@hotmail.com

Resumo *Esta pesquisa procurou analisar em que aspectos a formação do professor de matemática tem contribuído ou não para a utilização de tecnologias da informação e comunicação na sua prática docente. De modo geral os resultados mostraram que a formação dos professores de matemática pesquisados pouco tem contribuído para a renovação de suas práticas e desenvolvimento de um trabalho mais integrado, condizente com a sociedade informacional na qual estamos inseridos.*

Palavras-chave *Sociedade da Informação; Tecnologias da Informação e Comunicação; Desenvolvimento do Pensar Matemático; Transposição Didática.*

Abstract *This research tried to analyze in what aspects the initial and continuous mathematics teacher education has contributed or not for the use of information and communication technologies in the teaching practice. In general, the results had shown that the initial and continuous teacher education of mathematics teachers researched contributed shortly for the innovation of their teaching practices and the development of a work more integrated and in accordance with the informational society in which we are inserted.*

Key-words *Informational Society; Information and Communication Technologies; Development of Mathematics Thinking; Knowledge Transposition.*

[1]Este texto descreve idéias de um estudo que constituiu a dissertação de Mestrado da autora, intitulada "O pensar matemático e as novas tecnologias da informação e comunicação: desa£os ou oportunidades à prática do professor", apresentada na Universidade Federal do Espírito Santo em julho de 2003 e orientada pelas professoras Dra. Lígia Arantes Sad e Dra. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.

1. Introdução

Diversos sociólogos, entre eles Castells (2000) e Tedesco (2001), dizem que estamos vivendo uma revolução, uma transformação na forma de organização social, econômica e política. “Sociedade da informação”, “sociedade pós-industrial”, “sociedade do conhecimento”, “terceira onda”, são apenas algumas das expressões utilizadas para de£nir essa nova estrutura social. Alvin Tof¤er na década de 70 já chamava a atenção para essa revolução social e mencionava sua preocupação com uma educação mais voltada para a diversidade e para a ¤exibilidade. O fato é que essa nova estrutura é fortemente apoiada nas tecnologias da informação e comunicação (TICs).

Segundo Castells (2000), a sociedade informacional está caracterizada pelo “paradigma tecnológico”. Que possui as seguintes características: informação como matéria-prima – a tecnologia age sobre a informação e não ao contrário, como nas revoluções tecnológicas anteriores; penetrabilidade dos efeitos das novas tecnologias – processos passam a ser moldados e não determinados pelo novo meio; lógica das redes – estrutura o não estruturado; ¤exibilidade de processos e organizações – a rede possui a capacidade de recon£gurar-se a todo o momento e convergência para um sistema altamente integrado – no qual conexões cada vez mais diversi£cadas se integram em uma mesma rede.

Esse mundo em transformação, requer novos parâmetros de£nidores de competências pro£ssionais, que apontam segundo Tedesco (2001), três tipos de serviços: os rotineiros, os pessoais e os serviços simbólicos. Nesta pesquisa nos atemos a esse último serviço.

[...]serviços simbólicos[...] aqueles que se referem aos três grandes tipos de atividade que se realizam nas empresas de alta tecnologia: identi£cação de problemas, solução de problemas e de£nição de estratégias. Nesse grupo incluem-se os projetistas, os engenheiros,[...] os advogados, etc... o exercício de sua atividade implica o desenvolvimento de quatro capacidades básicas: a abstração, o pensamento sistêmico[2], a experimentação e a capacidade de trabalhar em equipe (TEDESCO, 2001, p. 47-48).

As capacidades a que Tedesco se refere, nos parecem fortemente apoiadas na matemática, uma vez que Dreyfus (1991), nos diz que a abstração está ligada aos processos de representação, generalização e síntese. Esses ocorrem em algum nível do pensar matemático, bem como na resolução de problemas não triviais, fortemente apoiada na re¤exão, que é um metaprocesso importante do pensar matemático.

Percebemos então a matemática como uma das ciências básicas da informática e das telecomunicações que juntas produzem todo avanço tecnológico, permitindo novas

[2] Pensamento sistêmico, segundo Tedesco (2001), é o pensamento para além dos enfoques “disciplinares” que dividem a realidade. Requer a compreensão de processos pelos quais as diferentes partes da realidade se interconectam.

formas de comunicação e de obtenção da informação. Desse modo, vemos o desenvolvimento do pensar matemático como "pano de fundo", contribuindo para todas essas transformações. Então £camos nos questionando: **em que aspectos a formação do professor de matemática, tem contribuído ou não para a utilização de TICs na sua prática docente?**

2. Hipótese de Trabalho

A hipótese de trabalho na qual inicialmente nos apoiamos era de que o professor de matemática por ter domínio das estruturas, teria mais facilidade para compreender e consequentemente usar a tecnologia de forma mais e£caz em sua prática docente, construindo e contribuindo dessa forma para o conhecimento necessário a sociedade informacional.

3. Justi£cativa

A informática, como ferramenta de auxílio para o entendimento de questões matemáticas, é um assunto bastante discutido e pesquisado. É sabido da utilização de computadores para demonstração de questões matemáticas difíceis de serem visualizadas e/ou calculadas. Chegar ao pensamento dedutivo a partir do concreto tem sido amplamente discutido e sabemos de sua importância para a construção do conhecimento. Entretanto, acreditamos nos fundamentos não como verdades acabadas, mas como parte de um processo contínuo de construção, desconstrução e reconstrução, em que a matemática, a educação matemática e a história da matemática, possam também contribuir para ajudar professores a trabalharem melhor questões relacionadas a informática. O pensamento abstrato, o raciocínio lógico, a construção de modelos, são apenas alguns exemplos de como a matemática contribui para que a informática seja compreendida e possa ser utilizada de forma mais e£caz. Por esse motivo, trabalhamos na pesquisa no sentido de considerar como o desenvolvimento matemático pode ajudar na compreensão e uso das TICs.

Para iniciar, citamos como justi£cativa os importantes trabalhos de Ponte que, há mais de uma década tenta contemporizar o trabalho de professores de matemática, primeiro com referência ao uso de calculadoras grá£cas e depois em relação a sistemas informacionais.

[...] As novas tecnologias da informação têm vindo assumir uma presença cada vez mais forte nas diversas esferas da actividade humana, incluindo a economia, a administração pública, a ciência, a cultura e o simples lazer. A sua crescente vul-

garização na sociedade levanta problemas de ordem pro£ssional, suscita questões de cidadania e leva-nos a interrogar o próprio signi£cado do saber. A sua a£rmação social coloca sérios desa£os à escola. (PONTE & CANAVARRO, 1997, p. 17)

Outro indício de que as pré-noções em que nos baseamos podiam estar certas eram os estudos desenvolvidos pelo Grupo de Pesquisa em Informática outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), da UNESP – Rio Claro. Desde 1996, sua equipe trabalha com professores de matemática de escolas da região. Primeiramente com calculadoras grá£cas e posteriormente com o uso de laboratórios de informática. Borba e Penteado (2001), dizem que, apesar da prática docente ter sido sempre complexa, de alguma forma, toda essa complexidade, não fugia do controle do professor e ele se sentia seguro em uma prática que lhe conferia uma certa autoridade – "zona de conforto"- mas a instabilidade do sistema informacional faz com que os professores passem a trabalhar numa "zona de risco". O grupo do GPIMEM, além de ser um referencial no assunto, é responsável por um trabalho que ajuda, por meio de novas mídias, professores de matemática a trabalharem melhor seus conteúdos. Acreditamos que muito do pensar matemático é utilizado nesse trabalho desenvolvido por esse grupo de educadores matemáticos, assim como nos trabalhos de Ponte e Canavarro em Portugal, justi£cando, dessa forma, o sentido que a nossa pesquisa queria retratar, que era veri£car se o conhecimento matemático desses professores facilitava a compreensão e utilização das TICs.

Uma outra justi£cativa para a problemática que apresentávamos é a importância da transposição didática – que são as transformações que um saber determinado sofre desde a sua criação até o momento de sua exposição didática. Não estávamos com este olhar vendo a transposição como uma justi£cativa para a pesquisa, mas tentando entender o que poderia vir a ser uma barreira à aquisição dos saberes, no caso especí£co do nosso trabalho, o saber matemático e suas conexões. Acreditamos que vivenciamos uma época em que a evolução das idéias e conceitos passa por uma ruptura em relação ao paradigma anterior focado no ensino tradicional de transmissão do conhecimento, trazendo in¤uências para a transposição e, consequentemente, para o trabalho de professores em relação às novas tecnologias. Em linhas gerais a transposição é um conjunto de rupturas, de movimentos e de transformações que se operam quando um elemento do saber teórico torna-se didatizado. A esse conjunto das fontes de in¤uências que atuam na seleção dos conteúdos Chevallard denomina de "noosfera" – da qual fazem parte: cientistas, professores, especialistas, políticos, editores, autores de livros e tantos outros agentes que interferem no processo educativo in¤uenciando o saber ensinado. (Chevallard, 1991; Pais, 2001).

O referencial teórico que deu suporte à pesquisa foi focalizado em Castells – sociedade informacional, Tedesco – relação ensino-aprendizagem, Lévy – tecnologias da informação e comunicação, Dreyfus – habilidades desenvolvidas pelo pensar matemático e Chevallard – transposição didática.

4. Objetivos

Tínhamos por objetivo geral analisar, a partir da prática do professor de matemática, como o desenvolvimento do pensar matemático contribui efetivamente para o entendimento da linguagem informacional. Os objetivos especí£cos eram: (a) identi£car e analisar se o conhecimento que os professores de matemática produzem, a partir dos fundamentos matemáticos recebidos por meio de sua formação, contribuem para a compreensão e a utilização das TICs; (b) identi£car, caracterizar e analisar que concepções[3] sobre o ensino-aprendizagem da matemática em relação às TICs esses professores possuem e se elas estão de acordo com a sua prática; (c) identi£car, caracterizar e analisar se essas concepções funcionam como elementos bloqueadores ou como facilitadores para a compreensão e utilização das TICs; (d) veri£car se os professores trabalham seus conteúdos de forma integrada ou desconectada em relação às TICs; (e) identi£car, caracterizar e analisar as causas integradoras ou desagregadoras para uma atitude interdisciplinar envolvendo o uso das TICs e (f) propor uma ação futura dependendo dos resultados obtidos.

5. Metodologia

O estudo que realizamos foi uma pesquisa de natureza qualitativa, com quatro professores de matemática do ensino fundamental e médio, que trabalham em diferentes contextos de ensino. Trabalhamos com instituições que tinham laboratório de informática.

Consideramos a nossa pesquisa de um estudo de caso e optamos por utilizar para a coleta de dados os seguintes instrumentos:

- observação – procurando desvelar como esses professores exploravam em suas exposições em sala de aula e em laboratórios de informática o pensamento abstrato, a experimentação, o raciocínio lógico, a criatividade e, se alguma relação era estabelecida entre o ensino, a compreensão e a aplicabilidade da matemática à informática.

- questionário por escrito – no qual o professor teve a oportunidade de nos dizer: qual foi sua formação; o que ele entende por ensino de matemática e por TICs; se acredita que sua formação facilita a interdisciplinaridade da matemática em relação à informática e vice-versa e de que forma ele via a instituição nesse processo.

[3]Concepção de acordo com o Dicionário Aurélio: noção, idéia, conceito, compreensão.

- entrevista semi-estruturada – quando buscamos informações sobre a formação pro£ssional recebida e se a fundamentação teórica desse professor o ajuda a melhor compreender as TICs.

- análise documental do material didático utilizado em sala de aula – livros, manuais, £chas, planos de aula, *software* e outros, uma vez que também in¤uenciavam a prática do professor e o ajudavam a fazer a transposição didática.

6. Síntese das Análises a partir das Macrocategorias

A análise que conseguimos construir a partir das observações, entrevistas, e questionários com esses quatro professores de matemática e outros sujeitos, foi incorporada à pesquisa por meio de duas macrocategorias de análise: a técnica – voltada para o domínio do trabalho e comunicativa – direcionada para as relações humanas, mostrando os pontos comuns que conseguimos identi£car.

Com relação à macrocategoria técnica – desenvolvida em parte devido à aplicabilidade da matemática – e constituída, por sua vez, pelas categorias características do pensar matemático (Dreyfus, 1990, 1991), como: visualização, representação, memorização, generalização, síntese. Habilidades essas que levariam conseqüentemente a abstração e ao pensamento sistêmico, que seriam importantes facilitadores para se trabalhar numa sociedade informacional, e ilustrada conforme a seguir:

[...] A tabela é muito importante em matemática e é muito importante em vários setores da vida da gente... porque vai esquematizar e £ca fácil de enxergar, tá.[...] Depois que £zerem a tabela, vocês vão poder colocar o tipo de letra que quiser, você vai dar a cor à sua tabela para que tenha a sua marca. [...] A primeira coisa será uma coluna contendo as eras. [...] Depois algumas espécies e depois vai £car um espaço que é para vocês colocarem a época em anos e isso aqui vai ser A^n*. [...] O tempo que você vai achar é o tempo em anos. Por exemplo: 2 bilhões de anos e vocês vão escrever com todos os zeros e depois vocês vão colocar em potência de 10, porque simpli£ca esse número (Prof. BETA, maio de 2002).*

Com referência à macrocategoria comunicativa, apoiamo-nos em Chevallard (1991), pois o ensino-aprendizagem da matemática centra-se nas relações professor-aluno e aluno-aluno em meio às transposições entre o saber a ensinar e o saber ensinado. Nesse processo observamos a matemática como facilitadora da compreensão e do uso das TICs. Essa observação é rea£rmada em Pais (2001), no qual encontramos uma nova pedagogia que privilegia o tratamento da informação para se chegar ao conhecimento, na qual a resolução de problemas e a informática são grandes ferramentas de auxílio. Ponte e Canavarro (1997) de£nem algumas características do ambiente informacional, como: uso de outras ferramentas e materiais; novos ambientes; trabalhar em grupo; desenvolvimento da criatividade, da autonomia, do espírito de tolerância e cooperação, habilidades que podem ser promovidas com a utilização das TICs.

Contudo, todos os quatro professores carregam muitas concepções trazidas da sua formação. Podemos dizer que continuam fortemente apoiados numa pedagogia tradicional e que a reproduzem em suas práticas docentes, nas quais os conteúdos matemáticos são ditados aos alunos, como se o ouvir com atenção fosse o su£ciente para ocorrer a aprendizagem, deixando, dessa maneira, de lado a importância da prática, da contextualização, da resolução pelo próprio aluno para compor a construção do seu conhecimento. Os professores ainda vivem no paradigma antigo, no qual o conhecimento acadêmico é considerado um conhecimento cientí£co para poucos privilegiados e alguns iniciados. Na maior parte das vezes, esses quatro professores pareciam sentir-se iluminados, senhores de seus saberes, como se isso bastasse ao ensino aprendizagem. Tanto que, durante as aulas, iam perguntando e respondendo ao mesmo tempo, sem a preocupação em desenvolver com os alunos uma verdadeira comunicação e conseqüentemente, di£cultando a transposição do saber.

[explicando a diferença entre monômio e polinômio] [...] Como seria então o perímetro representado através de um monômio? 4y... + 4y... + x + x [...]. Agora, será que isso aqui vai dar um monômio? Esse mais esse eu posso somar? Posso. Dá 8y [professor responde]. E esses 2 eu posso somar? Posso. Dá 2x. [professor responde]. Bom esses 2 eu posso somar? [referindo-se aos 2 termos encontrados] [...]. Então, nós não podemos ter esse perímetro na forma de monômio, só de polinômio. Em forma de monômio não. [...] (Prof. ALFA, maio de 2002).

[...]$3y^2 - 4z + 2t = 5$. *Essa equação é linear? Não [os alunos respondem junto com o professor] Por que não é linear? Porque y elevado a expoente 2. [professor responde] [...] 2x + 4y + 10z = 8 é linear? Não. [professor responde] Por que não é linear? Veja bem, eu não posso ter produto não é isso... x.y [professor responde]. Então nós sabemos diferenciar quando a equação é linear e quando ela não é linear. [...] (Prof. DELTA, abril de* 2003).

7. Conclusões Finais

O nosso objeto de estudo visava principalmente analisar, a partir da prática do professor de matemática, como o desenvolvimento do pensar matemático contribui efetivamente para o entendimento da linguagem informacional, conforme as características defendidas por Tedesco (2001).

Ole Skovsmose (2001, p. 77) a£rma:

A matemática é o sustentáculo lógico do processamento da informação, e o pensamento matemático é também a base para as atuais aplicações da tecnologia da informação. De fato, todas as aplicações de um computador podem ser vistas como uma aplicação de um modelo matemático simples ou complexo [...]. O efeito dos computadores é a colonização de todas as áreas da vida pelas aplicações de métodos formais.

É isso que caracteriza a sociedade da informação.

Os professores também pareciam acreditar que o desenvolvimento do pensar matemático de alguma forma facilita a compreensão e o uso das TICs, como podemos ver em algumas falas:

[...] Quando você começa a gostar de matemática, principalmente da resolução de problemas, você começa a ver que o seu raciocínio lógico ele £ca mais apurado e isso é muito útil em qualquer disciplina, em qualquer curso e principalmente no curso de informática. (Prof. ALFA, setembro de 2002).

[...] Bom, a matemática é... envolvente, criativa e facilita o descobrimento e o envolvimento com outras ciências. [entrevista - ao responder se sua formação ajudava a compreender e utilizar tecnologias] (Profa. BETA, setembro de 2002).

[...] O raciocínio lógico matemático me ajudou a desenvolver, a conseguir fazer muita coisa sozinha. Se eu não tivesse visão espacial [...]. (Profa. GAMA, dezembro de 2002).

[...] Mas, é claro que ajuda, com certeza ajuda muito. [...] com certeza ela dá uma formação que facilita a comunicação. [entrevista - ao responder se as habilidades desenvolvidas pela sua formação, em matemática, o ajudavam a compreender e a utilizar as TICs] (Prof. DELTA, abril de 2003).

Porém, concluímos na nossa pesquisa que, se de alguma forma as características do pensar matemático ajudam professores de matemática a trabalharem melhor com tecnologias, isso £cou diluído junto a outras habilidades. De modo geral, os quatro professores observados fazem pouco uso da tecnologia em sua prática docente, apesar de que nas entrevistas, três deles, a£rmarem que trabalhavam em projetos interdisciplinares e utilizando tecnologias informacionais. Entretanto, pelo que estudamos a respeito do desenvolvimento do pensar matemático (Dreyfus, 1990, 1991; Skovsmose, 2001), nossa hipótese de trabalho – de que o conhecimento das estruturas contribui para a compreensão e a utilização de tecnologias, não se constitui em uma falácia, uma vez que o desenvolvimento das habilidades desenvolvidas por meio das características do pensar matemático se faz muito presente na formação inicial e continuada desses professores. Pelo exposto, percebemos que permanece entre os professores observados, a crença de que sua formação de fato contribui para que eles utilizem-se de TICs, o que nos leva a crer que está faltando ao professor de matemática desenvolver além do conhecimento do conteúdo matemático, o conhecimento matemático tecnológico e re¤exivo. Pois, a competência tecnológica poderá ajudá-lo a resolver situações-problema práticos, enquanto a competência re¤exiva, lhe permitirá não só usar tecnologia, como usá-la de forma apropriada e renovada. Outra conclusão que chegamos é que para esses quatro professores pouco a informática tem ajudado ao ensino da matemática e a matemática ao uso da informática. Portanto, concluímos que todos eles se encontram, em relação ao uso de tecnologias, longe da proposta de formar uma rede de conhecimento como preconizam os £lósofos desta era.

Sendo assim propomos que a educação pública ou privada, formal inicial ou continuada, invista em projetos que possam melhorar a prática de professores. Seria importante que nas instituições de formação de professores de matemática surgissem grupos interdisciplinares preocupados com a implementação das TICs, na forma de ensino, pesquisa e extensão, nos moldes de Ponte e Canavarro em Portugal e Borba e Penteado no Brasil. Pois, isso tornaria possível uma maior assessoria a projetos do Governo, melhorando sua participação no acompanhamento e promoção do uso de tecnologias pelo professor em sala de aula, minimizando assim o desconforto que alguns professores sentem ao se depararem com um ambiente que exija o uso das TICs.

Referências

BORBA, M. de C. & PENTEADO, M. G. (2001) Informática e educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica.

BRASIL. Secretaria de Educação. (2000) Parâmetros curriculares nacionais: matemática. 2^a. ed. Rio de Janeiro: DP&A.

BRUM, J. (2003) O pensar matemático e as novas tecnologias da informação e comunicação: desa£os ou oportunidades à prática do professor. Dissertação de Mestrado, UFES. Orientação: Dra. Lígia Arantes Sad e Dra. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.

CASTELLS, M. (2000) A sociedade em rede. 4^a. ed. São Paulo: Paz e Terra.

CHEVALLARD, I. (1991) La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. Paris: Editions la Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, I. (2002) On didactic transposition theory: some introductory notes. [199_]. Artigo oferecido pelo curso de Mestrado em Educação, UFES, Vitória.

DREYFUS, T. (1991) Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. Advanced mathematical thinking. London: Kluwer Academic Publishers, 25-41.

DREYFUS, T. (1990) Advanced mathematical thinking. In: Mathematics and Cognition. London: Cambridge University Press, 113-148.

LÉVY, P. (1998) As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática. São Paulo: Editora 34.

PAIS, L. C. (2001) Didática da matemática: uma in¤uência francesa. Belo Horizonte: Autêntica.

PENTEADO, M. G. & BORBA, M. de C. (2000) A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olho d'Água.

PENTEADO, M. G. (1997) O computador na perspectiva do desenvolvimento pro£ssional do professor. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PONTE, J. P. da & CANAVARRO, A. P. (1997) Matemática e novas tecnologias. Lisboa: Universidade Aberta.

PONTE, J. P. da (1994) O estudo de caso na investigação em educação matemática. Lisboa: Revista Quadrante, Lisboa, v. 3 , n. 1, 3-18.

SKOVSMOSE. O. Educação matemática crítica: a questão da democracia. São Paulo: Papirus, 2001.

TEDESCO, J. C. (2001) O novo pacto educativo: educação, competitividade e cidadania na sociedade moderna. São Paulo: Ática.

TOFFLER, A. (2001a) O choque do futuro. 7. ed. Rio de Janeiro: Record.

TOFFLER, A. (2001b) A terceira onda. 25. ed. Rio de Janeiro: Record.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 95:106
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 12

SOBRE O USO DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES

Marcos Azevedo da Silveira
Departamento de Engenharia Elétrica
PUC-Rio
marcos@ele.puc-rio.br

Resumo *Discute-se a relevância das representações pragmáticas como ferramentas de ação e de tomada de decisões para o cidadão moderno, em particular nossos alunos, a insu£ciência dos currículos atuais em desenvolver as competências associadas a sua construção e uso, e a necessidade de estudá-las e à sua pedagogia.*

Palavras-chave *Representações formais, Pedagogia, Educação Matemática.*

Abstract *The relevance of pragmatic representations as tools for action and as decision aids for the modern citizen, our students in particular, is presented. Some arguments are presented about the insuf£ciency of modern curricula to develop the competences associated for theirs use and construction, and about the necessity of study them and theirs pedagogies.*

Key words *Formal representations, Pedagogy, Mathematical education.*

1. Introdução

A noção de "representação" está no cerne da teoria do conhecimento, tanto da sua face £losó£ca quanto de sua face psicológica. Do lado £losó£co, repousa sobre duas metáforas[1]: a da representação teatral, que expõe diante do espectador (eventualmente o próprio autor), "sob uma forma concreta, uma situação signi£cante, £guras evocadoras, encadeamentos de ações exemplares", tornado assim presentes signi£cados e estruturas até então despercebidas; e a da representação jurídica, onde uma pessoa age em nome de outra. As duas metáforas estão ligadas, pois a estrutura ou a situação signi£cante aparece através dos gestos e palavras dos atores que "representam" os papéis, simulando - de alguma forma - a realidade. O teatro moderno mostra o quanto uma representação pode estar distante de uma realidade fatual, "representando" apenas as características escolhidas pelo autor para por em foco determinadas relações, estruturas ou signi£cados que lhe interessam. Do lado psicológico, uma "representação" é um "conteúdo consciente vivido como um todo coerente e que está orientado, independente de qualquer dado de realidade, para determinado campo de objetos, acontecimentos ou situações"[2]. Cabe ainda lembrar o sentido lógico-matemático do termo, "correspondência entre dois conjuntos que preserva suas estruturas"[3]

Neste trabalho, não pretendo entrar na discussão moderna (e pós-moderna) sobre esta noção, mas ater-me a seu signi£cado pragmático, onde por *"representação" entendo um objeto grá£co explicitando as relações e estruturas de um objeto, sistema, fato, situação ou operação de acordo com um código pré-estabelecido, relevantes frente ao interesse de quem a constrói ou utiliza*. Assim, a capacidade de montar uma representação adequada a uma determinada operação ou tarefa está intimamente relacionada com a competência em realizá-las.

Dada esta de£nição, não cabe discutir se a representação pragmática é completa, £dedigna, exata, aproximada, realista, distorcida, etc., a não ser em relação ao interesse de quem irá usá-la para resolver um dado problema. As estruturas matemáticas subjacentes são as relações indicadas usando o códio pré-estabelecido.

Por exemplo, um desenho indicando um percurso ¤orestal assinala apenas a conexão entre os pontos de tomada de decisão ou de referência (encruzilhadas e pontos especiais, como porteiras, rios a atravessar ou reconhecer, residências a considerar, etc.), com a possível (e desejável) indicação da distância ou do tempo de trajeto entre dois pontos sucessivos – visando a orientação do excursionista. Mesmo que códigos icônicos[4] sejam utilizados para referenciar estes pontos (como ocorre nos mapas turísticos), o desenho não passa de um grafo marcando nós, tipos de nós, arcos e "pesos" dos arcos, todos representados por convenções grá£cas icônicas ou numéricas. O grafo

[1] Encyclopédie Universalis, CDROM, verbete "*représentation et connaissance*".

[2] Dicionário Houaiss, verbete "representação", item 20.

[3] *Ibd.*, item 18.

[4] Para os conceitos de signi£cado, comunicação, código, referência e iconismo, ver (Eco, 1976).

representa a relação matemática entre os elementos naturais (a serem encontrados e reconhecidos pelo excursionista), necessária para a escolha do caminho a ser percorrido. Essencialmente, a relação de contiguidade (ou de sucessão, se considerarmos que há um sentido de percurso) ao longo da rota, a distância entre os nós, e o tipo de nó (dentro de um conjunto de categorias conhecido, associado a decisões a serem tomadas). Um "mapa" deste tipo, se incompleto, pode levar o excursionista a se perder. "Incompleto" signi£ca não incluir referência a todos os pontos geográ£cos onde uma decisão diferente de "seguir em frente" deverá ser tomada. Um "mapa" deste tipo pode ser "inexato", isto é, trocar a ordem de ocorrências da caminhada, ou apresentar distâncias su£cientemente incorretas a ponto de causar falsas expectativas ou gerar decisões errôneas.

Curiosidade histórica: a mais antiga representação grá£ca conhecida deste tipo, fora os mapas e os desenhos geométricos, é a árvore de Polibos, grafo que estabelece uma relação hierárquica entre as diversas classes de seres na £loso£a aristotélica. Foi tão original que ganhou um nome próprio e eternizou o seu autor. A relação representada expressa uma posição ideológica implícita: "homens" estão "acima" de "animais", etc. A relação pensada na época era valorativa, hoje seria interpretada como exprimindo a relação entre níveis de complexidade – os códigos de referência mudaram... Do século XI em diante estas representações se multiplicaram, ilustrando a teologia, a £loso£a, a engenharia, etc.; principalmente depois que tornou-se mais fácil a utilização dos instrumentos grá£cos.

Podemos formalizar estas noções, mas, ou nos atemos ao caráter formal da representação – nos exemplos falaremos de grafos – ou, se pretendemos tratar o problema da referência ao mundo real, encontramos o mesmo problema da formalização do conceito de modelagem de um objeto físico: a representação grá£ca parte de uma representação mental abstrata que referencia uma determinada percepção dos fenômenos a serem observados através de esquemas psicológicos (Eco, 1998).

A noção de "representação" está no cerne da teoria do conhecimento, tanto da sua face £losó£ca quanto de sua face psicológica. Do lado £losó£co, repousa sobre duas metáforas[5]: a da representação teatral, que expõe diante do espectador (eventualmente o próprio autor), "sob uma forma concreta, uma situação signi£cante, £guras evocadoras, encadeamentos de ações exemplares", tornando assim presentes signi£cados e estruturas até então despercebidas; e a da representação jurídica, onde uma pessoa age em nome de outra. As duas metáforas estão ligadas, pois a estrutura ou a situação signi£cante aparece através dos gestos e palavras dos atores que "representam" os papéis, simulando - de alguma forma - a realidade. O teatro moderno mostra o quanto uma representação pode estar distante de uma realidade factual, "representando" apenas as características escolhidas pelo autor para por em foco determinadas relações, estruturas ou signi£cados que lhe interessam. Do lado psicológico, uma "representação" é um "conteúdo consciente vivido como um todo coerente e que está orientado, independente de qualquer dado de realidade, para determinado campo de objetos, a-

[5]Encyclopédie Universalis, CDROM, verbete "*représentation et connaissance*".

contecimentos ou situações"[6]. Cabe ainda lembrar o sentido lógico-matemático do termo, "correspondência entre dois conjuntos que preserva suas estruturas"[7].

Neste trabalho, não pretendo entrar na discussão moderna (e pós-moderna) sobre esta noção, mas ater-me a seu signi£cado pragmático, onde uma "representação" é um *objeto grá£co explicitando as relações e estruturas de um objeto, sistema, fato, situação ou operação de acordo com um código pré-estabelecido, relevantes frente ao interesse de quem a constrói ou utiliza.* Assim, a capacidade de montar uma representação adequada a uma determinada operação ou tarefa está intimamente relacionada com a competência em realizá-la. Não pretendo abordar o problema das "representações mentais", cujo estatuto é muito discutido atualmente (Rorty, 1994; Eco, 1998), mas permanecerei no campo das representações explicitadas por meios grá£cos, como tabelas, diagramas, desenhos, fórmulas ou discursos organizados. Concordo que "representações mentais", seja lá o que isso signi£car, precedem a construção de uma representação formal e explícita, mas nosso interesse aqui é discutir o seu uso - daí o adjetivo "pragmático" acima - e a questão da competência em construí-las e usá-las, exigidas nas de£nições dos currículos modernos[8].

Dada esta de£nição, não cabe discutir se a representação pragmática é completa, £dedigna, exata, aproximada, realista, distorcida, etc., a não ser em relação ao interesse de quem irá usá-la para resolver um dado problema. As estruturas matemáticas subjacentes são as relações indicadas usando o códio pré-estabelecido.

Por exemplo, um desenho indicando um percurso ¤orestal assinala apenas a conexão entre os pontos de tomada de decisão ou de referência (encruzilhadas e pontos especiais, como porteiras, rios a atravessar ou reconhecer, residências a considerar, etc.), com a possível (e desejável) indicação da distância ou do tempo de trajeto entre dois pontos sucessivos – visando a orientação do excursionista. Mesmo que códigos icônicos[9] sejam utilizados para referenciar estes pontos (como ocorre nos mapas turísticos), o desenho não passa de um grafo marcando nós, tipos de nós, arcos e "pesos" dos arcos, todos representados por convenções grá£cas icônicas ou numéricas. O grafo representa a relação matemática entre os elementos naturais (a serem encontrados e reconhecidos pelo excursionista), necessária para a escolha do caminho a ser percorrido. Essencialmente, a relação de contiguidade (ou de sucessão, se considerarmos que há um sentido de percurso) ao longo da rota, a distância entre os nós, e o tipo de nó (dentro de um conjunto de categorias conhecido, associado a decisões a serem tomadas). Um "mapa" deste tipo, se incompleto, pode levar o excursionista a se perder. "Incompleto" signi£ca não incluir referência a todos os pontos geográ£cos onde uma decisão diferente de "seguir em frente" deverá ser tomada. Um "mapa" deste tipo pode ser "inexato", isto é, trocar a ordem de ocorrências da caminhada, ou apresentar distân-

[6]Dicionário Houaiss, verbete "representação", item 20.

[7]*Ibd.*, item 18.

[8]Ver as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Engenharia, e as Diretrizes Curriculares paros currículos para cursos de matemática.

[9]Para os conceitos de signi£cado, comunicação, código, referência e iconismo, ver Umberto Eco, *Tratado Geral de Semiótica*, Editora Perspectiva, 1976.

cias su£cientemente incorretas a ponto de causar falsas expectativas ou gerar decisões errôneas.

Curiosidade histórica: a mais antiga representação grá£ca conhecida deste tipo, fora os mapas e os desenhos geométricos, é a árvore de Polibos, grafo que estabelece uma relação hierárquica entre as diversas classes de seres na £loso£a aristotélica. Foi tão original que ganhou um nome próprio e eternizou o seu autor. A relação representada expressa uma posição ideológica implícita: "homens" estão "acima" de "animais", etc. A relação pensada na época era valorativa, hoje seria interpretada como exprimindo a relação entre níveis de complexidade – os códigos de referência mudaram... Do século XI em diante estas representações se multiplicaram, ilustrando a teologia, a £loso£a, a engenharia, etc.; principalmente depois que tornou-se mais fácil a utilização dos instrumentos grá£cos.

Podemos formalizar estas noções, mas, ou nos atemos ao caráter formal da representação – nos exemplos falaremos de grafos – ou, se pretendemos tratar o problema da referência ao mundo real, encontramos o mesmo problema da formalização do conceito de modelagem de um objeto físico: a representação grá£ca parte de uma representação mental abstrata que referencia uma determinada percepção dos fenômenos a serem observados através de esquemas psicológicos[10].

Porém não pretendo discutir o problema das "representações mentais", cujo estatuto é considerado ambíguo, atualmente. Permanecerei no campo das representações explicitadas por instrumentos grá£cos, como tabelas, diagramas, desenhos, fórmulas ou discursos organizados. Concordo que "representações mentais", seja lá o que isso signi£car, precedem a construção de uma representação formal e explícita, mas nosso interesse aqui é discutir o seu uso - daí o adjetivo "pragmático" acima - e a questão da competência em construí-las e usá-las, exigidas nas de£nições dos currículos modernos[11].

Começaremos exibindo alguns exemplos que revelam o problema que pretendemos por em pauta, para depois propor um programa de trabalho. A questão do domínio de determinadas representações nos parece extremamente relevante para a preparação de cidadãos habilitados a enfrentar o mundo moderno. Isto é, capazes de organizar, analizar e criticar o conjunto de informações necessárias para tomar decisões atualmente. Em especial no caso de pro£ssionais que projetam ações em meio a contextos lógicos ou tecnológicos. E, mais especialmente, para professores de matemática, pois a tradição coloca o desenvolvimento e o aprendizado da maior das representações pragmáticas em suas costas, quer no campo da matemática pura, quer no campo da matemática aplicada, quer no campo do desenho geométrico; embora seu uso apareça na geogra£a e na história, e depois se expanda a todas as disciplinas – sem que se exija dos alunos a sua construção.

[10]Ver Umberto Eco, *Kant and the Platypus*, Harvest Books, 2000.

[11]Ver as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Engenharia, e os currículos para cursos de matemática.

2. Alguns exemplos do problema

Muito frequentemente, no Rio de Janeiro, ao entrar em um taxi, o chofer se diz novo no negócio e declara desconhecer o endereço que lhe indiquei. Raramente possui um guia de ruas (a forma brasileira de "mapa da cidade"). Usar mapas não é um hábito nacional. Mas experimentei levar comigo o guia de ruas: o chofer não sabe determinar no mapa onde estamos e, mesmo que eu o faça, não sabe usá-lo. Em especial se estamos voltados para o sul, quando o lado direito da carta corresponde à nossa esquerda. No entanto, na quinta ou sexta série do ensino fundamental, os alunos desenham o "mapa" da sala de aula, depois o da escola, depois o do bairro, e realizam exercícios de orientação com estes mapas, seguindo uma orientação didática hoje generalizada no país (e exigida nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental). Os motoristas que consultei declararam ter passado por este aprendizado[12].

Isto é, o signi£cado de um mapa é bem compreendido, mas não foi gerada a competência de usá-lo como representação de possíveis movimentos, e daí como ferramenta de projeto da ação pretendida. Questões como escala ou orientação são reconhecidas, mas sempre consideradas excessivamente difíceis. Elas foram tratadas apenas durante as aulas especí£cas no ensino fundamental. Curiosamente, disciplinas como História ou Geogra£a apenas "situam" eventos em mapas, mas não os utilizam como ferramenta de orientação ou como fonte de informação.

Do "alfabetizado funcional", conforme a de£nição da UNESCO, é exigida a capacidade de escrever um texto explicando como ir a um local público em sua cidade, e entender um texto contendo uma explicação deste tipo. Representações discursivas como estas podem ser construídas apenas descrevendo uma sequência de decisões tomadas localmente, referidas a marcas facilmente memorizáveis (virar uma dada esquina, passar por uma certa loja, tomar um determinado ônibus). Estas representações discursivas são mais pobres que mapas, pois não fornecem visão de conjunto, nem facilitam o projeto ou a adaptação/otimização da ação frente a problemas inesperados. Os resultados obtidos pelo PISA2000[13] mostram que a maioria dos estudantes brasileiros do nível fundamental não chega às representações discursivas acima, e a maioria absoluta dos estudantes dos níveis fundamental e médio não são capazes de usar um mapa ou grá£co de forma a deles retirar informações necessárias à análise de um texto.

O mesmo problema relativo a representações grá£cas (dirigidas para uma ação que busca atingir determinados £ns) aparece na comparação entre a atividade de um técnico e a atividade de um engenheiro ou arquiteto utilizando plantas e diagramas. O

[12]A exceção foi um senhor de idade, que possuía um mapa da cidade, sabia se orientar, e empregava com precisão os termos "carta", "escala" e "coordenadas". Havia feito curso de engenharia há muitos decênios, e, atualmente, depois de encerrar sua empresa de reformas, trabalhava como taxista. A exceção con£rma a regra!

[13]Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, programa da OCDE, implementado no Brasil pelo INEP. Ver PISA2000, Relatório Nacional, Brasília: INEP, dezembro de 2001.

bombeiro que troca o encanamento na minha casa toma decisões na forma de uma bricolagem local, utilizando um conjunto de técnicas aprendidas pelo sistema mestre/aprendiz, na melhor das hipóteses interpretando os desenhos analógicos dos aparelhos (o aquecedor, o chuveiro elétrico, a válvula de descarga) que aparecem em seus manuais/folhetos (quando não os joga fora). Não possui uma visão global da operação: esta informação está implicitamente contida no contexto que o limita (meu apartamento, com seus banheiros e cozinha). O bombeiro a recupera percorrendo o local de trabalho e contabilizando o resultados das prováveis ações locais. Não projeta a operação como um todo – donde não ser capaz de prever as peças (número de conexões e seus tipos) que usará – desespero do proprietário que, todo dia, tem de sair às compras. Já o engenheiro e o arquiteto usam a planta como forma de projeto (escolha de soluções para atingir determinados objetivos diante de determinadas restrições) e para a organização do processo de construção: a planta é uma representação que ajuda e serve de base para organizar e realizar a ação futura e controlar o que foi realizado.

Não é assim que técnicos costumam compreender plantas: as tratam como meras formalidades, pois, "a teoria, na prática, é outra"[14]. Isto é, compreendem seu sentido, mas não são competentes para utilizá-las como ferramenta de organização de sua ação. Esse fato leva os engenheiros (e mestre de obras mais espertos) a redesenhar a planta em partes, cada uma correspondendo a uma operação determinada em uma determinada localização, simplificando ao máximo a representação original, e aproximando-a de um diagrama analógico descrevendo um determinado instante do processo de construção. Essa desintegração do projeto explica parte da perda de material de construção (mais de 30%) que é registrada no país.

A experiência do autor e sua equipe junto a exames vestibulares e aos calouros dos cursos de engenharia tem fornecido um grande número de exemplos de dificuldade em retirar informações de gráficos, diagramas e tabelas, em especial quando há um comportamento dinâmico a ser inferido. Isto é, o aluno realiza uma leitura imediata do gráfico, mas não consegue inferir nada além.

A História da Matemática está cheia de exemplos onde a mudança das representações alterou diretamente seu curso. Sem nos aprofundarmos na questão, podemos lembrar que os textos matemáticos não geométricos, até Viète e Descartes, apresentavam listas de problemas-tipo representando, por analogia, a situação geral (Boyer, 1974). Matemáticos da Babilônia ou da Índia escreveram listas de problemas resolvidos, sem demonstração (ibd., capítulos 3 e 12). Matemáticos da Renascença demonstravam a forma da solução de forma algorítmica (isto é, construíam a solução), mas referindo-se ao problema-tipo particular, em uma representação essencialmente discursiva (*ibd.*,

[14]Quando a Light (companhia de distribuição de eletricidade da cidade do Rio de Janeiro) foi privatizada, percebeu que as plantas indicando a posição de postes, transformadores, etc. eram fictícias. Foram usadas para um projeto inicial, não foram obedecidas e nunca foram corrigidas. A empresa passou dois anos refazendo estas plantas, e só então a EDF (que a havia comprado) percebeu o tamanho do investimento que teria de enfrentar. Na mesma linha de exemplos, embora as plantas de edifícios sejam obrigatórias para a concessão do "habite-se", raramente proprietários (no país) as possuem no momento da venda de suas unidades.

capítulo 15). A notação algébrica de Viète permitiu o aparecimento da fórmula algébrica, não apenas como receita de cálculo, mas como representação do fazer abstrato e base para pensar e desenvolver a resolução do problema (*ibd.*, capítulo 16).

Fórmulas matemáticas representam mais do que um algoritmo a ser aplicado para um cálculo especí£co. Também expressam (parte das) informações estruturais, como fatorações e decomposições, linearidades ou não-linearidades, etc., formando assim uma base para o raciocínio matemático. Idem para a física, onde, além das relações matemáticas, encontramos relações dimensionais. Físicos e matemáticos pensam sobre e através de fórmulas (mas não apenas por fórmulas). Porém estamos cansados de ver alunos considerando fórmulas matemáticas como receitas de cozinha, descrevendo "manipulações" sem sentido (para eles) – e não como condensação de um saber e de informações sobre a estrutura matemática subjacente.

De qualquer forma, há uma antinomia entre o estudo por casos ou por problemas-tipo (representação discursiva) e a representação por fórmulas ou por regras lógicas (como ocorre nas áreas de Direito e de Administração). Um exemplo desta antinomia aparece na descrição de currículos escolares em escolas com matrícula por disciplina: professores descrevem o currículo por um conjunto de regras (incluindo requisitos e pré-quisitos, regras para obtenção de dupla habilitação ou dupla ênfase, regras para escolhas de disciplinas eletivas em campos pré-estabelecidos, etc.), em um discurso referindo o procedimento de acreditação à lógica da formação. Técnicos universitários (o pessoal da Diretoria de Admissão e Registro, por exemplo) e £scais do MEC exigem tabelas onde as disciplinas são citadas nominalmente, para cada possibilidade curricular. A tabela facilita a veri£cação de que um dado aluno cumpriu as exigências para a obtenção do diploma, mas não permite a visão estrutural do currículo necessária para sua crítica e reformulação, por exemplo. No curso de engenharia da PUC-Rio, onde as regras admitem várias opções e duplas habilitações, chega-se a mais de 120 tabelas, mesmo sem especi£car as disciplinas eletivas, contra poucas páginas explicando as regras curriculares para 11 cursos de engenharia! Aliás, tabelas ou regras podem ser programadas, não sendo a informatização um empecilho em um ou outro caso.

3. A questão educacional

Anualmente, o programa PISA[15] aplica provas de linguagem e de matemática em diferentes países, para comparar seus resultados escolares. Estas provas utilizam diferentes representações, como textos, tabelas, mapas, diagramas e ¤uxogramas, buscando ver se os alunos conseguem encontrar informações, e utilizá-las diretamente ou como base para raciocínios mais elaborados. Eventualmente, solicita-se comparar ou misturar informações em uma tabela com informações em um diagrama, etc. Esta es-

[15] *Cf.* nota 13.

tratégia se explica: a vida moderna exige a utilização de informações apresentadas em diferentes suportes utilizando diferentes representações, como já visto nos exemplos anteriores. Porém os resultados dos alunos brasileiros frente ao PISA são péssimos (entre os piores dos países examinados), como noticiaram os jornais este ano.

Exemplos de representações que podem aparecer em provas deste tipo (em níveis variados) são:

(a) discursos e textos; (b) fórmulas (lógicas, matemáticas, químicas, etc.), vistas como indicação de processos de cálculo ou como condensação de esquemas de raciocínio; (c) algoritmos, apresentados por ¤uxogramas, por receitas ou protocolos, ou em linguagem "procedural" (Knuth), representações de processos ou procedimentos visando um objetivo bem de£nido; (d) mapas e cartas; plantas; diagramas icônicos (como os desenhos dos livros de biologia); (e) diagramas relacionais ou estruturais (diagramas de estado, redes de Petri, diagramas Pert, diagramas de blocos, tão importantes para descrever sistemas complexos, grafos de ¤uxo de sinais, grafos em geral, etc.); (f) quadros sinóticos; (g) desenhos, épuras e diagramas analógicos (desenhos descrevendo peças, por exemplo); (h) tabelas; grá£cos de funções; (i) "pizzas" e outros grá£cos proporcionais; (j) listas de problemas-tipo ou de "*case studies*".

Considerando que cada representação tem sua vantagem especí£ca, adaptando-se melhor que outras ao desenvolvimento de determinados raciocínios e ao projeto de determinadas ações, ou então facilita a compreensão de conceitos e torias (e seu uso) por parte dos alunos ou do eventual interlocutor, seria interessante que todos os alunos (e cidadãos) fossem levados a dominá-las, sabendo interpretá-las ou utilisá-las como meios de raciocínio e de transmissão de informação.

Problema: Onde e como os alunos aprendem a utilizar as diferentes representações?

Vimos acima, em dois dos exemplos, que algumas delas são apresentadas aos alunos, mas estes – estatisticamente falando – não conseguem utilizá-las, embora conheçam seu sentido. Qual o problema para seu aprendizado permanente? Como enfrentá-lo? Deve buscar-se um aprendizado descritivo ou o da competência associada?

De fato, cada uma dessas representações, no ensino tradicional, está restrita a uma dada disciplina, sendo apresentada uma primeira vez, e, depois, muito pouco utilizada (com exceção de funções e grá£cos nos cursos técnicos). O aluno que estudou mapas e cartas na quinta ou sexta série do ensino fundamental, quando ainda não possuía uma visão geográ£ca mais ampla, só voltará a usar um mapa, eventualmente, em algumas aulas de geogra£a ou de história. Mas nestas disciplinas não usa os mapas para deduções ou para se orientar: elas descrevem situações, mas não exigem raciocínios dependendo dos mapas nem propõem ações para atingir objetivos determinados. O mapa é uma "representação" no sentido mais rasteiro, mas não passa a ser uma ferramenta para resolver problemas do interesse do aluno. A notar que os atlas históricos e os mapas sinóticos quase desapareceram do ensino brasileiro.

O mesmo podemos dizer de quase todas as representações acima – apesar delas serem elementos facilitadores do aprendizado e ferramentas essenciais para exercer as competências associadas.

4. Um programa de trabalho

Do que foi dito acima £cam claras algumas sugestões, que formam todo um programa de trabalho:

1. Organizar uma lista de representações, classi£cando-as de acordo com o tipo de uso e com as exigências psico-culturais para seu domínio e uso; *pensá-las pragmaticamente como ferramentas para a resolução de problemas, e não como um £m em si*;

2. Buscar estratégias pedagógicas para desenvolver as competências associadas;

3. Utilizá-las com alguma frequência ao longo de todo o trajeto escolar, exigindo o seu uso (leitura e construção frente à resolução de problemas) de forma que passem a integrar o conjunto de ferramentas intelectuais à disposição dos alunos;

4. Utilizá-las não apenas nas disciplinas onde se originaram, mas onde for possível e importante, em especial nas disciplinas de linguagem, como mecanismo de expressão; *o que implica em trabalho transdisciplinar*;

5. Utilizá-las não apenas para a organização e a expressão de conjuntos estruturados de informações, *mas também como ferramenta de projeto*, isto é, para organizar ações em vista de um determinado £m.

Estamos aqui diante de uma questão que apareceu ao longo de todo o texto: o aprendizado visando desenvolver a capacidade de organizar ações (inclusive o próprio aprendizado e a geração de conhecimento) para atingir objetivos determinados, sob um conjunto assumido de restrições (limitações de meios, ambientais, econômicas, etc.). Esta questão remete ao aprendizado a partir de problemas, visto como uma metodologia didática central – o aluno só apreende ou constrói a resposta de uma questão que ele mesmo se coloca. O papel do professor passa a ser o de instigar as questões, fornecer meios, apresentar contra-exemplos às concepções alternativas que fazem obstáculo à construção conceitual, e facilitar a pesquisa do aluno.

Porém, mais do que isto, esta questão trata da razão de ser do conhecimento: ele serve e é desenvolvido frente a um interesse, ele é construído como ferramenta para atingir um £m, ele tira seu sentido do problema que o aluno se coloca, sempre referido a seu contexto de vida. Não que a curiosidade ou os enigmas da estrutura teórica (um jogo como qualquer outro) não possam motivar o aluno, mas assim chegamos a diletantes hábeis para determinados jogos (xadrez, matemática, etc.). Ora, todos os exemplos tratados acima partiram de problemas contextualizados – que justi£cavam e exigiam o domínio das representações estudadas – e contra os quais podemos medir o aprendizado. Estamos diante de um princípio epistemológico: contra a idéia da ciência como um £m em si – imanente na pedagogia das escolas fundamental e secundária, ou nos cursos de ciências básicas do ensino superior – aparece a idéia de que o conhecimento (ou a ciência) sempre atende a um interesse, em torno do qual e em função do qual se constitui (Habermas, 1976).

Referências

BOYER, C. B. (1974) História da Matemática. São Paulo: Edgard Blücher.

ECO, U. (1976) *Tratado Geral de Semiótica*. São Paulo: Editora Perspectiva.

ECO, U. (1998) *Kant e o Ornitorrinco*. Rio de Janeiro, Record.

HABERMAS, J. (1976) *Connaissance et Intérêt*. Paris, França: Gallimard.

RORTY, R. (1994). *A Filoso£a e o Espelho da Natureza*. Rio de Janeiro: Relume - Dumará.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 107:114
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 13

OFICINAS DE MATEMÁTICA DISCRETA NO ENSINO MÉDIO[1]

Samuel Jurkiewicz
COPPE - UFRJ
jurki@sky.com.br

Gilda Leventhal
Colégio Pedro II – Rio de Janeiro

Resumo *Em (Jurkiewicz, 2002) apontamos a emergência de certos conteúdos no currículo da matemática pré-universitária, pressionados pelo advento das técnicas digitais sobre o ensino. A partir destas e outras constatações propusemos a criação de O£cinas de Matemática Discreta no âmbito pré-universitário que foram realizadas em dois estabelecimentos do Rio de Janeiro. Apresentamos aqui alguns resultados da primeira parte destas o£cinas, centrada em Teoria dos Grafos e Algoritmos.*

Palavras-chave *Matemática Discreta; grafos; otimização; algoritmos; resolução de problemas.*

Abstract *In (Jurkiewicz, 2002), we argued the emergence of some subjects in pre university mathematics as a reponse to digital techniques arise and computers development as common instrument over mathematics teaching. With these issues in mind we proposed Discrete Mathematics Laboratories taking place in two schools in Rio de Janeiro. Here we present some results of the £rst part of these Laboratories, centered in Graph Theory and Algorithms.*

Key words *Discrete Mathematics; graphs; optimization; problem solving.*

[1]Trabalho parcialmente apoiado pela FAPERJ

1. Introdução

O advento das técnicas digitais e dos computadores como instrumento comum exercem pressão inequívoca sobre o ensino da matemática. Sob esse olhar, a Matemática Discreta e o estudo dos Algoritmos (Algorítmica) aparecem de forma privilegiada e imbricada: desenvolveram-se juntas, numa relação bastante simbiótica, desde a segunda guerra mundial.

Em (Jurkiewicz, 2002), apontamos a emergência destes conteúdos no currículo da matemática pré-universitária. De fato, a veloz e extraordinária vulgarização de interfaces digitais vêm apontando para a necessidade de um ensino da matemática que contemple aspectos procedurais da matemática. Note-se que, sem prejuízo do relevante questionamento: "como podem os computadores ajudar no ensino da matemática" – nossa atenção se dirigia então para "que matemática é necessária para viver num mundo de procedimentos algorítmicos".

Já na década de 80 alguns sistemas educacionais preconizavam a introdução da Matemática Discreta no ensino pré-universitário. Por exemplo, a NSF dos Estados Unidos patrocina um programa de desenvolvimento curricular da matemática discreta da ordem de dez milhões de dólares (DIMACS, 2002). Mais recentemente, o Ministério da Educação da França propõe explicitamente a introdução do ensino de Teoria dos Grafos no ensino médio (Arnoux, 2001),(Kahane, 2001).

A partir destas e outras constatações propusemos a criação de O£cinas de Matemática Discreta no âmbito pré-universitário que foram realizadas em dois estabelecimentos do Rio de Janeiro: Colégio Pedro II (unidade Humaitá) - escola pública federal de excelência – e Escola Parque - escola localizada na Zona Sul da cidade.

2. Descrição sucinta do campo e metodologia

Os dois grupos que trabalhamos eram de alunos em parte voluntários, isto é, a decisão de participar de uma O£cina de Matemática foi feita entre outras escolhas de grande diversidade (teatro, fotogra£a, literatura, biologia, etc.).

No Colégio Pedro II, tradicional escola de administração federal, a O£cina foi oferecida no quadro da nova LDB, que preconiza o oferecimento de cadeiras eletivas. Na Escola Parque, escola de classe média alta na Gávea, com tradição de inovação pedagógica e envolvimento social, os alunos escolhiam entre várias o£cinas e o grupo que nos procurou mostrou invulgar motivação.

A metodologia escolhida foi baseada na cooperação livre. Os professores procuraram limitar sua intervenção à discussão de dúvidas quanto à terminologia usada nas £chas e em colocar os raciocínios dos alunos em cheque, de forma a gerar discussão e controvérsia. Todos os alunos receberam uma £cha individual. As £chas e todo o material foram confeccionados especialmente para a o£cina, em alguns casos utilizando materiais referenciados em (Casey, 1998), (COMAP, 2002),(Culbertson, 1998).

3. Desenvolvimento do Trabalho

A O£cina se dividiu em três blocos:

- Introdução sucinta de noções de teoria dos grafos;
- Estabelecimento de notação, linguagem e compreensão do que é uma demonstração;
- Resolução de problemas de otimização envolvendo grafos, algoritmos e estruturas de dados.

Pela exigüidade do espaço descreveremos, de forma breve, as atividades do primeiro desses blocos.

Na primeira atividade os alunos deveriam tentar desenhar uma casinha (£gura 1) indo de ponto a ponto sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pela mesma linha. (Este é um problema clássico, na verdade considerado o problema fundador da Teoria dos Grafos. Uma descrição e solução do problema podem ser encontradas, por exemplo, em (Boaventura,2001).

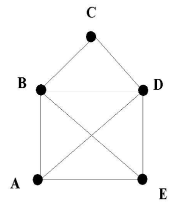
Os alunos constataram que não há di£culdade em cumprir as exigências do problema. Não tiveram também di£culdade alguma em codi£car um caminho pela sucessão de letras e perceber que todas as soluções encontradas na turma começavam e terminavam pelos pontos marcados com as letras A e E.

Logo após a £cha pedia que desenhassem começando pelo ponto B. A di£culdade inicial logo se transformou em descon£ança de que a tarefa era impossível. A discussão enveredou então pelo signi£cado de "impossível". Depois de alguma discussão surgiu a constatação de que é necessário *provar* que a tarefa é realmente impossível.

Uma estratégia sugerida foi a de que se tentasse de todas as formas possíveis, mas como saber se realmente todas os caminhos possíveis haviam sido explorados? Já na primeira sessão, portanto, começamos a evidenciar que teríamos necessidade de procedimentos bastante claros e de uma codi£cação sem ambigüidades. Evidentemente, sendo este o primeiro contato dos alunos com este tipo de problema, estas constatações ainda eram ingênuas. Mas os temas de procedimento (algoritmo) e codi£cação (nomenclatura e estrutura de dados) nos acompanharam pelos três blocos de trabalho. A diferenciação entre as diversas aptidões fez com que os alunos chegassem a diversos estágios da solução em diferentes períodos de trabalho.

Atividade 1

Desenhe a £gura abaixo sem tirar o lápis do papel.



Regra: Só pode ir de bolinha para bolinha.

Anote a sequência de letras que usou
Por onde você começou ?
Em que ponto terminou ?
Tente fazer de outro jeito.
Anote a seqüência de letras que usou
Por onde você começou ?
Em que ponto terminou ?
Atividade 2
Tente desenhar a casinha, começando pelos pontos B , C ou D.
O que você observa ?
Explique com suas palavras o que acontece

Figura 1: Primeira atividadealgor

Uma parte da motivação advinha do fato de o problema inicial, na verdade simples na sua formulação mas que revelava alguma complexidade na solução, diferir totalmente do hábito escolar desses alunos. Ao invés de partir de uma teoria já pronta, o problema induziu a uma necessidade de formalização sobre o que seria, na verdade, "resolver o problema".

De uma forma ainda incipiente, foram estabelecidos os motivos pelos quais a tarefa era (agora sem aspas) impossível. Vários outros exemplos foram dados, alguns bastante complexos. O que se observou é que ao passo que alguns participantes tinham admitido as conclusões apresentadas pelo grupo e referendadas mesmo pelos professores, apresentando a solução analítica, que apenas distinguia se era ou não possível desenhar as £guras nas condições dadas, alguns alunos julgaram ainda necessário realmente desenhar as £guras.

Numa etapa posterior, propusemos uma atividade que consistia em formar circuitos fechados com as peças de dominós, primeiramente com todas as peças, depois retirando as peças com o número 6 e depois com uma coleção aleatória. Os participantes outra vez tiveram facilidade na primeira tarefa, e se depararam com a impossibilidade na segunda. Mais calejados, logo se aperceberam de que os motivos da impossibilidade eram extremamente parecidos com os do problema anterior, embora fossem totalmente diversos em sua formulação. O isomor£smo (sem o uso enfático deste nome) foi constatado com facilidade e a transposição grafoconjunto de peças foi realizada com facilidade.

Neste ponto discutimos se este problema era importante. Foi então apresentado o seguinte problema: "Imagine que você é um prefeito de uma pequena cidade e dispõe de apenas um caminhão de lixo. Seria importante saber se você pode percorrer as ruas da cidade sem passar por duas delas mais do que uma vez, retornando ao ponto inicial? e caso não fosse possível, seria importante determinar de que maneira fazer o percurso com um mínimo de repetições?". A reação foi imediata – é o mesmo problema.

O resto da sessão foi consumido em tentar resolver o problema com vários mapas de cidades possíveis e em estabelecer um procedimento escrito preciso que determinasse se uma £gura pode ou não ser desenhada sem tirar o lápis do papel, e por onde devemos começar o desenho.

Ao longo das atividades fomos introduzindo, pouco a pouco, a nomenclatura "o£cial": *vértice* para os pontos, *arestas* para os segmentos, *circuitos*, *caminhos*, etc. A introdução paulatina, contrastando com a tradição matemática de de£nição e uso foi intencional. Nossa idéia é de que as linguagens dos participantes e a nossa continham pontos comuns e pontos divergentes. A intenção foi que ao aceitarmos a linguagem própria dos alunos, mas exigindo precisão (pois essa é uma necessidade básica da matemática), a inclusão de nossa linguagem formal, mas por seu lado ¤exibilizada para acolher a dos alunos, se produziria uma síntese.

No entanto, é importante notar que ao £nal desse primeiro bloco pedimos que de£nissem esses primeiros conceitos (vértice, aresta, etc.) com seus próprios termos. Não foi de fato surpresa observar que a maioria absoluta dos participantes, em maior ou menor intensidade, utilizou os nomes e conceitos da geometria euclidiana (ângulo, reta, etc.) que não desempenharam papel algum em nenhum problema oferecido. Ao tentar se exprimir, eles tentavam partir dos conceitos que (supostamente) dominavam, muitas vezes complicando os conceitos além do necessário. Essa discussão foi levada a cabo com certa delicadeza, pois nosso ponto de vista é que ela é uma etapa necessária na formulação de conceitos absolutamente novos.

A atividade foi encerrada com uma pequena preleção histórica sobre o problema (conhecido como o Problema das Pontes de Königsberg) e sobre a solução de Euler.

Oferecemos então uma situação evolvendo grafos; para cada grafo apresentado pedimos que calculassem o grau de cada vértice, e a soma destes graus (vide abaixo), o número de arestas e o número de vértices de grau ímpar.

A quase totalidade constatou que "a soma dos graus dos vértices de um grafo é o dobro do número de arestas". Outra vez, a constatação serviu de motivação instigante: qual o motivo disto acontecer? A resposta consiste numa prova da a£rmação acima. Os alunos foram então convidados a provar este teorema (e pudemos formalizar o signi£cado desta palavra a partir de uma experiência concreta). Os alunos apresentaram suas demonstrações e £zemos as críticas cabíveis.

Ao pedirmos para que as notações fossem usadas ao invés de palavras, algumas di£culdades apareceram. Se é fácil simbolizar a soma (+), o somatório (Σ) exigiu uma generalização que depende de uma maturidade que o aluno do ensino médio em geral ainda não tem.

Propusemos problemas práticos que utilizassem a idéia exposta no teorema, e eles tiveram a oportunidade de aplicar seus resultados. Reforçamos as idéias de nomenclatura e notação construindo grafos a partir de conjuntos.

4. Conclusão

As O£cinas que oferecemos cumprem um papel necessário mas longe de ser su£ciente. Os grupos com que trabalhamos eram bastante atípicos e seu interesse natural pela matemática certamente foram um fator de êxito (a O£cina continua sendo oferecida na Escola Parque, foi oferecida a professores na Faculdade de Educação da UERJ, na Bienal de Matemática da SBM e no encontro do projeto Fundão, entre outros). Os resultados podem entretanto ser considerados como promissores.

Constatamos que:

- Confrontados com problemas a seu alcance que imponham a sua própria generalização, os participantes interessados responderam de maneira mais do que satisfatória, construindo conceitos, linguagem, estabelecendo novas relações e aprofundando um conhecimento novo colocado a seu alcance.

- Embora £cando claro que a aplicabilidade dos problemas envolvidos dependesse de maior so£sticação de conceitos e instrumentos, a proximidade com problemas de gestão e administração se mostrou um poderoso atrativo para os participantes (tendo sido identi£cados como "problemas reais").

- A convivência com computadores não basta para se entender os instrumentos sociais cada vez mais procedurais. Esse entendimento é um entendimento lógico e matemático e deve passar a habitar a escola.
- O estudo orientado de problemas relativos a grafos, jogos (conteúdo do outro semestre) e outros conteúdos de Matemática Discreta podem ser um caminho interessante para a explicitação dos mecanismos básicos da matemática: indução, dedução, encadeamento lógico, demonstração, notação, etc.
- A utilização de O£cinas ou Eletivas pode abrir espaços para experimentação, não só em matemática como em outras vertentes do conhecimento. A presença de participantes previamente interessados é um ingrediente importante na produção do sentido da aprendizagem.

Agradecimento

Os autores agradecem à professora Clicia Valladares Peixoto Friedmann (UERJ) pelas sugestões dadas ao encaminhamento das atividades.

Referências

ARNOUX, P. et al. (2001) Introduction d'Élements de la Théorie des Graphes, in Accompagnement de la mise en oeuvre de programmes, Bureau du contenu des enseignements, Ministério da Educação da França.

BOAVENTURA NETTO (2001), P.O; Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos, Editora Edgard Blücher Ltda., 2^a. ed.

CASEY, N. (1998) Megamath, sítio Internet, http://www.c3.lanl.gov/mega-math/

COMAP (2002) Consortium for Mathematics and its Applications, sítio Internet, http://www.comap.com/

CULBERTSON, J. (1998) Colorfull Math, sítio Internet http://web.cs.ualberta.ca/~joe/

DIMACS Connect Institute(2002), sítio Internet, http://dimacs.rutgers.edu/dci/

JURKIEWICZ, S. (2002) Matemática Discreta em Sala de Aula *in* História e Tecnologia no Ensino de Matemática, volume 1, pp. 115-161, Carvalho L. M.; Guimarães, L. C. (org.) 2002, IMEUERJ.

KAHANE,J.P. (2001) L'enseignement des sciences mathématiques, Rapport au Ministère de l'Éducation, França, 2001, Odile Jacob.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 115:121
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 14

UM CURSO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Bruno Alves Dassie
Universidade Estácio de Sá
badassie@ig.com.br

Resumo *O objetivo desta comunicação é relatar uma experiência que vem sendo realizada na Universidade Estácio de Sá, no curso de Licenciatura em Matemática: o curso de História da Educação Matemática no Brasil. Apresento um breve memorial relatando as pesquisas por mim desenvolvidas e minha trajetória docente e uma pequena descrição desta disciplina.*

Palavras-chave *Universidade Estácio de Sá, Educação Matemática no Brasil.*

Abstract *The objective of this communication is to tell an experience that has been accomplished in the Universidade Estácio de Sá, in the course of Degree in Mathematics: the course of History of the Mathematical Education in Brazil. I present a brief memorial telling the researches for me developed and my educational path and a small description of this discipline.*

Key words *Universidade Estácio de Sá, Mathematical Education in Brazil.*

1. Introdução

Em 1998, durante o curso em Licenciatura em Matemática na Universidade Federal Fluminense – Niterói, Rio de Janeiro –, tive pela primeira vez contato com a História da Matemática na disciplina então recentemente implantada na grade curricular dessa universidade. No decorrer do curso, ministrado pelo Prof. Dr. Wanderley Moura Resende, minhas perspectivas para com a Educação Matemática aumentaram e meu interesse em realizar um Mestrado nessa área se tornou claro. Procurei os programas disponíveis que atenderiam minhas expectativas. Foi então que me candidatei à Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Fui aceito no programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática, iniciando o curso em 1999.

Não tinha conhecimento dos diversos tipos de pesquisas realizados em âmbito acadêmico. Mas, a pesquisa histórica, principalmente após a realização da disciplina História da Matemática durante a graduação, continuou despertando meu interesse. Já no primeiro período do Mestrado, cursei, outra vez, a disciplina de História da Matemática, ministrada, agora, pelo Prof. Dr. João Bosco Pitombeira. Lembro-me que em suas últimas aulas o mesmo comentou sobre um campo de pesquisa bastante inexplorado: a História da Educação Matemática no Brasil. Foi a primeira vez que tive conhecimento desta temática.

No £nal do primeiro ano do curso procurei o citado professor e busquei de£nir minha pesquisa. Alguns artigos do *Jornal do Commercio*, do ano de 1930, sobre uma polêmica entre dois professores catedráticos do Colégio Pedro II e alguns documentos do arquivo pessoal de Gustavo Capanema, Ministro da Educação entre 1934 e 1945, cedidos por ele, foram o su£ciente. No início do ano de 2000, iniciei a busca das fontes que seriam necessárias para a de£nição do trabalho. Esta investigação foi realizada em dois meses e no princípio do período letivo desse ano delimitamos a pesquisa. A reforma do ensino secundário elaborada por Gustavo Capanema em 1942, em particular as propostas para o ensino de matemática, seria a temática do trabalho. Em 2001, apresentei minha pesquisa obtendo a titulação desejada desde os últimos períodos da graduação.

Logo após a apresentação da Dissertação, fui convidado pelo professor Dr. Wagner Valente, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, um dos professores da banca, para proferir uma palestra, junto ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, sobre a temática por mim desenvolvida. Em 2002, apresentei duas Comunicações Cientí£cas (VI Encontro Capixaba de Educação Matemática e VI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática), cujos temas derivaram da pesquisa realizada no Mestrado. Em abril do ano corrente, apresentei o trabalho "*A Matemática do Curso Secundário na Reforma Gustavo Capanema*", no V Seminário Nacional de História da Matemática, realizado em Rio Claro, cujo texto, aceito para publicação nos anais, é um resumo da Dissertação de Mestrado. Nesse mesmo seminário foi lançado o segundo número da revista *História e Educação*

Matemática, da Sociedade Brasileira de História da Matemática, onde o artigo *Uma coleção revolucionária*, em co-autoria com João Bosco Pitombeira e José Lourenço da Rocha foi publicado. Recentemente apresentei uma Comunicação Cientí£ca no 3^o Encontro de Educação Matemática do Rio de Janeiro, denominada *Colégio Pedro II, Euclides Roxo e a História da Educação Matemática no Brasil*. Desde então, venho observando que realmente este campo é inexplorado e muitas vezes desconsiderado por alguns pesquisadores e o trabalho que £z foi uma pequena parte da história da Educação Matemática no Brasil.

Em agosto de 2002, fui contratado pela Universidade Estácio de Sá para lecionar a disciplina História da Matemática, no Curso de Licenciatura em Matemática, dividida em dois cursos, atualmente alocados no 2^o e no 5^o semestre.

2. Uma *História* da Educação Matemática no Brasil

No Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estácio de Sá, temos a oportunidade de dispor de duas cadeiras dedicadas à História da Matemática. Desta forma, o primeiro curso, alocado no 2^o semestre como citado, objetiva situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos mostrando que tal ciência não se desenvolveu independente das necessidades sociais e da cultura geral, construir conhecimento matemático do futuro professor e imprimir historicidade nas disciplinas do curso. Não cabe aqui expor detalhadamente o desenvolvimento dado a este curso, basta observar que o mesmo também se trata ainda de uma experiência de uma disciplina de História da Matemática no ensino superior, como algumas propostas relatadas no 1^o Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática[1].

Motivado pelas pesquisas realizadas durante o curso de Mestrado e por diálogos como os professores João Bosco Pitombeira e Wagner Valente, resolvi propor para o segundo curso, alocado no 5^o período, a disciplina *História da Educação Matemática no Brasil*.

Objetivo deste curso é oferecer aos alunos uma visão geral do desenvolvimento histórico do ensino de Matemática no Brasil. Como a£rma Valente (2002),

> "a trajetória da *matemática escolar* – da matemática ensinada no ensino fundamental e médio – revela períodos de completa dissociação entre a produção dos matemáticos e a matemática das escolas; no entanto, esse percurso inclui, ainda, ocasiões em que são os próprios matemáticos que elaboram a matemática escolar. Caberá, portanto, à disciplina 'História da Matemática' levar os futuros educadores matemáticos à compreensão de

[1]Para maiores detalhes, con£ra CARVALHO, Luiz Mariano, GUIMARÃES, Luiz Carlos (org). *História e tecnologia no ensino da matemática: v. 1.* Rio de Janeiro: IME-UERJ, 2002.

> como foi sendo constituído o saber com o qual trabalham: a matemática escolar" (p. 94, grifos do autor).

Inicialmente tratamos das origens do ensino de matemática, que "começou a acontecer de maneira intencional no período das antigas civilizações orientais" (Miorim 1998, p.1). Passamos, então, pela antiguidade clássica e as origens do ensino clássico até a período de renovação, como denominado por Miorim (1998). Temos como referência, os dois primeiros capítulos desse livro: *O ensino de Matemática: das origens ao ensino clássico* e *O ensino de Matemática: da estiagem à renovação*.

Tendo como pano de fundo esta primeira parte, buscamos as origens da matemática escolar no Brasil, onde o texto de Valente (1999), intitulado *Uma história da matemática escolar no Brasil (1730 – 1930)*, passa a ser nossa referência.

Valente, neste trabalho, busca as origens da matemática escolar no Brasil, tomando como principais fontes os livros didáticos. Apesar de trabalhar com esse tipo de fonte, seu objetivo não foi escrever uma história dos livros didáticos de matemática, e sim

"averiguar que textos didáticos foram deixando marcas maiores na estruturação dos conteúdos, na seqüência didática e na organização da matemática elementar constituída para o ensino no Brasil durante os duzentos anos inicias de escolarização desse saber" (p. 20).

Valente divide seu livro em oito capítulos. No primeiro, denominado *Em busca das origens da matemática escolar no Brasil*, o texto procura "revelar os resultados das pesquisas realizadas sobre o ensino jesuítico para mostrar que as origens da matemática escolar situam-se no ensino leigo e militar", sendo estes objetos do segundo capítulo intitulado *Livros de matemática para a guerra: a arte de forti£car e deitar bombas*. (p. 21). Seguindo com o capítulo *Livros de matrizes da matemática escolar no Brasil*, Valente analisa "duas obras fundamentais para a estruturação do ensino de matemática no Brasil, que foram utilizadas entre nós desde o século XVIII", a saber, o *Curso Matemático*, de Bélidor, e *Elementos de Aritmética*, de Bézout (p. 22). No quarto capítulo, *Os livros dos cursos militares e a de£nição dos conteúdos da matemática*, o autor busca a "de£nição do conjunto de conteúdos de matemática" que poderiam ser ensinados aos que já tinham "conhecimento das quatro operações fundamentais da aritmética" (p. 22). Segue com os capítulos *A matemática: de saber técnico para a cultura geral escolar e os primeiros didáticos*, *Os livros de C.B. Ottoni como referência nacional para a matemática escolar*, *A escrita da matemática escolar nas últimas décadas do século* e *O encontro do colégio com a escola: as coleções de livros didáticos de matemática*, onde, neste último, o autor trata das coleções F.I.C. e F.T.D. Suas conclusões estão descritas num capítulo à parte, denominado *A construção da matemática escolar tradicional no Brasil (1730 – 1930)*.

Dando continuidade, abrimos um parêntese e analisamos o trabalho de Beltrame (2000), intitulado *Os Programas de Ensino de Matemática do Colégio Pedro II : 1837 – 1932*, resultado de uma pesquisa feita durante o Mestrado em Matemática na PUC-Rio. A autora, na dissertação tem como objetivo examinar a evolução do ensino da matemática no Brasil por intermédio dos programas desse colégio, já que o mesmo foi uma referência nacional para o ensino secundário brasileiro. O trabalho divide-se em duas partes: o primeiro capítulo, onde são analisados os programas do período Imperial (1822 – 1889), e o segundo capítulo, onde é feita uma análise do período Republicano (1889 – 1932). Em anexo encontram-se os programas de ensino do Colégio Pedro II, de 1850 até 1931. O trabalho constituiu-se, segundo a autora, de duas tarefas: localizar o máximo de programas de ensino de matemática do Colégio Pedro II e analisar as mudanças que ocorreram, de um programa para o outro, em relação ao conteúdo, bem como a sua distribuição ao longo dos anos, tendo por base, as reformas curriculares ocorridas.

Em seguida, passamos a nos deter num período de grande importância para a Educação Matemática brasileira, que por muitas vezes £cou esquecido: as primeiras décadas do século XX. Nesta parte do curso analisamos as mudanças operadas dentro do Colégio Pedro II, propostas pelo então professor catedrático Euclides Roxo. Tais mudanças, re¤exo de movimentos internacionais de reforma no ensino de matemática, foram de grande importância para a disciplina, já que pela primeira vez o estudo de Aritmética, Álgebra e Geometria passam a ser ministros sob a denominação de Matemática. Como determinado por Rocha (2001), neste momento houve a "criação" da disciplina "Matemática". Estas mudanças e as propostas de Euclides Roxo são incorporadas na reforma do ensino secundário empreendida por Francisco Campos, em 1931, e na Reforma Gustavo Capanema, em 1942. Temos como base para esta parte o texto de Rocha (2001) e a pesquisa por mim realizada durante o curso de Mestrado na PUC-Rio (Dassie, 2001), sintetizados em Dassie & Rocha (2003).

Na próxima parte do curso analisamos o Movimento da Matemática Moderna, onde o texto de Soares (2001), *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: avanço ou retrocesso?*, passa a ser a principal referência. Segundo a autora, o objetivo da pesquisa foi

> "relatar com mais detalhes *o que* foi o Movimento da Matemática Moderna, *como* foi desenvolvida e implantada a Matemática Moderna no Brasil, *quais* foram suas características e in¤uências mais importantes, *quais* foram as conseqüências positivas e negativas do Movimento e *quais* foram seus personagens principais" (Resumo).

Finalizamos o curso com uma breve análise das mudanças que estão sendo operadas no ensino de matemática, re¤exo das pesquisas que vêm sendo realizadas em âmbito nacional nas últimas duas décadas.

Além dos trabalhos descritos, outras pesquisas podem servir de apoio para uma disciplina como esta, como por exemplo, Tavares (2002), Werneck (2003) e Zuin (2001).

As aulas constam de discussões sobre os textos descritos, que são previamente £chados.

A avaliação dos alunos é feita por meio de dois trabalhos elaborados durante o curso. O primeiro consiste na leitura e apresentação dos capítulos de Valente (1999), além da confecção pelo grupo de uma resenha do respectivo capítulo. O segundo trabalho, elaborado individualmente, desenvolve tópicos da temática que não são abordados durante as aulas, como por exemplo, leitura de outras dissertações e teses sobre a história da educação matemática, comparação entre programas de ensino e livros didáticos indicados nos mesmos, análise de instruções metodológicas de alguns programas de ensino e o desenvolvimento de algum conceito de matemática elementar ao longo do período abordado.

Além de atingir o objetivo citado – oferecer aos alunos uma visão geral do desenvolvimento histórico do ensino de Matemática no Brasil – os debates têm proporcionando comparações com as atuais características no ensino desta disciplina, bem como a abordagem de temas, tais como, políticas públicas e pesquisa em Educação Matemática.

Esta disciplina vem despertando o interesse de alguns alunos para com a pesquisa historiográ£ca. Em particular, no segundo semestre de 2003, foi elaborada uma pesquisa sobre vida e obra de Aarão Reis, Bacharel em Ciências Matemáticas e Engenheiro Geógrafo e Civil, autor de livros didáticos adotados o£cialmente nos anos 1895 – 1898, no Colégio Pedro II. Assim, acreditamos que esta experiência, que vem sendo posta em prática desde o 1^o semestre do ano letivo de 2003, venha, também, proporcionar um resgate das idéias educacionais brasileiras no que diz respeito à Educação Matemática.

Referências

BELTRAME (2000). Os Programas de Ensino de Matemática do Colégio Pedro II: 1837 – 1932. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, Rio de Janeiro, Brasil.

DASSIE, B.A. (2001) A Matemática do Curso Secundário na Reforma Gustavo Capanema. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, Rio de Janeiro, Brasil.

DASSIE, B.A. & ROCHA, J.L. (2003) O Ensino de Matemática no Brasil nas Primeiras Décadas do Século XX. Caderno Dá Licença, (5), 4, 66 – 74, Instituto de Matemática, UFF.

MIORIM, M. A. (1998) Introdução à história da educação matemática. São Paulo, Atual.

ROCHA, J.L. (2001) A Matemática do Curso Secundário na Reforma Francisco Campos. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, Rio de Janeiro, Brasil.

SOARES, F. (2001) Movimento da Matemática Moderna no Brasil: avanço ou retrocesso? Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, Rio de Janeiro, Brasil.

TAVARES, J.C. (2002) A congregação do Colégio Pedro II e os debates sobre o ensino de matemática. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Departamento de Matemática, São Paulo, Brasil.

VALENTE, W.R. (1999) *Uma história da matemática no Brasil (1730 – 1930).* São Paulo, Annablume, FAPESP.

VALENTE, W. (2002) História da Matemática na Licenciatura: uma contribuição para o debate. Educação Matemática em Revista: Licenciatura em Matemática um curso em discussão. Edição Especial. (9), 11A, 88 – 94.

WERNECK, A.P.T. (2003) Euclides Roxo e a Reforma Francisco Campos. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Departamento de Matemática, São Paulo, Brasil.

ZUIN, E. (2001) Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação, Minas Gerais, Brasil.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 123:129
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 15

COMBINANDO LINGUAGENS NAS AULAS DE GEOMETRIA

Sandra Augusta Santos
Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Cientí£ca
UNICAMP
sandra@ime.unicamp.br

Maria Teresa Menezes Freitas
Faculdade de Matemática
UFU
Faculdade de Educação
UNICAMP
mtmf@unicamp.br

Resumo *As linguagens escrita (simbólica e discursiva), pictórica e computacional são combinadas em um trabalho semestral na disciplina "Geometria Plana e Desenho Geométrico", para Licenciatura em Matemática. Desenvolvida com aulas teóricas e práticas, esta disciplina contou com a ferramenta da Geometria Dinâmica (programa Tabulæ) para as atividades de laboratório. Aspectos históricos contextualizam o estudo, permeado pelos elementos de criação, sistematização e re¤exão. Uma atividade concreta ilustra esta dinâmica de ensino-aprendizagem.*

Palavras-chave *Geometria Dinâmica; Ensino-Aprendizagem; Linguagem Escrita; Interatividade.*

Abstract *Written (in symbols and words), pictorial and computational languages are combined in a semester's work of the subject "Plane Geometry", for prospective Mathematics teachers. Developed by means of theoretical and practical classes, this subject had the support of the Dynamic Geometry software Tabulæ for the computational activities. Historical aspects put the study in perspective, permeated by creation, systematization and re¤ection. A concrete activity illustrates this dynamic of teaching and learning.*

Key words *Dynamic Geometry; Teaching and Learning; Written Language; Interactivity.*

1. Apresentação

Este trabalho relata a experiência vivida por duas professoras universitárias no contexto da disciplina "Geometria Plana e Desenho Geométrico", no primeiro semestre de 2003, oferecida para estudantes de Licenciatura em Matemática do período noturno da Universidade Estadual de Campinas. A proposta da professora responsável pela disciplina, primeira autora deste texto, aliava o uso de régua e compasso aos programas de Geometria Dinâmica (GD) como ferramentas para motivar a descoberta, a constatação e a investigação de resultados. Na sistematização da aprendizagem, foi incentivado o registro, por escrito, do raciocínio utilizado. A disciplina teve seu conteúdo distribuído semanalmente entre aulas teóricas (2h) e práticas, em laboratório computacional (2h). O ensino-aprendizagem combinando diferentes formas de comunicação despertou o interesse da pesquisadora, segunda autora deste texto, que acompanhou criteriosamente o desenvolvimento da disciplina ao longo do semestre.

2. A escrita na busca de signi£cados

Diversos pro£ssionais da área do ensino vêm experimentando diferentes abordagens em sala de aula na busca de uma melhor compreensão e interpretação do objeto de estudo pelos seus alunos. Algumas experiências no ensino da Matemática envolvem uma mudança de ênfase exclusiva do uso de fórmulas para a utilização de outras linguagens, que incluem a escrita discursiva. Powell (2001) e Lopes (2002) apontam a utilização da escrita como possibilidade de contribuir para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

O uso da linguagem escrita nas aulas de Matemática vem acompanhando a autora, responsável pela disciplina, em sua trajetória pro£ssional na Universidade desde 1999. Pequenos textos, tais como "biogra£as matemáticas" e "bilhetes de £m de aula", cartas, mapas conceituais acompanhados de texto, glossário e diários foram instrumentos utilizados nas disciplinas de Cálculo (de uma e de várias variáveis), de Álgebra Linear e de Complementos de Matemática para a Química.

3. A linguagem computacional na Geometria

A existência de diversos programas computacionais que propiciam a abordagem dinâmica da geometria tem atraído a atenção de diversos pro£ssionais de ensino. No caso da professora responsável pela disciplina, a concepção da proposta diferenciada de trabalho adveio da combinação de dois fatores principais: a experiência prévia com atividades computacionais no ensino de Cálculo de uma e de várias variáveis, e a disponibilidade de um programa de Geometria Dinâmica essencialmente nacional: o *Tabulæ.*

Este *software* foi desenvolvido pelo grupo da Universidade Federal do Rio de Janeiro liderado pelos professores Luiz Carlos Guimarães e Elizabeth Belfort e alia características dos programas *Cabri-Géomètre* e *Geometer's Sketchpad.* Segundo Guimarães, Belfort e Barbastefano (2003)

A interface grá£ca do Tabulæ permite que o usuário escolha, a cada passo, entre os modos de construção adotados pelos Cabri e pelo Sketchpad, e denominados por Bellemain (1992) de "verbo-nome" e de "nome-verbo". Ou seja: primeiro de£ne-se a ação, e depois escolhem-se os objetos (Cabri) ou vice-versa (Sketchpad).

As características do programa *Tabulæ* propiciaram um ambiente favorável para o desenvolvimento de atividades investigativas[1] na disciplina em questão.

4. Comunicação com e sem palavras

As atividades de laboratório da disciplina possuíam uma estrutura comum que abrigava dinâmicas ¤exíveis de trabalho para contemplar a investigação proposta. Esta estrutura compreendia: *Introdução e objetivos*, *Preparação*, *No laboratório* e *Para entregar*.

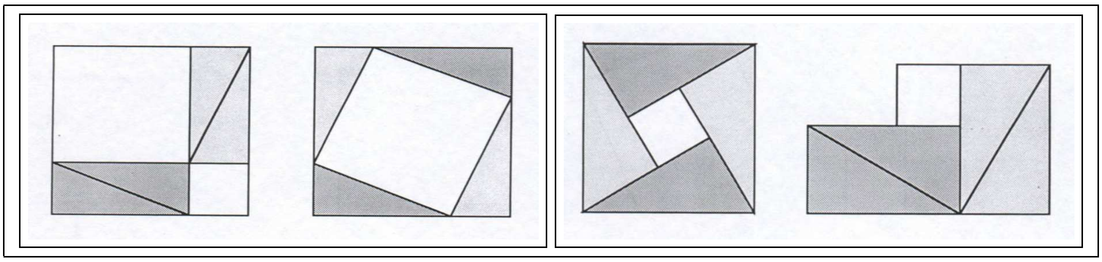


Figura 1: Pranchas utilizadas em uma das atividades investigativas de laboratório (extraídas de Nelsen, 1993 págs. 3 e 4).

Para exempli£car, descreveremos uma das doze atividades propostas no semestre, intitulada **Teorema de Pitágoras**. A Figura 1 ilustra duas das seis pranchas disponibilizadas para o desenvolvimento do trabalho no laboratório.

[1] *Investigação Matemática* se relaciona ao desenvolvimento de atividades em que as situações propostas são abertas e as questões não estão completamente formuladas, permitindo ao aluno se envolver na atividade, de forma criativa, desde o primeiro momento (Segurado, 2002)

Estas duas pranchas se destacaram entre as demais em função da preferência dos estudantes. A prancha da esquerda, adaptada de Chou Pei Suan Ching (autor desconhecido, cerca de 2007 a.C.) foi a mais escolhida (28%) enquanto a da direita (Bhaskara, século XII) não foi trabalhada por nenhum aluno.

Nas instruções para esta atividade, entregues em sala, os trechos correspondentes aos ítens *Introdução e Objetivo*, *No laboratório* e *Para entregar* foram os seguintes:

Introdução e objetivos
Nesta atividade, o Teorema de Pitágoras é abordado sob os pontos de vista geométrico, analítico, algébrico e histórico. Iniciamos com a retomada da sua prova (e a de seu recíproco) usando a teoria de semelhança de triângulos (capítulo 5 do livro-texto, Rezende & Queiroz, 2000). A seguir, tendo como base a axiomática do capítulo 7 (Rezende & Queiroz, 2000), com os postulados e resultados decorrentes envolvendo áreas de regiões planas simples, resgatamos outras provas, envolvendo o conceito de área. Este é o caso das provas sugeridas como exercícios no capítulo 7 (exercícios 7.4 e 7.6), assim como a prova que aparece nos Elementos de Euclides, recuperada como preparação desta atividade. No laboratório exploramos 'provas sem palavras' de Nelsen (1993), cuja justi£cativa é elaborada na forma de um texto escrito (carta para a tia Belarmina), a ser entregue no £nal da aula.

No laboratório
Escolha uma das pranchas I –VI, em anexo, extraídas da referência Nelsen (1993), e explore a construção correspondente no programa *Tabulæ*. Seu objetivo é a busca de elementos para compreender e interpretar a imagem escolhida, tornando-o(a) capaz de explicar como ela pode ser usada para mostrar o resultado expresso pelo Teorema de Pitágoras.

Para entregar
Prepare uma carta para a sua tia Belarmina, explicando a ela a 'prova sem palavras' da prancha correspondente à escolha que você fez no laboratório, que deve ser especi£cada claramente. Como apoio para a sua argumentação, inclua £guras e nomeie os elementos geométricos que julgar necessários (pontos, retas, segmentos, ângulos, etc.). Mas lembre-se, já faz um bom tempo que a sua tia Belarmina estudou geometria! Você deve ajudá-la a lembrar-se de tudo o que for essencial para acompanhar e compreender o seu texto.

Cabe destacar que cada atividade proposta continha uma lista das referências bibliográ£cas que, além de embasar o material proposto, oferecia subsídios aos alunos para um aprofundamento.

Na atividade do Teorema de Pitágoras, em especial, a preparação constava de um detalhamento das demonstrações deste teorema e seu recíproco[2], presentes de forma sucinta no livro-texto da disciplina (Rezende & Queiroz, 2000). A prova para este teorema, que consta nos Elementos de Euclides, escritos por volta de 300 a.C., foi abordada em forma de um exercício preparado com base em Moise & Downs (1971). Neste exercício havia um roteiro de encaminhamento da prova em linguagem simbólica, acompanhado do diagrama do 'capelo franciscano' ou 'chapéu de noiva' (cf. Eves, 2002, p.182), resgatando assim aspectos históricos do conteúdo[3]. As justi£cativas que garantiam a legitimidade da demonstração deveriam ser entregues pelos alunos no início da aula de laboratório.

[2]Dada a proposição "se p então q", sua recíproca é "se q então p".

[3]Uma referência atual que aborda demonstrações para o Teorema de Pitágoras e seus aspectos históricos é o artigo de Silva & Lorenzoni (2001/2002).

5. Algumas considerações

Todas as atividades desenvolvidas ao longo da disciplina fazem parte de um dos blocos do material de análise da pesquisa de doutorado, em fase de desenvolvimento, da segunda autora deste trabalho.

O acompanhamento criterioso e sistemático da pesquisadora de todo o processo vivido e experimentado pela turma de Licenciandos, pela professora responsável e por ela mesma remete a alguns indícios iniciais sobre a utilização de diferentes formas de comunicação e registro no ensino de um conteúdo especí£co de matemática (geometria).

Considerando a aprendizagem dos alunos durante o curso, a escrita, menos formal e não exclusivamente simbólica, revelou-se uma maneira por meio da qual a compreensão matemática pode ser desenvolvida e avaliada de maneira signi£cativa. As diferentes formas de comunicação dos alunos, consigo mesmos e com outros, parece viabilizar a construção de diferentes redes de saberes, responsáveis pela compreensão do signi£cado do conteúdo objeto de estudo.

As várias formas de comunicação, em especial, a escrita, aparecem como ferramentas poderosas de mediação do processo de ensino aprendizagem da matemática.

Referências

BELLEMAIN, F. (1992) Conception, réalisation et utilisation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie: Cabri-géomètre, Tese de doutorado, Universidade Joseph Fourier. Grenoble.

EVES, H. (1997) Introdução à História da Matemática. 2 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp.

GUIMARÃES, L. C.; BELFORT, E.; BARBASTEFANO, R. (2003) Geometria Dinâmica e Ensino à Distância em Matemática: Desenvolvendo Plataformas para o Plano e o Espaço. XI CIAEM, Blumenau (SC), Julho 2003. Trabalho completo em CD-Rom. 10 p.

LOPES, A.J. (2002) A escrita no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Pátio ano VI n.^{o} 22, Jul./Ago.

MOISE, E. E.; DOWNS Jr., F. L. (1971) Geometria Moderna - Parte I, São Paulo: Edgard Blücher.

NELSEN, R. B. (1993) Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking, Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1993.

POWELL, A. B. (2001) Captando, Examinando e Reagindo ao Pensamento Matemático. Boletim 39. RJ.: GEPEM Setembro.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. (2000), Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas. Campinas, SP: Editora da Unicamp; São Paulo: Imprensa O£cial.

SEGURADO, I. (2002) O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas? In: Re¤ectir e Investigar sobre a Prática Pro£ssional. Organização: GTI- Grupo de Trabalho de Investigação. Editora: Associação de Professores de Matemática. 1^a edição, 57-73.

SILVA, C. M. S.; LORENZONI, C. A. C. A. (2001/2002) O velho conhecido Teorema de Pitágoras e suas demonstrações. Revista História & Educação Matemática (2), 2, 111-122.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 131:138
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 16

VALE UTILIZAR SOFTWARES NO ENSINO DE CÁLCULO? [1]

Marger da Conceição Ventura Viana
Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
UFOP
Venturaviana@aol.com

Resumo *Para analizar a utilização do software* Mathematica *no processo de ensino/aprendizagem de Cálculo na Universidade Federal de Ouro Preto foram constituídos dois grupos de alunos da disciplina Cálculo II. Apenas em um deles usou-se o referido software. Feita a comparação das médias £nais dos alunos dos dois grupos, comprovou-se diferença signi£cativa, havendo alcançado melhor desempenho a equipe que utilizou o software.*

Palavras-chave *Software* Mathematica ; *Processo de ensino/aprendizagem; Cálculo.*

Abstract *We used the software* Mathematica *in the process of the teaching and of the learning of Calculation in the Federal University of Ouro Preto. To analyze its effect in the discipline Cálculo II, two groups of students were constituted: in one of them was used referred him software; in the other, the students didn't have contact with him. Done the comparison of the students' averages ends, was proven signi£cant*

[1]Este texto é aperfeiçoamento do trabalho apresentado no III Simpósio Iberoamericano de Investigación y Educación realizado pelo ICCP, no Centro de Convenciones Pedagógicas, de 1 a 4 de fevereiro de 2000, na cidade de La Habana, Cuba, e publicado no Caderno de Resúmenes, página 39, do artigo "Usando el software Mathematica en la enseñanza del Cálculo" apresentado e publicado na íntegra nos Anais do XXXVIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, realizado pela ABENGE, na UFOP, de 29 de outubro a 01 de novembro de 2000, porém de acesso mais difícil porque em CD-ROOM e espanhol. Uma versão mais completa e atualizada foi apresentada na Mesa Redonda Informática e Educação Matemática no I Encontro Regional de Educação Matemática da Unimontes/SBEM-MG, realizado em Montes Claros-MG, de 13 a 14 de setembro de 2002.

difference among the groups, having reached better acting the team than it used the software.

Key words Mathematica *software; Teaching/learning; Calculus.*

1. Introdução

A complexidade da Matemática e da Educação exige que os teóricos e os agentes da Educação Matemática estejam permanentemente atentos às transformações profundas da sociedade. A dinâmica cambiante da situação mundial vem exigindo, por isso, que esses pro£ssionais entendam a necessidade de constantes atividades de revisão e aperfeiçoamento.

Assim, em julho de 1996, na Espanha, durante o 8^o Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME 8), tomamos conhecimento da existência dos pacotes computacionais que estavam sendo utilizados como apoio e£ciente no ensino de Cálculo, Álgebra Linear, Equações Diferenciais e outras disciplinas, em universidades estrangeiras, facilitando a compreensão e despertando maior interesse nos alunos para a aprendizagem. Acreditamos que nenhum professor de Matemática pode, hoje, ignorar o poder desses softwares, dos quais o *Mathematica* parece ser o mais utilizado. Até nas empresas, mesmo no Brasil, utilizam-se pacotes computacionais e £nanciam-se projetos com o objetivo de divulgação e/ou desenvolvimento pro£ssional, podendo-se citar, a título de exemplo, o Convênio Unesp-IBM, assinado em 1993 e citado por (Bicudo, 2000, p.5).

Em razão, pois, das exigências atuais impostas pelo desenvolvimento cientí£co e tecnológico, de superação de paradigmas, e das di£culdades no processo de obtenção e manutenção de empregos, o ensino não pode mais se centrar em cálculos e na aula copiada, que é criticada por Demo (1996). O importante é, além da adequação do computador à resolução de problemas, a economia de tempo, para usá-lo em tarefas nobres. Assim, é necessário humanizar o saber, de modo que o homem e a máquina ocupem o lugar a que cada um faz jus e a Educação Matemática contribua para essa construção.

Na verdade, já está ocorrendo verdadeira revolução no ensino de Cálculo, Geometria, Álgebra Linear e de Matemática em universidades brasileiras e existem softwares utilizados como apoio e£caz também no ensino de outras disciplinas, facilitando a compreensão e despertando maior interesse nos alunos pela aprendizagem.

Essas questões ganham destaque quando se fala da Engenharia e da Licenciatura em Matemática. Se, para o primeiro curso, é preciso saber usar essas ferramentas de trabalho, os educadores matemáticos deverão desmisti£cá-las e utilizá-las bem, no aperfeiçoamento do processo de ensino/aprendizagem dos que vão ser professores de Matemática.

Já não se admite mais despender tempo com cálculos manuais, se eles podem ser realizados por uma máquina. Os programas de computador, com visualização de grá£cos de certas funções, cálculos, manipulações simbólicas e análise quantitativa, podem tornar viável a solução de problemas, o que antes era quase impraticável. O que não se pode perder de vista é que os pacotes computacionais não devem ser vistos como máquinas de ensinar, mas como, por exemplo, possibilidade de visualizar curvas e superfícies no espaço, construir grá£cos de funções, além de auxiliar na resolução de problemas, permitindo a re¤exão crítica e o desenvolvimento de idéias .

Esta é, entre outras, uma boa razão para o uso da informática na Educação Matemática: possibilitar situações de resolução de problemas, objetivando desenvolvimento do raciocínio e autonomia do aluno para a construção do conhecimento. Vários autores têm estudado a questão e entre eles Borba (1999) e Tikhomirov (1981), a título de exemplo.

2. Experiência com a Informática Educativa

A nossa relação com a Informática Educativa, assim denominada por alguns autores, como Oliveira (1999), teve início com o estudo do software *Mathematica*. Para isso, utilizamos bibliogra£a pertinente, como ALVAREZ et all (1994), BRADEN et all (1992), este último mais completo para os nossos propósitos, e um texto de TANEJA (1995), que é mais fácil de ser utilizado pelos alunos, mas que não é su£ciente para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral. A partir disso, passamos a utilizar o software *Mathematica* no processo de ensino/aprendizagem do Cálculo III e, em algumas ocasiões, oferecemos minicursos ou o£cinas (Viana, 1997, I EMEM-Ouro Preto/MG; Viana, 1998a I EREM-Ouro Preto/MG; Viana,1998c, VI ENEM-C-504-São Leopoldo-RS; Viana e Maia, 2000b, II EMEM-Belo Horizonte-MG), pretendendo somente informar aos participantes desses eventos a existência de softwares matemáticos e oferecer introdução ao software *Mathematica*, com objetivos como a construção de grá£cos de funções e, sobretudo, incentivo ao prosseguimento de estudos (formação continuada) nas escolas de origem, utilizando os livros já existentes.

Orientamos três bolsistas do Programa de Iniciação à Pesquisa, o PIP, da Pró-Reitoria de Pós-Graduação da UFOP. O primeiro no uso do software *Mathematica* em Cálculo (Viana e Couto, 1998b), o segundo em pesquisa para analisar a validade do uso do mesmo software no processo de ensino/aprendizagem do Cálculo II (Viana e Pires, 1999a) e o terceiro em outro projeto de pesquisa (Viana e Pires, 2000d), que utilizou o software "QSR NUD*IST 4" para analisar as respostas abertas dadas a duas perguntas de dois questionários da pesquisa da nossa tese de doutorado, referentes às exigências atuais para a formação do professor de Matemática.

Também tivemos um bolsista do Pró-Ativa/Prograd/UFOP, na elaboração de um manual a ser utilizado pelos alunos de Cálculo na aprendizagem do software *Mathematica* (Viana e Maia,1999b).

A partir da experiência com o software *Mathematica*, foi possível elaborar um artigo para o XXXVIII CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DE ENGENHARIA, publicado integralmente nos ANAIS do evento (Viana, 2000b).

Trabalho preliminar também foi apresentado no III SIMPÓSIO IBEROAMERICANO DE INVESTIGACIÓN Y EDUCACIÓN organizado pelo ICCP, na cidade de La Habana-Cuba, que foi publicado no Caderno de Resumos, (Viana, 2000a),

Atualmente, estamos iniciando a orientação de bolsista do Programa de Iniciação Cientí£ca, o PIBIC, também da Pró-Reitoria de Pós-Graduação da UFOP, em pesquisa que tem o objetivo de analisar o sistema de avaliação do processo de ensino/aprendizagem da Matemática em escolas do Ensino Fundamental, séries £nais, de Ouro Preto- MG, sendo possível o uso de algum software para análise das respostas abertas a entrevistas e questionários.

3. Pesquisa para analisar a validade do uso do software *Mathematica* no processo de ensino/aprendizagem do Cálculo II

A princípio, não podíamos garantir que a utilização do software facilitava a aprendizagem do aluno. Assim, realizamos estudos no sentido de entender se tal utilização realmente havia produzido melhores resultados na aprendizagem do Cálculo III. Em primeiro lugar, comparamos as médias £nais das turmas da disciplina Cálculo III da UFOP, do primeiro e segundo semestres letivos do ano de 1998, ou seja, comparamos as médias dos alunos que aprenderam a usar o software com as dos que não aprenderam. Sem utilizar medidas estatísticas, somente por meio de simples observações, foi possível ver que havia diferenças: os alunos que aprenderam a usar o software obtiveram resultados melhores que os daqueles que não aprenderam.

A seguir, também com uma bolsista do PIP, foi feita outra pesquisa com dois grupos de estudantes da disciplina Cálculo II, com o objetivo de veri£car se a utilização do Software *Mathematica* realmente facilitava a aprendizagem, isto é, se havia diferença signi£cativa entre os resultados obtidos pelos estudantes que aprenderam a utilizá-lo e resultados obtidos por aqueles que não tiveram tal oportunidade.

A utilização do software foi ensinada a um grupo de alunos matriculados na disciplina Cálculo II, mas todos os alunos matriculados em Cálculo II foram convidados a participar das aulas do curso que era dado extraclasse. As aulas foram dadas pela bolsista, no período noturno (extraclasse), uma vez por semana, durante o semestre, cerca de 15 (quinze) aulas. A seguir, foram comparados os resultados £nais do grupo de estudantes que aprendeu a utilizar o software com os resultados do grupo que não aprendeu. Consideraram-se as seguintes hipóteses:

H_0 (hipótese zero): não há diferença signi£cativa entre o grupo de controle e o grupo experimental, com respeito ao desempenho na disciplina Cálculo II.

H_1 (hipótese um): há diferença signi£cativa entre o grupo de controle e o grupo experimental, com respeito ao desempenho na disciplina Cálculo II.

O teste estatístico Mann-Whitney[2] mostrou que a diferença é signi£cativa no nível de signi£cância α 0,05, pois foi obtido o valor para a probabilidade de signi£cância p de 0,0197, o que implica a rejeição da hipótese zero (H_o). Isso leva à conclusão de que há diferença signi£cativa entre o desempenho acadêmico dos estudantes que aprenderam a usar o software *Mathematica* na aprendizagem da disciplina Cálculo II e o desempenho dos que não aprenderam.

Com relação ao índice de aprovados na disciplina, a porcentagem do grupo que aprendeu o software foi de 88.88% enquanto a do outro grupo foi de 50%.

Conclui-se, então, que trouxe bons resultados o software *Mathematica* no processo de ensino/ aprendizagem da disciplina Cálculo II.

4. Considerações Finais

Apesar de ser esse resultado obtido com um método con£ável, a análise estatística, é preciso ponderar que é difícil atribuir o sucesso somente à aprendizagem/utilização do software *Mathematica*. Isso porque os alunos que aprenderam a usá-lo se mostraram interessados, desde o início, pois se inscreveram nas aulas extras por opção pessoal. O único aluno inscrito que não participou das mesmas foi reprovado na disciplina por desistência, o que impediu que a porcentagem de aprovação do grupo que se inscreveu para aprender o software fosse de 100%. Além disso, com a experiência obtida na utilização do software em

aulas de Cálculo III, parece que conseguimos in¤uenciar outros professores, para utilizá-lo em Cálculo I e em Equações Diferenciais. Com as respostas dadas pelos alunos aos questionários de auto-avaliação, aplicados nos £nais dos semestres letivos, somos levados a considerar que, de fato, vale a pena utilizar um software matemático para auxiliar o processo de ensino /aprendizagem do Cálculo.

Pela exigüidade do tempo e espaço, não se vai ater às perguntas contidas nesses questionários, no entanto é preciso registrar que os alunos foram bene£ciados pelo trabalho em duplas, tanto no Laboratório de Recursos Computacionais (LABMAT) quanto na sala de aula comum e em trabalhos extraclasse, segundo a£rmações dos mesmos. Esses resultados levam a crer que uma das relevâncias deste trabalho foi auxiliar o aperfeiçoamento do processo de ensino/aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, que têm, nos últimos anos, não só na UFOP, mas também em outras ins-

[2]Esse procedimento foi sugerido pelo professor Dr. Vicente Garibary Cancho do Departamento de Matemática da UFOP que muito gentilmente forneceu-nos este método de análise dos dados.

tituições de Ensino Superior, índices inaceitáveis de reprovação. Para comprovar, é su£ciente ler os relatórios de resultados £nais das disciplinas relacionadas ao Cálculo.

Referências

ALVAREZ, E. C., et alii. (1994) *Mathematica.* Madrid: Editorial Paraninfo, 1994 432 p.

BICUDO, M. A. V. (2000) "*Prefácio"*. In: BORBA, M., C. & PENTEADO, M. G. (orgs.) A Informática em ação: formação de professores, pesquisa e Extensão. São Paulo: Olho d'Água. 79 p.

BORBA, M. C. (1999) *"Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento"*. In: Bicudo, M. A. V. (org.) Pesquisa em Educação Matemática: concepção e perspectivas. São Paulo: UNESP, 313 p.

BRADEN, Bart, et alii. (1992) *Discovering Calculus With Mathematica.* New York: John Wiley & Sons INC. 170 p.

DEMO, P. (1996).Formação permanente de Formadores - Educar pela Pesquisa. In: MENEZES, L. C., Org. *Professores: Formação e Pro£ssão.* Campinas, São Paulo: Autores Associados, 448p.

OLIVEIRA, R.(1999) *Informática Educativa: dos Planos e discursos à sala de aula*. 3^{a}ed. Campinas-SP: Papirus, 176 p.

TANEJA, I. J. (1995) "*Mathemática" no Ensino de Cálculo:Uma Abordagem computacional*- Florianópolis :Dep. de Matemática-UFSC.

TIKHOMIROV, O. K. (1981) "*The Psycological Consequences of Computerizacion"*. In: Wertsh, J. V. (Ed.) The concept of activity in soviet psycology. New York: M. E. Sharp. INC.

VIANA, M. C. V. (2002) *Perfeccionamiento del Currículo para la formación de profesores de Matemática en la UFOP*. Tese de Doutorado em Ciências Pedagógicas. Instituto Central de Ciências Pedagógicas, ICCP/UFOP.

VIANA, M. C. V. (2000a) "*Usando el Software Mathematica en la enseñanza del cálculo"* (resumo). In: III SIMPÓSIO IBEROAMERICANO DE INVESTIGACIÓN Y EDUCACIÓN, La Habana-Cuba. Cuaderno de Resúmenes. v. único, p. 39.

VIANA, M. C. V. & MAIA, A. P.(2000b) O£cina: OP 26-"*Introdução ao software Mathematica"* (resumo). In: II ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2000b, Ouro Preto-MG. Anais do II Encontro Mineiro de Educação Matemática. v. único, p. 108.

VIANA, M. C. V. (2000c) "*Usando el Software Mathematica en la enseñanza del cálculo"*. In: XXXVIII CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DE ENGENHARIA, 2000c, Ouro Preto. Anais do XXXVIII Congresso Nacional de Ensino de Engenharia. Ouro Preto: Publicado em CD-ROOM, v. único.

VIANA, M. C. V. & PIRES, F. B.(2000d)," *Exigências atuais para a formação do professor de Matemática: uma utilização do QSR NUD*IST 4*" (resumo). In: VIII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFOP, Ouro Preto. Anais do VIII Seminário de Iniciação Cientí£ca da UFOP. Ouro Preto: Coordenadoria de Imprensa UFOP, 2000. v. único, p. 150.

VIANA, M. C. V.; PIRES, F. B.(1999a), "*Usando o Mathematica na aprendizagem do Cálculo II"* (resumo). In: VII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFOP, Ouro Preto. Anais do VII Seminário de Iniciação Cientí£ca da UFOP. Ouro Preto: Imprensa e Editora Universitária da UFOP, v. único, p. 177.

VIANA, M. C. V. & MAIA, A. P. (1999b) *Manual para utilização do software Mathematica no Cálculo*. Ouro Preto, Pró-Ativa-Prograd, no Prelo.

VIANA, M. C. V. (1998a) I Encontro Regional de Educação Matemática de Ouro Preto I EREM- Ouro Preto/MG.

VIANA, M. C. V.; COUTO, Alessandro C. (1998b)"*Usando o Mathematica na aprendizagem do Cálculo"* (resumo). In: VI SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFOP, Ouro Preto. Anais do VI Seminário de Iniciação Cientí£ca da UFOP. v. único, p. 148.

VIANA, M. C. V. (1998c) OFICINA "*O software Mathematica"* (resumo). In: VI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, São Leopoldo. Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática. Vol 1, p. 257.

VIANA, M. C. V. (1997) Mini-curso: "*O software Mathematica"*. In: I ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA., Ouro Preto-MG.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 139:145
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 17

UM RELATO DO USO DE TECNOLOGIA NO ENSINO INTEGRADO

NÍVEL BÁSICO DE MATEMÁTICA

Yuriko Yamamoto Baldin
Departamento de Matemática
UFSCar
yuriko@dm.ufscar.br

Ivana Aparecida da Silva Calsani
E.E. Alberto Santos Dumont
Ribeirão Preto, SP
ivy.mat@ig.com.br

Resumo *A introdução didática de tecnologias no ensino básico de matemática exige pesquisas que envolvem o estabelecimento da metodologia e análise das atividades de conteúdo e de avaliação. Neste trabalho, apresentamos relato de uma experiência que envolveu o ensino de função linear com calculadora grá£ca em contexto de ensino integrado, dentro de um projeto de colaboração entre a Universidade Federal de São Carlos e escolas públicas de Ribeirão Preto.*

Palavras-chave *Tecnologia no Ensino; Ensino Integrado; Atualização de Professores; Calculadoras Grá£cas.*

Abstract *The didactical introduction of technology in basic school classrooms requires research work that involves the de£nition of methodology and analysis of the activities, in content and of assessment. In this paper we report about an experiment on the teaching of linear function with graphic calculator, in the context of integrated instruction, performed within a collaboration project between Universidade Federal de S.Carlos and public schools of Ribeirão Preto.*

Key words *Technology in Teaching; Integrated Instruction; Professional Development of Teachers; Graphic Calculators.*

1. Introdução

A introdução de ferramentas tecnológicas na prática escolar constitui um dos aspectos inovadores nas diretrizes que norteiam a educação básica, como podemos observar nos recentes documentos o£ciais, por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Fundamental-Matemática (PCN-Matemática,1998). Na página 43 desta referência, lemos que:

"(pela in¤uência dos recursos de informática)... insere-se mais um desa£o para a escola, ou seja, o de incorporar ao seu trabalho, tradicionalmente apoiado na oralidade e na escrita, novas formas de comunicar e conhecer".

Uma das maneiras mais fáceis de entender a inserção da tecnologia no contexto educacional é seu uso como um meio de comunicação de informações, por meio de aparelhos de comunicação (projetores, TVs, vídeos, £lmes, etc) e de cursos via redes eletrônicas. Porém, a in¤uência dos recursos tecnológicos na prática educacional é muito maior, principalmente na disciplina de Matemática. A possibilidade de inovação metodológica com auxílio de informática é citada nos PCN's, por exemplo, nas páginas 44 e 45. Esta possibilidade constitui um campo novo de pesquisa que se abre em muitas frentes de trabalho, em andamento em todo o mundo. A pesquisa nesta linha merece uma atenção cuidadosa dos educadores, especialmente de uma disciplina importante como Matemática. Em (Perrenoud, 2000), o autor levanta um questionamento (pg 139) sobre "...se os professores irão apossar-se das tecnologias...para *mudar de paradigma*[1] e concentrar-se na criação, na gestão e na regulação de situações de aprendizagem." Em (Baldin, 2002b) a autora discute diferentes maneiras com que variadas tecnologias podem ser inseridas numa sala de aula, para contribuir à compreensão do papel da tecnologia no planejamento de aulas com metodologias inovadoras. Para avançar nesse campo de pesquisa é necessário que as propostas de atividades sejam acompanhadas de um treinamento de professores na ativa, principalmente nos aspectos conceituais do conteúdo e metodologia adequada. A atividade de avaliação, por sua vez, constitui etapa importante para legitimar propostas de novas metodologias que contribuam para a prática escolar condizente com os PCN's. Neste artigo, apresentamos uma experiência concreta de uso de tecnologia nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental, dentro da orientação de Ensino Integrado, outro item importante das novas diretrizes educacionais.

2. Tema da Atividade

Em 2002, o Projeto de Atualização de Professores do Ensino Fundamental e Médio da Universidade Federal de São Carlos foi desenvolvido dentro do Projeto Pró-Ciências, com £nanciamento da CAPES/FAPESP, e, pela primeira vez neste tipo de

[1] Destaque no texto original

projeto, houve uma estreita colaboração da Secretaria de Estado da Educação e das delegacias de ensino regionais. Isto permitiu uma organização dos professores participantes por escola, por delegacia, e também pela proximidade das suas cidades para trabalhar um item importante dos Parâmetros Curriculares, que é o trabalho em equipe. Através desse tipo de trabalho, o desa£o foi construir atividades de um ensino integrado. Dentro das orientações sobre Temas Transversais, o tema escolhido por um grupo de professores das escolas públicas de Ribeirão Preto foi “Energia dos Alimentos e Saúde”, com integração das atividades de Biologia, Química, Física, Língua Portuguesa, Educação Física e Matemática, sendo esta disciplina objeto deste trabalho. Por limitação das páginas, omitiremos o conteúdo detalhado das atividades interdisciplinares.

3. Atividade de Matemática

Dentro das atividades do projeto “Energia dos Alimentos e Saúde”, uma questão abordada foi a relação entre o bem-estar (conceito subjetivo, ligado ao padrão de beleza atual) e o peso ideal (resultado objetivo, derivado de conhecimento cientí£co) de um adolescente, o que tem evidentes ligações com uma alimentação saudável e equilibrada em calorias.

Um dos conceitos pesquisados e estudados pelos próprios alunos das escolas dos professores participantes foi o conceito de Índice de Massa Corporal (IMC) e de Taxa Metabólica Basal (TMB). O desenvolvimento das aulas sobre esses conceitos leva naturalmente à interpretação das fórmulas e cálculos matemáticos. Estes envolvem dependência de parâmetros variáveis como altura, peso e idade, com respectivas unidades de medição. Portanto, atividades com estas fórmulas trazem signi£cados para o procedimento matemático que se relaciona com informações sobre o corpo do estudante, estabelecendo uma contextualização.

Em particular, uma atividade com calculadora grá£ca TI-92 plus foi realizada para o estudo do conceito de IMC, dado pela fórmula:

IMC = P/ A^2, onde P é a massa do corpo medido em quilogramas (kg) e A é a altura medida em metros (m).

Por ocasião da realização da atividade, cada aluno pode considerar sua própria altura como uma constante e, assim, pode modelar seu IMC como uma função da variável x (= Peso (massa) em kg). O aluno deve reconhecer que x é escolhida como variável da função, pois seu peso x realmente pode variar através da alimentação e/ou exercícios físicos, num espaço razoavelmente curto de tempo.

Assim, chega-se à modelagem da fórmula de IMC, para cada aluno, como:

IMC = k*x, onde k = 1/ A^2e x é o peso em kg. Isto leva ao estudo da função linear.

As faixas de intervalos de IMC fornecem critérios para classi£cação do estado de obesidade de uma pessoa. A seguinte informação sobre IMC pode ser obtida no sítio

//www. webcalc.com.br/
Abaixo de 19: Peso abaixo do normal
Entre 19 e 25: Faixa desejável de peso
Entre 26 e 29: Peso acima do desejável
Entre 30 e 40: Obeso
Acima de 40: Obesidade excessiva

A atividade de Matemática constituiu-se em cada aluno estudar gra£camente o seu IMC em função da variação de seu peso, situando as faixas de seu peso ideal. Nesse estudo, foi importante a conceituação de variáveis independente e dependente, a análise do comportamento de função crescente relacionado ao coe£ciente angular k, e interpretação deste como uma taxa de variação. Esta taxa de variação foi também trabalhada como uma grandeza que varia inversamente proporcional ao quadrado da altura.Devido à natureza dos dados numéricos que a função envolve, torna-se natural a utilização de uma ferramenta tecnológica.

4. Atividade com Calculadora Grá£ca

A utilização da tecnologia portátil (no caso, calculadora grá£ca TI-92 plus) foi extremamente e£ciente, primeiro por trazer um ambiente informatizado para sala de aula comum de uma escola pública. A aplicação das atividades ocorreu em 2002 e 2003, em escolas públicas sem capacidade de oferecer sala informatizada para as classes. Em segundo lugar, o uso de calculadora personaliza a atividade, permitindo que cada estudante modele grá£cos individualmente e também faça análises comparativas com grá£cos de seus colegas. Assim, se estabelece um ambiente dinâmico de aprendizagem, com participação de todos. As interpretações dos grá£cos e respostas às questões levantadas trouxeram signi£cados às aulas de Matemática para muitos estudantes, antes desmotivados. Por falta de espaço, limitamo-nos a apresentar uma tela da calculadora, na seguinte Figura 1.

A Figura 1 representa uma tela da calculadora em que aparecem grá£cos de IMC de dois alunos, respectivamente com 1,78m de altura e 1,56m. Podemos, de imediato, fazer um questionamento sobre qual das retas representa o grá£co correspondente aos dados de qual aluno. As faixas horizontais representam as faixas de IMC para classi£cação do peso ideal. O cursor interativo da calculadora permite explorar diversas questões, dinamicamente. Por exemplo, na Figura 1 temos a leitura de coordenadas do cursor, que signi£cam que o aluno de altura 1,56m teria que emagrecer se pesasse 69kg, pois seu IMC seria 28,2541. Por outro lado, o colega de 1,78m de altura, não tem problemas em pesar 69kg.

Através desta atividade com calculadora, diversos conteúdos de função linear puderam ser trabalhados, vários problemas puderam ser formulados e resolvidos em conexão com fatos reais. Referimos a (Baldin, 2002a) para o roteiro de atividades com

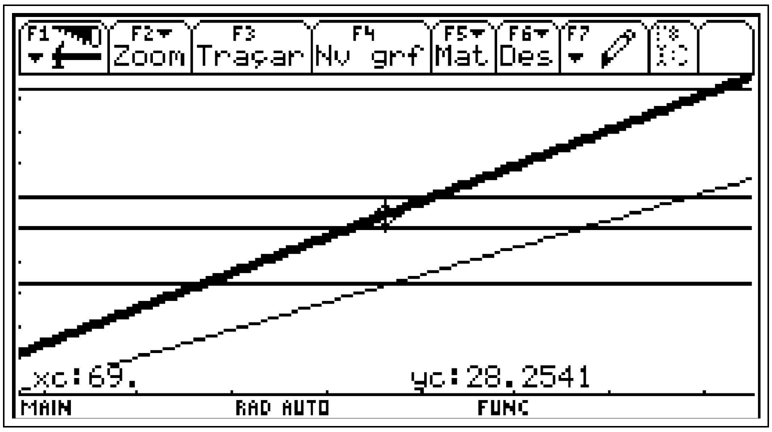


Figura 1: Tela de análise comparativa de dois grá£cos de IMC.

calculadora e uma orientação sobre as questões matemáticas pertinentes à atividade.

Observe-se que o planejamento e a execução de aulas com esta atividade contêm características de ensino/aprendizagem presentes nos PCN's (p. 91)

5. Avaliação

A avaliação foi feita tanto quantitativa como qualitativamente, relativa ao rendimento em questões de Matemática e ao sentimento dos alunos no contato com tecnologia. Também foi feita uma re¤exão dos professores participantes do projeto sobre o treinamento no uso de tecnologia e na metodologia de ensino integrado na sua prática de ensino. O questionário de avaliação da reação dos alunos ao uso de tecnologia foi elaborado a partir de uma adaptação de (Berry, 2002). Em 2002, o questionário foi aplicado para cerca de 75 alunos de duas escolas públicas de periferia de Ribeirão Preto, com dois professores participantes[2]. Entre as questões, havia indagações sobre a ligação entre "aula com tecnologia" e "a melhora no entendimento de matemática, aceitação e expectativas quanto a outras aulas com metodologia inovadora". Houve unanimidade quanto à aceitação da metodologia, mas, como esperado, a escola que apresenta maiores índices de indisciplina e de violência escolar apresentou índices de melhora no entendimento (divididos em 'muito favorável' e 'favorável') menos favoráveis do que a outra, em que os alunos se entusiasmaram com a aula. Em 2003, as atividades foram realizadas na E.E. Alberto Santos Dumont, nas classes de quatro professores, incluindo as da segunda autora deste trabalho, que atuou como agente

[2]Agradecemos a Carlos Alberto dos Santos pela dedicação e empenho na execução deste trabalho na EE Irene Dias Ribeiro

multiplicador junto a 10 outros colegas, professores de Matemática. Participaram 120 alunos e as reações foram as mais favoráveis possíveis, gerando expectativas para mais aulas inovadoras. As questões de Matemática para avaliação do desempenho abordaram questões e problemas sobre função linear contidas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Houve melhora sensível de 12% sobre o número de alunos que tinham conceito "D", antes dessas aulas. Além de melhorar o desempenho, é animador constatar o aumento de auto-estima e con£ança dos alunos em relação à Matemática.

6. Observações Finais

Por ser um resumo, não pudemos detalhar mais aspectos deste trabalho, nem apresentar tabulações dos resultados das avaliações. Nestas linhas £nais, queremos salientar alguns aspectos que consideramos essenciais. Aulas inovadoras trazem novas perspectivas de ensino para as escolas, porém a indisciplina e a violência são fatores que constituem um grave problema a ser enfrentado por educadores, para que as iniciativas não percam efeito. Foi também fator importante, para o sucesso da atividade, o aprendizado do trabalho em equipe dos professores, imprescindível para executar projetos de ensino integrado sobre temas transversais. O treinamento para atualização de professores, tanto em conteúdo como metodologias que utilizam tecnologias, é muito importante para estimular auto-estima e iniciativas dos professores. Mesmo os professores da E.E. Alberto Santos Dumont, que receberam treinamento mas não puderam aplicar aula com calculadoras, a£rmaram que "o treinamento pedagógico propiciou nas suas classes uma abordagem mais e£caz no estudo de grá£cos de funções".

Referências

BALDIN,Y.Y. (2002a) Roteiro de aula e atividade com calculadora para estudo de função linear modeladora de IMC. Textos para Projeto Pró-Ciências/UFSCar 2002. UFSCar, São Carlos.

BALDIN, Y.Y. (2002b) Utilizações diferenciadas de recursos computacionais no ensino de Matemática (CAS, DGS e Calculadoras Grá£cas). História e Tecnologia no Ensino de Matemática, volume 1, 27-36, Rio de Janeiro.

BERRY, J. (2002) Student Attitude Questionnaire. The University of Plymouth, UK. (Comunicação pessoal.).

PCN-MATEMÁTICA (1998) Parâmetros Curriculares Nacionais, Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental, Matemática. Secretaria de Educação Fundamental, MEC, Brasília.

PERRENOUD, P. (2000) Dez Novas Competências para Ensinar. Artmed, Porto Alegre.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 147:154
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 18

EXPLORANDO POSIÇÕES RELATIVAS NO APLICATIVO GNUPLOT

Roberta Naidon
Acadêmica de Licenciatura em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria
robyzinha@pop.com.br

Alice de Jesus Kozakevicius
Prof^{a}. Dr.^{a}. do Departamento de Matemática
Universidade Federal de Santa Maria
alicek@smail.ufsm.br

Resumo *Através de animações realizadas com o GNUPLOT, exploram-se conceitos envolvidos no estudo de posições relativas entre retas e planos no espaço. São analisadas ainda distorções visuais, causadas pela má utilização dos recursos ou por limitações intrínsecas de cada aplicativo. Desta forma, £ca evidente o papel do educador como mediador do uso de novas tecnologias no ensino de matemática.*

Palavras-chave *posições relativas, simulações no GNUPLOT*

Abstract *We explore the concepts of relative positions between straight lines and planes through simulations done with the software GNUPLOT. We analyse visual distortions caused by the angle of the graphic window, which can interfere in the correct classi£cation of the relative positions. We point out to the necessity of a critical view of every computational result.*

Key words *relative positions, simulations with GNUPLOT.*

1. Introdução

Neste trabalho vamos utilizar o recurso computacional de construir seqüências de grá£cos indexados por um ou mais parâmetros e sua exibição seqüencial com um curto espaço de tempo entre um grá£co e outro, produzindo o efeito de animação. Nosso objetivo principal é produzir um material de apoio para o ensino de geometria analítica que motive a ligação entre a forma analítica de se tratar elementos geométricos com resultados computacionais que os representam. Para isso, o aplicativo escolhido foi o GNUPLOT [6] por ser de distribuição gratuita, possuir sintaxe simpli£cada e por permitir o traçado de grá£cos através da execução de arquivos de comandos.

Este aplicativo foi desenvolvido inicialmente por Thomas Williams e Colin Kelly em 1986, com o objetivo de criar um programa que lhes permitisse visualizar as equações matemáticas relacionadas ao trabalho que desenvolviam na época. Hoje o GNUPLOT [7] e [8] encontra-se na versão 3.7 para WINDOWS e para UNIX, possuindo mais de vinte colaboradores para sua extensão, sendo utilizado para o traçado de grá£cos em duas ou três dimensões, tanto a partir de arquivos com dados numéricos, quanto a partir de expressões algébricas.

Na utilização de qualquer aplicativo com £nalidade de visualização de grá£cos é importante a observação de uma série de parâmetros envolvidos, como por exemplo, o domínio da função, as escalas utilizadas na janela grá£ca [2], o ângulo com que os grá£cos tridimensionais serão apresentados em relação ao usuário, escalas relativas entre diferentes grá£cos a serem traçados num mesmo sistema de eixos, entre outros. Mais do que isto, segundo Sierpinska [1], é fundamental que se tenha consciência que as várias representações possíveis fazem parte de um único conceito geral, apesar das limitações que cada uma possa apresentar. Especi£camente em geometria analítica, o estudo de posições relativas entre retas, entre planos e entre retas e planos [4] pode £car extremamente prejudicado, se o usuário não estiver atento a estas questões.

Neste trabalho, foram desenvolvidas animações em três dimensões para estudar posições relativas entre curvas e superfícies no espaço, exempli£cando distorções causadas pelo ângulo de visualização da janela grá£ca composto ainda com rotações dos elementos estudados. Como resultado, estas animações, além de exempli£carem a necessidade de uma utilização crítica de pacotes computacionais, são também bons recursos didáticos para o tema, pois permitem que o professor explore e aprofunde conceitos como projeção, distâncias e erros cometidos em aproximações, a partir de situações dúbias produzidas pelo aplicativo computacional.

2. Desenvolvimento

O aplicativo GNUPLOT realiza grá£cos tanto de funções quanto de equações na forma paramétrica. Para grá£co de funções em duas ou três dimensões, x e y são assumidos pelo aplicativo como sendo as variáveis independentes, já na forma paramétrica t é utilizado como parâmetro livre no traçado de curvas bidimensionais e u e v são os parâmetros para grá£cos em três dimensões.

2.1 Equação paramétrica da reta:

Seja {0, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$} um sistema de coordenadas canônico, a equação vetorial da reta r que passa por $A(x_1, y_1, z_1)$ na direção de $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ é dada por:

$P = A + u\overrightarrow{w}$, onde u é o parâmetro livre.

Ou seja, qualquer ponto P genérico da reta r tem coordenadas que satisfazem a relação:

$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + u(a, b, c)$, para algum parâmetro u dado.

Ou ainda, podemos escrever:

$$(x, y, z) = (x_1 + au, y_1 + bu, z_1 + cu)$$

Teremos então as equações paramétricas da forma:

$$\text{r}: \begin{array}{l} x = x(u) = x_1 + au \\ y = y(u) = y_1 + bu \\ z = z(u) = z_1 + cu \end{array}$$

2.2 Equação paramétrica de um plano

Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto e $\overrightarrow{h} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{g} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores não colineares . Um ponto P(x,y,z) pertence ao plano π que passa por A e é paralelo a $\overrightarrow{h}$ e $\overrightarrow{g}$, se, e somente se, exitem u e v tal que {$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{h}$, $\overrightarrow{g}$} formam um conjunto LD, ou seja

$\overrightarrow{AP} = u\overrightarrow{h} + v\overrightarrow{g}$, e em coordenadas escrevemos :

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = u(a_2, b_2, c_2) + v(a_2, b_2, c_2)$$

Desta forma, as equações paramétricas do planos são:

$$\begin{array}{l} x = x(u, v) = x_0 + ua_1 + va_2 \\ y = y(u, v) = y_0 + ub_1 + vb_2 \\ z = z(u, v) = z_0 + uc_1 + vc_2 \end{array}$$

Posição relativa entre retas:

Para classi£carmos duas retas r_1 e r_2 como sendo concorrentes ou reversas, é necessário veri£car, considerando $A_1 \in r_1,\ A_2 \in r_2$, se o conjunto $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2})$ é LD ou LI, respectivamente.

Para que duas retas r_1 e r_2 sejam classi£cadas como paralelas distintas, seus vetores diretores devem ser linearmente dependentes, $\overrightarrow{v_1} = m.\overrightarrow{v_2}$, e ainda $r_1 \cap r_2 = \phi$.

Ao estudarmos estas posições com o auxílio de um pacote grá£co é fundamental a observação do ângulo com que o grá£co é feito em relação ao usuário, para que se possa compensar a deformação da imagem causada pelo aplicativo. Tais deformações, se não consideradas com cuidado, podem levar a conclusões totalmente erradas.

2.3 Posição relativa entre retas e plano:

Dada uma reta de equação $r : X = (x_0, y_0, z_0) + u(m, n, p)$ e um plano de equação $\pi : X = (x_1, y_1, z_1) + u(a_2, b_2, c_2) + v(a_2, b_2, c_2)$. Sejamos vetores $\overrightarrow{w} = (m, n, p)$, vetor diretor da reta e $\overrightarrow{h} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{g} = (a_2, b_2, c_2)$, vetores linearmente independentes e paralelos a π. Podemos classi£car então

- r transversal a π: quando $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{h}, \overrightarrow{g})$
- r paralela a π: quando $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{h}, \overrightarrow{g})$são LD e $r \cap \pi = \phi$
- r está contida em π: quando $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{h}, \overrightarrow{g})$são LD e $r \cap \pi = r$

Para sabermos se $r \subset \pi$ basta substituirmos um ponto de r na equação do plano. Gra£camente, deve-se tomar o novamente cuidado com possíveis distorções devido a rotações do sistema de eixos.

3. As animações

Com o comando *set parametric*, ativa-se o modo paramétrico no GNUPLOT e pode-se traçar o grá£co de retas e planos no espaço, utilizando sua formulação paramétrica [5]. A sintaxe para se traçar o grá£co nesta forma é: *splot x(u,v),y(u,v),z(u,v)* para £guras no espaço, e *plot x(t),y(t)* para £guras no plano. Através de testes lógicos, pode-se criar seqüências de grá£cos indexados por um parâmetro, o que possibilita criar animações no aplicativo GNUPLOT. Entre as simulações sugeridas, pode-se visualizar retas mudando seu ângulo, enquanto permanecem contidas no mesmo plano ou enquanto permanecem paralelas. Outra possibilidade é o traçado de transversais a um plano, que aparentemente pertencem a este, mas devido à mudança no ângulo de visão das animações ao longo do tempo, revelam sua verdadeira posição relativa.

Na criação de exemplos que contemplem estas situações, foram feitas animações nas quais o ângulo de visão das retas é alterado e ainda o ângulo entre elas também é modi£cado. Para se produzir tais efeitos, aplica-se a matriz de rotação a um dado vetor diretor da reta.

Seja a reta de equação paramétrica dada por: *x=(u,1,1).* Aplicando a seguinte matriz de rotação sobre suas coordenadas, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & -sen(a) \\ 0 & sen(a) & \cos(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ \cos(a) - sen(a) \\ sen(a) + \cos(a) \end{bmatrix}$$

Obtém-se assim a equação paramétrica de uma reta, indexada pelo parâmetro ***a*** que indica o ângulo de rotação. Para cada escolha feita para a, $0 \leq a \leq \pi$, a reta irá sofrer uma rotação de ângulo ***a*** £xado. A partir deste conceito, podemos fazer a reta girar no espaço de acordo com a matriz de rotação utilizada.

4. Experiência Pedagógica

Através da prática vivenciada durante um minicurso de 20 h/a oferecido a professores de ensino médio de escolas locais, observou-se que a partir dos conhecimentos básicos do aplicativo o educador tem condições de construir exemplos que ressaltam propriedades geométricas entre retas e planos e suas intersecções. No entanto, quando confrontados com resultados computacionais "contraditórios" à formulação analítica, os professores do grupo apresentaram reações similares as descritas em [2] e [3], aceitando o resultado fornecido pelo aplicativo como sendo conclusivo.

A exploração das "inconsistências" entre as simulações grá£cas e a formulação analítica provocou uma ampla discussão durante o minicurso com relação a aspectos que eram desconhecidos do grupo, como por exemplo, os possíveis erros que ocorrem em aproximações numéricas, distorções causadas por diferentes escalas para os grá£cos e eventualmente pelo seu ângulo de visualização.

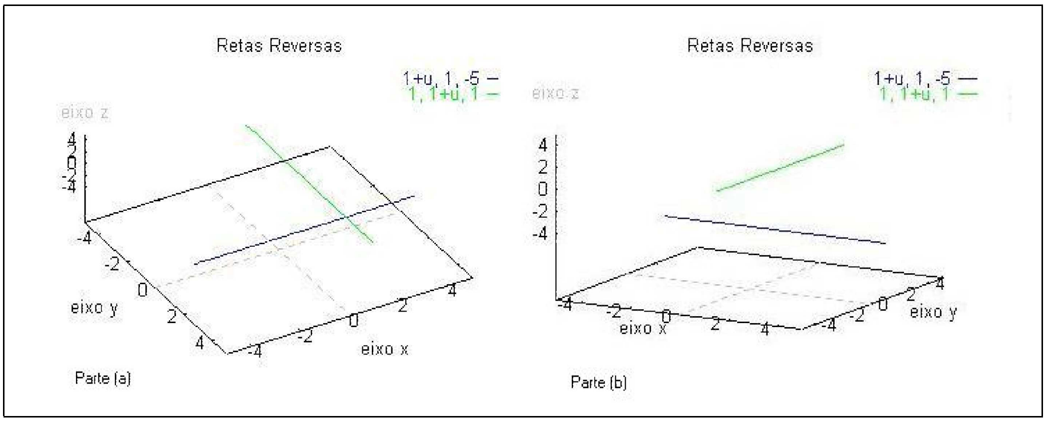


Figura 1: Retas reversas no espaço.

Na visualização de posições relativas entre retas é fundamental podermos distinguir o caso de retas concorrentes do caso no qual a intersecção é vazia. Através da simulação ilustrada pela Figura 1, na parte (a) tem-se a impressão de haver intersecção entre as retas, já na parte (b) percebe-se a verdadeira posição entre elas.

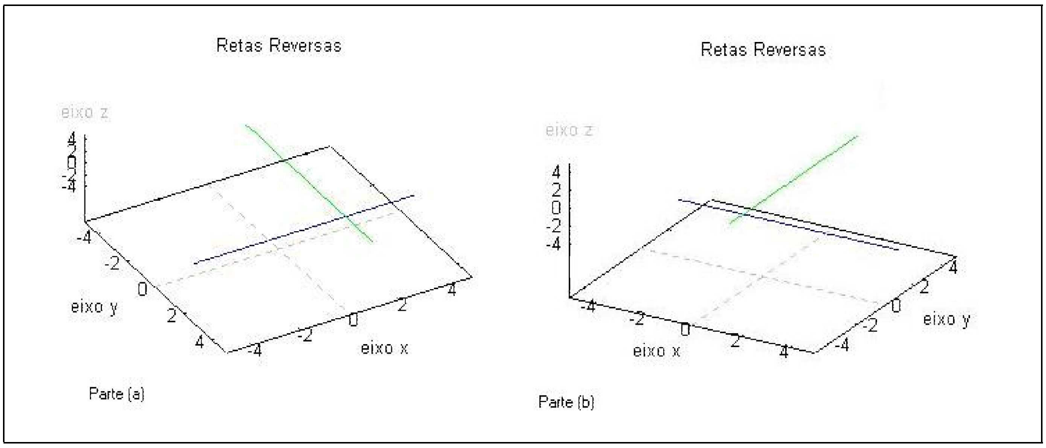


Figura 2: Reta reversas cuja distância é menor do que a escala utilizada no traçado do grá£co.

Na Figura 2, apresentamos novamente um exemplo de retas reversas, no entanto independentemente da rotação aplicada às retas (parte (a)) ou à janela de visualização (parte (b)), estas sempre parecem concorrer em um ponto. Esta distorção ocorre devido ao fato da distância entre as retas ser inferior à escala utilizada para o traçado dos grá£cos.

Com auxilio das matrizes de rotação e também com as mudanças nos ângulos de visualização, pode-se em uma mesma animação propor diversas idéias. Na Figura 3 são apresentados 4 quadros de uma animação. Em cada quadro, as retas reversas sofrem rotações distintas, sendo mantidos paralelos os planos que contém cada uma das retas. Neste exemplo, observa-se novamente a in¤uência causada pelos ângulos da janela grá£ca. Inicialmente não é possível distinguir nenhuma posição relativa entre as retas e o plano £xado na £gura, mas ao longo da simulação a visualização se torna apropriada.

5. Conclusão

Este trabalho propõe a utilização de simulações e animações grá£cas como forma de motivar o ensino/aprendizagem de geometria analítica, uma vez que ao longo da

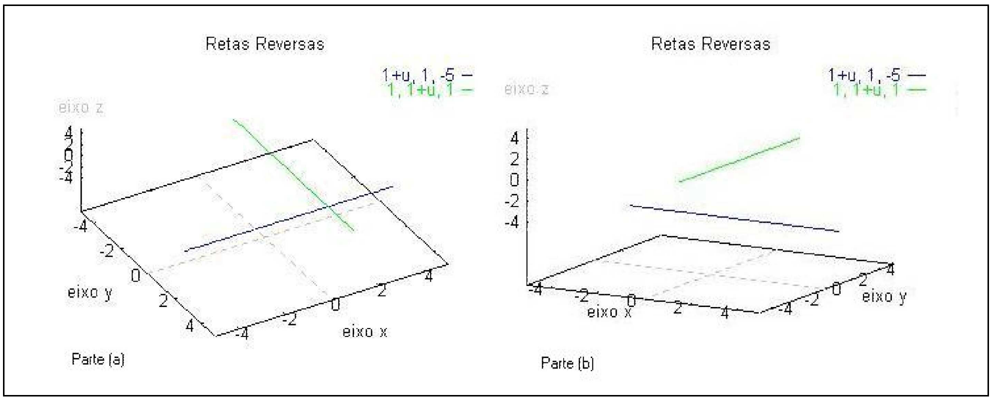


Figura 3: Retas reversas que sofrem rotações, mas permanecendo contidas em planos paralelos.

elaboração de cada simulação, cria-se uma série de novas possibilidades de análise do problema estudado.

De forma alguma um pacote computacional por si só irá fornecer todas as respostas ao usuário, no entanto através de uma visão crítica de seus resultados, educador e aluno são estimulados a proporem novas questões e a avançarem em direção a uma compreensão mais ampla do objeto estudado.

Durante o minicurso, percebeu-se também uma grande aceitação por parte dos professores participantes em utilizarem este e outros materiais de apoio em suas aulas como forma de estimularem seu alunos em relação ao estudo da matemática.

Referências

[1] A. Sierpinska, On undestanding the notion of function, em “MAA Notes and Report Series” (G. Harel e E. Dubinsky, eds), Vol. 4, pp. 25-58. 1992.

[2] V. Giraldo e L.M. Carvalho, Funções e novas tecnologias, em “Tema: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional”, Vol. 3, pp. 111-119, SBMAC, 2002.

[3] E. Belfort, L.C. Guimarães e R. Barbastefano, Geometria Dinâmica e demonstração na formação continuada de professores, em “Anais do Cabri World 99”, Vol. eletro, Cabri World, 1999.

[4] P.C. Boulos e I.M. Toledo, Introdução à geometria analítica no espaço, Makron Books, Sao Paulo, SP,1997.

[5] P. Winterle, Vetores e Geometria AnalÍtica, Makron Books, São Paulo, 2000.

[6] INTERNET, http://www2.prudente.unesp.br/dcartog/galo/gnuplot/, Downloads gnuplot versão 3.7 e 3.8.

[7] INTERNET, http://pages.udesc.br/∼j6ca/gnuplot/node3.html,Tutorial em Português.

[8] INTERNET, http://www.cs.uni.edu/Help/gnuplot/, Tutorial em inglês.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 155:162
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 19

RECONHECIMENTO DE FORMAS ALGÉBRICAS NO ENSINO

Franck Bellemain
Labma - IM - UFRJ
f.bellemain@br.inter.net

Resumo *Nessa comunicação, abordamos a questão das funcionalidades das expressões algébricas e seu papel no ensino da matemática. Numa primeira parte explicitamos o que chamamos de formas algébricas e como as justi£camos tanto do ponto de vista da evolução da Matemática como do seu uso na resolução de problemas. Numa segunda parte, abordaremos a questão das formas algébricas no ensino e o uso que os alunos fazem dessas formas na resolução de problemas.*

Palavras-chave *Expressão algébrica, reconhecimento de forma.*

Abstract *In this communication, we are exploring the question of the functionalities of algebraic expressions and her role in math education. In a £rst part, we will explicit what we call algebraic form and how we justify it from the math evolution as from the problem solving point of view. In a second part, we are exploring the question of the algebraic form in math education and how these forms are used in the student problem resolution.*

Key words *Algebraic expression, pattern recognition.*

1. Introdução

Nessa comunicação apresentamos uma pesquisa iniciada em 1986 por um trabalho de mestrado (Bellemain, 1986). Essa pesquisa não foi prolongada na época. No entanto, consideramos a questão da funcionalidade das representações matemáticas em geral, e das representações simbólicas, em particular, como tendo um papel importante na resolução de problemas matemáticos, particularmente no que diz respeito à dimensão heurística dessa resolução. À funcionalidade das representações, associamos o reconhecimento de forma que é o lado perceptivo-cognitivo dessa funcionalidade. Pela importância desse reconhecimento na resolução de problemas algébricos, queremos prolongar essa pesquisa.

A motivação inicial desse trabalho vem da observação das di£culdades dos alunos em dar um sentido ao cálculo algébrico, por exemplo, para as transformações das expressões algébricas, como a fatoração ou o desenvolvimento. Mesmo se os alunos chegam a uma boa habilidade na transformação das expressões, podemos observar que, desde que se trata de resolver um problema que não é mais padrão, eles não sabem qual transformação realizar, ou efetuam transformações em função de um contrato didático implícito, ou efetuam essas transformações errando, até onde eles não costumam errar. O cálculo algébrico escolar aparece, com freqüência, como um exercício de estilo, uma retórica. Suas funções como modelização e resolução de problema, como língua matemática, são pouco abordadas. A sintaxe e a "gramática" da língua algébrica são aprendidas em detrimento de sua semântica. Em outros termos, os alunos não percebem o caráter funcional das expressões algébricas, caráter que condiciona a utilização dessas expressões e representa, nesse sentido, um elemento importante de semântica das expressões.

A pesquisa que apresentamos aqui está num estado inicial e sua principal contribuição é de apresentar a problemática e uma direção de pesquisa esclarecendo a questão da funcionalidade das expressões algébricas e o papel do reconhecimento de forma na resolução de problemas de álgebra, e recolhendo alguns dados a respeito do uso do reconhecimento de formas algébricas pelos alunos.

O trabalho apóia-se sobre dois eixos principais. O primeiro consiste em observar, através de um rápido estudo de caráter epistemológico, a evolução do uso do simbolismo na matemática e a dimensão funcional desse simbolismo, destacando particularmente a importância das formas algébricas na resolução de problemas. O segundo eixo trata dos diversos aspectos do ensino da álgebra e o papel da funcionalidade das expressões algébricas nesse ensino. Uma observação e análise do uso do reconhecimento de forma algébrica na resolução de problemas por alunos mostraram que eles têm uma percepção muito limitada da funcionalidade das expressões algébricas. Para prolongar o trabalho, um estudo das contribuições do computador para as questões de reconhecimento de forma e da funcionalidade das expressões algébricas seria um aporte interessante ao ensino da álgebra.

2. Funcionalidade das expressões algébricas

Consideramos a funcionalidade das expressões algébricas no sentido de Chevallard (1989). A funcionalidade de uma expressão algébrica é caracterizada pelos tratamentos ou deduções que essa expressão permite. Trata-se de informações que podem ser tiradas diretamente da expressão, sem precisar transformá-la, mesmo se as transformações possíveis fazem parte dos tratamentos permitidos pela expressão. Por exemplo, podemos diretamente a partir da expressão deduzir que os zeros de $(x+1)(x+2)$ são -1 e -2, ou que o grá£co da função: $f(x) = x + 1 + 2/x$ tem a reta $y = x + 1$ como assíntota. As expressões podem ser organizadas em tipos caracterizados pela relação que cada expressão representa: $(x+1)(x+2)$ é um produto, $x+1+2/x$ é uma soma. A cada tipo de expressão, associam-se tratamentos. Assim, sabemos que um produto se anula quando um dos seus fatores se anula, ou podemos conhecer seu sinal em função do sinal dos seus fatores. Chamamos esses tipos de expressões de formas pelo fato que as representações simbólicas têm uma dimensão perceptiva, uma vez que, uma das funções do simbolismo é facilitar o trabalho da percepção: é mais fácil reconhecer uma fração em $\frac{x+1}{x+2}$ que em $(x + 1)/(x + 2)$. Essa organização das expressões algébricas em torno de formas funda a pertinência do reconhecimento de formas algébricas uma vez que esse reconhecimento dá acesso a uma forma e, por meio dela, aos diversos tratamentos possíveis de uma expressão. Nos casos simples, podemos reconhecer uma expressão como um produto de fatores, dando acesso a seus zeros ou seu sinal. Em casos um pouco mais so£sticados, podemos reconhecer um produto notável que sabemos fatorar simplesmente. Em casos mais so£sticados ainda, reconhecemos uma integração por parte para deduzir a integração de uma expressão. Além desses exemplos onde o reconhecimento de forma serve para conhecer as transformações possíveis de uma expressão, o acesso a uma forma particular pode ser também o objetivo dessas transformações, como é o caso, por exemplo, da fatoração cujo objetivo é chegar a uma forma produto. A funcionalidade das expressões algébricas é uma propriedade que vai além dos poucos casos abordados no ensino (op. cit.), existem muitas formas de escrever uma expressão e cada forma tem uma funcionalidade, trazendo seu conjunto de informação sobre as propriedades da expressão, e dos objetos que essa expressão representa.

De fato, reconhecer formas é uma atividade comum e importante no cálculo, porém ela não tem nada de óbvio, evoluiu com a construção dos saberes e deve ser construída para os alunos. Se o reconhecimento de forma tem uma dimensão perceptiva, ele tem essencialmente uma dimensão cognitiva. Formas são reconhecidas em função de uma organização perceptiva das expressões, ela mesma guiada pelos tratamentos susceptíveis de ser efetuados, e função das situações onde esse reconhecimento tem sentido.

A resolução de problemas é um dos principais motores da evolução da matemática, isso não somente pelas soluções produzidas, mas também através dos objetos, das linguagens, e dos métodos elaborados para produzir essas soluções. Expressar o problema numa linguagem que permite resolvê-lo é talvez, tão quanto a própria solução, a parte mais importante dessa resolução. O cálculo aparece como uma forma sistematizada de resolver os problemas. Dar ao cálculo acesso a objetos consiste em abstrair esses objetos, guardando certas características e ocultando outras, para conseguir uma representação calculável. Trata-se também de modelizar o problema, ou seja reformular as questões do problema no sistema de representações calculáveis. Desenvolver as técnicas do cálculo consiste em desenvolver algoritmos padrões de transformações de representações tipo.

3. Formas algébricas na evolução da matemática

Não podemos tratar de forma separada a evolução do simbolismo e a evolução do pensamento algébrico, eles evoluíram juntos e de forma dialética. O simbolismo evoluiu para ser mais funcional e permitir ao cálculo algébrico ser mais e£ciente. O cálculo algébrico evoluiu pela utilização e estudo das regras de manipulação do simbolismo. Consideramos quatro etapas na evolução do pensamento algébrico: álgebra das grandezas, álgebra dos números, álgebra dos objetos matemáticos e estruturas algébricas. Da mesma forma, consideramos quatro etapas na evolução do simbolismo, acompanhando a evolução do pensamento algébrico: sistema de numeração, álgebra retórica, álgebra sincopada, álgebra simbólica.

- A elaboração dos sistemas de numeração corresponde a um nível signi£cativo de abstração, necessitando que os objetos sejam agrupados em classes de equivalência. Por essa abstração se consideravam grandezas mais que números e as operações manipulavam essencialmente grandezas, através de coleções (algoritmo da multiplicação dos egípcios) ou de métodos geométricos (usados pelos Babilônios), por exemplo. Os Babilônios chegaram a estudar e resolver por métodos geométricos (completando o quadrado) problemas do segundo grau. Tratava se de uma álgebra das grandezas. A numeração evoluiu aumentando sua funcionalidade para a manipulação dos números com a numeração de posição. A posição grá£ca dos dígitos é uma informação cognitiva sobre o número representado.

- Com a álgebra retórica, problemas são resolvidos e a descrição das resoluções é feita em língua natural. A resolução de problemas precisava de ferramentas mais e£cientes e de uma linguagem mais funcional que a língua natural, sobretudo no que se tratava da elaboração dessa resolução. Uma dessas linguagens era a geometria. Os métodos geométricos de construção dos números eram su£cientemente avançados e sistematizados para permitir a Euclides construir, com a régua e compasso[1] $\sqrt{a}$ e até $\sqrt{\{\sqrt{a}+\sqrt{b}\}}$. Situações algébricas eram associadas a formas geométricas: os Babilônios associavam problemas do segundo grau à transformação de um retângulo em quadrado.

[1]: A reta e a circunferência eram consideradas na época com as únicas formas puras, sobretudo pela escola de Platão.

- Na álgebra sincopada, as exposições misturavam língua natural e símbolos. Diofante é o precursor da álgebra sincopada e foi também um dos primeiros a resolver equações sem geometria. Porém, mesmo se ele não usou algum simbolismo, certos epistemologistas atribuem a Al Kwarizmi a verdadeira origem do pensamento algébrico. Ele estabeleceu que os métodos geométricos podem ser traduzidos por procedimentos algébricos e que as resoluções podem ser justi£cadas sem a geometria. É interessante destacar que ele não abordava as equações quadráticas como um tipo único de equação ($ax^2+bx+c=0$), mas considerava seis formas possíveis, seis igualdades entre números positivos. Nossas formas algébricas atual correspondem a um importante nível de abstração compatível com nossa concepção de numero. Al Kwarizmi considerava diversas equações porque não usava números negativos. Reconhecer formas requeria um trabalho conceitual importante.

- Foram necessários diversos séculos para que a álgebra evoluísse da sua forma sincopada à forma simbólica. As relações da álgebra e da geometria evoluíram também. Se as resoluções de equações continuam usando a geometria: Cardan resolve equações do terceiro grau completando o cubo, os matemáticos sabem que resoluções puramente algébricas são possíveis. A ausência de um simbolismo algébrico e£ciente não permite essas resoluções. A ruptura com uma abordagem exclusivamente geométrica das equações veio com Descartes e sua geometria. Ele introduz o simbolismo algébrico numa forma próxima da forma que conhecemos hoje e sobretudo introduz um novo ponto de vista sobre os objetos geométricos: eles não são associados às grandezas, mas a equações, as formas geométricas correspondem a formas algébricas: cônicas, cúbicas, etc. A ruptura com as resoluções geométricas é de fato uma outra forma de resolução, desde que Descartes esforçou-se para ligar geometria e álgebra através de correspondências entre métodos geométricos e algébricos.

Até a geometria de Descartes, temos uma álgebra dos números. Mas com o simbolismo de Descartes, novos objetos podem ser estudados: polinômios, e mais tarde funções, matrizes, e qualquer conjunto de objetos, numa álgebra de objetos matemáticos. Por exemplo, Galois, no seu estudo das equações do quinto grau, interessa-se mais pelo grupo das soluções das equações que na suas próprias resoluções, associando tipo de equações com soluções possíveis. Os matemáticos em seguida interessaram-se pelas próprias estruturas algébricas, independentemente dos objetos considerados. O simbolismo e suas regras de manipulação é o objeto de estudo, os símbolos não representam objetos, e desse ponto de vista não têm signi£cação. Portanto, do ponto de vista cognitivo, as manipulações desses símbolos têm signi£cações, veremos essas signi£cações nas formas algébricas. Por exemplo, Hamilton construiu os quatérnios e a analogia com os complexos é grande. As formas algébricas participam na construção de um signi£cado das estruturas algébricas.

4. Reconhecimento de formas algébricas no ensino

Não podemos dizer que as formas algébricas são completamente ausentes do ensino da álgebra. A maioria dos conteúdos de álgebra abordados trata de resolução típica de situações padrões, ligadas a formas algébricas: resolução de equação do primeiro grau, segundo grau, sistema linear, desenvolvimento, fatoração, etc. São essencialmente os saber-fazer associados a essas resoluções que são objetos de ensino, e não as estruturas algébricas ou as propriedades dos objetos manipulados que justi£cam esses saber-fazer. Desse ponto de vista, o ensino da álgebra aparece como focalizado sobre a sistematização de certas manipulações, sem que necessariamente seja abordada a signi£cação dessas.

Além do mais, a questão da evolução do pensamento algébrico com os objetos que ele manipula ao longo da escolaridade é pouco considerada. O simbolismo algébrico é instalado e usado como se fosse algo óbvio e natural. Para o aluno, os objetos a que os símbolos conduzem estão em construção. Entre as múltiplas funções do cálculo, e do cálculo algébrico em particular, são muito poucas as que são efetivamente abordadas no ensino. É essencialmente a face automatizada do cálculo, e nessa face são os algoritmos de cálculo que são trabalhados. A própria elaboração dos algoritmos de cálculo, como a contribuição da automatização do cálculo à resolução de problemas, ou a relação do cálculo com o raciocínio deveriam constituir uma fase importante da aprendizagem do cálculo. Não existem somente situações nas quais basta aplicar um algoritmo para resolver o problema. Pelo contrário, com freqüência, é necessário raciocinar, expressar o problema, reformular o objetivo em termos do cálculo, antes de aplicar um algoritmo. "A segunda face do cálculo, aquela do cálculo raciocinado é tão importante quanto. O cálculo é com freqüência estratégico, metódico, antes de ser automatizado." (Commission de ré¤exion, 2000). Nesse ponto de vista o reconhecimento de forma tem um papel importante, ele contribui para a compreensão da situação e à algebrização do problema, ou seja a de£nir quais são os objetivos em termo de formas, das transformações algébricas a efetuar.

Um outro aspecto importante é a relação que existe entre o cálculo e a construção dos próprios conceitos. O cálculo e a elaboração dos seus métodos participam da elaboração dos conceitos. Os métodos gerais de hoje são resultado de uma evolução onde outros métodos parciais ou contextualizados foram usados.

Num experimento, mostramos a di£culdade dos alunos em perceber a funcionalidade das expressões, mesmo em se tratando de alunos manipulando com facilidade diversas transformações de expressão. A partir de um estudo inicial das variáveis didáticas, propusemos a alunos de "première" (2ª ano cientí£co) determinar as raízes e calcular $A(1/4)$, $A(1/2)$, $A(-3/2)$, $A(100)$ e $A(0)$ para $A(x)$ dado por diversas expressões equivalentes: $A(x) = (x - 1/4)^2 - 49/16$; $A(x) = (x + 3/2)(x - 2)$; $A(x) = x(x-1/2)-3$. O objetivo era observar a capacidade dos alunos de determinar a expressão mais adaptada para cada operação.

Os resultados mostraram uma certa habilidade dos alunos em escolher a expressão nessas situações fáceis para a maior parte deles. Essa habilidade é mais limitada no caso da determinação das raízes: alguns alunos usaram o descriminante depois de ter desenvolvido uma das expressões, e outros usaram a expressão canônica. É interessante observar que mesmo num caso completamente padrão, não aparece como óbvio para os alunos que a forma fatorada (2) dá diretamente as raízes de $A(x)$. Os fenômenos de contrato didático podem ajudar a entender esse caso.

Numa segunda fase, foram feitas entrevistas com alguns alunos que participaram da primeira. O objetivo dessas entrevistas era tentar conduzir o aluno a explicitar mais as razões da escolha de uma expressão mais que uma outra. Apareceu a importância de fenômenos do contrato didático nas decisões dos alunos, eles escolhem as expressões em função da aplicação de métodos aprendidos recentemente. A questão da funcionalidade das expressões é implícita e não é explicitada no ensino. Terminaremos com a seguinte reposta de um aluno:

> "Sim, me lembro de um dia que perguntei para o professor qual era o melhor para usar? Ele respondeu, aliás realmente não respondeu, disse somente: 'Isso você sente'. Deve ser inato ver isso. Não sei se é uma boa explicação, deve ter coisas a reconhecer no nível dos sinais, é material, não é algo miraculoso."

Numa versão mais extensa do trabalho, apresentaremos também como o uso do computador pode ter uma contribuição signi£cativa ao ensino da álgebra, favorecendo em particular a construção de signi£cado das expressões algébricas através do reconhecimento de formas em diversos quadros matemáticos, entre eles o quadro algébrico e o quadro geométrico.

Referências

BELLEMAIN F. (1986) *L'approche d'expressions algébriques par des élèves de première*, DEA, UJF, Grenoble

CHEVALLARD, Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algebre dans l'enseignement des mathématiques au collège, Deuxième partie, *Petit x, nª19*, Grenoble.

COMMISSION DE REFLEXION SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES (2000), Rapport d'étape sur le calcul (http://www.eduscol.education.fr).

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 163:169
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 20

UMA PROPOSTA DE PRÉ-CÁLCULO COM ENSINO COLABORATIVO

A. C. de Castro Barbosa	Cláudia F. R. Concordido	Cláudio G. Carvalhaes
IME	IME	IME
UERJ	UERJ	UERJ
accb@ime.uerj.br	concordido@ime.uerj.br	carvalhaes@ime.uerj.br

Resumo *Neste trabalho, relatamos a experiência de implementação de uma disciplina de Pré-Cálculo na UERJ, cuja proposta principal é ajudar os alunos, de diferentes cursos, a cursar satisfatoriamente as disciplinas de física e matemática de seu currículo. Empregamos uma metodologia baseada na proposta de Ensino Colaborativo que visa aumentar a participação do aluno no aprendizado. Apresentamos uma avaliação preliminar dessa experiência, bem como fatores extra-classe que tiveram impacto nos resultados colhidos.*

Palavras-chave *Pré-Cálculo, Ensino Colaborativo, Cálculo.*

Abstract *In this work we report the implementation of a precalculus course at UERJ. The course was created to help students from different programs to succeed in Calculus and Physics courses. For the classroom work, we employed a methodology based on Collaborative Learning to improve the student participation in the learning process. We present a preliminary evaluation of the course as well as several extraneous (to the classroom) factors that have played a role in the ¤ow of the course.*

Key words *Precalculus, Collaborative Learning, Calculus.*

1. Introdução

Os problemas relacionados ao ensino de Cálculo I despertam cada vez mais a atenção de pesquisadores da área de educação matemática (Lopes, 1999), (Kaput, 1997). A disciplina de Pré-Cálculo é uma proposta bastante comum no enfrentamento dessa questão e consiste em fornecer apoio em matemática elementar ao futuro aluno de Cálculo I.

Em geral, os estudantes apresentam di£culdades no entendimento do conceito de função, interpretação e construção de grá£cos e no conhecimento de funções notáveis, que são requisitos fundamentais para o Cálculo I. É ainda comum se veri£carem de£ciências em operações com frações, potenciação, teoria elementar de polinômios e geometria.

As de£ciências citadas se agravam pelo fato de, não raro, o aluno demonstrar pouca independência para desenvolver seu estudo sem o acompanhamento de um professor ou monitor, e também pela pouca capacidade de expressão de raciocínio (Malta, 2002).

Na UERJ, a disciplina de Pré-Cálculo foi criada com a denominação de Matemática Instrumental, através do Programa de Apoio ao Estudante de Graduação (PAE/UERJ). O PAE/UERJ é um programa da Sub-Reitoria de Graduação (SR1) que oferece apoio acadêmico e/ou £nanceiro ao aluno, objetivando sua permanência na Universidade. A criação do PAE/UERJ está fortemente ligada ao surgimento do sistema de cotas na UERJ. Essa nova realidade potencializa a necessidade de se trabalhar, de forma extensiva, o conteúdo de matemática básica com os alunos que possuem disciplinas de matemática e/ou física na grade curricular.

A UERJ recebe anualmente, no Campus do Maracanã, mais de 1.500 alunos novos em Cálculo I, distribuídos da seguinte forma:

- Centro de Tecnologia e Ciências: Faculdade de Engenharia, Instituto de Física, Instituto de Geociências, Faculdade de Geologia, Instituto de Matemática e Estatística, Instituto de Química.
- Centro de Ciências Sociais: Faculdade de Administração e Finanças, Faculdade de Ciências Econômicas.

Nesses cursos, a reprovação em Cálculo I (que é pré-requisito de pelo menos uma disciplina) prejudica o desenvolvimento do aluno, aumenta de forma acentuada o número de turmas de Cálculo I e pode até mesmo levar à evasão.

2. Metodologia

A escolha da metodologia foi feita observando que no Cálculo I são veri£cados: elevado índice de reprovação, baixa compreensão conceitual, baixa motivação, alto índice de memorização, pouca ou nenhuma participação em sala de aula, grande isolamento entre os alunos e conhecimento de matemática básica muito abaixo do exigido.

Nossa proposta foi desenvolver a disciplina num esquema de Ensino Colaborativo. Nessa abordagem, as aulas ocorrem de forma a encorajar a participação ativa do estudante no processo de aprendizagem. O objetivo principal é criar um ambiente que envolva os estudantes na construção de conhecimentos de forma solidária e que os faça pensar sobre os conhecimentos construídos (Bruffee, 1993), (Johnson, 1986), (Sheridan, 1989), (Barros et al., 2003).

As experiências com ensino colaborativo têm sido muito encorajadoras, mostrando as seguintes vantagens (Barros et al., 2003): criação de espírito coletivo, maior independência por parte do aluno, desenvolvimento de hábito de estudo e aumento da habilidade de comunicação.

3. Implementação

3.1 Formação das Turmas

A primeira experiência se iniciou em junho de 2003, um mês após o início do primeiro semestre letivo. A inscrição na disciplina foi permitida apenas aos alunos recém ingressados que possuíam Cálculo na grade curricular. O número total de inscritos foi de 175 alunos. Desses, 144 foram selecionados para formar quatro turmas no campus do Maracanã. O critério de seleção empregado foi a nota na prova de matemática do vestibular, tendo preferência os alunos com menores notas.

Foram oferecidos os seguintes horários: £nal da manhã, início da tarde, £nal da tarde e início da noite. Cada turma foi organizada em grupos de quatro alunos e contou com um instrutor. No primeiro dia de aula, cada aluno foi submetido a um teste que de£niu seu grupo com o critério de heterogeneidade.

Ainda no primeiro semestre letivo de 2003, duas novas turmas da disciplinas foram formadas com alunos que ingressariam na Universidade no segundo semestre.

3.2 Instrutores

A seleção dos instrutores foi feita através de exame curricular e entrevista, dentro do grupo de alunos dos últimos três períodos do curso de licenciatura em matemática. Esses instrutores receberam auxílio no valor de R$190,00, em forma de uma bolsa de treinamento oferecida pela UERJ através da Sub-Reitoria de Graduação.

3.3 Características das Aulas

As aulas são desenvolvidas de forma a encorajar a participação do aluno e focadas na compreensão conceitual. As exposições são breves e seguidas da aplicação de listas de exercícios de £xação resumidas (Listas de Fixação). Essas listas são desenvolvidas em grupo e corrigidas durante a aula.

Foi empregado um esquema de colaboração em que os alunos se desenvolvem ajudando e sendo ajudados pelo grupo. Todos os trabalhos são feitos pelo grupo que, a qualquer momento, pode solicitar a ajuda do instrutor.

3.4 Programa da Disciplina

O programa da disciplina foi composto dos tópicos listados a seguir (Sa£er, 2003), (Malta et al., 2002), (Iezzi et al., 1999).

- Conjunto dos números reais: conjunto N, conjunto Z, conjunto Q, conjunto dos números irracionais e conjunto R.

- Funções e grá£cos: de£nição, domínio e imagem de uma função, funções polinomiais, raízes de equações, funções modulares, funções compostas e funções inversas.

- Função exponencial e logarítmica: potências e suas propriedades, função exponencial, de£nição de logaritmo, sistemas de logaritmos, propriedades operatória dos logaritmos, mudança de base e função logarítmica.

- Geometria: posição relativa entre duas retas, polígonos, triângulos, quadriláteros, circunferência e círculo, área de superfícies planas e volume de sólidos.

- Trigonometria: relações métricas no triângulo retângulo, círculo trigonométrico, funções trigonométricas, principais identidades, equações e inequações e funções trigonométricas inversas.

Os tópicos mencionados foram desenvolvidos direta ou indiretamente através do conceito de função. Desde o início do curso o aluno é continuamente confrontado com problemas envolvendo funções.

3.5 Material Empregado

As aulas se desenvolveram com a utilização de quadro de giz e listas de exercícios, de forma intercalada. As listas são compostas de exercícios selecionados de modo a orientar os alunos no desenvolvimento da disciplina. No início de cada aula o aluno recebia uma nova Lista de Fixação referente ao assunto a ser tratado durante a aula. Em cada sexta-feira distribuía-se, para cada grupo, uma Lista de Avaliação, abordando a matéria discutida na semana. O prazo de devolução da Lista era de cinco dias e a correção e entrega das notas se davam no prazo de uma semana.

3.6 Avaliação

O aluno é avaliado de forma continuada, através de listas de exercícios feitas em casa pelo grupo (Listas de Avaliação) e de provas individuais. Toda avaliação é baseada no conteúdo abordado nas aulas, de forma que o aluno participa do programa sem surpresas, sabendo a cada passo exatamente o que estudar e onde estão suas falhas. A nota £nal (NF) é dada pela fórmula:

$$NF = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + ML}{4},$$

onde P_i representa a nota da i-ésima prova e *ML* a média de 11 Listas de Avaliação.

A disciplina não reprova, mas a nota £nal indica ao aluno o seu domínio sobre o conhecimento básico requerido pelo Cálculo I.

4. Resultados e Conclusões

Nossa primeira experiência com o Pré-Cálculo se iniciou um mês após o começo do primeiro semestre letivo de 2003. Os alunos inscritos cursaram a disciplina simultaneamente com suas disciplinas regulares, inclusive com o próprio Cálculo I. Essa sobreposição criou di£culdades que, em muitos casos, levaram ao abandono da disciplina. Como resultado, as quatro primeiras turmas foram canceladas com apenas 75% do cronograma planejado.

A justi£cativa mais freqüente para o abandono foi a incapacidade do aluno de administrar seu tempo de estudo, o que o levou a optar por se dedicar às disciplinas regulares, principalmente no período de provas. Uma outra justi£cativa comum foi a expectativa que alguns alunos tinham de que a disciplina funcionasse como um tipo de monitoria, onde seriam esclarecidas dúvidas de Cálculo I.

Uma outra justi£cativa apresentada por vários alunos foi a falta de recursos para permanecer um turno a mais na Universidade e cursar a disciplina. Em alguns casos, os alunos não apenas abandonaram as aulas de Matemática Instrumental, como também as demais disciplinas do curso.

Alguns alunos entrevistados indicaram a incompatibilidade da carga horária (72 horas-aula) com o conteúdo programático. A disciplina foi planejada para funcionar como uma introdução ao Cálculo I, proporcionando ao aluno a revisão dos principais tópicos de matemática do ensino médio. Porém, para a maior parte dos alunos, muitos assuntos abordados eram novidades.

Apesar de todas as di£culdades e das críticas apontadas, é unânime a opinião de que a disciplina é importante e deve continuar sendo oferecida. Essa opinião é compartilhada inclusive por alunos mais antigos na Universidade que solicitaram a formação de uma turma extra de Matemática Instrumental para alunos veteranos no segundo semestre.

Os dados preliminares de uma avaliação que vem sendo feita em colaboração com o Núcleo de Gestão e Avaliação da Faculdade de Educação da UERJ classi£cam os seguintes itens como Bom ou Excelente: (i) local das aulas (instalações, mobiliário, acesso, temperatura e iluminação); (*ii*) horário da disciplina; (*iii*) conteúdos (adequação, clareza, aplicação teórica e prática); (*iv*) ação docente (preparo das aulas, linguagem e clareza das exposições, prática de ensino, ritmo das aulas e ordenação dos trabalhos); (v) atendimento à expectativa na disciplina.

A segunda experiência se iniciou um mês e meio antes do início do segundo semestre letivo. Foram formadas duas turmas com alunos que ingressariam na UERJ em 2003/2 e que foram convidados a cursar a disciplina, independentemente da nota obtida no vestibular. Essas turmas tiveram um alto índice de presença, até que se iniciou o período letivo. A partir daí, as de£ciências da primeira experiência voltaram a se repetir, fazendo-se notar a necessidade de se criar um mecanismo que evite o abandono da disciplina.

No momento encontram-se em funcionamento duas turmas, que se iniciaram duas semanas após o início das aulas do segundo semestre de 2003. Essas turmas são compostas por calouros, repetentes e mesmo alunos que não possuem Cálculo I na grade curricular. Para essas turmas, o programa se iniciou em “funções reais de uma variável real”. A matéria relativa a operações com números reais foi prescrita como um trabalho de revisão a ser feito em casa. Esta alteração torna a disciplina mais atraente, pois aborda um assunto simultaneamente com o Cálculo I, e também distribui melhor o conteúdo programático.

O conhecimento que acumulamos nessas experiências nos faz acreditar que é possível diminuir de forma signi£cativa a reprovação em Cálculo I, fazendo do Pré-Cálculo uma disciplina obrigatória para os alunos ingressantes com baixo conhecimento em matemática. O resultado concreto será conhecido ao £nal do segundo período de 2003 (março de 2004), quando será possível analisar o desempenho desses alunos no Cálculo I.

Gostaríamos de registrar nosso agradecimento a todas as pessoas que estão nos ajudando neste trabalho, destacando-se os professores Jorge Guilherme de Araújo Carvalho, Diretor do IME, Ondina Maria Meleiro Ferreira, Diretora do Departamento de Orientação e Supervisão Pedagógica, e Isac João de Vasconcellos, Sub-Reitor de Graduação.

Referências

BARROS, J.A. de, SILVA, G.S.F. da, TAGLIATI, J.R. & REMOLD, J. (2003) Uma experiência de aprendizado colaborativo no curso de Física da UFJF, submetido para publicação na Revista Brasileira de Ensino de Física.

BRUFFEE, K. (1993) Collaborative Learning: Higher Education, Interdependence, and the Authority of Knowledge. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D. & PÉRIGO, R. (1999) Matemática - Volume Único. São Paulo: Atual.

JOHNSON, R.T. & JOHNSON, D.W. (1986) Action research: Cooperative learning in the science classroom. Science and Children, v. 24, p. 31-32.

KAPUT, J. (1997) Rethinking Calculus: Learning and Thinking, American Mathematical Monthly, v. 104, n. 8, p. 731-737.

LOPES, A. (1999) Algumas re¤exões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS. Matemática Universitária - SBM, Rio de Janeiro, n. 26/27, p. 123-146.

MALTA, I. (2002) Sobre um método não tradicional para aprender cálculo. IN: CARVALHO, L.M. e GUIMARÃES, L.C. (Org.). História e Tecnologia no Ensino da Matemática. Rio de Janeiro: UERJ, v. 1, p. 213-220.

MALTA, I., PESCO, S. & LOPES, H. (2002) Cálculo a uma Variável – Uma introdução ao Cálculo. Rio de Janeiro: Editora PUC RJ, v. 1.

SAFIER, F. (2003) Teoria e Problemas de Pré-Cálculo (Coleção Schaum). Porto Alegre: Bookman.

SHERIDAN, J., BYNE, A. & QUINA, K. (1989) Collaborative Learning: Notes from the Field. College Teaching, v. 37.2, p. 49-53.

HHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 171:181
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 21

UMA DEMONSTRAÇÃO A PARTIR DE EXEMPLOS, INSPIRADA PELA GEOMETRIA DINÂMICA

Silvana Marini R. Lopes
Departamento de Matemática
PUC-Rio
silvana@mat.puc-rio.br

Resumo: *O ambiente de geometria dinâmica parece reforçar a prática habitual entre alunos de generalizar resultados em geometria, a partir da simples veri£cação de alguns casos particulares. Usaremos o teorema de Napoleão, para explorar o aspecto positivo desta prática. Apresentamos uma nova construção (por rotações) do triângulo de Napoleão, que nos permite provar o teorema de Napoleão, a partir da veri£cação de alguns casos particulares. A técnica usada obtém um polinômio que é identicamente nulo se, e somente se, o teorema é verdadeiro, de tal maneira que cada raiz do polinômio corresponde a um caso particular para o qual se sabe que o teorema é correto. O que esta técnica mostra é que cabe ao professor escolher entre duas alternativas: ou induzir o aluno a buscar um argumento geral (que é o que se faz habitualmente), ou pedir que ele considere o problema de contar quantos exemplos são necessários para que o resultado geral seja uma conseqüência deles!*

Palavras-chave: *Matemática, geometria euclidiana, números complexos.*

Abstract: *The dynamical geometry environment seems to stress the students common practice of generalizing geometric results, by inspecting a few particular cases. The positive aspect of this practice will be explored through the geometric con£guration of Napoleon's theorem. The Napoleon's triangle construction (by rotation) presented allows us to prove the Napoleon's theorem by inspecting a few particular cases. The employed technique obtains a polynomial that is identically null if, and only if, the theorem is true, so that each polynomial corresponds to a particular case which is* *obviously true. This technique shows that it is up to the teacher to choose between two alternatives: to induce the student to look for a general argument, or ask him to consider the problem of counting how many examples are necessary to make the general result a consequence of them!*

Key words: *Mathematics, euclidean geometry, complex numbers.*

1. Introdução

Uma das maiores contribuições da geometria dinâmica no ensino da matemática é a de promover as práticas de investigação e elaboração de conjecturas. De forma fácil e e£ciente, propriedades geométricas podem ser testadas para um número in£nito de con£gurações geométricas. A abordagem habitual entre alunos, aliás, procede justamente na direção de obter exemplos da situação mais geral desejada. Apresentaremos uma demonstração para o teorema de Napoleão que se inspira na geometria dinâmica por dois motivos:

1. A construção (por rotações) do triângulo de Napoleão, apresentada aqui, possui vantagens que podem ser consideradas muito próximas às encontradas num ambiente dinâmico, como por exemplo a continuidade dos pontos envolvidos nas construções geométricas. Além disso, esta construção engloba os dois casos da construção clássica, como veremos a seguir: os triângulos interno e externo de Napoleão. Esta vantagem é encontrada naturalmente quando usamos um software de geometria dinâmica.

2. A técnica usada na demonstração obtém um polinômio que é identicamente nulo se, e somente se, o teorema é verdadeiro, de tal maneira que cada raiz do polinômio corresponde a um caso particular para o qual se sabe que o teorema é correto. Ao teorema de Napoleão, conseguimos associar um polinômio de grau 1 e, então, com apenas dois exemplos (banais), provamos o caso geral. A geometria dinâmica proporciona uma ótima visualização deste fato, além de valorizar as conjecturas feitas pelos alunos. O que a técnica mostra é que cabe ao professor escolher entre duas alternativas: ou induzir o aluno a buscar um argumento geral (que é o que se faz habitualmente), ou pedir que ele considere o problema de contar quantos exemplos são necessários para que o resultado geral seja uma conseqüência deles!

2. O teorema de Napoleão

Dado um triângulo *ABC* qualquer, construa triângulos equiláteros apoiados externamente (resp. internamente) sobre cada um de seus lados. O *triângulo externo (resp. interno) de Napoleão* é obtido unindo-se os baricentros X, Y e Z destes triângulos (*£gura 1*).

Teorema: Os triângulos externo e interno de Napoleão de *qualquer* triângulo são equiláteros.

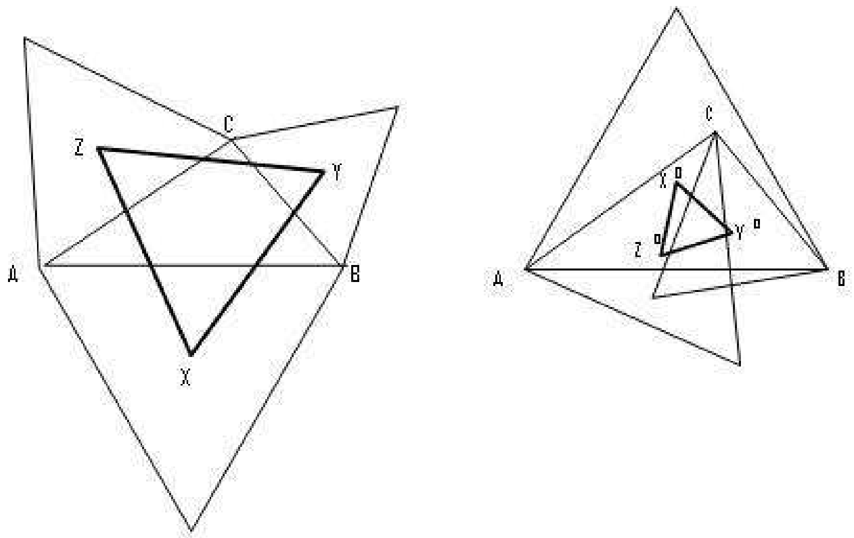


Figura 1: O triângulo externo de Napoleão, à esquerda, e o triângulo interno de Napoleão, à direita.

Na construção clássica, como enunciada acima, o triângulo de Napoleão não está de£nido quando os vértices A, B e C são colineares; veremos que, para a construção por rotações, o teorema pode ser enunciado para quaisquer pontos A, B e C: isso tem a vantagem de representar em um único caso a construção dos triângulos externo e interno de Napoleão.

Empregar números complexos para representar rotações será especialmente vantajoso para nosso ponto de vista. Uma rotação de um ponto em torno da origem no sentido anti-horário por um ângulo θ é, simplesmente, o mesmo que multiplicar este ponto pela constante $e^{i\theta}$.

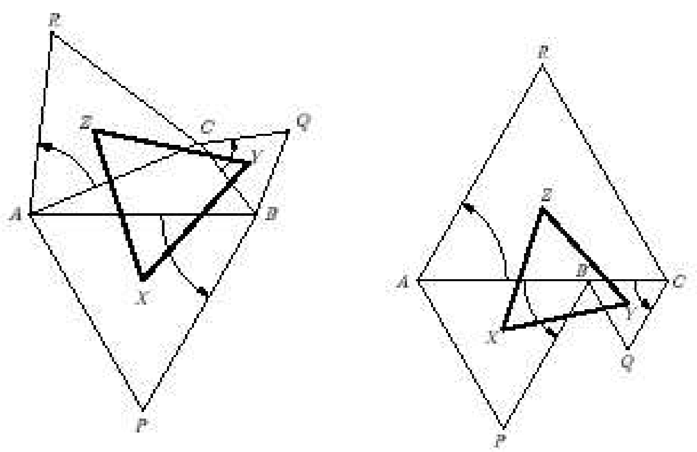
Esta notação é usada na *demonstração 1*, onde as coordenadas de todos os pontos envolvidos na construção do triângulo de Napoleão são dadas explicitamente, em preparação para a *demonstração 2* bem mais conceitual. As contas feitas na *demonstração 1* deixam claro um fato muito interessante: para mostrar o teorema de Napoleão, basta veri£car que uma certa expressão a£m em z(isto é, uma expressão da forma $az+b$, com a e b constantes complexas) é igual a zero para *qualquer valor* de z! A escolha de z está relacionada com a disposição dos vértices do triângulo ΔABC. Uma expressão a£m é identicamente nula exatamente quando tem (pelo menos duas raízes. Em termos geométricos, isto é o mesmo que encontrar duas con£gurações particulares para as quais o teorema de Napoleão é verdadeiro. Em resumo, dois exemplos (dois casos particulares!) para o teorema de Napoleão são su£cientes para estabelecer o teorema geral.

A construção do triângulo de Napoleão por rotações

Sejam dados três pontos, A, B e C, no plano. Construa triângulos equiláteros sobre os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, da seguinte forma: faça uma rotação de $60°$ no sentido anti-horário, dos vértices A, B e C em torno dos vértices B, C e A, obtendo os pontos P, Q e R, vértices dos triângulos equiláteros ΔABP, ΔBCQ e ΔACR, respectivamente. Chamaremos o *triângulo de Napoleão obtido por rotações* ou mais simplesmente, o *triângulo de Napoleão*, aquele obtido pela união dos respectivos baricentros X, Y e Z, dos triângulos equiláteros ΔABP, ΔBCQ e ΔACR.

Com esta construção, o triângulo de Napoleão £ca bem de£nido para quaisquer pontos A, B e C, inclusive quando eles são colineares ou coincidentes.

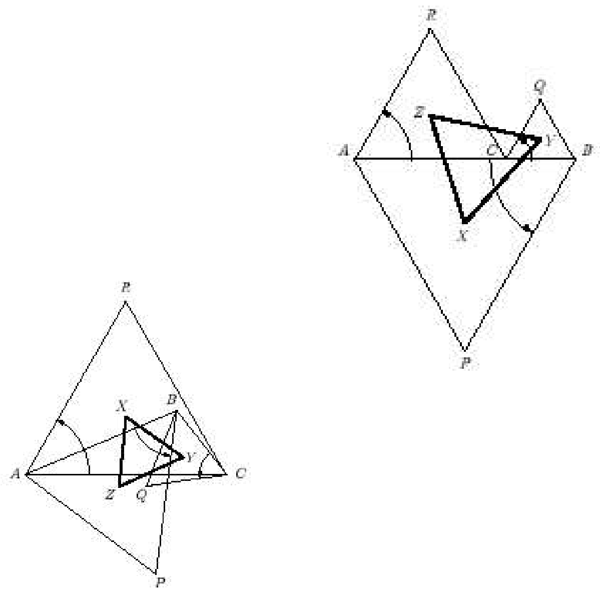
Sejam A, B e C pontos não colineares e dispostos no sentido anti-horário (resp.horário). Note, pela £gura 2 (a) (resp.£gura 3(a)), que os triângulos equiláteros obtidos por rotações correspondem aos triângulos equiláteros externos (resp.internos) da versão clássica.



(a) A, B e C não colineares

(b) A, B e C colineares

Figura 2: A construção do triângulo de Napoleão por rotações.



(a) A, B e C não colineares

(b) A, B e C colineares

Figura 3: A construção do triângulo de Napoleão por rotações.

Assim, o triângulo de Napoleão é o mesmo que o triângulo externo (resp.interno) de Napoleão. Desta maneira, a construção por rotações nos permite enunciar o teorema clássico, nos casos em que o triângulo de Napoleão é externo ou interno.

Teorema: O triângulo de Napoleão é equilátero.

Demonstração 1 (notação complexa):

Seja o triângulo $\triangle ABC$ no plano complexo, de forma que o vértice A esteja na origem e B em 1. De£na z como o número complexo associado ao vértice C (£gura 4).

Como P é obtido a partir da rotação de

no sentido anti-horário do vértice A em torno de B, podemos escrever

$$P = (A - B)\, e^{\frac{\pi}{3}i} + B = 1 - e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Analogamente, temos que

$Q = (B - C)\, e^{\frac{\pi}{3}i} + C = (1 - z)\, e^{\frac{\pi}{3}i} + z$ e $R = (C - A)\, e^{\frac{\pi}{3}i} + A = z\, e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Desta maneira, concluímos que as coordenadas de X, YeZ são dadas por

$X = \frac{A+B+P}{3} = \frac{2-e^{\frac{\pi}{3}i}}{3}, \quad Y = \frac{B+C+Q}{3} = \frac{(2-e^{\frac{\pi}{3}i})z+1+e^{\frac{\pi}{3}i}}{3}$ e $Z = \frac{C+A+R}{3} = \frac{(1+e^{\frac{\pi}{3}i})z}{3}$

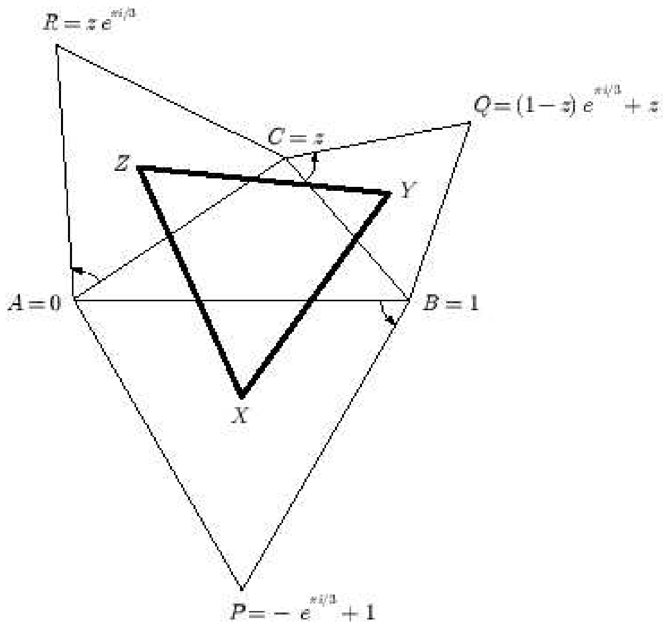


Figura 4: Rotações em notação complexa.

Queremos mostrar que o triângulo de Napoleão ΔXYZ é equilátero. Para isso, basta veri£carmos que Y é a rotação do ponto X, de $\pi/3$, em torno de Z:_

$$Y = (X - Z)\, e^{\frac{\pi}{3}} + Z.$$

Em termos da variável z, devemos então veri£car que

$$Y = \frac{1 + z + (1-z)\, e^{\frac{\pi}{3}i} + z}{3} = \left(\frac{2 - e^{\frac{\pi}{3}i}}{3} - \frac{z + z\, e^{\frac{\pi}{3}i}}{3}\right) e^{\frac{\pi}{3}i} + \frac{z + z\, e^{\frac{\pi}{3}i}}{3}$$

Ou ainda, que

$$(1 - e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{\frac{2\pi}{3}i})\, z + \left(1 - e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{\frac{2\pi}{3}i}\right) = 0.$$

Esta última expressão segue imediatamente da identidade $1 - e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{\frac{2\pi}{3}i} = 0$.

Esta demonstração mostra explicitamente que todos os pontos envolvidos no teorema de Napoleão podem ser escritos como *funções a£ns* de z, isto é, que os números complexos associados a estes pontos são da forma *az*+*b*, com a e $b$constantes complexas. Esta observação sugere ainda outra demonstração que apresentaremos a seguir.

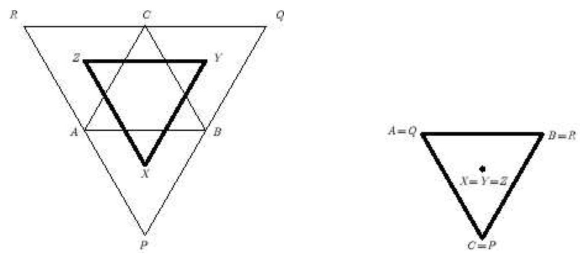
Demonstração 2:

Considere novamente a con£guração geométrica da £gura 4, onde o triângulo inicial ΔABC está no plano complexo com os vértices Ae B £xos em 0 e 1, respectivamente, e

$C = z$ (qualquer).

Sabemos que, no plano complexo, fazer uma rotação de um número em torno da origem é o mesmo que multiplicar este número por uma constante complexa de módulo 1.

Desta forma, os números complexos associados aos vértices P, QeR são expressões a£ns em z, pois são rotações dos números complexos 0, 1 e z em torno de 1, z e 0, respectivamente. Os vértices X, YeZ também são expressões a£ns em z, pois são médias aritméticas de expressões a£ns.



(a) $z = e^{\frac{\pi}{3}}$ (b) $z = e^{\frac{-\pi}{3}}$

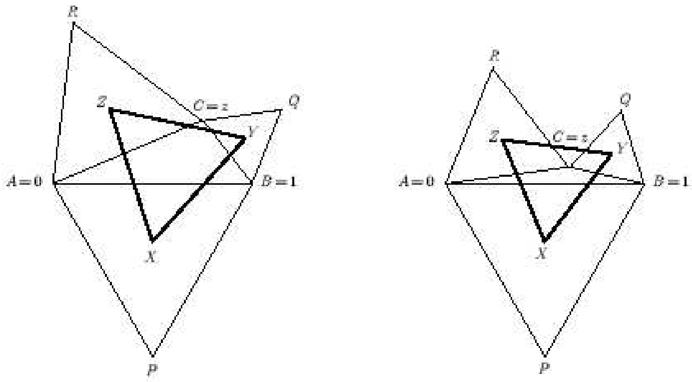
Figura 5: Duas con£gurações para as quais o teorema é trivial.

Queremos mostrar que o triângulo de Napoleão, ΔXYZ é equilátero. Faremos isto, veri£cando, por exemplo, que Y pode ser obtido através da rotação no sentido anti-horário de $\pi/3$ do vértice X em torno de Z, ou seja, que $Y = (X - Z)\, e^{\frac{\pi}{3}i} + Z$, ou ainda, que

$$Y - (X - Z)\, e^{\frac{\pi}{3}i} - Z = 0.$$

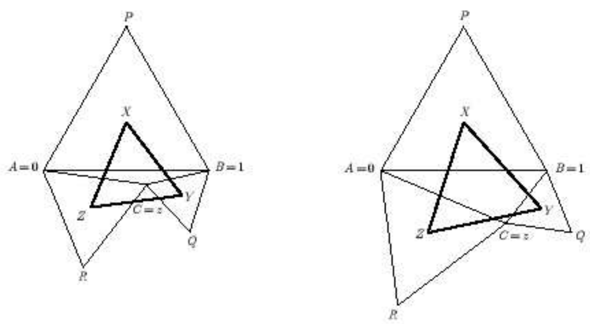
Como X, YeZ são expressões a£ns em z, devemos então mostrar que uma certa expressão a£m em z é zero para *qualquer valor* de z. Para isto, basta encontrarmos dois valores de z que são raízes desta expressão a£m. Por exemplo $z = e^{+\frac{\pi}{3}i}$ e $z = e^{-\frac{\pi}{3}i}$, cujas con£gurações geométricas são mostradas na *£gura 5*. Para estes valores de z, o triângulo inicial é equilátero, o que torna a veri£cação do teorema imediata.

Em notação complexa, £ca claro que, com o uso de rotações, todos os pontos envolvidos na construção do triângulo de Napoleão dependem continuamente de z, pois suas posições podem ser representadas através de funções a£ns em z. Com a construção clássica, o triângulo de Napoleão com vértices $A = 0$ e $B = 1$ só está de£nido para valores de $C = z$ fora do eixo real e não é possível fazer uma extensão contínua desta construção para todo o plano complexo. A *£guras 6 e 7* ilustra este fato para o caso do triângulo externo (a conclusão é análoga para o caso do triângulo interno). Note o 'salto' dos pontos X, Y e Z quando C = z passa do semi-plano superior (Im (z) $>$ 0) para o semi-plano inferior (Im (z) $<$ 0).



(a) Im (z) > 0 (b) Im (z) > 0

Figura 6: A construção clássica do triângulo externo de napoleão não admite uma extensão contínua.



(a) Im (z) < 0 (b) Im (z) < 0

Figura 7: A construção clássica do triângulo externo de Napoleão não admite uma extensão contínua.

A demonstração apresentada acima segue a conduta investigativa que se tem num ambiente de geometria dinâmica. Todos os pontos envolvidos na construção do triângulo de Napoleão dependem do triângulo inicial ABC. Num ambiente dinâmico, ao movermos um dos vértices deste triângulo, por exemplo o vértice C, observamos que o triângulo de Napoleão continua equilátero. Com o recurso dinâmico, salta aos olhos que o teorema é verdadeiro para qualquer posição do vértice C. Para mostrar isso, de outra forma, o meio mais conveniente e próximo deste dinamismo que encontramos foi através do plano complexo. Fixando os vértices A e B e considerando $C = z$, bastou observar que todos os demais pontos dependem de forma contínua e linear de z.

A técnica usada na demonstração do teorema de Napoleão sugere que a maioria dos resultados de geometria que apresentamos na escola são conseqüência do fato que eles admitem dois ou três exemplos. A pesquisa de Chou reforça esta idéia: usando o programa de computador *Geometry Expert* (CHOU; GAO; ZHANG, 2002), ele demonstrou automaticamente cerca de 366 problemas extraídos de um livro típico de geometria do ensino médio (ALTSHILLER-COURT, 1952). Pela estatística, 219 deles são lineares e os demais são quadráticos, no sentido que os polinômios em várias variáveis obtidos na conversão do contexto geométrico para o contexto algébrico são tais que, considerando-se uma variável de cada vez, apenas polinômios de grau no máximo igual a 1 e 2 aparecem, respectivamente.

Referências:

ALTSHILLER-COURT, N. *College Geometry: A Second Course in Plane Geometry for Colleges and Normal Schools*. Barnes & Noble, Inc., 1952.

BARLOTTI, A. *Una proprietà degli n-agoni che si'ottengono transformando in una af£nità un n-agono regolare*. Bollettino della Unione Matematica Italiana, vol. 10, no. 3, pp. 96-98, 1955.

BRODIE, S., LAMBROU, M. *Napoleon's Theorem*. Internet WEB link: http://www.cut-the-knot.com/proofs/napoleon.shtml, 2000.

CHOU, S.-C. *Mechanical Geometry Theorem Proving*. Dordrecht Reidel Publishing Company, 1988.

CHOU, S.-C., GAO X.-S., ZHANG, J.-Z. *Machine Proofs in Geometry: Automated Production of Readable Proofs for Geometry Theorems*. World Scienti£c Publishing, 1998.

CHOU, S.-C., GAO X.-S., ZHANG, J.-Z. *Geometry Expert*. Internet WEB link: http://www.mmrc.iss.ac.cn/~xgao/gex.html, 2002.

FAIFOFER, A. *Elementi di Geometria*, décima sétima edição, 1911.

FISHER, J. C.; RUOFF, D.; SHILLETO, J. *Perpendicular Polygons*. The American Mathematical Monthly, vol. 92, no. 1, pp. 23-37, 1985.

GERBER, L. *Napoleon's Theorem and Parallelogram Inequality for Af£ne-Regular Polygons. The American Mathematical Monthly*, vol. 87, pp. 644-648, 1980.

HAHN, L. S. *Complex Numbers & Geometry*. Spectrum Series, MAA, 1994.

LAISANT, C. A. *Sur quelques proprietes des polygones*. Compte rendu: Association Française pour l'Avancement des Sciences, pp. 142-154, 1877.

LOPES, S., BORTOLOSSI, H.J e TOMEI, C. (2002) *Complexidade em Geometria Euclidiana Plana*, dissertação de mestrado, PUC-Rio, ago/2002.

PECH, P. *The Harmonic Analysis of Polygons and Napoleon's Theorem.* Journal of Geometry and Graphics, vol. 5, no. 1, pp. 13-22, 2001.

RIGBY, J. F. *Napoleon Revisited*. Journal of Geometry, vol. 33, pp. 129-146, 1988.

RUOFF, D.; SHILLETO, J. *Recursive Polygons*. Bollettino della Unione Matematica Italiana, vol. 15- B, no. 5, pp. 968-981, 1978.

SCRIBA, C. J. *Wie kommt "Napoleon Satz" zu seinem Namem?* Historia Mathematica, vol. 8, pp. 458-459, 1980.

THÉBAULT, V. *Solution to Problem 169*. National Mathematics Magazine, vol. 12, pp. 192-194, 1937-38.

TURNER, G. *Elementi di Geometria*, vol.~I, 1843.

YAGLOM, I. M. *Geometric Transformations I*. New Mathematical Library, MAA, 1973.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 183:189
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 22

UM CANDIDATO A OBSTÁCULO À APRENDIZAGEM DOS CONCEITOS DE COMPRIMENTO E ÁREA COMO GRANDEZAS

Paula Moreira Baltar Bellemain
Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino
Universidade Federal de Pernambuco
pmbaltar@ufpe.br

***Resumo**: No presente trabalho discutem-se contribuições da análise epistemológica para o estudo de fenômenos didáticos relativos à aprendizagem e ao ensino de comprimento e área. Discutindo o conceito de obstáculo na Didática da Matemática e as pesquisas anteriores sobre a aprendizagem do conceito de área pretende-se subsidiar a elaboração da hipótese de existência de obstáculos na aprendizagem desses conteúdos.*

***Palavras-chave:** Didática da Matemática, Obstáculo, Grandezas, Área, Comprimento*

***Abstract:** By this work, we would like to discuss the contributions of an epistemological analyze for the study of didactical phenomena related to length and area teaching and learning. Discussing the concept of obstacle in the didactic of mathematics and in the previous researches, we are pretending the increase the hypothesis of the existence of obstacles in the teaching of this contents.*

***Key words:** Didatic of Mathematics, Obstacle, Magnitude, Area, Length.*

1. Introdução

A contribuição mais nítida da epistemologia para o desenvolvimento teórico da Didática da Matemática, como campo de conhecimento, é o conceito de obstáculo epistemológico. Esse conceito situa-se em uma das funções da análise epistemológica destacadas por Artigue (1990) que é aprofundar a compreensão das raízes dos erros dos alunos, subsidiando a construção de situações que contribuam para sua superação.

Observam-se com relação à aprendizagem do conceito de área e mais especi£camente às relações entre comprimento e área algumas di£culdades conceituais de aprendizagem que tem-se revelado extremamente persistentes.

A análise dos resultados do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco - SAEPE, nos níveis de 4^a e 8^a séries, indica baixos índices de desempenho nas questões referentes a conteúdos de grandezas geométricas, inclusive quando comparados aos índices apresentados por outros campos da matemática (Bellemain, 2003). Da mesma forma, a análise dos resultados de avaliações de desempenho de alunos do Ensino Fundamental francesas (Baltar, 1996) mostrou que as questões sobre estes conteúdos têm, em geral, aproveitamento inferior a 50% e que no nível equivalente terceiro ciclo, dois dos três conteúdos que apresentam maiores índices de fracasso no currículo francês são relacionados à aprendizagem das grandezas geométricas: o cálculo sobre grandezas (entre outros, áreas e volumes) e a utilização das unidades. Dentre os erros mais freqüentes destacam-se as confusões entre área e perímetro, a utilização de fórmulas errôneas, a extensão indevida da validade das fórmulas de área e o uso inadequado de unidades. Esses erros são referentes à construção do signi£cado das relações entre comprimento e área sob vários pontos de vista.

De acordo com Lima & Bellemain (2002), pesquisas realizadas em diversos contextos educacionais, indicam uma certa regularidade no aparecimento desses tipos de erros. Essa constatação conduz a formular a hipótese de existência de obstáculos na aprendizagem do conceito de área e de suas relações com o comprimento.

2. A noção de obstáculo na Didática da Matemática

A noção de obstáculo, desenvolvida por Gaston Bachelard, em A Formação do Espírito Cientí£co, publicado em 1938, não incorporava inicialmente a Matemática. Sua extensão e aplicação à Didática da Matemática são devidas a Guy Brousseau. Assumindo uma £liação com as idéias defendidas por Bachelard e por Piaget, Brousseau (1983) especi£ca seu ponto de vista sobre o papel do erro na aprendizagem da Matemática:

"o erro e o fracasso não têm o papel simpli£cado que se quer fazê-los desempenhar. O erro não é apenas o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso que se crê nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso ou simplesmente inadaptado. Os erros deste tipo não são erráticos e imprevisíveis, eles se constituem em obstáculos. Tanto no funcionamento do professor quanto no do aluno, o erro é constitutivo do sentido do conhecimento adquirido"(p. 171)

Este autor explicita que um obstáculo vai se manifestar por meio de erros persistentes e reproduzíveis. Os erros relativos a um obstáculo, num mesmo sujeito, são interligados, caracterizando uma maneira de conhecer. Para Brousseau, um obstáculo é um conhecimento que funciona num certo domínio de ação e não uma lacuna. Entretanto, esse conhecimento provoca bloqueios, erros e di£culdades na aprendizagem de outro(s) conhecimento(s), ou impedem o sujeito de resolver certos problemas.

Para Artigue (1990), a identi£cação de obstáculos epistemológicos não deve basear-se apenas na busca de sua ocorrência na evolução histórica de um dado campo do saber. Ela deve necessariamente passar pela veri£cação da persistência desses erros e fracassos também nos alunos atuais:

"Ora, esta condição me parece essencial: pelo fato de haver disparidade entre as condições que governam os dois sistemas [o do contexto histórico de produção do conhecimento e o do contexto de ensino atual], a análise histórica pode ajudar o pesquisador em didática na sua busca de nós de resistência da aprendizagem, ela não pode de forma alguma, trazer sozinha a prova da existência de tal ou qual obstáculo para os alunos atuais"(p. 254)

Artigue (1990) evidencia que os nós de maior resistência no processo de aprendizagem "correspondem freqüentemente aos pontos em que um obstáculo de origem epistemológica histórica intervém, reforçado por um obstáculo de outra origem, particularmente um obstáculo de origem didática"(p. 254). Ou seja, a organização do ensino pode reforçar a aparição de erros ou lacunas resistentes à aprendizagem.

A análise das pesquisas sobre obstáculos nas didáticas de conteúdos especí£cos leva Artigue a identi£car mecanismos produtores de obstáculos: a generalização abusiva; a regularização formal abusiva; a £xação em uma contextualização ou uma modelização familiares; o amálgama de noções sobre um suporte dado. Pode-se ilustrar o mecanismo da regularização formal abusiva, por exemplo, por meio do erro freqüente e resistente que consiste em multiplicar os comprimentos dos lados de um paralelogramo para obter sua área. A fórmula da área de um retângulo é indevidamente estendida ao paralelogramo, por um processo que se apóia na manipulação de símbolos matemáticos sem controle do signi£cado. Por sua vez, o amálgama de noções distintas, mas intrinsecamente ligadas, origina erros persistentes no campo das grandezas geométricas, a saber, no amálgama entre segmento de reta e comprimento e entre superfície e área, que caracteriza as concepções geométricas, como veremos adiante.

Vergnaud (1989) destaca a necessidade de distinguir di£culdade e obstáculo argumentando que a superação de simples di£culdades é mais fácil. Já na caracterização de obstáculos, observa-se contradição entre conhecimentos novos e anteriormente construídos, o que provoca nós de resistência no processo de aprendizagem. Este autor salienta que di£culdades e obstáculos exigem tratamentos didáticos distintos. No caso dos obstáculos é necessário um trabalho árduo de evidência das contradições, por meio de situações problemáticas variadas. Um importante desa£o da Didática da Matemática é identi£car obstáculos, caracterizá-los e construir situações didáticas que favoreçam sua superação.

3. Sobre a aprendizagem do conceito de área

As pesquisas sobre o ensino-aprendizagem da matemática explicitam algumas das fontes de erros como aqueles apontados na introdução: confusão entre área e perímetro, uso inadequado de fórmulas e de unidades de medida.

O estudo das concepções geométricas e numéricas (Douady & Perrin- Glorian, 1989; Balacheff, 1988) evidencia que uma das origens das di£culdades conceituais dos alunos é a ausência de construção das relações pertinentes entre os campos numérico e geométrico.

Segundo Douady & Perrin- Glorian (1989), os alunos desenvolvem uma concepção forma (segundo a qual há um amálgama entre £gura e área e entre perímetro e contorno), uma concepção número (segundo a qual só são considerados os elementos pertinentes para o cálculo), ou ambas, mas de forma isolada uma da outra.

A concepção e experimentação de uma engenharia didática (Douady & Perrin-Glorian, 1989) evidenciou que a abordagem do conceito de área como grandeza autônoma favorecia a construção de relações entre conhecimentos geométricos e numéricos na resolução de problemas de área. Neste caso, distinguem-se, três domínios: o geométrico – ao qual pertencem as superfícies –, o das grandezas – ao qual pertence a área – e o das medidas – que são números reais positivos. Um par (número, unidade de área) é uma maneira de designar uma área, a qual é considerada como uma classe de equivalência de superfícies. Em Baltar (1996) con£rmou-se a pertinência da abordagem da área como grandeza autônoma e investigou-se as relações entre área e perímetro, a apropriação e os usos possíveis das fórmulas de área.

Por sua vez, Rogalski (1982) destaca que a aquisição das relações entre diferentes grandezas geométricas é um processo complexo e de longa duração. Nas relações entre comprimento e área, por exemplo, intervém um processo duplo de diferenciação e de coordenação. Ao mesmo tempo, devem-se diferenciar propriedades simultaneamente presentes numa £gura (o comprimento do contorno e a área da superfície, por exemplo) e coordenar essas mesmas propriedades na apropriação das fórmulas.

No que diz respeito ao processo de diferenciação entre área e comprimento, várias pesquisas evidenciaram erros variados, etiquetados sob a expressão "o aluno não dissocia área e perímetro". O levantamento dessas pesquisas conduziu Baltar (1996) a caracterizar a distinção entre área e perímetro sob diferentes pontos de vista (topológico, dimensional, computacional e variacional), a diferenciar os processos subjacentes à aquisição da dissociação das variações de área e perímetro em função da natureza das £guras.

Nas pesquisas realizadas por Vergnaud (1983) sobre a aprendizagem do volume, observou-se que, em tarefas de cálculo do volume de sólidos, alguns alunos utilizam procedimentos inadequados envolvendo a soma de medidas de comprimentos de arestas, somas de medidas de área das faces ou ainda envolvendo somas de números que representam medidas de comprimento e de área. Esses autores articulam as di£culdades observadas com o campo conceitual das estruturas multiplicativas.

Diversas pesquisas (Douady & Perrin-Glorian, 1989; Schneider, 1991; Perrin-Glorian 1992, Baltar, 1996) indicam a persistência de algumas das di£culdades conceituais supracitadas (aquelas relacionadas às relações entre comprimento e área).

A constatação da variedade de situações em que erros ou lacunas se manifestam na construção do signi£cado das relações entre grandezas geométricas (comprimento, área e volume) e da persistência desses erros conduz à formulação da hipótese de existência de obstáculos relacionados a esses conteúdos. Um importante estudo relativo a esse tema foi conduzido por Schneider (1991). Essa autora interpreta alguns dos erros cometidos por alunos do Ensino Médio, no cálculo de áreas e volumes, como conseqüência do "obstáculo da heterogeneidade das dimensões"de natureza epistemológica.

Da mesma forma, Perrin-Glorian (1992) formula a hipótese de existência de um obstáculo em torno da relação entre área e perímetro, sem entretanto haver, a nosso conhecimento, pesquisas posteriores que tenham aprofundado a investigação dessa hipótese. Ademais, estudos sobre os conhecimentos de futuros professores de ensino fundamental mostram que os mesmos utilizam teoremas em ação errôneos, segundo os quais área e perímetro variam sempre no mesmo sentido, o que con£rma a resistência das di£culdades conceituais de aprendizagem nesse domínio e aponta para a tendência de que o ensino reforce tais di£culdades, possivelmente devido ao conhecimento insu£ciente dos professores. A questão que se coloca, então é: que conhecimento pode ser considerado como obstáculo a uma compreensão plena do conceito de área ?

4. Considerações £nais

A hipótese que formula-se aqui é de que as concepções geométricas e numéricas constituem-se em obstáculos para a construção do conceito de área como grandeza autônoma e das relações pertinentes entre comprimento e área.

De um ponto de vista estritamente matemático, a relação de equivalência “ter mesma área” (que permite considerar a área como grandeza), é de£nida pela escolha de uma unidade seguida da medida de área das superfícies. Não há preocupação com mudanças de unidade. Entretanto, do ponto de vista das exigências da sociedade e da matemática escolar, coloca-se a questão da adequação da escolha da unidade à situação, ao grau de precisão desejado e ao resultado numérico que será obtido, entre outros fatores. É preciso, portanto, distinguir o número e a grandeza, pois a mudança de unidade de área pode conduzir a alterações no número que expressa a medida da área desta superfície e não há razão para que mudanças de unidade alterem a área de uma superfície. Da mesma forma, é preciso diferenciar a área e a superfície, uma vez que £guras de mesma área não precisam necessariamente ser idênticas.

O aluno que mobiliza uma concepção numérica, considera que a área é um número. Nesse caso, não há como justi£car que uma mudança de unidade não altere a área de uma £gura. Não há tampouco impedimentos à fabricação de fórmulas (que podem ser mais ou menos pertinentes do ponto de vista matemático), nas situações em que não se conhece outro modo de calcular a área de uma £gura ou a expressar a área de uma £gura em metros.

Por outro lado, a construção da idéia de área como a própria £gura pode encontrar parte de sua justi£cativa nos usos da palavra área na língua materna. Quando se usa expressões como “área escolar”, “área de lazer”, “grande área de um campo de futebol” e tantas outras, faz-se alusão a um local e não a uma propriedade do mesmo. Desse ponto de vista, uma mudança de posição ou de forma alteram necessariamente a área, o que não corresponde à idéia de área em Matemática. Da mesma forma, no sentido de uma concepção geométrica, duas £guras que têm mesma área têm necessariamente mesmo perímetro, pois são idênticas; e aumentar a área de uma £gura, pressupõe aumentar por homotetia o que leva necessariamente a um aumento do perímetro e reciprocamente.

As concepções numéricas e geométricas explicam erros freqüentes e persistentes observados na aprendizagem do conceito de área. Constituem-se em sistemas que apresentam certa coerência interna embora não correspondam ao signi£cado desse conceito em Matemática. Finalmente sua negação é necessária para a construção da área como grandeza. Por essas razões, fazemos a hipótese de que as concepções numéricas e geométricas se constituem em obstáculo para a construção da área como grandeza e para a compreensão plena das relações entre comprimento e área.

Referências:

ARTIGUE, M. (1990) Épistémologie et Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble: La Pensée Sauvage v.10, n. 2/3, p. 241-286.

BALACHEFF, N., (1988). Processus de preuve chez des élèves de collège. Tese de Doutorado. Université Joseph Fourrier. Grenoble.

BALTAR, P. M., (1996). Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes : une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège. Tese de Doutorado. Université Joseph Fourier. Grenoble.

BELLEMAIN, P. M. B. (2003) A aprendizagem das relações entre comprimento e área no ensino fundamental. Anais do II SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. SBEM: Santos. Publicação em CD-Rom.

BROUSSEAU, G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, Grenoble : La Pensée Sauvage. vol.4, nª2, pp. 165-198.

DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M. J., (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. Educational Studies in Mathematics. Vol. 20, nª4, pp. 387-424.

LIMA, P. F., BELLEMAIN, P. M. B. (2002) Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental. Natal: Editora da SBHMat.

PERRIN-GLORIAN M. J., (1992). Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en dif£culté aux niveaux CM - 6ème. Tese de doutorado. Paris VII.

ROGALSKI J., (1982). Acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface). In: Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 3, nª 3, pp. 343-396. La Pensée Sauvage. Grenoble.

SCHNEIDER M,. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages in£nis"des surfaces et des solides. In: Recherches en didactique des mathématiques. Vol: 11, nª 2.3, pp. 241-294. La Pensée Sauvage. Grenoble.

VERGNAUD G. (1983). Didactique du concept de volume. Recherches en didactique des mathématiques. 4.1. La Pensée Sauvage. Grenoble.

VERGNAUD (1989) Dif£cultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des Mathématiques. In : Nadine Bernard et Catherine Garnier (org.) Construction des Savoirs : Obstacles et Con¤its. Otawa : Les éditions Agence d'ARC inc.), pp. 33-40.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 191:202
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 23

PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA: USO DE GEOMETRIA DINÂMICA PARA PROGRAMAÇÃO

Leônidas de Oliveira Brandão
Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
http://www.ime.usp.br/ leo - leo@ime.usp.br

Resumo: *Uma característica pouco explorada na geometria dinâmica (GD) é o encapsulamento de soluções geométricas na forma de algoritmos. Este encapsulamento corresponde a um nível mais elevado de generalização de uma solução para um problema geométrico, podendo ser explorado do ponto de vista da programação. Deste modo, os programas de geometria dinâmica podem ser utilizados sob um novo paradigma de programação, mais intuitivo e abstrato. Nele o aprendiz abstrai detalhes de atribuições de variáveis, o que aproxima este modelo da programação funcional. Nossa proposta está baseada em um programa de GD disponível na Internet, o iGeom.*

Palavras-chaves: *programação geométrica, geometria dinâmica, aprendizagem, iGeom.*

Abstract: *An unexplored characteristic of the dynamic geometry (DG) is the encapsulation of a geometric solution, as an algorithm. This procedure is a general solution for some geometrical problem, which allows its study under the programming point of view. This results in a different application for a dynamical geometry software, for a more intuitive and abstract programming paradigm, that could be seen as* *an extention of the functional one. Our proposal are based on iGeom, which is a DG software available on the Internet.*

Key words: *geometrical programming, dynamical geometry, learning, iGeom.*

1. Introdução

Atualmente existe quase um consenso quanto a necessidade de uso do computador no ensino, particularmente no de Matemática. Dentre as sub-áreas da matemática, a Geometria é neste aspecto privilegiada, devido aos programas que implementam a **geometria dinâmica** (**GD**). Em resumo, a geometria dinâmica é a implementação computacional da régua, compasso, lápis e papel. Ela permite generalizar a solução de um problema geométrico, no sentido que o usuário resolve o problema (utilizando um programa de GD), podendo depois mover os objetos iniciais e o programa redesenha todos os objetos mantendo as propriedades iniciais. Um exemplo simples deste dinamismo é a construção da mediatriz r de dois pontos dados A e B: uma vez realizada a construção de r, com as ferramentas grá£cas equivalentes à régua e ao compasso, o usuário pode mover o ponto A ou B pela área de trabalho (versão digital do papel) e o programa redesenha (de modo aparentemente contínuo) a reta r, mantendo a propriedade "r é mediatriz de A e B". Daí a razão do nome "dinâmico" e por analogia pode-se dizer que a geometria tradicional, da régua e compasso, é **estática**[1].

Portanto, existe uma diferença conceitual interessante na resolução de um problema geo-métrico. Enquanto na geometria tradicional, da *régua e compasso*, o aprendiz encontra a solução para uma instância do problema, na GD ele encontra a solução geral para a classe do problema. Por este motivo pode-se classi£car estes dois tipos de "fazer geometria", respectivamente, como 1**-solução,** 1**-teste** e 1**-solução,** N**-testes**, ou simplesmente $1-1$ e $1-N$ (como introduzido em [Brandão, 2002] e [Brandão,2002]).

Ainda existe outro aspecto que emerge da geometria dinâmica, derivado desta generalidade das soluções na GD, mas principalmente da necessidade de formalismo (sem ambiguidade) dela: para realizar uma construção é preciso de£nir claramente as operações ("passos"), na sequência correta. Isto implica que cada solução é na verdade um *algoritmo*, sendo sua implementação num programa de GD a *programação*.

Um algoritmo é uma sequência formal de passos (ou instruções) que devem ser aplicadas sobre um conjunto de dados de entrada, para obter um conjunto de dados de saída. Este passos devem ser em número £nito, qualquer que seja a entrada[2] [Lucchesi et al., 1979].

Entretanto quando tratamos da implementação computacional de algoritmos, necessitamos das linguagens de programação, e estas tradicionalmente são do tipo imperativas, como Java, C e Pascal. Um outro paradigma é a linguagem funcional, que é mais próxima das funções matemáticas, sendo baseada em recorrências. Um exemplo

[1] Apesar de já existirem desde os primórdios da geometria argumentos "cinemáticos" como destaca Boyer ([Boyer, 1974]): *A matemática grega tem sido descrita como essencialmente estática, ..., mas Arquimedes em seu estudo de espiral, parece ter achado a tangente a uma curva por considerações cinemáticas aparentadas ao cálculo diferencial.*

[2] Para um maior formalismo sobre esse conceito vide o capítulo 1 de [Lucchesi et al., 1979], em especial sua página 9.

nesta categoria é o Lisp (*List Processing*) [Guezzi; Jazayeri, 1979].

O modelo de programação geométrica que abordamos é mais próximo da programação funcional, mas sua "codi£cação" é sensivelmente diferente devido à sua característica intrinsecamente grá£ca (visual): ela é toda baseada em objetos primitivos (pontos, retas e círculos) e sua manipulação é quase que exclusivamente feita com o *mouse*.

Entretanto, uma vez construída a solução geométrica, o programa geométrico será armazenado internamente utilizando alguma linguagem própria ao programa de GD utilizado, sendo esta próxima das linguagens tradicionais (imperativas ou funcionais).

Este tipo de programação é análoga à proposta por Papert [Papert, 1980] com o Logo, mas sua alta interatividade com o usuário pode representar um passo adiante na proposta de Papert de popularizar a linguagem de programação[3] [Papert, 1980].

Este será o conceito central a ser discutido neste artigo. Para chegar a ele serão apresentados alguns detalhes envolvidos na geometria dinâmica, na seção 2., e depois serão apresentados alguns algoritmos implementados em GD, particularmente no programa **iGeom**[4], na seção 3..

2. Geometria Dinâmica

O fato da geometria dinâmica ser do tipo $1 - N$, motivou um paradigma de uso que incentiva o estabelecimento e testes de conjecturas, que Veloso ([Veloso, 1998]) chama de *a procura do que permanece constante, no meio de tudo o que varia*. Mas é possível estender este paradigma, para um de *pesquisa*, que é o uso da GD para propor questões novas e descobrir novas propriedades (ou redescobrir). Este é um procedimento usual em pesquisa matemática.

A partir de observações sobre testes, estabelece-se uma conjectura e depois passa-se a testá-la em múltiplos casos (para ganhar con£ança e também para procurar pelos "invariantes" e propriedades que permitam sua demonstração). Neste sentido os programas de GD podem catalisar o processo de descoberta, servindo como uma "bancada de teste" [Brandão, 2002].

A questão do movimento na geometria não é nova, existem argumentos cinemáticos na geometria desde seus primórdios. Entretanto este processo estava nas mentes dos matemáticos e agora, com a GD, pode ser apropriado por aprendizes iniciantes. Um exemplo interessante de movimento na geometria é a conchóide de Nicomedes[5].

[3] Na página 37, de [Papert, 1980], *Vi a necessidade de fazer linguagens de computador que pudessem ser "vulgarizadas" — tornadas disponíveis para as pessoas comuns e especialmente para as crianças.*

[4] O iGeom é um programa para GD implementado em Java, gratuito e disponível na Internet no enderço http://www.matematica.br/igeom. O iGeom permite armazenamento de funções geométricas, programas, com recorrências.

[5] A conchóide foi uma das soluções cinemáticas utilizadas para resolver um problema clássico da

Dado um escalar α, um ponto O e uma reta r, coloca-se um ponto C sobre r e, com centro em C, uma circunferência de raio α. Colocando-se uma reta passando por O e C, de£ne-se os pontos P e P', interseções da reta com a circunferência. Ao mover o ponto C sobre a reta, os pontos P e P' criam a conchóide ([Smith, 1958, Veloso, 1998, iMáticaA, 2003]).

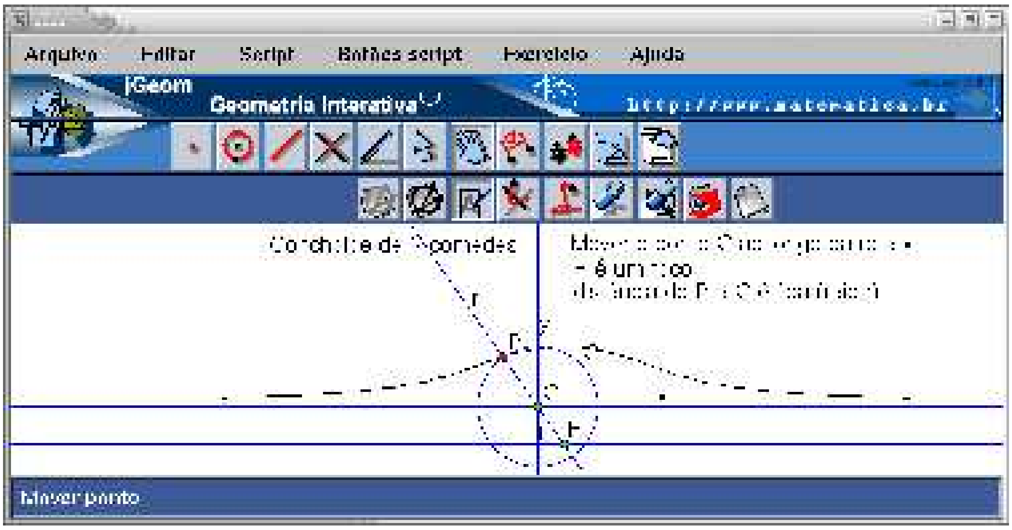


Figura 1:
Versão aplicativa do iGeom com a conchóide de Nicomedes.

Uma questão que parece nova é examinar a geometria sob a visão da programação:

> *Como implementar um algoritmo, em algum programa de GD, que resolva o problema dado? O que pode ser aprendido e desenvolvido sob este prisma ?*

A solução para estas questões passa pelas características do programa de GD. Existem várias implementações, cada uma com sua idiossincrasia ([Rodrigues,,2002, Kortenkamp, 1999]). As diferenças residem na interface destes programas, no tipo de licença, na portabilidade e em detalhes mais sutis como tratamentos de casos limites e considerações de intenção do usuário. Alguns destes programas, são os seguintes:

matemática, a *trissecção do ângulo* ([Boyer, 1974, Smith, 1958, Veloso, 1998, iMática, 2003]).

Programa	Plataforma	Exporta Java	Licença
Cabri	Windows, Mac	sim	comercial
C.a.R	Windows	não	gratuito
Cinderella	todas (Java)	sim	comercial
Dr. Genius	Linux, Windows	não	gratuito
Euklid	Windows	não	shareware
GSP	Windows, Mac	sim	comercial
iGeom	todas (Java)	sim	gratuito
Tabulae	todas (Java)	sim	comercial

Tabela 1: Programas de GD, com plataformas em que rodam, uso na Web e tipo de licensa

Este artigo explorará as questões acima, considerando o programa iGeom, que é gratuito e escrito em Java, por isso utilizável em qualquer sistema. O iGeom começou a ser desenvolvido em 2000, a partir de um projeto de iniciação cientí£ca, pelo autor deste artigo e pelo (então) estudante Ricardo Hideo Sahara [iGeom:Sahara, 2003].

3. Algoritmos Geométricos

O termo "programação geométrica" tem sido explorado em diferentes contextos, sendo mais frequente encontrá-lo em otimização, mas também em GD. Em GD ele aparece com a preocupação de implementar seleções a partir de construções geométricas [Allen; Trilling, 1997, CabriLog, 2003].

A seleção é um dos suportes do tripé da programação imperativa (no sentido de linguagens computacionais), sendo as outras a atribuição e repetição. Na programação funcional pura a atribuição é implícita.

Aqui, nossa preocupação central é a "repetição", que no iGeom pode ser obtida utilizando-se o botão de recorrência quando da construção da função geométrica. Iniciaremos esta exploração a partir de um exemplo elementar (sem recorrência), novamente o exemplo da mediatriz.

Desejamos portanto, obter um programa geométrico, que dado quaisquer pares de pontos construa sua mediatriz. Uma vez que existem várias possibilidades de implementações de GD (Bellemain, 2001), formalizaremos este programa utilizando uma pseudo-linguagem de programação, a partir da qual pode-se empregá-la em qualquer programa de GD que permita encapsulamento de soluções geométricas na forma de função.

Este encapsulamento é chamado de *script* (como no iGeom e GSP) ou como *macro* (caso do Cabri e Dr. Genius).

EXEMPLO 1 *(mediatriz) Dados dois pontos, A e B, construir sua mediatriz (lugar geométrico dos pontos que equidistam dos dois pontos dados).*

CONSTRUÇÃO 1 *Dados: ponto A, ponto B (resposta: reta r)*

1.	$C0 \leftarrow circ(A, B)$	*construir a circunferência $C0$, com centro no ponto A e contendo B,*
2.	$C1 \leftarrow circ(B, A)$	*construir a circunferência $C1$, com centro no ponto B e contendo A,*
3.	$I0 \leftarrow inter(C0, C1, 0)$	*construir a insterseção "norte" entre $C0$ e $C1$*
4.	$I1 \leftarrow inter(C0, C1, 1)$	*construir a insterseção "sul" entre $C0$ e $C1$*
3.	$r \leftarrow reta(I0, I1)$	*construir a reta r de£nida pelos pontos $I0$ e $I1$.*

Uma vez implementado o algoritmo mediatriz(A, B) pode-se aplicá-lo em quaisquer pares de pontos. A menos de um, todos os programas da tabela anterior permitem este tipo de encapsulamento.

No exemplo acima o algoritmo resultante é comutativo em relação às entradas, pois o resultado de sua aplicação é o mesmo qualquer que seja a ordem dos objetos de entrada (mediatriz(A, B) ou mediatriz(B, A)). Entretanto, pode-se notar no "código" que o *comando* $inter(.,.,.)$ admite duas respostas, sendo necessário distinguí-las. No caso da interseção entre duas circunferências (em $\Re^2$), pode-se obter dois pontos distintos como resposta.

Agora examinaremos um algoritmo não comutativo, para explorarmos a recorrência em funções geométricas: a determinação de um ponto F na semi-reta AB, de modo que, a distância entre BF, $d(B, F)$, seja metade de $d(A, B)$ e a distância entre AF seja $3/2 \times d(A, B)$.

CONSTRUÇÃO 2 *(dist_metade) Entrada: ponto A, ponto B*
Saída: ponto F tal que $F \in \vec{AB}$ e $d(B, F) = \frac{d(A,B)}{2}$ e $d(A, F) = 3\frac{d(A,B)}{2}$

1.	$r \leftarrow semi\_reta(A, B)$	*semi-reta começando em A, passando por B*
3.	$C0 \leftarrow circ(B, A)$	*circunferência centrada em B, passando por A*
2.	$C1 \leftarrow circ(A, B)$	*circunferência centrada em A, passando por B*
4.	$C \leftarrow int_s(C0, C1)$	*C é interseção "superior"[6] entre as circunferências $C0$ e $C1$*
5.	$D \leftarrow int_i(C0, C1)$	*D é interseção "inferior" entre as circunferências $C0$ e $C1$*
6.	$S1 \leftarrow segm(C, D)$	*$S1$ é o segmento ligando C à D*
7.	$E \leftarrow int(r, S1)$	*E é interseção entre r e $S1$*
8.	$C2 \leftarrow circ(B, E)$	*circunferência centrada em B, passando por E*
9.	$F \leftarrow int_d(C2, r)$	*F é interseção "direita" entre a circunferência $C2$ e a semi-reta r*

Neste algoritmo, os resultados entre as aplicações dist_metade(A, B) e dist_metade(B, A) são diferentes.

Observando-se os exemplos anteriores notamos a ausência de uma das características usualmente esperadas num algoritmo: os *laços de repetição*. Como estes laços podem ser implementados num programa de GD? Existem programas de GD que implementam laço?

[6]Para a representação computacional da geometria euclidiana é necessário distinguir os dois (eventualmente um) pontos de interseção, novamente para evitar ambiguidade - o mesmo vale para interseção entre retas (e análogos) e circunferência.

3.1 Laços de repetição

Para responder à primeira questão no parágrafo anterior, pode-se estender o último algoritmo geométrico aplicando-o aos pontos gerados, na seguinte sequência: $F \leftarrow$ dist_metade(A, B), $G \leftarrow$ dist_metade(B, F), $H \leftarrow$ dist_metade(F, G) e assim por diante.

Isso pode ser feito em qualquer dos programas que permite scripts (ou macros), aplicando-o seguidas vezes. Entretanto, se forem necessárias muitas aplicações, como na £gura 1, esta tarefa será desagradável.

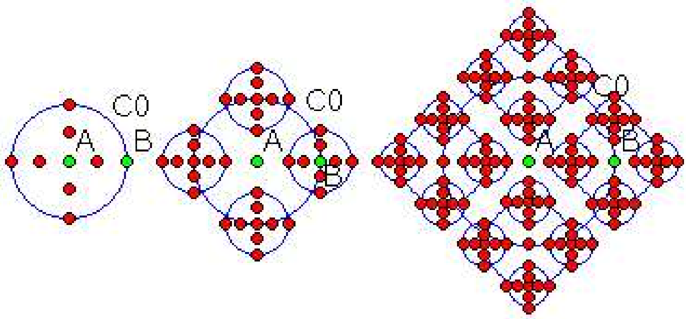


Figura 2: *Fractal "quadri-círculo" aplicações com zero, um e dois níveis de recorrência.*

Em programação procura-se sempre automatizar estes processos repetivos (**laços**), e deste modo pode-se desejar que um programa de GD permita esta abstração. Este recurso poderia ser implementado como uma **recorrência**, para manter uma uniformidade à linguagem geométrica destes programas. No exemplo anterior, acrescentaria-se a seguinte linha

10. *recorrência*(B, F) aplicar recorrentemente o algoritmo nos pontos B e F

Entranto são poucos os programas que permitem esta comodidade ao aprendiz/usuário. Da lista anterior de programas de GD, apenas o iGeom e o GSP. Neste artigo não se pretende discutir como são implementados estes recursos num programa de GD, mas pode-se ter uma boa idéia dos problemas envolvidos consultando as referências [Kortenkamp, 1999, iGeom:Sahara, 2003, iGeom:Piesigilli, 2003].

A implementação desses laços dentro do paradigma de programação funcional respondem à primeira questão proposta na seção 2., enquanto o fractal-exemplo na £gura 1 indica algumas possibilidades sobre "o que pode ser aprendido e desenvolvido sob este prisma" (segunda questão): além do aprendizado mais intuitivo de programação, ao estilo da programação funcional, pode-se utilizar estas construções para trabalhar contagens, séries e limites. Por exemplo, no primeiro fractal pode-se indagar se a £-gura é limitada. E para responder o porquê deste limite o aprendiz precisará vislumbrar a progressão geométrica que ali aparece (de razão $1/2$) e considerar a série convergente associada ($\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1/2^i$) [Brandão,2002].

Utilizando esta ideía pode-se criar fractais diferentes ou trabalhar com outros bastante co-nhecidos, tais como a *curva de Kock*, *tapete (ou triângulo) de Sierpinski* e *poeira de Cantor*, só para citar os mais conhecidos. Nas £guras a seguir são apresentados os dois primeiros com níveis de recorrência 0, 1 e 2, ambos implementados no iGeom.

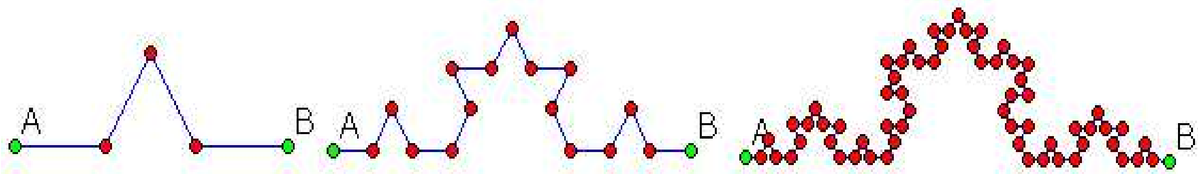


Figura 3: Curva de Kock: na esquerda está a base do fractal e à direita dois níveis de recorrência

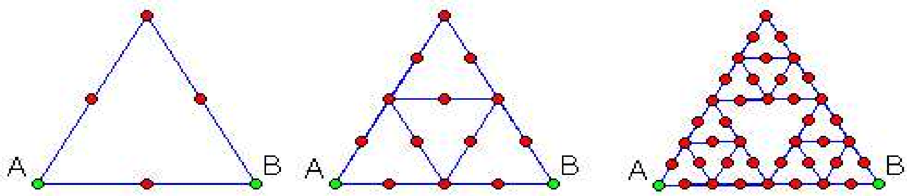


Figura 4: Tapete (Triângulo) de Sierpinski

4. Conclusões e trabalhos futuros

Neste artigo foram apresentadas idéias iniciais para explorações de programação a partir de um "novo modelo", a programação geométrica dentro dos programas de GD utilizando recorrências. Devido às características mais intuitivas, utilizando imagens, e sua grande interatividade, é possível introduzir conceitos de algoritmo/programação de modo bastante e£caz.

Esta e£cácia é comprovada com os bons resultados obtidos com alunos do ensino médio de escolas públicas vizinhas à USP, que vêm até o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), do IME-USP ([Brandão, 2002, LEM, 2003]).

No ano de 2004 pretendemos analisar essa aplicação utilizando-a no início de uma disciplina de "introdução à computação" no curso de licenciatura de matemática no IME-USP.

5. Referências

[Brandão, 2002] Brandão,L.O., *Produção de material para ensino de matemática: LEM, iMática e iGeom*, I Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (HTEM), UERJ, Rio de Janeiro, p.63-78, 2002.

[Brandão,2002] Brandão,L.O., *Algoritmos e Fractais com Programas de GD*, Revista do Professor de Matemática, num. 49, p.27-34, 2002.

[Lucchesi et al., 1979] Lucchesi,C.L.; Simon,I.; Simon,I.; Simon,J.; Kowaltowski,T. *Aspectos Teóricos da Computação*, Projeto Euclides, 1979.

[Guezzi; Jazayeri, 1979] Guezzi,C.; Jazayeri,M., *Conceitos de Linguagens de Programação*, Ed. Campus, 1985.

[Allen; Trilling, 1997] Allen,R.; Trilling,L., *Dynamic Geometry and Declarative Geometric Programming*, em Geometry Turned On Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research, Mathematical Association of America, p.193–197, volume 41, Junho 1997.

[CabriLog, 2003] CabriLog, *ALICE Géométrie logique*,
URL: http://www.cabri.net/abracadabri/GeoLogique/AliceGene.html, consultado em dezembro de 2003.

[Veloso, 1998] Veloso,E., *Geometria: Temas Atuais*, Ministério da Educação de Portugal, 1998.

[Smith, 1958] Smith,D.E., *Histoy of Mathematics*, vol. II, Dover, 1958.

[Boyer, 1974] Boyer,C.B., *História da Matemática*, Ed. Edgard Blücher, 1974.

[Papert, 1980] Papert,S., *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*, Basic Books, 1980.

[Papert, 1980] Papert,S., *A máquina das criança*, Artes Médicas, 1980.

[iMática, 2003] *iMática*, URL: http://www.matematica.br/historia, consultado em dezembro de 2003.

[iMáticaA, 2003] *iMática: conchóide de Nicomedes*,
URL: http://www.matematica.br/historia/conch_nic.html, consultado em dezembro de 2003.

[iGeom:Sahara, 2003] *iMática: iGeom: R.H.Sahara*
URL: http://www.matematica.br/igeom/historico/desenvolvimento1, consultado em dezembro de 2003.

[iGeom:Piesigilli, 2003] *iMática: iGeom: F.Piesigilli* URL: http://www.matematica.br/igeom/historico/desenvolvimento2, consultado em dezembro de 2003.

[Bellemain, 2001] Bellemain,F., *Geometria dinâmica: diferentes implementações, papel da manipulação direta e uso na aprendizagem*, anais do 15^{o} Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico e IV International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design, p. 1315-1329, São Paulo, 2001.

[Rodrigues,,2002] Rodrigues,D.W.L., *Uma avaliação comparativa de interfaces homem-computador em programas de geometria dinâmica*, dissertação de mestrado de Engenharia de Produção, UFSC, 2002.

[Kortenkamp, 1999] Kortenkamp,U., *Foundations of Dynamic Geometry*, tese de doutoramento ETH Zürich, Institute of Theoretical Computer Science, disponível eletronicamente em http://www.inf.fu-berlin.de/˜kortenka/Papers/diss.pdf, Zurique, 1999.

[LEM, 2003] *Laboratório de Ensino de Matemática*, URL: http://www.ime.usp.br/lem, consultado em dezembro de 2003.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 203:209
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 24

"NO ESCURINHO DO CINEMA" USANDO GEOMETRIA DINÂMICA PARA PRODUZIR FILMES MATEMÁTICOS

José Paulo Q. Carneiro
Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
UERJ **jpqc@uninet.com.br**

Andrea Vieira da Silva
Colégio Nossa Senhora da Paz
Centro Educacional Pereira Rocha - RJ
docentevieira@yahoo.com.br

Resumo: *A necessidade da elaboração de construções robustas em Geometria Dinâmica, ou seja, construções resistentes a variações nos dados iniciais, conduziu os pesquisadores à busca de construções condicionais, dando ensejo à criação de um novo terreno de pesquisa, a "Geometria Lógica" ou "Programação Geométrica". É apresentada uma aplicação de programação geométrica à construção de um £lme ilustrativo de uma demonstração dinâmica do Teorema de Pitágoras.*

Palavras-chave: *Geometria Dinâmica; Geometria Lógica; Programação Geométrica; Demonstração Dinâmica; Teorema de Pitágoras.*

Abstract: *The need of developing constructions in Dynamical Geometry which are stable under variations in initial data led researchers to create a new £eld of research, Logical Geometry or Geometrical Programming. As an application of Geometrical Programming, a £lm is presented which illustrates a dynamical proof of the Pythagorean Theorem.*

Key words: *Dynamical Geometry; Logical Geometry; Geometrical Programming; Dynamical Proof; Pythagorean Theorem.*

1. Introdução

A Geometria, em vez de ser vista como um ramo separado da Matemática, pode ser encarada como um instrumento de visualização e concretização a ser usado em qualquer parte da Matemática (ver Guzmán (1996) e Needham (2001)). E a forma com que a Geometria é apresentada nos programas de GD (neste trabalho, vamos sempre nos referir ao Cabri-Géomètre II), forma esta essencialmente diferente da do lápis e do papel ou do quadro negro, aporta uma grande variedade de novos recursos para o ensino-aprendizagem, entre os quais podem ser citados: a) a possibilidade de consideração e de análise simultânea de um número muito grande de casos; b) o realce da distinção entre desenho e construção geométrica; c) a facilidade para a formulação de conjecturas, seja sobre propriedades, seja sobre lugares geométricos.

Por outro lado, cada novo recurso cria também novas exigências e novos desa£os. O principal deles é que as construções em GD não devem contentar-se em resolver apenas o caso particular apresentado na £gura inicial, mas devem ser resistentes a todo tipo de mudança dos dados.

De um modo geral, o uso do computador em sala de aula estimula a participação ativa do aluno no processo de aprendizagem. Os programas de Geometria Dinâmica (GD), porém, trouxeram de modo especial vantagens preciosas para o ensino de Matemática.

2. Programação Geométrica

O uso crescente dos programas de GD, e principalmente a necessidade da elaboração de construções "robustas", ou seja, resistentes a variações nos dados iniciais, conduziu os pesquisadores e usuários de GD à busca de construções condicionais, introduzindo um elemento de "programação" nos programas de GD, dando ensejo à criação de um novo terreno de pesquisa, que alguns chamam de "Geometria Lógica" (ver Alice (2004)).

Para produzir uma construção condicional, é essencial de£nir uma forma de obter o condicional "se". A própria Calculadora, presente na maioria dos programas de GD, possui funções que carregam um ou vários "ses" embutidos em sua de£nição. É o caso das funções Valor Absoluto, Parte Inteira, Máximo, etc. Mas o uso dessas funções supõe que o problema já tenha sido "aritmetizado", não só empanando a pureza e a beleza das construções geométricas, como também renunciando, pelo menos parcialmente, ao papel educativo exercido pela Geometria na sua função de mediadora da visualização. O desa£o está portanto em usar a própria Geometria como elemento de programação. Por este motivo, preferimos o termo "Programação Geométrica", em vez de “Geometria Lógica”.

Um exemplo ilustra essas idéias: criar uma macro que construa um triângulo, de modo que o triângulo apareça em verde, se for acutângulo, e em vermelho, se for obtusângulo. Em vez de medir os ângulos e usar a calculadora, procuramos uma condição geométrica tal que um triângulo é obtusângulo se e só se esta condição for satisfeita. Uma possível condição deste tipo é que o ortocentro H do triângulo se situe no seu exterior, o que remete a outra questão interessante: como decidir, em GD, se um ponto H é ou não exterior a um triângulo? Novamente, em vez de usar coordenadas, o que seria perfeitamente possível, podemos usar o fato de que o baricentro G de um triângulo é sempre interior a este triângulo. Portanto, H é exterior ao triângulo se e só se o segmento $\overline{GH}$ intercepta a fronteira do triângulo, como ilustra a Figura 1.

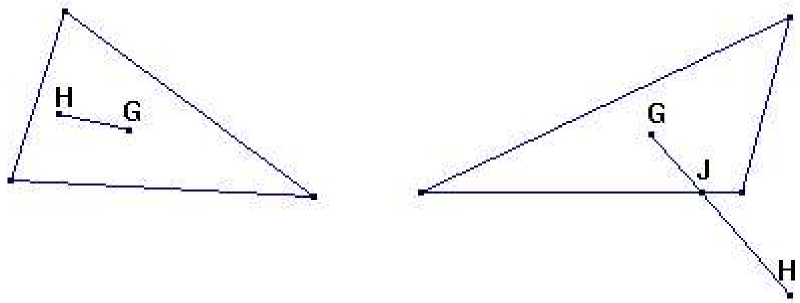


Figura 1:

Deixando então o triângulo em verde, quando acutângulo, move-se o mesmo até que £que obtusângulo e aí determina-se a interseção J de $\overline{GH}$ com a fronteira do triângulo. Em seguida, pode-se usar a já célebre macro “Ping-pong” (ver Alice): para cada vértice V do triângulo, calcula-se o ponto médio M de $\overline{JV}$e o simétrico de J em relação a M, obtendo assim um ponto V' que geometricamente coincide com V, mas que do ponto de vista da GD, está “em baixo” de V, e que existe se e só se J existe. O ponto J é o condicionante, enquanto V' é o condicionado. Repetindo esta construção (ou seja, aplicando uma macro) para cada vértice do triângulo, obtém-se um triângulo que existe se e só se J existe, isto é, se e só se $\overline{GH}$ intercepta a fronteira do triângulo, ou seja, se e só se o triângulo é obtusângulo. E é este triângulo que se pinta de vermelho.

A pesquisa deste problema, assim como ocorreu com outros estudados em Silva (2004), mostrou que surgem di£culdades na maneira pela qual Cabri realiza a interseção de um segmento com um triângulo, conduzindo a analisar outras alternativas, tais como a que se encontra em Alice (2004).

Poderiam ser citados muitos outros exemplos de construções geométricas clássicas que, para que sejam resistentes, necessitam da aplicação de programação geométrica.

Aqui vamos mencionar apenas alguns: 1) a construção do transformado de um ponto pela inversão em relação a um círculo segue dois caminhos diferentes, conforme o ponto seja interior ou exterior ao círculo; 2) a construção de um triângulo dados dois vértices e o incentro, se não for condicionada a que o incentro seja interior ao triângulo, pode conduzir a uma falsa solução; 3) a construção da circunferência tangente a duas retas concorrentes e passando por um ponto (um dos problemas de Apolônio) demanda o uso da bissetriz dessas retas que esteja dentro do mesmo ângulo convexo que o ponto; etc.

3. Produção de Filmes

Até pouco tempo atrás, quando um professor de Matemática necessitava de exemplos dinâmicos, tinha que apelar para £lmes educativos, produzidos por instituições na sua maioria estrangeiras e narrados em língua estrangeira. Tais £lmes eram, e continuam sendo, muito úteis, mas são demasiado rígidos para as necessidades do professor. Foram produzidos de uma vez por todas, dentro de uma concepção própria do seu idealizador, a qual nem sempre se adapta com facilidade à realidade do professor. Agora, a GD permite ao professor, e evidentemente ao próprio aluno, mesmo àqueles com parcos conhecimentos tecnológicos, produzir os seus próprios £lmes, criar as suas próprias apresentações dinâmicas. Com isto, é possível produzir uma animação muito mais conveniente para aquilo de que se necessita, e que se pode constantemente modi£car, completar ou adaptar. Mais importante ainda é o fato de que o professor e o aluno passam a participar do processo criativo, e para isto têm que resolver problemas desa£adores de Geometria, que surgem naturalmente ao longo deste processo.

Aqui é apresentado um exemplo, que pode ser encontrado em Silva (2004): um £lme que ilustra uma demonstração dinâmica do Teorema de Pitágoras.

A idéia da demonstração consiste em: 1) construir quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo dado; 2) dividir de modo conveniente, em quatro partes, o quadrado construído sobre um dos catetos; 3) através de certas translações, juntar estas partes (na realidade £guras a elas congruentes), e mais o quadrado construído sobre o outro cateto, preenchendo o quadrado construído sobre a hipotenusa. Isto ilustra o fato de que a área deste último quadrado é igual à soma das áreas dos dois primeiros quadrados (ver Figura 2, para uma ilustração estática).

O £lme que ilustra esta demonstração divide-se naturalmente em sete etapas. A primeira e a última constituem posições de “repouso”, correspondentes às posições inicial e £nal do problema, respectivamente. As cinco etapas centrais correspondem aos movimentos de translações de cinco £guras distintas, por meio de cinco vetores distintos. Em cada uma delas, a animação exige a criação de um ponto móvel sobre um segmento, o qual é distinto em cada etapa. O desa£o é encadear todas estas etapas no desenrolar de um único £lme. Para isto, foi criado um segmento auxiliar e sobre ele

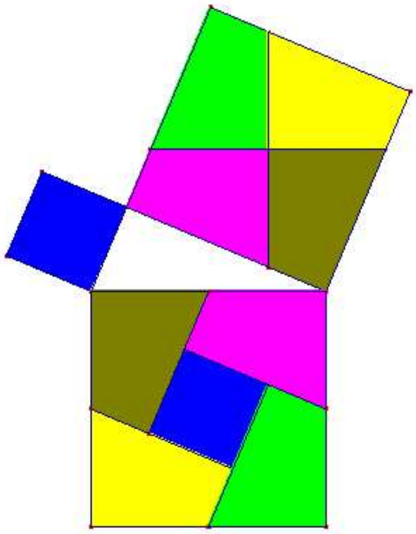


Figura 2:

foi criado um ponto móvel que é a chave, ou o cursor, que irá comandar a exibição do £lme. Este segmento auxiliar foi dividido em sete outros segmentos . A idéia básica agora é que, à medida que o cursor percorre cada um destes cinco segmentos centrais, outro cursor percorre o segmento conveniente na £gura. Com este £m, foi criada uma macro que nada mais é do que uma projeção central, que estabelece uma bijeção monótona entre os segmentos convenientes. Esta macro é, então, aplicada cinco vezes, cada vez a um par diferente de segmentos.

Mais um desa£o é colocado pela seguinte questão: para o bom desenvolvimento do £lme, é necessário que, terminada a n-ésima etapa, a £gura que "desceu" £que, durante as próximas etapas, parada no lugar em que havia chegado. Isto é conseguido por meio de uma construção condicional. Na realidade, constroi-se outra £gura, geometricamente coincidente com a posição £nal da n-ésima etapa, mas que existe se e só se o cursor estiver percorrendo as etapas seguintes à n-ésima. Para isto, evidentemente, é necessário usar as idéias de programação geométrica, já que está sempre envolvida uma condição: uma certa construção deve ser feita se e somente se determinado ponto percorre determinado segmento.

4. Conclusão

Os exemplos citados constituem apenas uma amostra das inúmeras aplicações da programação geométrica. O importante é que permitem realizar um encadeamento de processos dinâmicos, o que é, essencialmente, a de£nição de £lme.

Os resultados desta pesquisa ainda não foram testados em aulas reais, apenas em apresentações especiais, seminários e palestras, com excelente receptividade. Mas estamos seguros da sua utilidade no ensino, essencialmente pelas razões apontadas no início da seção 3, ou seja, porque permitem ao professor construir as suas próprias apresentações dinâmicas, sem necessidade de recorrer a especialistas em multimídia, e constituem uma fonte preciosa de motivação e esclarecimento para o aluno.

Referências:

GUZMÁN, M. DE (1996); El Rincón de la Pizarra - Ensayos de Visualización en Análisis Matemático; Ediciones Pirámide, Madrid.

NEEDHAM, T. (2001); Visual Complex Analysis, Oxford University Press.

MARTIN, Y. (1993), Introduction aux Macros Logiques, Abracadabri nª 0, Nov-Déc 1993

Alice, Géométrie Logique, http://www.cabri.net/abracadabri/GeoLogique/AliceGene.html

MONROCQ, J.C., Cabri & la géométrie Booléenne, http://perso.wanadoo.fr/jcmonrocq/

SILVA, A. (2004 - a aparecer), Usando a Geometria Dinâmica para produzir £lmes matemáticos, Monogra£a para o Curso de Especialização em Aprendizagem Matemática. Orientador: José Paulo Carneiro.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 211:220
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 25

UMA ABORDAGEM COMPUTACIONAL PARA O CONCEITO DE ASSÍNTOTAS[1]

Marcelo Chaves Silva
Licenciado em Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
marcelo17chaves@yahoo.com.br

Resumo: *Inicialmente, apresentamos uma breve revisão da abordagem tradicional do conceito de assíntotas encontrada nos livros de Cálculo. A partir de teorias cognitivas ligadas ao uso de novas tecnologias em Matemática, discutimos a di£culdade de desenvolver este conceito em turmas iniciais de Cálculo a partir do tratamento encontrado nestes livros. Baseados em alguns conceitos importantes, como o de magni£cação local para o ensino de derivada encontrado no trabalho de David Tall, propomos uma nova abordagem para o conceito de assíntotas. Este processo, que denotaremos por magni£cação global, foi desenvolvido em ambiente computacional por analogia à proposta de Tall.*

Palavras-chave: *Assíntotas, De£nição de Conceito, Imagem de Conceito, Magni£cação Local, Retidão Local.*

Abstract: *We brie¤y review the Calculus textbooks' traditional approach to the concept of asymptotes and, under the light of cognitive theories on the impact of new technologies in Mathematics, we argue the inadequacy of this approach to develop the concept with a group of students attending the £rst calculus discipline. Based on some important concepts, such as local magni£cation, which is proposed by David Tall as means to develop the concept of differentiation, we propose a sequence of activities to explore the concept of asymptotes using computational environment. We call this process global magni£cation, to emphasize its analogy to the one proposed by Tall.*

[1]Este artigo explora um aspecto da Monogra£a de Final de Curso, desenvolvida no IM-UFRJ, sob a orientação da Professora Elizabeth Belfort.

Key words: *Asymptotes, Conceptual De£nition, Conceptual Image, Local Magni-£cation, Local Straightness.*

1. Introdução

Tradicionalmente, nos livros de cálculo, o conceito de assíntotas se encontra de£nido da seguinte forma:

- **Assíntotas horizontais:** A reta $y = a$ é assíntota horizontal da função f se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$.
- **Assíntotas verticais:** A reta $x = a$ é assíntota vertical da função f se $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$.
- **Assíntotas inclinadas:** A reta $r(x) = ax + b$ *é* a assíntota inclinada da função f se $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - r(x)) = 0$.

Como podemos perceber, a abordagem tradicional do conceito de assíntotas está diretamente relacionada ao conceito de limite, que, como mostrado por Tall (1981,1986), é bastante difícil para estudantes assimilarem com rapidez e, portanto, inadequado para ser utilizado como base única nos estágios iniciais de Cálculo, que o próprio Tall de£ne como o momento da *Transição para o Pensamento Matemático Avançado*. En£m, a noção de limite se revela profundamente contrária à intuição humana, como evidencia sua própria evolução histórica e como destacam Cornu (1991), Malik (1980) e Sierpinska (1996). Portanto, isto nos leva a buscar novas alternativas para a abordagem deste tema. Para tanto, vamos nos basear em pesquisas cognitivas previamente desenvolvidas sobre ensino de cálculo. Iniciamos por apresentar uma revisão de certos conceitos importantes para nosso estudo.

2. Teorias Cognitivas e o Uso de Novas Tecnologias

Vinner e Hershkowitz introduziram os termos "De£nição de Conceito"e "Imagem de Conceito", que, posteriormente, foram descritos da seguinte forma por Tall e Vinner:

- **De£nição de Conceito**: Refere-se ao formalismo matemático, à forma de se usar palavras para especi£car determinado conceito. Ela pode ou não estar de acordo com a de£nição matemática correspondente. É uma sentença usada para especi£car o conceito em questão, que pode ou não estar matematicamente correta, como frisam Barnard e Tall (1996), Vinner (1980) e Tall (2000).

- **Imagem de Conceito:** Descreve a estrutura cognitiva total que é associada com o conceito, na qual se incluem todos os quadros mentais, propriedades e processos associados. A imagem de conceito não inclui a de£nição de conceito.

- **Unidade Cognitiva:** Tall e Tony Barnard (1996) denominam *unidade cognitiva* cada porção da estrutura cognitiva associada a um conceito em que o indivíduo foca sua atenção, ou seja, são partes da imagem de conceito a que o indivíduo recorre para desenvolver idéias relacionadas. Estas unidades cognitivas podem ser símbolos, fatos especí£cos ou genéricos, teoremas ou outros. Por exemplo, o fato do grá£co de toda função do 1^o grau ser uma reta é uma unidade cognitiva.

- **Raiz Cognitiva:** Segundo Tall (2000), em toda abordagem pedagógica relacionada a qualquer conceito matemático devem, necessariamente, estar presentes diferentes formas de representação, tendo como referência uma idéia matemática central, chamada de *raiz cognitiva*. Esta apresenta certas características especí£cas, que são: a de ser familiar para os estudantes e a de servir como base para o desenvolvimento matemático posterior. É uma unidade cognitiva central. Por exemplo, a noção de *retidão local (local straightness*) apresentada por Tall (2000) é uma raiz cognitiva importante neste trabalho, e será explicada a seguir.

- **Magni£cação Local:** Com o auxílio de um organizador genérico, o processo de magni£cação local proposto por Tall consiste em dar "*zooms*" gradativos na vizinhança de um determinado ponto do grá£co. Para ilustrar esse método, considere os grá£cos apresentados na £gura 1, que foram gerados pelo *Maple V*.

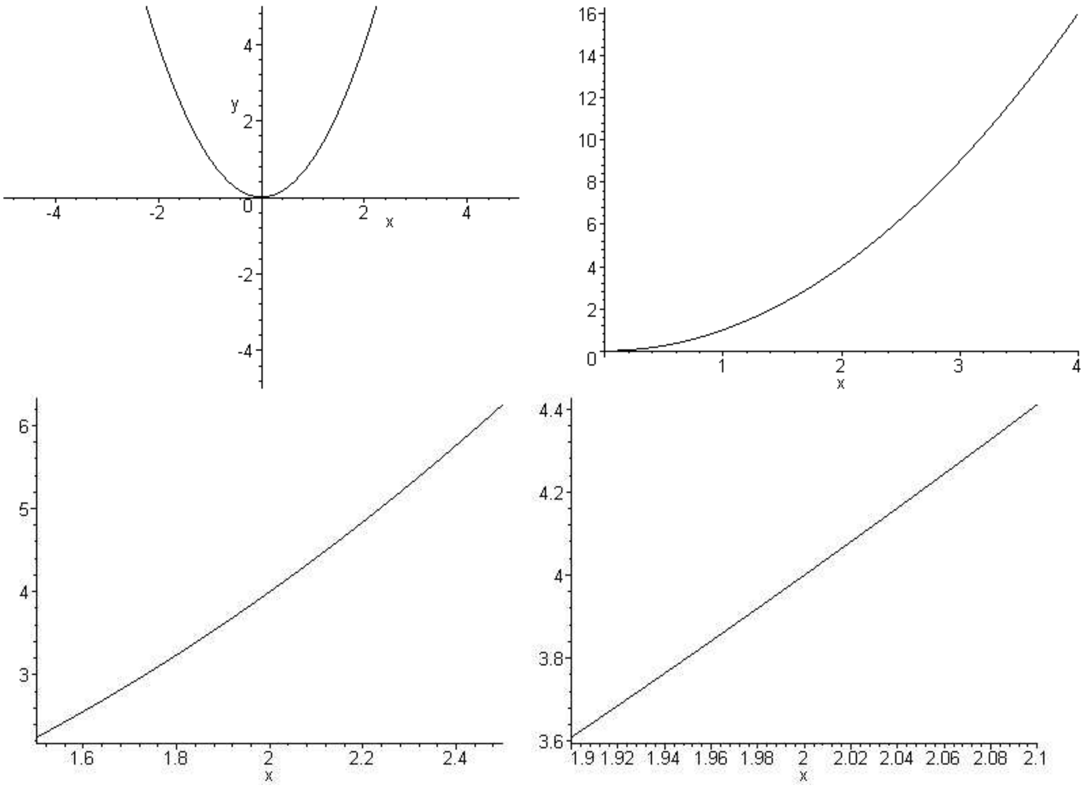


Figura 1: Magni£cação local da função $y = x^2$ na vizinhança do ponto $x_0 = 2$.

Na £gura 1, vemos o processo de magni£cação local da função $y = x^2$ em torno de $x_0 = 2$. Este processo é utilizado por Tall no ensino de derivada e se baseia na noção de *retidão local*, cuja idéia básica é que curvas diferenciáveis estudadas nos cursos iniciais de Cálculo se aproximarão de uma reta quando altamente magni£cadas na vizinhança de um ponto. A derivada é, portanto, apresentada como o coe£ciente angular desta reta.

3. Uma Nova Proposta para o Estudo de Assíntotas

Com inspiração neste trabalho, e também em desenvolvimentos subseqüentes propostos por Giraldo (2001), encontramos uma raiz cognitiva para o ensino de assíntotas que poderia ser trabalhada com os alunos, utilizando-se o computador de forma análoga neste processo. Para isto, é necessário de£nirmos:

- Magni£cação Global: por analogia ao processo de magni£cação local apresentado, foi desenvolvido um processo de Magni£cação Global, que consiste em buscar janelas grá£cas com intervalos das variáveis x e y cada vez maiores, buscando, assim, simbolizar a visualização grá£ca global da função no in£nito.

Este processo propicia uma exploração de uma noção análoga à noção de retidão local e que será de£nida e explicada a seguir.

- Noção de Aproximação Global: é uma noção intuitiva, que se baseia no fato do grá£co de certas funções racionais se aproximarem no in£nito de uma outra função, chamada Função Limitante. O grá£co destas funções podem ser retas horizontais ou inclinadas, parábolas, grá£co de $y = x^3$ e, muitas outras. A noção de aproximação global é a raiz cognitiva proposta neste trabalho. São exemplos:

    1. Seja f : IR $\rightarrow$ IR uma função de£nida por $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. Na £gura 2, o grá£co desta função está representado para valores de x e y pequenos pela linha contínua e, em pontilhado, está representado o grá£co de $g(x)$=1.

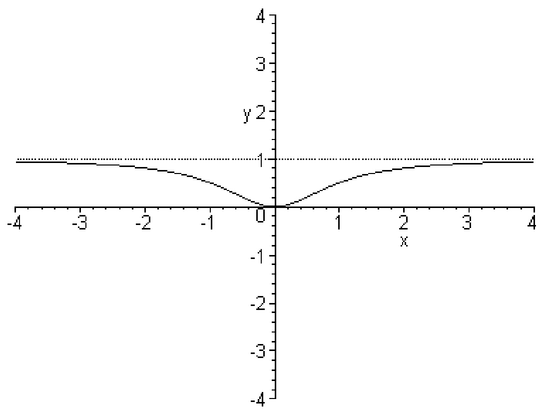


Figura 2: Representação da função $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, com x∈[-4,4] e y∈[-4,4].

A mesma função f é apresentada na £gura 3, com intervalo para a variável $x$bastante ampliado . Observa-se que não é possível fazer a distinção entre seu grá£co e o grá£co de $g(x)$ = 1.

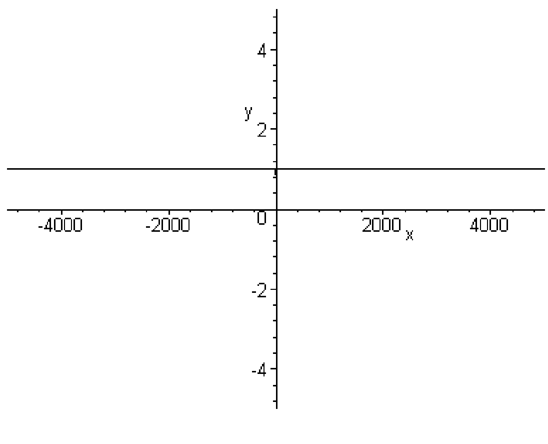


Figura 3: Representação de $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, com x∈[-5000,5000] e y∈[-5,5].

2. Seja h: IR → IR uma função de£nida por $h(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$. Na £gura 4 apresentamos o grá£co desta função para valores de x e y pequenos e, em pontilhado, a função i(x)=x.

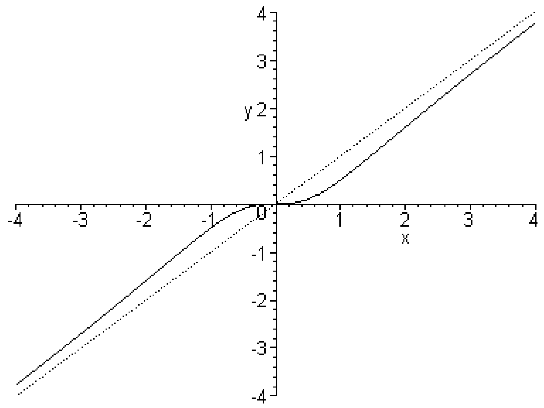


Figura 4: Representação da função
$h(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ **, com x∈[-4,4] e y∈[-4,4].**

Observe que a distinção entre as duas funções acima não é mais observável na £gura 5, que representa o grá£co de h(x) para intervalos grandes das variáveis x e y:

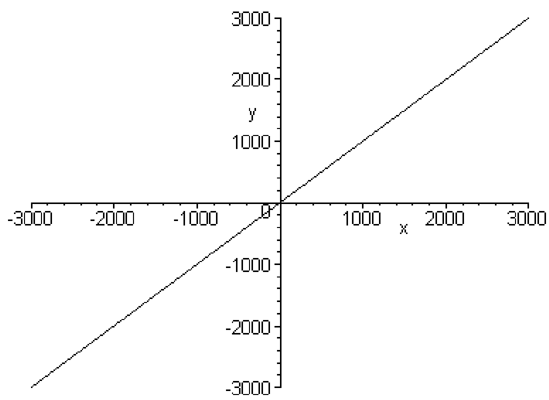


Figura 5: Representação de
$h(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$**, com x∈[-3000,3000] e y∈[-3000,3000].**

3. Seja j: IR → IR uma função de£nida por $j(x) = \frac{x^4+5x^3}{x^2+1}$. Seu grá£co para valores de x e y pequenos está representado na £gura 6 e, em pontilhado, $k(x) = x^2$.

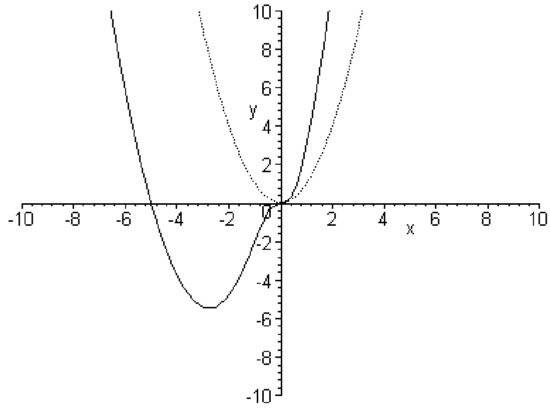


Figura 6: Representação da função$j(x) = \frac{x^4+5x^3}{x^2+1}$, com x∈[-10,10] e y∈[-10,10].

Observe agora na £gura 7 o grá£co da mesma função para intervalos grandes de x e y.

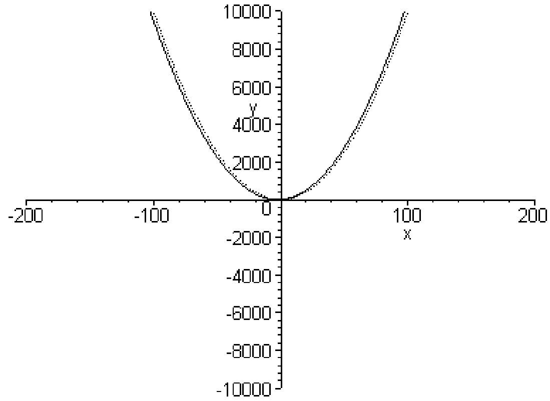


Figura 7: Representação de$j(x) = \frac{x^4+5x^3}{x^2+1}$, com x∈[-200,200] e y∈[-10000,10000].

4. Considerações Finais

Esta proposta foi testada em turmas iniciais de Cálculo no processo de pesquisa de minha monogra£a "*O Comportamento no In£nito de Funções Racionais com uma Abordagem Computacional*". Veri£camos que a idéia de *aproximação global* apresentada constitui verdadeiramente uma raiz cognitiva adequada, pois, ao contrário da noção de limite tão vinculada às assíntotas, esta se mostrou passível de assimilação pelos alunos e, consequentemente, capaz de ser utilizada posteriormente como base para o conhecimento de outros tópicos relacionados em Matemática. Mais do que isto, houve um claro enriquecimento da imagem de conceito de assíntotas, antes descrita resumidamente como: *A reta da qual a função se aproxima no in£nito*; e que passou a ser descrita como: *Existe uma função limitante da qual a função se aproxima no in£nito*.

5. Referências:

BARNARD, A.D. & TALL, D. Cognitive Units, Connections, and Mathematical Proof. Em Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21º Annual Conference for the Psichology of Mathematics Education*, Lahti, Finland, 2:41-48., 1997.

CORNU, B. Limits. In D.O. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, 153-166, Dordrecht: Kluwer, 1991.

GIRALDO, V., *Magni£cação Local e Con¤itos Teórico-Computacionais*. Rio de Janeiro: Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, UFRJ, 2001.

MALIK, M.A. Historical and Pedagogical Aspects of the De£nition of a Function. *Journal of Mathematics Education in Sciences and Tecnology*, 11(4):489-492, 1980.

SIERPINSKA, A. Epistemologies of Mathematics and Mathematics Education. In Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 827-876. 1996.

TALL, D.O. Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers. *Plenary Presentation for ATCM Conference*, Chang Mai, Thailand, 2000.

TALL, D.O. Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics. *PhD Thesis*, Coventry: University of Warwick, 1986.

TALL, D., The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, In£nity, and Proof. In Grouws D.A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*,.New York: Macmillan, pp. 495-511. 1992.

TALL, D. O. & VINNER, S. Concept image and concept de£nition in mathematics, with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp151-169, 1981.

VINNER, S. Concept De£nition, Concept Image and the Notion of Function. *The Internacional Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, pp 293-305., 1983

VINNER, S. & HERSHKOWITZ, R. Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 177-184, Berkeley: 1980.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 221:227
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 26

ANÁLISE DE FUNÇÕES BIQUADRADAS ATRAVÉS DO SOFTWARE GRAPHMAT

Estela Kaufman Fainguelernt
Universidade Estácio de Sá
SBEM/RJ **estelakf@globo.com**

Franca Cohen Gottlieb
Universidade Santa Úrsula
ogottlieb@abc.org.br

Resumo: *Esta experiência se fundamenta na utilização do software GRAPHMAT como ferramenta no estudo das funções biquadradas. Foi baseada em o£cinas para professores e em sala de aula com alunos da 8º série do Ensino Fundamental (faixa etária 13/14 anos). Foi abordado o estudo da função biquadrada uma vez que a mesma não consta em geral dos tópicos abordados nos livros textos onde somente é apresentada a equação biquadrada como um caso particular das equações do 2º grau através de substituição de variáveis. O nosso estudo é realizado com uma abordagem geométrica partindo da expressão algébrica e fazendo a análise de grá£cos.*

Palavras-chave: *GRAPHMAT; grá£cos; função biquadrada.*

Abstract: *This paper discusses in the use of the software GRAPHMAT as a tool in the study of biquadratic functions . It is based in workshops for teachers and in classrooms with pupils aged 13/ 14 years. We studied the . biquadratic function because it is not a subject that is presented in textl books. There , generaly speaking, one £nd only the study of the biquadratic equation as a particular case of the solution of the quadratic equation, by substitution of variablse. Our work was done within a geometric approach by using algebraic expressions and analyzing the correspondent graphics.*

Key words: *GRAPHMAT; graphics; biquadratic functions*

1. Introdução

Neste trabalho pretendemos mostrar a necessidade que têm os professores de Matemática de se manterem sempre atualizados através de uma formação continuada para incorporar as novas tecnologias a sua *praxis* em sala de aula. E não é só o professor que deve conhecer os novos recursos do ensino , mas os próprios alunos devem se familiarizar com estes recursos , de modo a visualizar os diferentes conceitos por caminhos diversos a £m de conseguir um aprendizado mais pleno. Aliás os alunos hoje em dia estão, de uma maneira geral, mais acostumados a usar o computador do que a maioria dos professores.

Para se adaptar às mudanças trazidas ao ensino pelas novas tecnologias o professor deve procurar transformar o conjunto de seus esquemas de percepção , de avaliação e de ação , isto é, mudar o que Perrenaud chamava de *habitus* , palavra que Bourdieux (1972-1980) tomou de Tomás de Aquino (pag.154-2001).

Neste trabalho , abordamos conceitos de Álgebra enfocando-os de uma maneira geométrica, utilizando como ferramenta o Software MPP - Mathematics Plotting Program ou , alternativamente , o Software Graphmat , trabalhando com professores e alunos na faixa etária de 13/14 anos.

É tradição enfocar a resolução de equações do 1^o e do 2^o graus antes de se analisar as funções a£m e quadrática. Desta resolução se passa a estudar a equação biquadrada como caso particular da equação do 2^o grau através de uma simples substituição de variáveis, sem nunca abordar a função biquadrada.

Com este enfoque os alunos desenvolvem técnicas operatórias mas não constroem os conceitos envolvidos (Lins e Gimenez , 1997), o que os leva a esquecer rapidamente o que julgaram ter aprendido.

2. Questões

Neste estudo com os professores , partimos dos grá£cos de funções biquadradas , as estudamos, as interpretamos e levantamos conjecturas que £zeram surgir as questões:

Qual é a relação entre os zeros de uma função e os coe£cientes da equação que lhe é associada?

Qual é a relação entre o grá£co da função e a natureza das raízes da equação que lhe é associada?

Esta mesma abordagem poderia ser utilizada com funções do 1^o ou do 2^o graus. Não o £zemos , apesar que o GRAPHMAT o permitiria. Preferimos o estudo da função biquadrada que não é visto em geral nos livros textos e assim despertamos o interesse dos professores por algo diferente. Jogamos com a surpresa e o imprevisto.

Por outro lado ,a vantagem do uso do software está na rapidez com que "desenhamos " o grá£co .Em lugar de "perder tempo " com cálculos intermináveis e assim conseguir dentro de um tempo de aula estudar, no máximo, dois ou três casos, escrevemos a fórmula de uma função , apertamos um botão e , pluft!, aparece o seu grá£co na tela. Podemos estudar um número bem maior de funções, variando ligeiramente os coe£cientes, facilitando deste modo o surgimento de observações, conjecturas, discussões e até previsões do que aconteceria se mudássemos este ou aquele coe£ciente.

3. A Experiência

Tradicionalmente a função biquadrada, $y = ax^4 + bx^2 + c$ com $a \in \Re^*$, $b \in \Re$ e $c \in \Re$ é muito pouco estudada. Conhecemos a equação biquadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ com $a \in \Re^*$, $b \in \Re$ e $c \in \Re$ por tratá-la como caso particular da equação do 2^o grau que se resolve substituindo a incógnita x^2 pela incógnita t.

Há professores que nem a apresentam a seus alunos e outros que chegam ao requinte de discutir a existência ou não de raízes reais de acordo com os valores dos parâmetros.

Aliás há professores que confundem a incógnita x da equação com a variável x da função.

A incógnita é uma letra que representa os valores reais que anulam a equação. Ela é "incógnita", ou seja "não conhecida", e nosso trabalho, ao resolver a equação, é encontrar aqueles valores.

A variável independente é uma letra que, ao tomar diferentes valores (por isto ela "varia") faz com que a variável dependente y tome outros tantos diferentes valores o que nos possibilita , dada a expressão algébrica da função, construir o seu grá£co.

Pois esta pobre função, pouco explorada, apresentou-se muito interessante ao trabalhar com ela em um software GRAPHMAT.

A idéia era escrever a fórmula de uma função biquadrada e olhar sua representação grá£ca que o software desenhava ao simples toque de um botão.

A forma da representação grá£ca entusiasmou os professores: era constituída por dois "chifres" simétricos em relação ao eixo dos y.

Foram feitas muitas representações de diferentes funções biquadradas com pequenas variações dos coe£cientes, sendo que, de repente, algumas não tinham "chifres" . Pareciam parábolas, só que não o eram.

Começou –se a questionar o porque destas con£gurações e de repente através desta abordagem os professores estavam discutindo aquelas relações entre os coe£cientes que tanto abominam quando são dadas aos alunos da 8^a série de uma maneira completamente memorizada. Já ao trabalhar pela primeira vez com os alunos de 8^a série, eles tem uma reação diferente.Eles conseguem com naturalidade e sem muito esforço identi£car algumas diferenças entre os grá£cos e perceberem as relações dessas diferenças com os coe£cientes das expressões algébricas.

4. Observações

I - O grá£co da função biquadrada é simétrico em relação ao eixo dos y pois suas raízes são opostas duas a duas, uma vez que para se determinar os zeros da função, resolvemos a equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$ substituindo x^2 por t . Encontramos as raízes t_1 e t_2 da equação do 2^o grau a ela associada e, voltando a equação biquadrada, encontramos quatro raízes simétricas duas a duas.

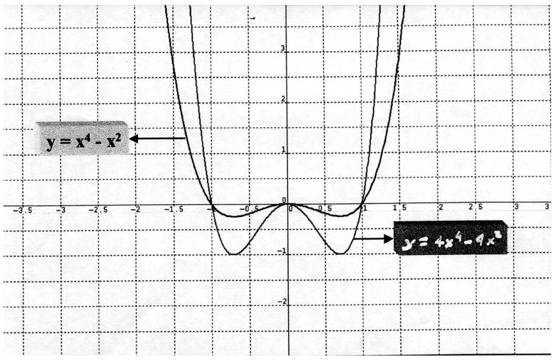


Figura 1:

II - Comparando os grá£cos das duas expressões $y = 4x^4 - 4x^2$ e $y = x^4 - x^2$ vemos que as duas funções são diferentes, e por isto os grá£cos são diferentes, mas as equações obtidas igualando a formula a zero são iguais. Logo as raízes são as mesmas mas os mínimos não. Ao multiplicar todos os coe£cientes da função por um numero k , os mínimos £cam multiplicados por k.

III - Os grá£cos das expressões $y = 4x^4 + 4x^2 e y = x^4 + x^2$ parecem parábolas mas sabemos que a parábola é uma cônica e sua representação algébrica é do 2^o grau. Alguns professores para justi£car essa a£rmação, selecionaram alguns pontos que pertenciam ao grá£co da função $y = 4x^4 + 4x^2$ e os substituíram na função quadrática cuja formula geral é $y = ax^2 + bx + c$ e veri£caram que alguns desses pontos não pertenciam à função quadrática cujo grá£co é uma parábola.

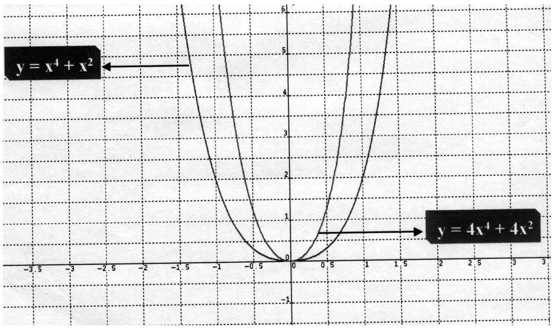


Figura 2:

IV - Se compararmos os grá£cos das funções $y = x^4 + 4x^2$ *+ 2; y* = $x^4 - 4x^2 - -2$; $y = x^4 - 4x^2 + 2$e $y = x^4 + 4x^2 - -2$, vemos que £zemos translações: ao somarmos 2 o grá£co foi para cima e desapareceram as raízes reais enquanto que quando somamos - 2 o grá£co foi para baixo e apareceram duas raízes reais e simétricas.

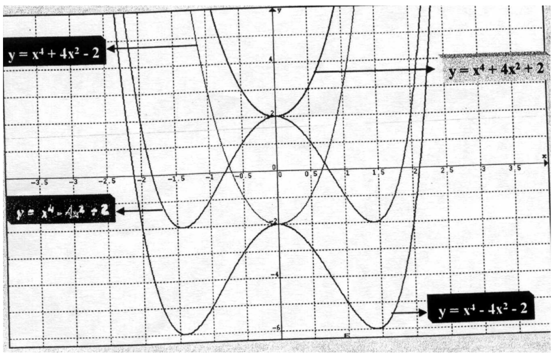


Figura 3:

Existem muita mais observações que podem ser obtidas das análises dos grá£cos de funções.

5. Conclusões

1 - Os professores aceitaram com di£culdade mudar o contrato mas se convenceram a fazê–lo observando que o software oferece a oportunidade para visualizar, reconhecer e fazer justi£cativas bem diferentes daquelas a que estão acostumados.

2-Ao utilizar o software para fazer os grá£cos das funções biquadradas acima apresentadas £caram muito surpresos com as formas que apareciam e alguns até diziam que na £gura apareciam dois "chifres" em alguns grá£cos e em outros não. No primeiro momento não sabiam por onde começar a análise, voltaram às expressões algébricas, começaram a perceber as diferenças e semelhanças entre os diferentes grá£cos e descobriram a relação entre os coe£ciente da função e os seus zeros.

3 - Não é preciso decorar, é necessário visualizar bem, no máximo analisar, um quadro obtido reunindo todas as observações acima. Pois, qual é a vantagem de saber automaticamente como serão as raízes estudando os coe£cientes, se não "vemos" e "interpretamos" a situação?

4 - Analisar representações diferentes, identi£car relações entre a linguagem algébrica e a linguagem geométrica não é aprender mais conceitos e mudar a história, mas apresentar novas formas de trabalho nas aulas de Matemática que levem os alunos a construírem os signi£cados das idéias matemáticas que estão sendo abordados. Isso muda os currículos e conseqüentemente os contratos de trabalho com os alunos.

Referências:

COUTINHO L. – Matemática & Mistério – 260 pags. Editora Ciência ModernRio de Janeiro – RJ - Brasil – 2003.

LINS,R.C. E GIMENEZ , J. Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI: Perspectivas em Educação Matemática, , Papirus Editora - Campinas, SP – Brasil - 1997.

MÁTTAR NETO J. A – Metodologia Cienti£ca na Era da Informática – 261 págs.- Editora Saraiva – S. Paulo – Brasil – 2002.

PERRENOUD P.& outros – Formando Professores Pro£ssionais – 220 págs. ARTEMED Editora Ltda. – Porto Alegre –Brasil –2001.

PERRENOUD P –A Pedagogia na Escola das Diferenças 230 págs. ARTEMED Editora Ltda. – Porto Alegre –Brasil –2001.

TIBA IÇAMI – Quem Ama, Educa! – 302 pags – Editora Gente – S. Paulo – S.P. – Brasil – 2002.

VALLADARES R.J.C. – O jeito matemático de pensar - 362 pags – Editora Ciência Moderna – Rio de Janeiro – RJ - Brasil – 2003.

HTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 229:235
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 27

TABULÆ, UMA FERRAMENTA DE COLABORAÇÃO SÍNCRONA EM GEOMETRIA DINÂMICA

Rafael G. Barbastefano
Departamento de Engenharia de Produção
CEFET/RJ
rgb@cefet-rj.br

Francisco Mattos
Colégio de Aplicação da UERJ, Colégio Pedro II
franciscorpm@ig.com.br

Thiago Guimarães
Universidade Federal do Rio de Janeiro
thiago@labma.ufrj.br

***Resumo**: Apresentamos neste trabalho uma ferramenta computacional síncrona destinada ao ensino de geometria, o Tabulæ. Este programa combina as facilidades de uma ferramenta de geometria dinâmica com o compartilhamento de construções geométricas através da Internet, permitindo a aplicação de estratégias didáticas colaborativas em cursos a distância em geometria.*

***Palavras-chave:** Geometria Dinâmica, Tecnologia educacional, CSCL.*

***Abstract:** In this work, we introduce a synchronous computational tool destined to the geometry teaching, called Tabulæ. This program combines a dynamic geometry tool with the possibility of sharing constructions through the Internet, allowing the application of Computer Supported Collaborative Learning in distance education.*

***Key words:** Dynamic geometry, Educational technology, CSCL.*

1. Introdução

Nos últimos anos, temos presenciado um grande interesse na aplicação de tecnologias computacionais ao ensino. A revolução digital a que presenciamos no £nal do século passado tem tornado o custo ao acesso a esta tecnologia viável para países em desenvolvimento. (Knitght, 1994).

Dentre as tecnologias que tem despertado maior interesse, podemos destacar aquelas que permitem aos alunos e professores atuarem colaborativamente em torno de problemas. A Aprendizagem Colaborativa Auxiliada por Computador (CSCL – *Computer Supported Collaborative Learning*) representa um campo de estudo em expansão.

O objetivo deste trabalho é a apresentação de um programa destinado à aprendizagem colaborativa de geometria a distância, desenvolvido pelo Projeto Enibam – UFRJ (Oliveira e Guimarães, 2001), o Tabulæ (Guimarães et al., 2001). Este programa possibilita o compartilhamento de construções de geometria dinâmica em um ambiente colaborativo em rede.

Dentre as suas aplicações, destacamos a formação continuada de professores em cursos a distância. A organização desses cursos tem como objetivo de melhorar a quali£cação e promover uma melhor formação aos professores, o que re¤ete uma demanda da sociedade.

No ambiente proposto o professor dispõe de ferramentas para apoiar o processo de acompanhamento e permite que um professor (tutor) interaja com maior número de alunos. Desta forma torna-se possível utilizar melhor a competência do professor para formulação e avaliação do processo, ampliando sua atividade como agente capacitador, participando num processo cooperativo não como um mero transmissor de conhecimentos de modo estático, mas como um orientador, um facilitador e um avaliador do processo educacional.

2. Aprendizagem cooperativa em matemática

Aprendizagem em matemática é vista, em geral, como uma atividade individual. Alunos acompanham aulas expositivas e, em seguida, devem estabelecer uma rotina de estudos isolados uns dos outros. A aprendizagem cooperativa representa uma alternativa didática às aulas expositivas e à aprendizagem individual.

Davidson (1990) enumera algumas vantagens da aprendizagem em grupo:

1. Os grupos estabelecem um "mecanismo social de apoio" aos seus membros – os alunos perderiam sua inibição em realizar perguntas muito elementares ao fazê-las aos seus colegas de grupo.

2. Esse “mecanismo social de apoio” possibilita uma discussão que facilita a £xação e reforço de conceitos.

3. Os problemas em matemática, muitas vezes, possuem mais de forma de resolução. A aprendizagem em grupo possibilitaria a veri£cação de mais de uma forma de solução pelos alunos.

4. Os alunos podem ser apresentados a problemas mais so£sticados, que não seriam adequados às restrições de sala-de-aula ou de aprendizagem individual.

Atividades cooperativas podem ser realizadas através do computador e veri£ca-se grande interesse na literatura por ferramentas computacionais que facilitem o este tipo de trabalho (Ellis, 1991). Dá-se o nome de *Computer Supported Collaborative Work* (CSCW) ao campo de estudo que se dedica ao desenvolvimento e análise dessas ferramentas.

O estudo das ferramentas colaborativas educacionais recebe o nome de *Computer Supported Collaborative Learning* (CSCL). Apesar do grande interesse existente por novas ferramentas de ensino, veri£ca-se um número muito reduzido de iniciativas de desenvolvimento de ferramentas para o ensino de matemática. Se restringem a programas isolados, muito especí£cos como o Algebra Jam (Singley et al. 2000), destinado ao estudo de curvas. A ferramenta que iremos descrever a seguir integra a possibilidade de colaboração em rede com um software de geometria dinâmica completo, o Tabulæ.

3. O Tabulæ

A geometria dinâmica é um conceito computacional que representa uma classe de programas usados como tecnologia educacional para o ensino de matemática (Schuman, 1989). O Tabulæ (Figura 1, Guimarães et al. 2001) é um software de Geometria Dinâmica plana que foi desenvolvido no Projeto Enibam do IM/UFRJ há pouco mais de dois anos. Estão envolvidos no projeto alunos de graduação dos cursos de engenharia, bacharelado em matemática, informática, licenciatura em matemática e desenho industrial, além de alunos de mestrado e doutorado. A versão atual do Tabulæ contém funcionalidades geométricas e vetoriais, além de calculadora. O objetivo principal do programa é proporcionar uma alternativa brasileira, de classe mundial, aos softwares encontrados no mercado hoje em dia.

Dentre as inovações do programa, em relação a similares no mercado, podemos citar:

1. A interface grá£ca permite a escolha entre os modos verbo-nome e nome-verbo.
2. Escrito em Java, o Tabulæ é compatível com diversas plataformas.

3. A programação é inteiramente orientada a objeto com o núcleo matemático e interface grá£ca completamente separadas no programa.

4. O Tabulæ pode gerar código em Java, o que torna útil na produção de hipertextos.

5. O design de interface foi elaborado baseado em princípios ergonômicos.

6. Pode-se gerar relatórios detalhados de uso dos alunos.

7. Pode-se compartilhar construções através da Internet, facilitando a aprendizagem colaborativa.

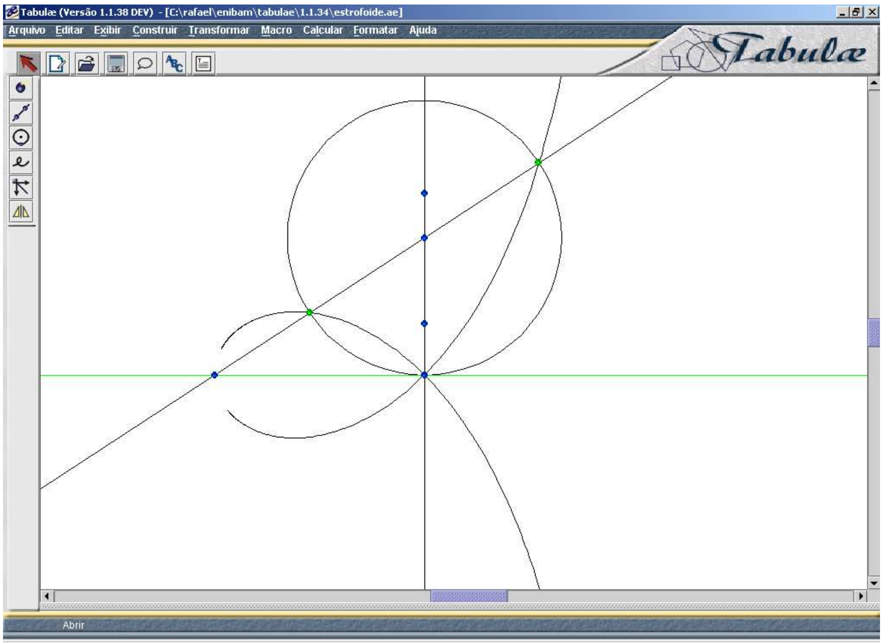


Figura 1: Uma estrofóide feita no Tabulæ.

[1]

O compartilhamento de construções geométricas constitui-se na grande inovação do programa. Através dela, um usuário pode enviar em tempo real sua construção para outro usuário através da Internet. Dessa forma, um aluno pode colaborar com seus colegas de maneira a resolver problemas em conjunto ou solucionar dúvidas com um professor/tutor.

Quando um aluno utiliza um programa de geometria dinâmica, ele pode realizar seu trabalho a partir da tela em branco ou a partir de um arquivo já gravado. A utilização de arquivos já previamente preparados para o aluno é interessante, pois assim

[1] A curva estrofóide apareceu num trabalho de Isaac Barrow em 1670, embora existam relatos de que Torricelli a tenha descrito em uma de suas cartas por volta de 1645. Gilles Roberval que viveu entre 1602 e 1675, na França, foi quem a de£niu como locus dos focos de uma cônica obtida da intersecção do plano com o cone. O nome estrofóide signi£ca uma tira com uma torção e foi dado por Montucci em 1846

ele pode estudar problemas envolvendo construções complexas, acompanhando cada etapa necessária.

No entanto, em muitas situações, é de interesse do aluno conhecer a maneira pela qual determinada construção foi elaborada. Através do compartilhamento é possível ao professor elaborar uma construção que seja acompanhada simultaneamente pelos seus alunos. Dessa forma, o professor teria controle não apenas das etapas construtivas, mas também do ritmo a ser empregado em cada construção. Integrando uma ferramenta deste tipo a uma sala de *chat*, o professor pode obter *feedback* acerca de cada etapa de construção em um ritmo semelhante ao vivenciado em sala-de-aula.

O Tabulæ colaborativo está estruturado na forma de um serviço (Figura 2). Através do programa cliente, um usuário se registra no serviço e entra em uma sala de colaboração especí£ca. A comunicação de construções é baseada em um cliente com uma área pública (visível a todos os participantes da sala) e uma área privada (visível apenas ao próprio usuário).

O serviço Tabulæ possui dois per£s especí£cos: tutor e aluno. O tutor é responsável por gerenciar o grupo e os acessos à área pública (utilizada por um usuário de cada vez). O aluno acompanha as discussões da área pública, podendo fazer cópias das telas quando quiser. Caso deseje fazer contribuições para apreciação dos colegas, deve pedir o acesso à área pública e usá-la como se fosse a sua área privada.

Para backup das construções e manutenção das informações de acesso às salas e per£s, o Serviço Tabulæ utiliza um banco de dados elaborado em MySQL. As informações das salas e per£s podem ser acessadas através de interface Web para gerenciamento. Está em desenvolvimento a integração do serviço com programas de gerenciamento de cursos a distância, como o Teleduc, desenvolvido na Unicamp.

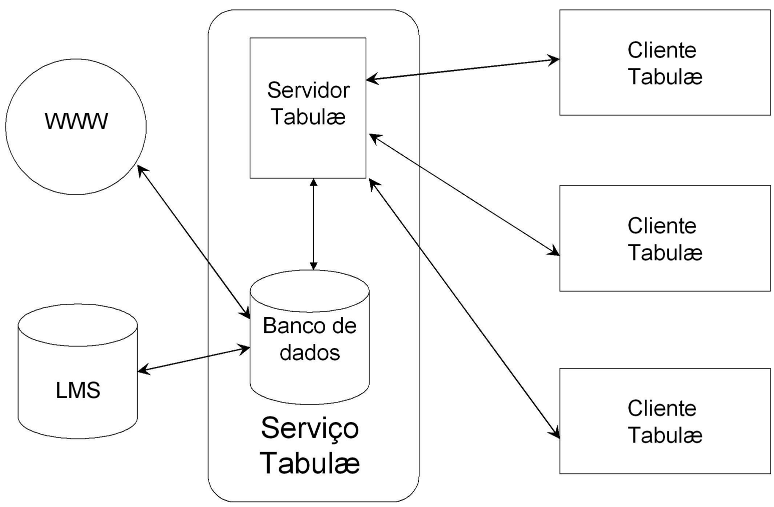


Figura 2: Representação esquemática do Serviço Tabulæ.

4. Conclusão

Neste trabalho apresentamos uma ferramenta de colaboração síncrona destinada ao ensino de geometria, o Tabulæ. Apresentamos suas principais características como programa de geometria dinâmica e como está estruturado para prover compartilhamento de construções e conseqüente uso como ferramenta de colaboração.

O programa, sem as funcionalidades de colaboração, já se encontra em uso por diversas escolas na cidade do Rio de Janeiro. O serviço colaborativo encontra-se em fase de protótipo, com uso restrito a grupos de controle. Espera-se que a partir do segundo semestre de 2004, essas facilidades possam ser incorporadas ao programa de uso disseminado.

Referências:

DAVIDSON, N. (1990) Cooperative Learning in Mathematics. Addison-Wesley, Menlo Park.

ELLIS, C.A., GIBBS, S.J. & REIN, G.L. (1991) Groupware: some issues and experiences. Communications of the ACM v. 34 (1) 38-58.

GUIMARÃES, L. C., BARBASTEFANO, R. G., CARVALHO, D.(2001) Tabulæ, Registro INPI n.0039192.

KEEGAN, D. (1996) "Foundations of Distance Education", third edition, Kogan-Page London.

KNIGHT, P. T. (1994) Education for all Through Electronic Distance Education (revised) First International Conference on Distance Education in Russia, Moscow, 5-8 July.

O'CONNOR, J.J., ROBERTSON, E. F. (1996) The Mac Tutor History of Mathematics Archive, School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland. Disponível na internet via http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/∼history/HistTopics/. Arquivo consultado em 2004.

OLIVEIRA, A. & GUIMARÃES, L.C., *Enibam – Project Report*. Disponível em ftp://ftp.cnpq.br/pub/protem/workshop2001/educacao/relatorios/ENIBAM.rtf - 14 de Janeiro de 2003.

SINGLEY, M.K., SINGH, M., FAIRWEATHER, P., FARREL, R. & SWERLING, S. (2000) Algebra Jam: Supporting Teamwork and Managing Roles in a Collaborative Learning Enviroment. In. Proceedings of CSCW 00' Philadelphia, 145-154.

SCHUMAN, H. (1989). The in¤uence of interactive tools in geometry learning. In:Intelligent learning enviroments, the case of geometry, . Berlim, Springer-Verlag.

VIVACQUA, A., MATTOS, F., THORNAGHI, A., SOUZA, J. M., CUKIERMAN, H. (2003). Perspectives on Creativity in web Learning. In. Proceedings of ICWL 2003, Melbourne, Austrália.

WILLIS, B. (1992) Strategies for Teaching at a Distance. ERIC Digest. ERIC Clearinghouse on Information Resources Syracuse, (ED351008), NY.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 237:246
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 28

AS OVAIS DE MAXWELL EM GEOMETRIA DINÂMICA

Danusa Chini Gani
Departamento de Desenho e Ed. Artística - Colégio Pedro II
Programa HCTE – COPPE
UFRJ
danusa@rionet.com.br

Elizabeth Belfort
Departamento de Métodos Matemáticos
Instituto de Matemática
UFRJ
beth@im.ufrj.br

Resumo: *Apresentamos as curvas ovais encontradas em trabalhos do físico escocês, James Clerk Maxwell, escritos quando o autor era jovem. A partir do "processo do jardineiro", que permite traçar a elipse utilizando uma corda £xa nos focos por seus extremos, o autor estuda um processo generalizado, obtendo uma série de ovais. Finalmente, aplicamos a construção da elipse a partir do círculo diretor para investigar as curvas ovais em Geometria Dinâmica.*

Palavras-chave: *Maxwell, Ovais, Geometria Dinâmica, Lugares Geométricos..*

Abstract: *We describe the oval curves found in the work of the Scottish scientist, James Clerk Maxwell. Based on a well-known process, which allows the construction of the ellipse with the aid of an inextensible thread £xed by its extremities on the foci, the young author had developed a process to construct ovals. We also apply a generalized process to construct the ellipse in order to investigate the ovals in Dynamic Geometry.*

Key words: *Maxwell, Ovals, Dynamic Geometry, Locus..*

1. Introdução

Embora importantes para o estudo dos fenômenos óticos, as curvas ovais não são objeto de estudo matemático no Ensino Médio nem em cursos universitários. Por outro lado, em livros de Desenho Geométrico para o ensino básico, a oval e sua construção são apresentadas como uma aplicação das técnicas de concordância de arcos de circunferência, o que pode levar à interpretação de que as ovais não são curvas matemáticas e sim curvas "compostas".

Os processos construtivos aproximados são necessários em Desenho Geométrico, pois essas curvas não podem ser traçadas apenas com régua e compasso. No caso particular das construções de "falsas elipses" ou "ovais regulares", sabemos que estamos construindo uma aproximação para uma curva que admite de£nição matemática precisa: a elipse. Neste caso, porém, há uma prática de construção bastante conhecida, em que se emprega um recurso mecânico. Nesse processo, referido como o "processo do jardineiro", se utiliza uma corda não extensível e de comprimento maior que a distância entre os focos da curva, aos quais é presa por suas extremidades. Obtemos a elipse a partir do movimento de uma pequena estaca apoiada na corda e que a mantém sempre esticada.

Neste artigo, estudamos as ovais como curvas matemáticas passíveis de construção por meio mecânico similar. Esse estudo foi desenvolvido por James Clerk Maxwell, em artigos datados de 1846 e 1847. Utilizamos, ainda, programas de Geometria Dinâmica para enriquecer nossa análise, pois os ambientes computacionais permitem modelar tais curvas como lugares geométricos (LG). Para uma discussão das aplicações deste estudo em Desenho Geométrico, ver Gani e Belfort (2003), em que discutimos como estas curvas podem ser comparadas com as aproximações construídas a partir de arcos de circunferência.

2. Referências Históricas

A menção do nome de James Clerk Maxwell nos conduz, imediatamente, ao campo da Física, em que ocupa lugar de destaque, por seus resultados em eletromagnetismo e na teoria cinética dos gases, além de outras substanciais contribuições em pesquisas teóricas e experimentais, como o estudo da visão colorida, a teoria dos anéis de Saturno, a ótica geométrica, a fotoelasticidade, a termodinâmica, entre muitas outras (Everitt, 1974).

O artigo inicialmente discutido, "On the Description of Oval Curves", corresponde à sua primeira atividade intelectual levada a público. O estudo foi feito aos quatorze anos de idade, e teve como estímulo um trabalho do pintor decorativo e membro da

Sociedade de Artes, D. R. Hay intitulado "Description of a machine for drawing the perfect egg-oval", no qual o artista desenvolveu um aparato para desenhar uma oval perfeita, em resposta a um problema proposto pelo Departamento de Ciência Aplicada. Maxwell, que tinha iniciado seus estudos sobre as cônicas, se interessou por encontrar soluções para o problema, vindo a publicar diversos artigos sobre o tema (Maxwell, 1846, 1847(a) e (b), in: Harman, 1990).

O primeiro artigo foi apresentado por seu professor James Forbes, e publicado no "Proceedings of the Royal Society of Edinburgh", em abril de 1846. O trabalho de Maxwell foi introduzido nos "Proceedings" da seguinte forma: "*Mr. Clerk Maxwell ingeniously suggests the extension of the common theory of the foci of the conic to curves of a higher degree of complication* (...)" (ver Brisbane, in: Proceedings, 1909, pg. 89).

Segundo relato da comunicação de Forbes, feita por Brisbane, as ovais encontradas por Maxwell coincidem com as descritas por Descartes (1894, pp 50-53), em sua "Geometria". Porém, segundo Forbes, a identidade entre as ovais não invalidou o trabalho do jovem, que apresentou um método "*fácil e elegante*" para descrever as curvas utilizando um £o e pinos, quando as potências dos focos são comensuráveis.

Campbell e Garnett (1882) a£rmam, baseados em depoimentos, que Maxwell desconhecia o trabalho de Descartes e que a única instrução em matemática que havia recebido, até a data em que os trabalhos foram escritos, consistia em alguns teoremas da geometria de Euclides e uns poucos elementos de álgebra. O próprio Maxwell identi£cou suas curvas com as do famoso matemático em uma carta a seu pai, um ano após, em abril de 1847.

É, ainda, interessante comentar que, até os dezenove anos, os estudos de Maxwell, em Física, estavam bastante atrelados à Geometria: escreveu artigos em geometria diferencial, estudando a família de curvas geradas da mesma forma que a ciclóide; fez investigações em ótica geométrica, que conduziram à descoberta das lentes "olho de peixe"; aprofundou trabalhos de Gauss em transformações de superfícies. Em 1850 foi para Cambridge, onde desenvolveu diversos estudos em Física; suas pesquisas em eletricidade, magnetismo e na teoria eletromagnética da luz, cujos resultados o tornaram notável, tiveram início logo após a sua graduação, em 1854 (Everitt, 1974).

3. As Ovais de Maxwell

O jovem Maxwell partiu da analogia entre o Círculo e a Elipse e imaginou uma forma de generalizar o processo para a construção de ovais. Através do conhecido método mecânico de construção da elipse, "o processo do jardineiro", que se baseia no princípio de que a soma de duas linhas traçadas dos focos para qualquer ponto na curva é uma quantidade constante, estabeleceu como condição essencial que a soma constante poderia ser obtida a partir de diferentes multiplicidades dos raios vetores, com qualquer número de focos (conforme ilustrado na £gura 1).

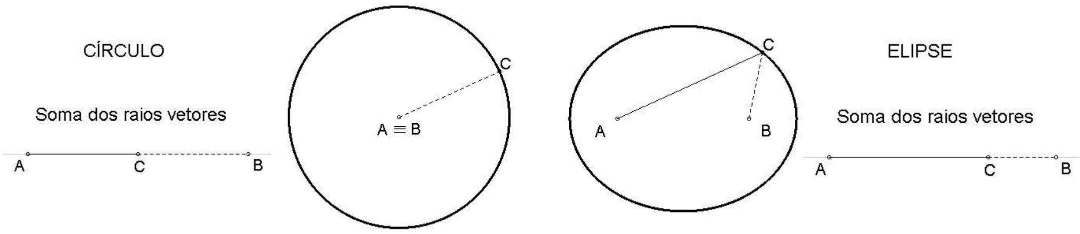


Figura 1: O círculo como uma elipse de focos coincidentes e raio duplo.

Maxwell desenvolveu sua pesquisa estudando as curvas com dois focos. Na £gura 2, ilustramos o processo com a proporção mais simples (1:2), isto é, dobrando o £o preso a um dos focos. Dessa forma, a curva é modi£cada pela in¤uência da proporção dupla do raio AD e, ao invés da elipse, obtemos uma oval.

"A thread is £xed on the focus B at the other end is loop at D for tracing point and the thread is passed round a pin in the focus A (...)" [2]*(Maxwell, in: Harman, 1990, pg 36.)*

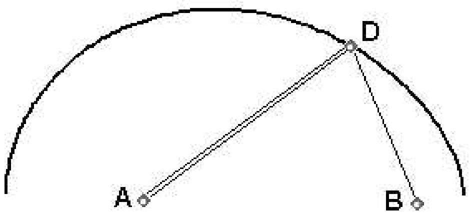


Figura 2: Construção de uma oval de razão 1:2 pelo "processo do jardineiro".

Tendo obtido as ovais de dois focos, como curvas que podem ser matematicamente descritas como os lugares geométricos dos pontos P do plano, tais que, se d_1 e d_2 são as distâncias de P a dois pontos £xos A e B, então $m \times d_1 + n \times d_2 = \boldsymbol{c}$, onde $\boldsymbol{c}$ é uma constante arbitrária, Maxwell (1946) desenhou uma série de exemplos, variando as distâncias dos focos e as proporções m e n, denominadas de potências dos focos.

Conforme ilustrado na £gura 3, esse estudo experimental, com proporções comensuráveis, mostrou que: (1) se a distância entre os focos é muito pequena, a £gura se aproxima de um círculo; (2) é possível que o foco do raio de menor multiplicidade esteja posicionado sobre a oval e, neste caso, a £gura assume uma forma "pontuda"; e (3) é possível que um dos focos (aquele de menor potência) £que localizado fora da £gura que, no entanto, não perderá sua forma oval característica.

Depois de investigar a variedade de formas geradas por dois focos em diversas proporções e diferentes distâncias, Maxwell pesquisou as curvas obtidas com um maior número de focos. Mais tarde, em março de 1847, escreveu um manuscrito sobre as curvas trifocais, no qual faz a análise geométrica das mesmas e apresenta algumas proposições.

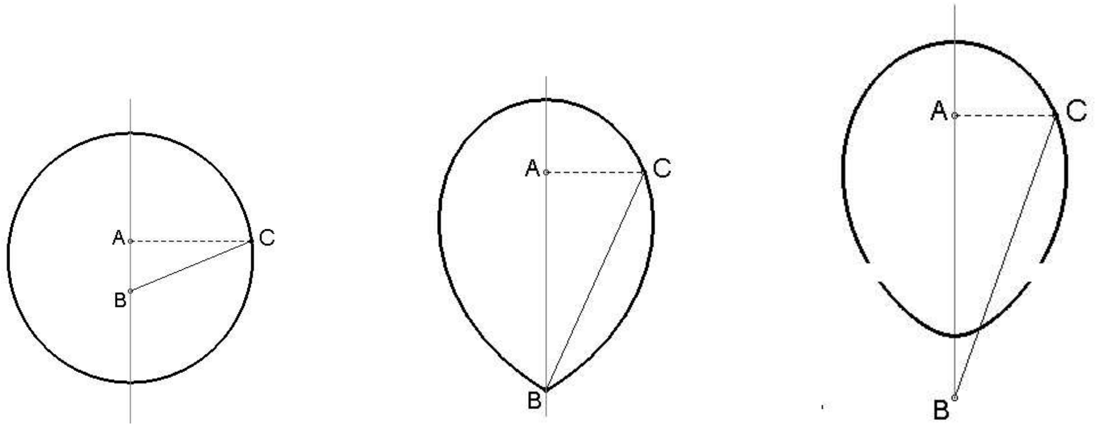
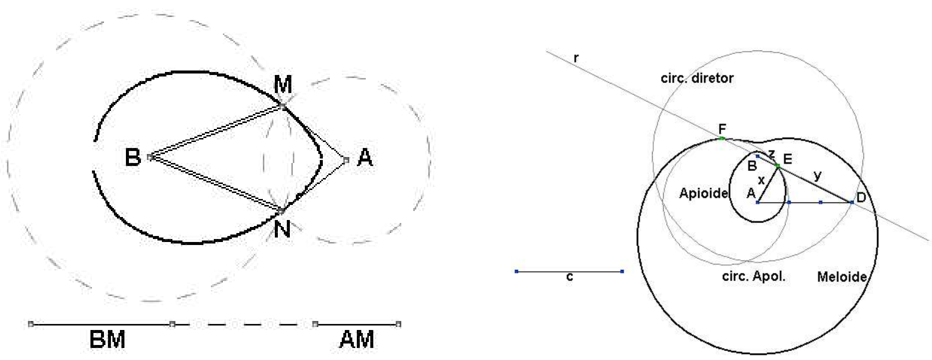


Figura 3: Diferentes posições para os focos de uma oval de razão 1:2.

4. Um Estudo do problema em Geometria Dinâmica

A seguir, ilustramos dois processos de exploração do estudo de Maxwell em Geometria Dinâmica. O primeiro deles é o processo do jardineiro, no qual se torna necessário trabalhar a curva como a união de dois lugares geométricos (£gura 4a, razão 1:2). No segundo processo, a idéia geométrica de uma construção baseada em um único LG é uma

generalização da construção da elipse, através do seu círculo diretor. Para a construção da oval, ao invés de dividirmos em partes iguais o segmento AD, que une o outro foco a um ponto do círculo diretor, o dividiremos em partes proporcionais, usando, para isso, o Círculo de Apolônio, como ilustrado na £gura 4b.



(a) (b)

Figura 4: Construções das Ovais de Maxwell em Geometria Dinâmica.

Em nosso segundo exemplo, observe que o ponto E pertence ao círculo de Apolônio, logo $y = 2x$. Desta forma, como $z + y = \boldsymbol{c}$ (raio do círculo diretor), temos que $z + 2x = \boldsymbol{c}$, ou seja, o ponto Epertence à oval de focos A e B, razão 1:2 e constante $\boldsymbol{c}$ dada. Note-se, ainda, que o Círculo de Apolônio, traçado sobre o segmento *AD* encontrará a reta suporte do raio *BD*, do círculo diretor, em outro ponto, F, que gera uma segunda curva, para o qual teremos: $FD = 2\ FA$. Ou seja, temos que $2FA - FB = \boldsymbol{c}$, o que pode ser considerado como uma analogia à construção da hipérbole.

Em 1847, como parte de um "*brilhante*" artigo matemático, (ver Campbell e Garnett, 1882), Maxwell reconhece essas curvas e as constrói pelo processo do jardineiro, denominando-as de Melóides, enquanto as ovais passam a ser chamadas de Apióides.

5. Considerações Finais

Os programas de Geometria Dinâmica, devido a sua forma de implementação, são de pouca ajuda para reproduzir o estudo de Maxwell sobre ovais com três ou mais focos. Por outro lado, é possível explorar as curvas bifocais muito além do que foi brevemente discutido neste artigo.

Por exemplo, é possível pesquisar diferentes posições dos focos e a forma que este posicionamento afeta as curvas Melóide e Apióide. Outra investigação interessante está relacionada com o estudo das tangentes às ovais, que Maxwell desenvolveu em seu artigo de 1847. Por um ponto qualquer sobre a oval ele constrói, inicialmente, o círculo que melhor aproxima a curva nesse ponto (como ilustrado na £gura 5). A reta tangente à oval coincide com a reta tangente a esse círculo. O Círculo de Apolônio, que utilizamos em nossa construção da £gura 4a, coincide com o círculo construído por Maxwell, conforme reconheceu Playfair (ver Campbell e Garnett, 1882).

Quando consideramos o ensino de Desenho Geométrico, observamos que a construção de "ovais" como curvas compostas por arcos de círculos já era tratada por Frezier (1737), em seu *Tratado de Estereotomia*[1]. Para arquitetos e construtores, o uso dessas curvas aproximadas facilitam todas as etapas do trabalho de construção. Frezier insiste que as curvas originais são preferíveis às "cópias", porém cede à pressão da prática e apresenta um conjunto de regras para que a "harmonia" da curva seja garantida nas aproximações.

A £gura 6 mostra a comparação entre a construção de uma falsa elipse (dados seus dois eixos), como proposta por Frezier, e a verdadeira elipse. O estudo, desenvolvido com o auxílio da Geometria Dinâmica, permite alterar o tamanho dos eixos e avaliar, criticamente, os resultados obtidos. Podemos visualizar que uma diferença signi£cativa entre os tamanhos dos eixos fará com que a aproximação obtida se afaste da curva matemática correta e, consequentemente, aquela será menos harmoniosa.

[1] De forma resumida, a Esterotomia pode ser considerada como "a arte do corte de £guras espaciais". Seu estudo era particularmente importante no corte de pedras para construções.

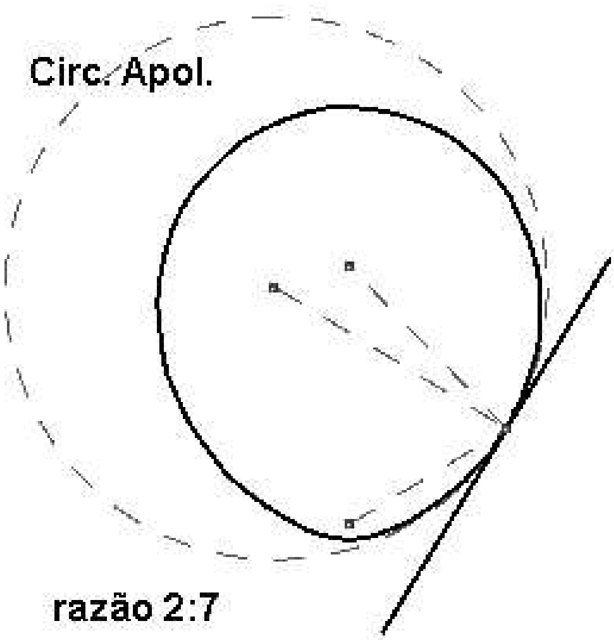


Figura 5: A reta tangente à oval de Maxwell por um ponto da curva.

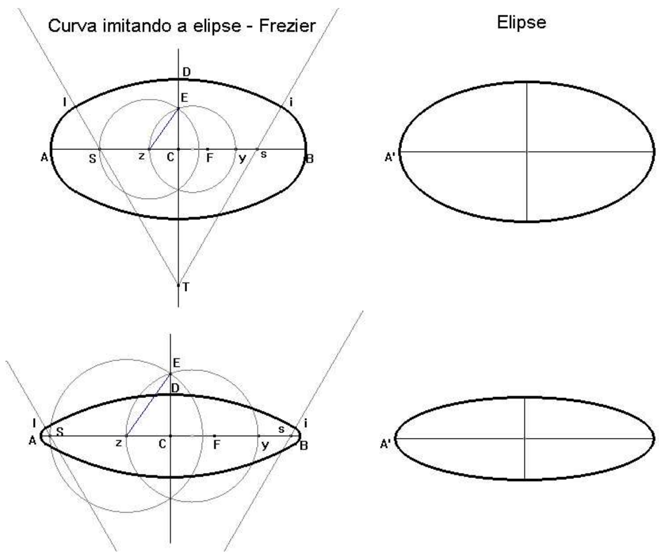


Figura 6: Comparação entre a “falsa elipse” e a elipse.

Como conseqüência dessas constatações, podemos assumir que existe a possibilidade de trabalhar com uma ¤exibilização do posicionamento dos centros dos arcos utilizados nessas construções, desde que os princípios de concordância sejam mantidos. Pesquisas destas possibilidades podem ser desenvolvidas com facilidade em G. Din. e nos levam a veri£car que diferenças muito grandes entre os raios dos círculos, envolvidos no processo, repetem as "falhas" de construção já observadas por Frezier, ao alertar que "a súbita mudança de curvatura £ca facilmente perceptível à visão".

A partir do estudo das ovais de Maxwell, cria-se a possibilidade de desenvolver construções críticas similares para as ovais irregulares, em ambiente de G. Din.. A £gura 7, compara a "falsa oval irregular", construída a partir da concordância de arcos de círculos, com uma possível curva matemática que esta pretende aproximar.

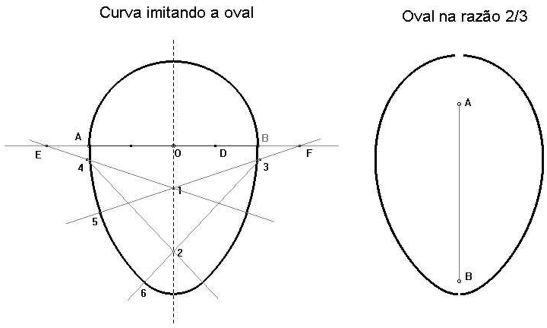


Figura 7: Comparação de uma oval de Maxwell com a "oval irregular" em G. Din.

Finalmente, a motivação histórica para o estudo das curvas ovais está relacionada com o estudo a ótica, em particular com o estudo de espelhos e lentes.

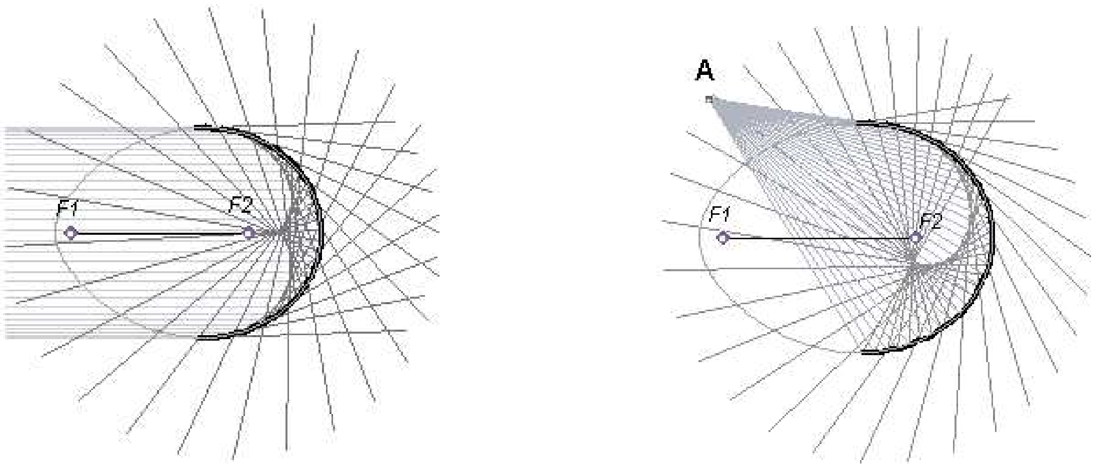


Figura 8: Imagens de feixes luminosos por um espelho oval côncavo.

A £gura 8 é composta de dois diagramas, cada um deles ilustrando a imagem por um espelho oval côncavo de um feixe de raios luminosos: no diagrama da direita, o feixe incide paralelamente ao eixo do espelho e no da esquerda o feixe parte de uma fonte £xa A. Em ambiente de G. Din., construímos o lugar geométrico dos raios luminosos incidentes e re¤etidos. Estudos similares podem ser feitos explorando o espelho convexo. Observe que esta investigação aponta para a existência de curvas envoltórias dos raios re¤etidos. As curvas obtidas, de interesse físico e matemático, são exploradas no artigo de Guimarães (2004), que pode ser encontrado nestes anais.

Referências:

BRISBANE, T. M. On the Description of Oval Curves by Mr Clerk Maxwell. In: **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh**, vol.II, pp.89-91, 1909/1937, 1909

CAMPBELL, L. e GARNETT, W. **The Life of James Clerk Maxwell**. Londres: Macmillan and Co., 1882, (encontrável em http://www.hrshowcase.com/maxwell/, Sonnet Software, Inc.), 1997

DESCARTES, R. Géométrie. In: COMTE, Auguste, **La Géométrie Analytique Précedée de La Géométrie de Descartes**. Paris: Louis Bahl, 1894.

EVERITT, C.W.F, in GILLISPIE, C.C. (org.) **Dictionary of Scienti£c Biography**. Vol. IX. New York: Scribner, 1974.

FREZIER, Amédée . **Traité de Stereotomie**. Vol.I. Paris: 1737, (disponível em http://gallica.bnf.fr)

GANI, D. C. & BELFORT, E. As Ovais de Maxwell. In: **Anais do GRAPHICA 2003**, Santa Cruz do Sul, RS, 2003.

GUIMARÃES, L. C.. Re¤exões Acerca do Problema de Alhazen. In: **Anais do II HTEM**, Rio de Janeiro, UERJ, 2004.

MAXWELL, J. C.: Paper on The Description of Oval Curves. In: Harman, Peter Michael, **The Scienti£c Letters and Papers of James Clerk Maxwell**, vol.I. New York, Cambridge University Press, 1990, 1846.

MAXWELL, J. C. Manuscript on Trifocal Curves. In: Harman, Peter Michael, **The Scienti£c Letters and Papers of James Clerk Maxwell**, vol.I. New York, Cambridge University Press, 1990, 1847a.

MAXWELL, J. C. Propositions on Oval Curves. In: Harman, Peter Michael, **The Scienti£c Letters and Papers of James Clerk Maxwell**, vol.I. New York, Cambridge University Press, 1990, 1847b.

IHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 247:256
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 29

Novas Tendências sobre o Papel do Usuário de Tecnologia: olhando para alguns Campos de Estudo

Bibi Lins (Abigail Fregni Lins)
Departamento de Matemática
Universidade Estadual Paulista UNESP Rio Claro
bibilins2000@yahoo.co.uk

Resumo: *Hoje em dia o papel do usuário de tecnologia está sendo mais e mais reconhecido e está se tornando crucial para vários campos de estudo (re)olhar para esta questão, especi£camente quando se trata de ambientes educacionais e organizações de trabalho. Este artigo discute brevemente espaços ontológicos em que usuários de tecnologia estão alocados, nos campos da Inteligência Arti£cial (IA), Interação Homem-Máquina (IHM) e Sociologia da Tecnologia (ST). O artigo também mostra como a consciência sobre o papel do usuário está gradualmente mudando o enfoque de tais campos. Por £m, uma visão panorâmica de meu doutorado é dada, o qual diz respeito ao papel do usuário na Educação Matemática.*

Palavras-chave: *Sociologia da Tecnologia; o papel do usuário de tecnologia; tecnologia como texto; usuários como leitores da tecnologia.*

Abstract: *Nowadays the role of users of technology is being more and more acknowledged and it is becoming crucial for various £elds of study to (re)look at it, speci£cally when concerning working organisations and educational settings. This paper brie¤y discusses ontological spaces that users of technology are located within the £elds of Arti£cial Intelligence (AI), Human-Computer Interaction (HCI) and Sociology of Technology (ST). It also shows how the awareness of the role of users of technology is gradually changing the focus of such £elds. Finally, it gives an outline of my PhD* *studies, which concerns the role of users in the Mathematics Education £eld.*

Key words: *Sociology of Technology; the role of users of technology; technology as text; users as readers of technology.*

1. Introdução

Hoje em dia o papel do usuário de tecnologia está cada vez mais reconhecido. Assim, passa a ser crucial para vários campos de estudo (re)olhar esta questão, especi£camente quando se trata de organizações empresariais e ambientes escolares. Veri£camos este fato se olharmos para a forma como o papel do usuário de tecnologia está alocado, ontologicamente, por exemplo, nos campos de estudo da Inteligência Arti£cial (IA), Interação Homem-Máquina (IHM) e da Sociologia da Tecnologia (ST). Da mesma forma que a consciência do papel do usuário, o enfoque de tais campos de estudo está gradualmente mudando, trazendo novas tendências para os mesmos (Lins, 2001). Estarei discutindo aqui estes pontos de maneira resumida pois a intenção é de um artigo curto. Nele quero também trazer uma visão panorâmica sobre a minha pesquisa de doutorado, que diz respeito ao uso do Excel e Cabri-Géomètre por professores de matemática, seus usuários.

2. Inteligência Arti£cial (IA)

IA, por exemplo, teve originalmente seu enfoque nos sistemas de desenvolvimento e implementação, cujo comportamento parece 'inteligente' aos olhos dos observadores: olhando para o sistema, observadores podem legitimamente conjecturar que seu comportamento é devido a algum tipo de raciocínio. Então, o termo 'Inteligente' de 'Inteligência Arti£cial' signi£ca essencialmente que modelos habilitam uma máquina a resolver problemas, no sentido que soluções para estes problemas tem sido a priori codi£cados, mas é a máquina que os constrói originalmente. Por esta razão, em IA, modelagem computacional de um processo deve ser entendida como modelagem computacional do conhecimento dentro dele. Conseqüentemente, uma metodologia para avaliar um ambiente de ensino/aprendizagem sobre a base de conceitos e ferramentas de IA é uma das questões cruciais discutida em um debate sobre o desenvolvimento da 'Inteligência Arti£cial e Educação' como campo de pesquisa (Balacheff, 1993). Por exemplo, um dos primeiros projetos signi£cativos em IA no início dos anos 70 com respeito aos campos da Tecnologia Educacional e Educação Matemática foi o projeto LOGO (Papert *et al.*, 1979). LOGO tem sido largamente usado nas escolas por todo o mundo desde seu lançamento. Muitos estudos de pesquisa foram feitos sobre o impacto de seu uso nos processos de ensino e aprendizagem, enquanto o LOGO vem sido usado e entendido por professores, estudantes e escolas (seus usuários). A pesquisa de doutorado de Agalianos (1997) é um bom exemplo sobre este assunto. Agalianos tomou LOGO como unidade de análise, usando Estudos Culturais como referencial teórico para discutir LOGO como um produto cultural na educação. Não vou aqui me aprofundar sobre o trabalho de Agalianos, mas vale a pena mencionar que este foi produzido com a intenção de desenvolver uma linguagem sociológica para entender computação educacional e sugerir que a introdução e uso de tecnologias na educação deveriam também ser situados dentro de um contexto social, político e cultural.

A partir deste exemplo podemos notar que o que apareceu como um dos primeiros projetos de IA, com seu enfoque nos sistemas de desenvolvimento e implementação (em que o comportamento parece inteligente aos olhos de observadores), veio a ser um objeto de estudo, cuja preocupação central é o papel do usuário.

3. Interação Homem-Máquina (IHM)

Por sua vez, a Ciência Cognitiva foi a voz teórica dominante nos estudos de IHM desde seu aparecimento como campo de estudo. Ciência Cognitiva, como referencial teórico para tecnologia, enfatizou representações mentais como seu principal enfoque de estudo. Concentrou em informação, sua representação e propagação, ignorando o estudo de artefatos (Zinchenko, 1986). No £nal dos anos 80 alguns pesquisadores deste campo começaram a sentir um 'incômodo teórico', no sentido de que Ciência Cognitiva seria um paradigma muito restrito para investigar, por exemplo, as diferenças e escolhas do uso de tecnologia por usuários (Bannon e Bodker, 1991). Uma chamada para novas perspectivas teóricas foi explicitamente discutido em 1993 na Holanda, durante um *workshop 'Rethinking theoretical frameworks for HCI'*, por alguns pesquisadores que reconheceram como inadequados os referenciais cognitivos tradicionais e a consciência crescente sobre o papel do usuário. Um dos produtos deste *workshop* foi o livro editado por Nardi (1997) que traz Teoria da Atividade como uma alternativa para o pedido de um novo quadro teórico para IHM. Na Teoria da Atividade, pessoas não são reduzidas a 'agentes' em um sistema: 'processamento de informações' não é visto como algo a ser modelado da mesma maneira para pessoas e máquinas. Nesta teoria, artefatos são mediadores do pensamento e comportamento humanos. Por esta razão, no livro pode-se achar maneiras práticas de aplicar Teoria da Atividade para o *design* tecnológico. Por exemplo, Nardi (capítulo 10, Nardi 1997) reanalisa alguns dados de um estudo de 'fazedores de slides' (como apresentação *PowerPoint*) usando construtos da mesma. Nardi argumenta que a aplicação de alguns conceitos básicos da Teoria da Atividade teria feito sentido imediato aos dados numa primeira instância. Novamente, devido a falta de espaço não será possível descrever o trabalho de Nardi. Vale a pena dar uma olhada neste livro e ver como outros estudos em IHM foram feitos, tomando Teoria da Atividade como referencial teórico.

Antes de discutir o campo da Sociologia da Tecnologia, gostaria de enfatizar que Teoria da Atividade não é e nem foi tomada como uma rejeição à Ciência Cognitiva, como a£rma Kaptelinin (capítulo 5, Nardi 1997), mas sim uma expansão radical sobre a mesma. Uma das razões que Kaptelinin levanta para a necessidade desta expansão é que um dos aspectos chave nos estudos em IHM deveria ser entender coisas: tecnologia – objetos físicos que mediam a atividade (que envolve usuários). No entanto, Ciência Cognitiva, como Kaptelinin e outros pesquisadores apontam, ignorou e ignora o estudo de artefatos, insistindo sobre representações mentais como enfoque principal de estudo.

4. Sociologia da Tecnologia (ST)

Sociologia da Tecnologia tem também uma trajetória de visões distintas sobre o tratar tecnologia e seus usuários. Por exemplo, a abordagem 'determinismo tecnológico', por exemplo, não leva em consideração nenhuma dimensão social e cultural, por a£rmar que as inovações mais apropriadas sobrevivem e apenas aqueles que se adaptam a tais inovações prosperam (Grint e Woolgar 1997, p. 11). Esta abordagem sustenta que o comportamento humano e até mesmo o curso da história são largamente determinados pela tecnologia, ao invés de ter in¤uência sobre ela. Sendo assim, esta abordagem toma uma visão essencialista radical sobre tecnologia por tratar tecnologia como um desenvolvimento autônomo, que determina organizações sociais e econômicas e relações. Os primeiros sinais de resposta à esta abordagem (Woodward 1965, Freeman 1987) veio a ser um modelo conhecido como 'sistemas sócio-técnicos'. Tal modelo incluiu diferentes elementos para tecnologia, tais como, pessoas, organizações, gênero e outros. Embora esta teoria tenha sido desenvolvida com o objetivo de não tomar uma visão essencialista sobre tecnologia, carrega a premissa implícita que a natureza e a capacidade da tecnologia vão além do mérito de uma análise sociológica. Isto é, nesta teoria a natureza e capacidade da tecnologia são tratadas como dadas, objetivas e não problemáticas. Um conjunto de alternativas à abordagem do determinismo tecnológico, desenvolvido com o rótulo genérico de '*social shaping*', sugerindo que a capacidade da tecnologia é equivalente às circunstâncias políticas de sua produção (Williams e Edge, 1991). Tal abordagem argumenta que análise social deve levar em conta a própria tecnologia. Apesar desta abordagem tomar uma perspectiva anti-essencialista sobre tecnologia, isto é, tecnologia não sendo tratada como dada e não problemática, há uma limitação nos aspectos sociais sobre tecnologia. Dentro desta abordagem, apenas os processos de desenvolvimento e implementação são tratados, causando um subestimar sobre as interpretações dos atores (usuários) e usos da tecnologia. Uma macro-abordagem mais ambiciosa, chamada de 'alinhamentos sócio-técnicos', considera a importância do alinhamento entre tecnologia e sociedade ao invés de enfocar o nível especí£co de desenvolvimento tecnológico ou consumo tecnológico. Hill (1988), por exemplo, argumenta que tecnologia deveria ser tomada como um texto cultural, isto é, um artefato pode apenas ser trazido à vida através de um texto cultural – as regras pelas quais sabemos usar o artefato. Outra abordagem, teoria '*actor-network*' (Latour 1988, Law 1991), tenta ir ao encontro dos requerimentos acima por explicar o desenvolvimento e estabilização das formas de tecnologia. Ao passo que a abordagem alinhamentos sócio-técnicos enfoca os resultados dos alinhamentos entre os aspectos sociais e técnicos, a abordagem *actor-network* enfoca a construção prática destes alinhamentos.

Para superar esta problemática, se deve atribuir a mesma importância aos designers e usuários de tecnologia, o que parece não ser atacado nas abordagens mencionadas acima. Grint e Woolgar (1997) tomaram uma perspectiva de tratar tecnologia como texto, designers como escritores e usuários como leitores deste texto. Eles chamam tal perspectiva ou abordagem de anti-essencialista, pois não há uma tendência, chamada por eles 'tecnicismo', encontrada nas outras abordagens. Desta maneira, Grint e Wolgar argumentam que "o que a máquina é, o que ela fará, o que seus efeitos serão, são o resultado de leituras espec퓩cas do texto ao invés de endereçar diretamente da essência de uma tecnologia não mediada ou auto-exploratória. A capacidade e capabilidade da tecnologia não é nunca transparentemente óbvia e necessariamente requer alguma forma de interpretação; tecnologia não fala por si mesma mas tem que ser falada por..." (Grint e Woolgar 1997, p. 32). Grint e Woolgar não desenvolvem pesquisa na área de educação, mas sim em ambientes de trabalho como organizações e empresas sobre o uso de tecnologias, tão bem quanto o papel do designer, das tecnologias e dos usuários.

Após esta breve descrição sobre algumas das abordagens em ST, pode-se ter uma idéia de como o papel do usuário pode ser visto de maneiras distintas nesta área de pesquisa.

5. Comentários Finais: Uma Pesquisa de Doutorado

Muitos estudos de pesquisa tem sido feitos em Educação Matemática sobre situações de ensino/aprendizagem em um ambiente micromundo. Um bom número deles tomam, implicitamente ou explicitamente, o *software* como dado, não problemático (como por exemplo, Detorri et al., 1995; Sutherland ,1995; Detorri et al., 2001; Capponi e Balacheff, 1989; Hoyles et al., 1991; Malara et al., 1992; Rodgers e Thomlinson, 1993; Sutherland e Rojano, 1993; Balacheff e Sutherland, 1994 e 1999; Laborde, 1995 e muitos outros). Tal posição, que pode ser chamada de essencialista, implica certos resultados £nais preocupantes quando, por exemplo, mostram ou justi£cam o que os professores precisam para alcançar para melhor e mais adequadamente usar tal *software*. Em outras palavras, nesses estudos, 'o software do professor' é igual ao 'software objetivo' menos 'o que ainda está para ser alcançado':

software do professor = software objetivo - o que está ainda para ser alcançado

Em contraste à este quadro, minha pesquisa de doutorado teve dois objetivos centrais. O primeiro, elucidar *que* Cabri e *que* Excel estavam sendo constituídos pelos professores de matemática, isto é, olhar para o que estava sendo dito por eles sobre Cabri e Excel; e o segundo objetivo, investigar até que ponto isto estaria ligado ao uso do Cabri e Excel pelos professores dentro e fora da sala de aula. Aqui, olhar para 'o que está sendo dito' signi£ca olhar quais signi£cados estão sendo produzidos pelos professores para Cabri e Excel de um ponto de vista anti-essencialista (Lins 2000a, Grint e Woolgar 1997). Acredito que tratar software como texto e professores de matemática como leitores de tal texto dá vazão para entender *como* e *porque* um software está sendo tomado e usado em sala de aula – entender a prática do professor. Está embutido nisto uma tentativa de evitar uma visão essencialista sobre software (ou tecnologia em geral) quando analisando seu uso por professores. Em outras palavras, nesta pesquisa 'o software do professor' é para ser entendido como algo diferente do 'software objetivo' menos 'o que ainda está para ser alcançado'. Uma de minhas hipóteses era de que o software que chega em um ambiente de sala de aula não é o software que uma vez foi projetado, desenvolvido, mas sim *um* software: aquele que o professor constituiu. O Cabri e o Excel apresentados em uma sala de aula são um Cabri e um Excel: o Cabri e o Excel do professor. Desta maneira, argumento que o uso de um software para o ensino não está apenas, por exemplo, ligado ao currículo escolar mas fortemente ligado ao que o professor *vê* nele.

Acredito que a maior contribuição que minha pesquisa traz para a comunidade cientí£ca da Educação Matemática é o quadro (referencial) desenvolvido para abordar o uso da tecnologia em Educação Matemática de um ponto de vista anti-essencialista. Inspirada pelo referencial teórico desenvolvido por Woolgar e Grint, na Sociologia da Tecnologia, pude trazer para a nossa área e comunidade cientí£ca de Educação Matemática esta perspectiva, este olhar, para daí podermos entender melhor o uso de tecnologias no ensino/aprendizagem da matemática Ainda, acredito contribuir e informar a área de pesquisa em Formação Inicial e Continuada de Professores, já que este estudo teve como enfoque o uso do Cabri e Excel por professores de matemática correspondente ao segundo ciclo do Ensino Fundamental.

Tal abordagem, uma nova perspectiva de onde se olhar o uso de qualquer tecnologia em Educaçao Matématica, traz a idéia de se tomar designer como autor, software como texto e o professor leitor deste texto. A intenção de tratar tecnologia como texto (neste caso, Cabri e Excel como texto) é a de não mais tomar ou olhar um software como algo dado, não problemático, algo como que objetos já estejam lá, para serem vistos. Caso você não os vê, não os enxerga, você está então em falta, faltando. Ao invés deste modo de pensar, vejo e tomo o software sem essência. Parto do princípio de que não há nada lá, desde que você me diga o que lá está. Ou seja, um texto vem a ser um texto quando signi£cados são produzidos para o mesmo. É neste momento que ele se dá como texto, e não antes disso. É importante mencionar que produção de signi£cados deve ser entendido aqui como processo, e não como algo estático, £xo. Novos signi£cados podem ou serão produzidos para o mesmo objeto. A importância está, no caso desta pesquisa, na consciência do Cabri/Excel do professor a £m de entender *como* e *porque* Cabri e Excel estão sendo tomados e usados em sala de aula como tal.

A pesquisa de doutorado consistiu em quatro estudos de caso: dois professores ingleses com relação ao Excel e outros dois com relação ao Cabri. Devido a falta de espaço neste artigo, questões metodológicas não serão abordadas. Uma discussão sobre um dos estudo de caso com relação ao Excel pode ser encontrada em Lins (2000b). Com relação ao Cabri, um dos (ditos) poderosos aspectos do mesmo é, por exemplo, o modo de arrastar que permite a deformação de £guras, o qual traz dinamismo, onde idéias de dependência e independência podem ser exploradas por meio do estabelecimento de relações entre pontos em £guras geométricas.

Os dois estudos de caso relacionados ao Cabri (Lins, 2001), mostraram que ver e tratar o Cabri como tal não era o caso. O modo de arrastar não tinha nada a ver com o Cabri de Anthony e o Cabri de Camilla na época em que eles foram entrevistados. Isto não implica que nunca o serão. Novos signi£cados podem ou poderão ser produzidos por cada professor para o Cabri, já que produção de signi£cados deve ser entendida como um processo. A questão aqui é a importância de tal consciência sobre a existência do Cabri do professor a £m de entender *como* e *porque* o Cabri está sendo tomado e usado de tal maneira em sala de aula. Estarei discutindo em detalhes dois dos estudos durante o HTEM.

Quanto às contribuições já mencionadas trazidas por esta pesquisa para a comunidade de Educação Matemática, acredito vir a provocar novos debates e novos olhares de como pensar sobre o uso de tecnologia no ensino/aprendizagem de matemática, bem como avaliar o uso dos mesmos por professores, alunos, educadores matemáticos, matemáticos puros e até mesmo os próprios designers, que após terem criado o próprio texto, deixam de ser autores do mesmo, se tornando então leitores.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Luiz Mariano Carvalho e a Victor Giraldo, colegas que sempre me iluminam com discussões frutíferas, por terem me encorajado à submeter este artigo ao II HTEM.

Referências:

Agalianos, A. S.: 1997, *A Cultural Studies Analysis of Logo in Education*. Unpublished PhD thesis. London: Institute of Education.

Balacheff, N.: 1993, 'Arti£cial Intelligence and Real Teaching'. In Keitel, C. e Ruthven, K. (eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*. NATO Series F, Vol. 121, pp. 131-158. Springer Verlag-Berlin.

Bannon, L. J. and Bodlker, S.: 1991, 'Beyond the interface: Encountering artifacts in use'. In J. Carroll (ed.), *Designing Interaction: Psychology at the Human Computer Interface*. Cambridge: Cambridge University Press.

Capponi, B. and Balacheff, N.: 1989, Tableur et calcul algébrique. *Educational Studies in Mathematics*, V. 20, pp. 179-210.

Balacheff, N. and Sutherland, R.: 1994, Epistemological domain of validity of microworlds: the case of LOGO and Cabri-Géomètre. In Lewis, R. and Mendelson, P. (eds.), *Lessons from Learning (A-46).* IFIP - Proceedings of the International Federation for Information Processing, France. Elsevier Science B. V., North Holland.

Dettori, G. *et al.*: 1995, 'An Analysis of the Relationship between Spreadsheet and Algebra'. In Burton, L. and Jaworski, B. (eds.), *Technology in Mathematics Teaching: a bridge between teaching and learning*, pp. 261-274. England: Chartwell-Bratt.

Dettori, G. *et al.*: 2001, 'From Arithmetic to Algebraic Thinking by Using a Spreadsheet'. In Sutherland R. *et al.* (eds.), *Perspectives on School Algebra*, pp. 191-208. Kluwer Academic Publishers.

Freeman, C.: 1987, 'The Case for Technological Determinism'. In Finnegan, R. *et al.* (eds.), *Information Technology: Social Issues*. Milton Keynes: Open University Press.

Grint, K. and Woolgar, S.: 1997, *The Machine at Work: Technology, Work and Organization*. Polity Press.

Hill, S.: 1988, *The Tragedy of Technology: Human Liberation Versus Domination in the Late Twentieth Century*. London: Pluto Press.

Hoyles, C.; Healy, L. and Sutherland, R.: 1991, Patterns of Discussion between Pupil Pairs in Computer and Non-Computer Environments. *Journal of Computer Assisted Learning*, n. 7, pp. 210-228.

Kaptelinin, V.: 1997, 'Activity Theory: Implications for Human-Computer Interaction'. In Nardi B. A. (ed.), *Context and Consciousness: Activity Theory and Human-Computer Interaction*, pp. 103-116. MIT Press.

Laborde, C.: 1995, 'Designing Tasks for Learning Geometry in a Computer-based Environment'. In Burton, L. and Jaworski, B. (eds.), *Technology in Mathematics Teaching and Learning*, pp. 35-68. London: Chartwell-Bratt.

Latour, B.: 1988, 'The Prince for Machines as Well as for Machinations'. In Elliot, B. (ed.), *Technology and Social Process*. Edinburgh: Edinburgh University Press.

Law, J.: 1991, 'Introduction'. In Law, J. (ed.), *A Sociology of Monsters: Essays on Power, Technology and Domination*. London: Routledge.

Lins, B.: 2000a, The Importance of Premises: From an Essentialist to an Anti-Essentialist View of Technology in Mathematics Education. Proceedings of the *BSRLM Day Conference*, V. 20, n. 3, pp. 49-53. Loughborough University, England.

Lins, B.: 2000b, An Anti-Essentialist View of Technology in Mathematics Education: what difference can It make to Mathematics Teacher Education?. Proceedings of the *International Conference on Technology in Mathematics Education* (ICTME), pp 133-139. Lebanese American University. Beirut, Lebanon.

Lins, B.: 2001, Towards an Anti-Essentialist View of Technology in Mathematics Education: The Case of Cabri-Géomètre. Proceedings of the *25th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME 25), Vol.1, p. 338. Utrecht, The Netherlands.

Malara, N.; Pellegrino, C. and Tazzioli, R.: 1992, I fogli elettronici in attività di matematica per gli allievi dagli 11 ai 16 anni. *Pubbl. Comune di Modena*, Italy.

Nardi, B. A. (ed.): 1997, *Context and Consciousness: Activity Theory and Human-Computer Interaction*. MIT Press.

Nardi, B. A.: 1997a, 'Some Re¤ections on the Application of Activity Theory'. In Nardi, B. A. (ed.), *Context and Consciousness: Activity Theory and Human-Computer Interaction*, pp. 235-246. MIT Press.

Papert, S., Watt, D., diSessa, A. and Weir, S.: 1979, *Final Report of the Brookline Logo Project*, Logo Memos 53 e 54, Massachusetts Institute of Tecnology. Cambridge, Mass.

Rodgers, G. and Thomlinson, M.: 1993, 'Spreadsheet Applications in Modelling Problems Based on Partial Differential Equations'. In De Lange *et al.* (eds.), *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications*, pp. 117-129.

Rogers, Y., Bannon, L. and Button, G.: 1993, Organisers of the *INTERCHI'93 Workshop on Rethinking Theoretical Frameworks for HCI*. P.O. Box 7685, 1118 ZK Schiphol Centrum, The Netherlands.

Sutherland, R. and Rojano, T.: 1993, Bridging the gap between non-Algebraic and algebraic approaches to problem solving in Mathematics. Proceedings of the *V International Symposium of Research in Mathematics Education*. Merida, Mexico.

Sutherland, R. and Balacheff, N.: 1999, Didactical Complexity of Computational Environments for the Learning of Mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, V. 4, pp. 1-26.

Williams, R. and Edge, D.: 1991, 'The Social Shaping of Technology: A Review of UK Research Concepts, Findings, Programmes and Centres'. In Dierkes, M. and Hoffman, U. (eds.), *Research on the Social Shaping of Technology in France, Germany, Norway, Sweden, the United Kingdom and the United States*. Berlin: Wissenschaftszentrum Berlin fur Sozialforschung.

Woodward, J.: 1965, *Industrial Organization*. Oxford: Oxford University Press.

Zinchenko, V. P.: 1986, Ergonomics and informatics. *Problems in Philosophy* 7, pp. 53-64.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 257:263
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 30

GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO DE ÓTICA

Carlos Eduardo Aguiar
Departamento de Física Nuclear
Instituto de Física
UFRJ
carlos@if.ufrj.br

Resumo: *Discutimos como os programas de geometria dinâmica podem ser usados para superar algumas di£culdades conceituais freqüentemente encontradas pelos estudantes de ótica geométrica.*

Palavras-chave: *Geometria Dinâmica; Ótica.*

Abstract: *We discuss how dynamic geometry software can help overcoming some conceptual dif£culties frequently met by students of geometrical optics.*

Key words: *Dynamic Geometry; Optics.*

1. Introdução

Programas de geometria dinâmica são “réguas e compassos” virtuais, com os quais objetos geométricos podem ser construídos e manipulados no computador. Esses programas criam ambientes (ou “micromundos”) ricos em possibilidades pedagógicas, onde relações geométricas podem ser exploradas interativamente.

O potencial pedagógico da geometria dinâmica não se restringe ao ensino de geometria. Neste trabalho discutimos como a aprendizagem de um ramo da física, a ótica geométrica, pode ser muito facilitada pelo uso desses programas. A ótica geométrica é uma das áreas da física em que mais diretamente se pode passar de modelos matemáticos a sistemas reais ligados à nossa experiência cotidiana. Ela é também um campo com importantes aplicações práticas, como a fotogra£a, microscópios e telescópios. Apesar disso, as di£culdades que os estudantes encontram no aprendizado ótica geométrica são notórias. Os maiores problemas parecem dizer respeito justamente a como eles conectam conceitos formais aos fenômenos do mundo real (Goldberger & McDermott, 1986, 1987). É neste contexto que um ambiente de geometria dinâmica pode ser de muita utilidade, associando modelos matemáticos abstratos a construções de grande apelo visual. A modelagem de sistemas óticos em ambientes de geometria dinâmica pode dar aos estudantes uma perspectiva nova, mais intuitiva, sobre como os conceitos básicos da ótica geométrica se relacionam com fenômenos reais.

Nas próximas seções ilustraremos com alguns exemplos o quanto a geometria dinâmica pode ser útil no ensino de ótica. As construções que discutiremos foram desenvolvidas com o TABULÆ, mas é fácil adaptá-las a outros programas de geometria dinâmica, como o CABRI ou o GEOMETER’S SKETCHPAD.

2. Formação de Imagem no Espelho Plano

A re¤exão por um espelho plano é bom exemplo de como se pode usar a geometria dinâmica para estudar ótica. A Fig.1 mostra a janela do TABULÆ após a criação de representações de um espelho, um objeto pontual, e um raio luminoso que vai do objeto ao espelho.

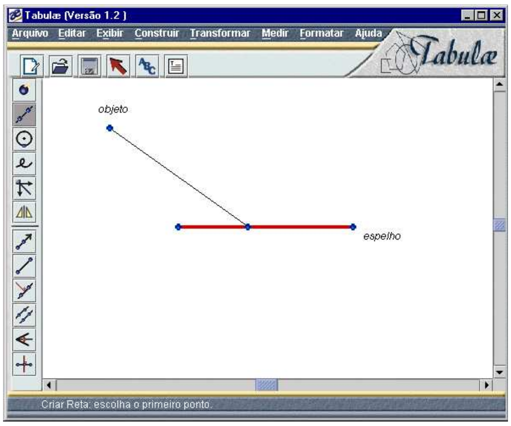


Figura 1

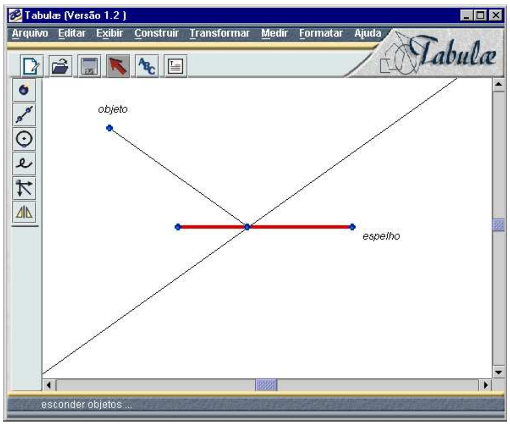


Figura 2

Segundo os princípios da ótica geométrica, o ângulo que o raio re¤etido forma com o espelho é igual ao ângulo de incidência. Com esta relação £ca fácil traçar o raio re¤etido, que está mostrado na Fig.2 juntamente com sua extensão "virtual" para trás do espelho.

O próximo passo é estudar o que acontece com os outros raios que saem do objeto e atingem o espelho. Com as ferramentas de construção de lugar geométrico (*locus*), que quase todos os ambiente de geometria dinâmica possuem, isto pode ser feito rapidamente, com resultados muito instrutivos. A Fig.3 mostra o lugar geométrico ocupado pelos raios incidente e re¤etido (com sua continuação virtual) quando o ponto de incidência percorre o espelho. O notável nesta £gura é a constatação de que todas as continuações virtuais se encontram em um mesmo ponto. Para um observador em frente ao espelho, os raios re¤etidos parecem emanar de uma fonte luminosa pontual situada atrás do espelho – uma imagem do objeto foi formada! Poucas apresentações da ótica geométrica são capazes de ilustrar de maneira tão vívida o conceito de imagem. Mais ainda, no ambiente de geometria dinâmica podemos manipular gra£camente o espelho e o objeto, e estudar o que acontece com a imagem. Na Fig.4 vemos que a imagem acompanha o deslocamento do objeto, £cando em posição simétrica em relação ao espelho.

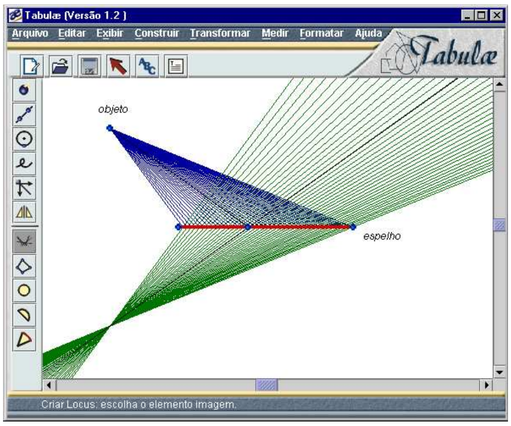


Figura 3

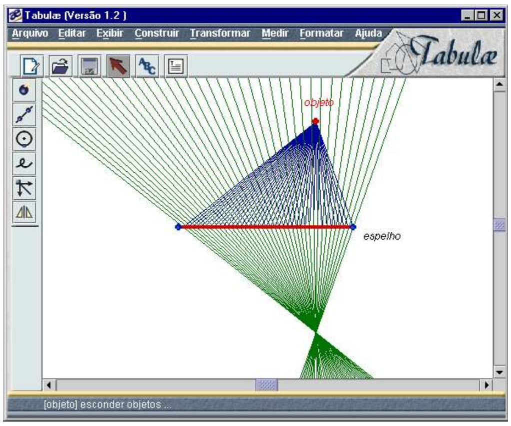


Figura 4

Construções geométricas desse tipo podem ajudar a superar várias di£culdades conceituais comuns entre os estudantes. Por exemplo (Goldberger & McDermott, 1986), cerca de 30% deles entram nos curso de ótica acreditando que a imagem é formada na superfície do espelho. Um número semelhante *sai* do curso a£rmando que a posição da imagem muda quando o observador se move. A construção apresentada nas Figs.3 e 4 mostra claramente que essas concepções são errôneas. Surpreendentemente, 70% dos estudantes aprovados em cursos de ótica crêem que se estiverem frente a um espelho muito pequeno, dando um passo atrás verão mais de seu próprio corpo. Que tal noção "intuitiva" é incompatível com as leis da ótica £ca óbvio a partir da construção mostrada na Fig.5.

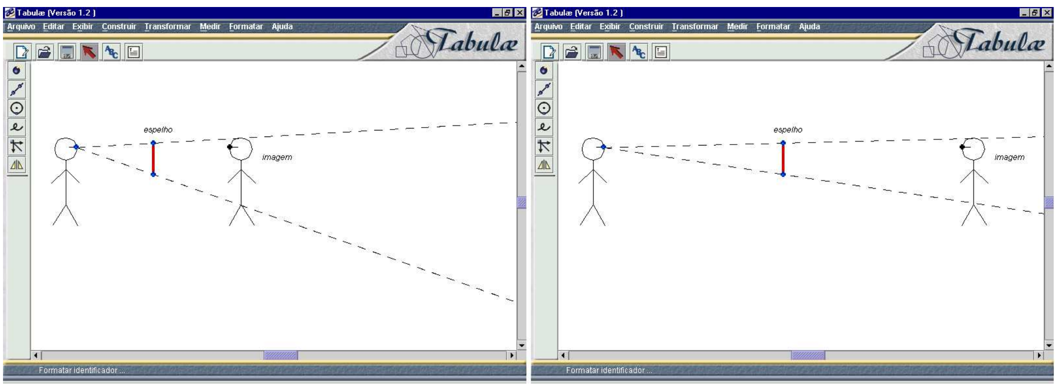


Figura 5

3. Espelhos Esféricos

O espelho esférico é um sistema bem mais complexo que o espelho plano, mas pode ser tratado com a mesma simplicidade nos ambientes de geometria dinâmica. A Fig.6 mostra como um espelho côncavo produz uma imagem real, ao contrário do espelho plano cujas imagens são virtuais. Também diferentemente do espelho plano, nem sempre um espelho esférico produz uma imagem bem de£nida. Isso está ilustrado na Fig.7, que mostra o que ocorre quando o objeto está longe do eixo de simetria do espelho.

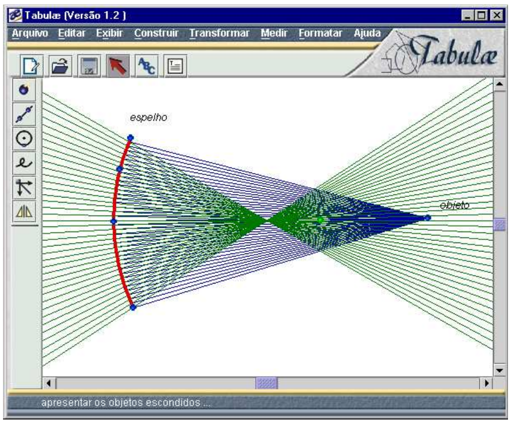


Figura 6

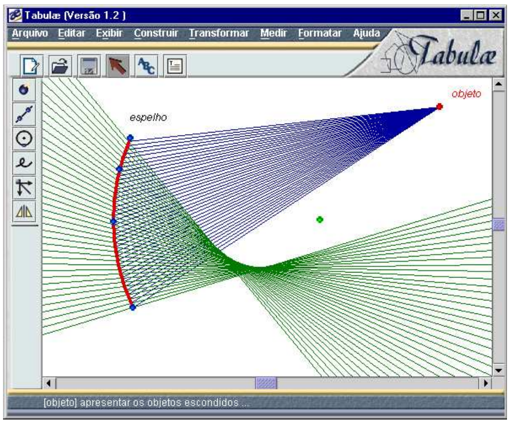


Figura 7

Como a curvatura do espelho pode ser modi£cada dinâmicamente, com uma única construção é possível estudar espelhos côncavos e convexos. A re¤exão por um espelho convexo, obtida com a mesma estrutura geométrica que gerou as £guras acima, está mostrada na Fig.8.

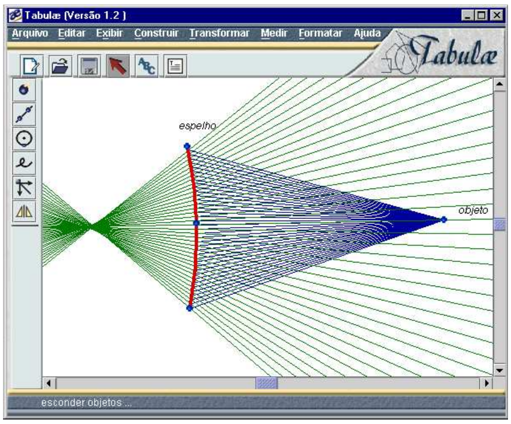


Figura 8

Novamente, muitas di£culdades conceituais relativas a espelhos curvos apresentadas pelos estudantes podem ser reduzidas com a modelagem geométrica desses sistemas óticos. Por exemplo, cerca de 30% dos alunos a£rmam que metade da imagem desaparece se metade do espelho esférico for coberta (Goldberger & McDermott, 1987). Uma simples inspeção das £guras acima mostra que isto não é verdade.

4. Comentários Finais

Esperamos ter mostrado com os exemplos acima o quanto um programa de geometria dinâmica pode ser útil no estudo da ótica geométrica. É claro que os casos tratados aqui não esgotam as possibilidades de aplicação desses programas à ótica. Com a mesma facilidade com que estudamos os espelhos é possível investigar lentes, prismas, o arco-íris, e muito mais. Alguns desses sistemas estão discutidos em (Aguiar, 2003).

É importante ressaltar o caráter interativo e exploratório das construções produzidas nos ambientes de geometria dinâmica - modi£cações nas £guras podem revelar aspectos novos e inesperados, que por sua vez podem ser estudados em maior detalhe com outras construções, e assim por diante. Este tipo de atividade, que poderíamos chamar de modelagem geométrica, certamente teria um impacto muito positivo no ensino da ótica geométrica e de outras áreas da física.

Referências:

AGUIAR, C. E. (2003). Ótica geométrica com o TABULÆ. *Curso ministrado no XV Simpósio Nacional de Ensino de Física*, http://www.if.ufrj.br/∼carlos/geomdin/geomdin.html

GOLDBERG, F.M. & MCDERMOTT, L.M. (1986). Student dif£culties in understanding image formation by a plane mirror. *The Physics Teacher* 24, 472-480.

GOLDBERG, F.M. & MCDERMOTT, L.M. (1987). An investigation of student understanding of the real image formed by a converging lens or concave mirror. *American Journal of Physics* 55, 108-119.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 265:271
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 31

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Gérard E. Grimberg
REHSEIS (CNRS-France) e Liceu Molière-Rio
gerard.emile@terra.com.br

Resumo: A introdução da história da matemática no ensino das noções e dos conceitos matemáticos remete-nos à relação privilegiada que a matemática mantém com o pensamento e a £loso£a ao longo do tempo. As questões levantadas dizem respeito à in¤uência da matemática sobre a £loso£a, ou a da £loso£a sobre a matemática, ou ainda ao desenvolvimento interno da própria matemática. Estes três aspectos coexistem em vários estádios da evolução da matemática.

Traçaremos brevemente alguns eixos de três exemplos signi£cativos. 1) a descoberta dos irracionais que levam à divisão pelos gregos da matemática entre números e grandezas e a reorganização axiomática dos *Elementos*. Tratada por Platão, esta descoberta atravessa a re¤exão do *Menon* e do *Teeteto*. 2) A geometria analítica de Descartes relacionada ao projeto de *mathesis universalis* e ao *Discurso do Método* do £lósofo. 3) O cálculo in£nitesimal de Leibniz com o projeto da *característica universal* e a *Monadologia* do pensador. Nesta perspectiva, a história da matemática aparece como um elemento chave da educação matemática, pois ela põe em jogo o conteúdo cultural e a arte de pensar que a matemática veicula.

Palavras-chave: *História da matemática, Educação matemática, .Filoso£a da matemática, ensino da matemática*

Abstract: The use of History of mathfor teaching mathematicals concepts asks us the question of the privilegiate relation between math and Philosophical thinking. That question includes the in¤uence of math on Philosophy, the in¤uence of Philosophy on maths and the self internal development of math. These three sides exist in various steps of evolution of mathematics. We want to point out three signi£cative examples of that question. 1) The discovering of irrational numbers which brings the

Greek distinction between numbers and quantities and axiomatic reorganization of the *Elements*. The analysis of that problem is an important part of Plato's work *Menon* and of *Theetete.* 2) Analitic geometry of Descartes and Descartes' project of *mathesis universalis* and *Discours de la Méthode*. 3) The in£nitesimal Calculus of Leibniz with his project of *universal characteristics* and his *Monadologie*. In this perspective, the History of math stands up as a crucial part of math education because it involves the cultural signi£cation and art of thinking which mathematics represents.

Key words:*History of mathematics, mathematics teaching,Philosophy of mathematics.*

A introdução da história da matemática no ensino das noções e dos conceitos matemáticos remete-nos à relação privilegiada que a matemática mantém com o pensamento e a £loso£a ao longo do tempo. As questões levantadas dizem respeito à in¤uência da matemática sobre a £loso£a, ou a da £loso£a sobre a matemática, ou ainda ao desenvolvimento interno da própria matemática. Estes três aspectos coexistem em vários estádios da evolução da matemática.

Há alguns anos, os programas de ensino (os programas franceses, mas é também o caso dos programas brasileiros) introduziram explicitamente a história da matemática dentro do ensino da matemática desde o secundário como uma necessidade na transmissão das noções ensinadas. Isso signi£ca uma tarefa nova para a pedagogia da matemática, isto é, qual pode ser o conteúdo deste novo tipo de intervenção. Atualmente, os manuais trazem poucos documentos. E se os programas fazem uma bela declaração de intenção, não indicam o conteúdo que pode implicar tal introdução em um curso do secundário. Elaborar uma metodologia a este respeito representa um trabalho longo e só pode se realizar através de experiências.

Eu vou descrever um tema de intervenção a respeito da questão da unidade da matemática/unidade da ciência que já realizei parcialmente em aulas no último ano do Liceu Molière, Liceu francês do Rio de Janeiro. Esta intervenção envolve três £lósofos (Platão, Descartes e Leibniz) e precisa ser desenvolvida em três etapas ou três momentos do ano. O problema dos irracionais e o *Teeteto* de Platão no início do ano enquanto se trata das seqüências numéricas; o problema da *mathesis universalis* das *Regulae* e a Geometria de Descartes, enquanto se aborda a geometria cartesiana no espaço ou a geometria do plano complexo; a *característica universalis* e o algoritmo diferencial leibniziano dentro do primeiro texto fundador (1684), *Nova Methodus* de Leibniz.

1. *Teeteto* de Platão

Este diálogo envolve três protagonistas, o professor de matemática Teodoro, um dos seus alunos mais brilhantes Teeteto e Sócrates. O problema dos irracionais aparece logo na introdução quando Sócrates pergunta a Teeteto *o que é a ciência ?* Teeteto responde por uma longa enumeração de ciências. Tomando o exemplo da lama, Sócrates mostra então o quanto é ingênua a resposta de Teeteto: a gente pode citar uma in£nidade de tipos de lama sem a£nal entender melhor o que é a lama. O que constitui, aliás, uma distinção bem clara entre uma de£nição por extensão e uma de£nição em compreensão.

A £m de mostrar que ele entendeu bem o exemplo, Teeteto relata a aula de Teodoro que ele assistiu. Teodoro mostrou como dos números de 3 até 17, alguns como 4, 9 e 16 eram quadrados cujo lado é comensurável à unidade e o lado dos outros como 3, 5 etc... não é comensurável a unidade. Depois desta descoberta, os alunos (provavelmente bem dirigido pelo professor – isso não diz Platão) não se contentam com esses exemplos, tentam generalizar e acabam por dar uma classi£cação dos números em duas classes: aqueles que são quadrados de um número comensurável a unidade e os outros... Depois desta ilustração pela matemática do problema de de£nir uma noção, o diálogo vai discutir várias de£nições possíveis do que é a ciência, sem, todavia, chegar a uma resposta de£nitiva.

Do ponto de vista da matemática, o interessante deste relato de um curso de matemática dado há mais de 25 séculos é o encaminhamento da própria matemática que constrói assim as diversas extensões dos conjuntos de números. Como estes conjuntos são in£nitos, é impossível de£ni-los em extensão, mas é necessário encontrar uma de£nição em compreensão. Em termos atuais, os alunos de Teodoro de£nem o conjunto das soluções positivas (nesta época, a noção de número negativo não existe) da equação x^2=n, n sendo inteiro.

No tocante à história do pensamento e da £loso£a, vê-se como a questão da unidade da ciência (o que caracteriza a ciência) toma sua inspiração na matemática e, nesta época, na questão da uni£cação dos números e das grandezas como a diagonal de uma in£nidade de quadrados que não podem ser expressos em termos de números inteiros (tal número é chamado pelos gregos *areton*, isto é, inexpressível). Vê-se também que as questões da matemática ultrapassam a disciplina para se tornar interrogações mais fundamentais o que dá uma resposta forte à pergunta dos alunos (Por que fazer matemática ? Será realmente útil ?): a matemática serve primeiro para *bem* pensar...

Podemos ler com os alunos alguns trechos do Teeteto, em particular as linhas onde Teeteto evoca a aula de matemática sobre os irracionais (146 c-d-e, 147).

2. A *mathesis universalis* e a *Geometria* de Descartes

Nas *Regulae ad directionem ingenii*, Descartes inicia sua procura pela matemática e propõe uma *mathesis universalis* (Regula IV) que deve constituir esta obra e que consiste em respeitar certas regras para pensar direito. Em várias regras, a aplicação da álgebra à geometria, uma das grandes elaborações matemática de Descartes, é tomada, por exemplo, de um pensamento sintético e mostra como a matemática ajuda a representar o real. A ciência aristotélica não era uma, pois cada ciência possuía um gênero e não havia uma ciência dos gêneros. Assim, segundo Aristóteles, a matemática tem dois gêneros distintos, os números, domínio da aritmética, e as grandezas, domínio da geometria. Os dois domínios, do descontinuo e do continuo, não comunicam. A *Geometria* de Descartes e as *Regulae* quebram os gêneros aristotélicos. Esta problemática, aliás, levará Descartes ao projeto de uma física matemática.

Várias idéias das *Regulae* são reformuladas no *Discurso do Método*, que é o prefacio de três obras cienti£cas, a *Geometria*, a *Ótica* e *Dos Meteoros*, e é o manifesto do pensamento moderno.

Quando se trata de ensinar a geometria analítica, é importante mostrar que o seu nascimento acompanha o início do pensamento e da ciência moderna. Na Geometria, Descartes realiza a unidade da matemática de seu tempo. Com efeito, desde os Gregos coexistiram duas disciplinas matemáticas paralelas, a geometria e a aritmética que, com Diophantes e os Árabes, torna-se a álgebra. Descartes faz da álgebra a linguagem da curvas, mesmo se as equações algébricas não podem exprimir o que Descartes denomina curvas *mecânicas*, que são de fato curvas transcendentes. Mas é esta formulação algébrica das curvas que possibilitará o cálculo diferencial e a análise das curvas transcendentes. A obra de Descartes tem outro efeito importante: dar um impulso ao desenvolvimento da álgebra.

Estes aspectos são ressaltados em sala de aula através de uma leitura crítica de trechos das *Regulae* e da Geometria (por exemplo, o início da parte I que trata da constructibilidade dos números e a introdução da parte II, que classi£ca as curvas).

3. A característica universal de Leibniz e o algoritmo diferencial.

O texto fundador do Cálculo diferencial, publicado em 1684, No*va Methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus...Novo método para encontrar os maxima e os minima, assim como as tangentes...*foi recentemente reeditado em Francês (in *Le calcul différentiel*, 1989 Vrin) e apresenta as regras, assim como as primeiras aplicações do algoritmo diferencial por Leibniz. O programa francês do último ano de liceu prevê a introdução da notação leibniziana. No que diz respeito à pedagogia, é interessante, depois de ter tratado a derivação e mostrado a sua e£cácia para determinar as tangentes e as variações de uma função, mostrar como Leibniz aplicava o seu algoritmo diferencial às equações das curvas. O simbolismo leibniziano do cálculo diferencial é logo aplicado em Física. Não tratar este em aula de matemática faria com que o aluno imaginasse que há duas matemáticas, aquela da aula de matemática e outra que deve usar em física.

Neste sentido, o texto de Leibniz mostra como se obtém não só as propriedades das curvas (tangente, extremos) mas também mostra uma demonstração da lei de Snell-Descartes usando o princípio de Fermat. O primeiro texto do cálculo diferencial defende assim a uni£cação da matemática e da física. Leibniz mostra também que o método é universal, isto é, permite analisar tanto as curvas algébricas quantas as transcendentes e assim mostra, (o que representa um passo adiante em relação a Descartes) que o domínio da análise é o estudo de qualquer curva.

Vale lembrar o projeto de Leibniz de uma característica universal, linguagem do pensamento, que permitiria diferenciar o raciocínio verdadeiro do falso e acabar com qualquer polêmica (*em vez de dizer discutamos, diríamos calculemos !*). É preciso também ressaltar a diferença do conceito de in£nito entre Leibniz e Descartes. Segundo este último, a lógica é criação de Deus e, portanto, é contingente. Não se pode operar sobre o in£nito visto que o in£nito é domínio exclusivo de Deus. Para Leibniz, a lógica é necessária e não é criação. Até Deus usa a lógica. Nossa capacidade de pensar logicamente faz-nos participar da essência divina. O calculo diferencial mostra como operar logicamente sobre o in£nito. Se Descartes (como aliás Galileu) representa o início da crítica da matemática e física aristotélica, Leibniz (com Newton) continua este trabalho. Com o seu algoritmo diferencial, ele inaugura um tipo de raciocínio que sai dos quadros da lógica aristotélica e cria as condições da elaboração da mecânica analítica.

Podemos ler e comentar em sala de aula os trechos mais importantes do primeiro texto do cálculo diferencial que comporta doze páginas.

4. Conclusão

Este tipo de intervenção requer um pouco de trabalho de preparação, mas é necessário sob vários aspectos. Em primeiro lugar, não se trata de formar no liceu matemáticos pro£ssionais, mas sim formar futuros cidadãos que entendem as relações existentes entre os domínios do saber. Neste sentido, é necessário ressaltar o quanto as noções mais relevantes ensinadas apareceram na História elaboradas por pensadores que não eram só matemáticos, mas também físicos, £lósofos.

Em segundo lugar, a história da matemática permite ao aluno entender que as noções ensinadas foram concebidas ao longo de um processo lento e que, para entendê-las, é préciso também vários esforços da sua parte.

En£m, este tipo de atividade em sala de aula pode representar para o aluno o recuo necessário para pensar sobre o conteúdo ensinado, re¤exão sem a qual não há realmente compreensão.

Referências

Sobre Platão

Goldschmidt V. [1947], *Les dialogues de Platon*, Paris.
Heidegger M. [2003], *Concepts fondamentaux de la philosophie antique*, Paris.
Philonenko Alexis [1997], *Leçons platoniciennes*, Paris
Platão[2001], *Teeteto*, Belem-Pará.
Szabó Árpad [1977], *Les débuts des mathématiques grecques*, Paris.
Szabó Árpad [2000], *L'aube des mathématiques grecques*, Paris.

Sobre Descartes

Brunschvicg L. [1912] *Les étapes de la philosophie mathématique*, reed. 1993, A. Blanchard, Paris.
Descartes R., Edição Adam C. et Tannery P, em 11 vol. , réed. facsimil. Vrin 1996, (abrev A.T.)
Kobayachi Michio [1993], *La philosophie naturelle de Descartes*.
Vuillemain Jules. [1960], *Mathématique et métaphysique chez Descartes*.

Sobre Leibniz

Belaval Yvon [1960], *Leibniz critique de Descartes*, Paris
[1962] *Leibniz, initiation à sa philosophie*, Paris.
Couturat, L. [1901] *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Paris.
[1903] *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, Paris.
Leibniz [1989], *Le calcul différentiel*, Paris.
Serres Michel [1968], *Le système de Leibniz*, et ses modèles mathématiques Paris.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 273:282
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 32

ENSINO TRADICIONAL VERSUS RECURSOS COMPUTACIONAIS: UMA EXPERIÊNCIA NÃO EXCLUDENTE

Maria Hermínia de Paula Leite Mello
Instituto de Matemática e Estatística
UERJ
mhplmello@ime.uerj.br

Mário Olivero Marques da Silva
Instituto de Matemática
UFF
olivero@mat.uff.br

Resumo: *Este artigo descreve uma experiência realizada na UFF, visando conciliar aspectos do ensino tradicional com a utilização de recursos computacionais no ensino de Cálculo Diferencial e Integral. O objetivo do projeto foi, não somente dinamizar as disciplinas de Cálculo usando novas tecnologias, mas, principalmente, desenvolver no aluno o senso crítico em relação ao uso do computador, mostrando as suas possibilidades, bem como as suas limitações.*

Palavras-chave: *Ensino de Cálculo, Recursos Computacionais, Maple.*

***Abstract*:** *This paper describes an experiment, which was carried out at UFF, aiming to conciliate the aspects of the traditional teaching and the use of computational tools in Differential and Integral Calculus teaching. The objective of this project was to make the Calculus teaching more dynamic by introducing new technologies, as well as, to develop the student's critical sense about the use of computers, showing both their possibilities and its limitations.*

Key words: *Calculus teaching, Computational tools, Maple.*

1. Introdução

Recursos da CAPES destinados aos projetos PROIN (Programa de Apoio à Integração Graduação/ Pós-Graduação) e PRODENGE/PRODINE (Programa de Desenvolvimento das Engenharias/Programa Interdisciplinar em Engenharia – UFF), possibilitaram, em 1998, a instalação de dois laboratórios de informática na Universidade Federal Fluminense, UFF, um para o Curso de Matemática e outro para os Cursos de Engenharia. Um dos programas disponibilizados nesses laboratórios foi o Maple V, cuja licença para uso universitário foi adquirida com verba concedida pela PROPP (Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da UFF). Isso tornou possível a introdução de novas tecnologias no Ensino de Matemática, na Universidade. Um dos projetos pioneiros, na UFF, foi uma introdução ao Maple como uma ferramenta didática para auxiliar a compreensão do conteúdo programático da disciplina de Cálculo I para o Curso de Matemática. Posteriormente, essa experiência foi estendida para a disciplina de Cálculo I oferecida para os Cursos de Engenharia.

A intenção que permeava essa iniciativa era, não somente ilustrar melhor os conceitos teóricos, através da utilização dos recursos grá£cos e da elaboração de cálculos algébricos mais complexos que os programas computacionais matemáticos possibilitam; mas, principalmente, promover uma mudança de metodologia, transformando o conceito tradicional onde o professor, em geral, é o único participante ativo da atividade de ensino, cabendo aos alunos o papel de meros receptores, numa parceria onde tanto mestre como alunos interagissem participando ativamente do desenvolvimento da aula. Na verdade, o professor seria o orientador, atuaria como instigador e moderador do processo de aprendizagem, cabendo aos alunos, a tarefa de propor novas aplicações e soluções, atuando como colaboradores da aula. “Numa aula diferenciada: os usuários ativos são ambos professor e aluno, desenvolvendo projetos,.....” (Baldin, 2002, p.32).

Outro aspecto que considerávamos de grande importância era desmisti£car a idéia de que *o computador é capaz de tudo*. Devido às limitações dos algoritmos empregados nos programas computacionais, esses apresentam de£ciências e limitações nas soluções de alguns problemas matemáticos. São os con¤itos teóricos-computacionais, mencionados na literatura (Giraldo, 2001, conforme citação em Giraldo & Carvalho, 2002), (Heal & Hansen & Rickard,1996). Assim, tínhamos também como objetivo desenvolver nos alunos uma postura crítica em relação ao uso da *máquina*. Se o computador, realmente, pudesse *fazer tudo*, correríamos o risco de *não precisar mais pensar*. Na verdade, o computador executa tudo o que comandamos, mas precisamos saber escolher o que queremos que ele faça e interpretar os resultados que ele nos oferece.

2. Descrição do Ambiente de Gestação do Projeto

Devido à implantação do Projeto CAPES/PROIN, *Qualidade e Integração na Matemática da UFF*, no Instituto de Matemática da UFF, e do Projeto PRODENGE-PRODINE, no Departamento de Matemática Aplicada da UFF, criou-se um ambiente propício para que surgissem novas propostas metodológicas para o ensino das disciplinas de Matemática, utilizando novas tecnologias de ensino. No entanto, não havia uma obrigatoriedade institucional, de que todos os docentes, lotados no Instituto de Matemática, participassem de projetos inovadores. Assim o nosso projeto, intitulado *Introdução ao Maple V, visando o ensino de Cálculo Diferencial e Integral I - funções reais de uma variável real*, se desenvolveu em um ambiente favorável; mas que, devido ao conservadorismo ainda presente nas universidades, deveria motivar o maior número possível de professores, para que estes, com sua participação, viabilizassem o projeto.

Optamos, então, por conciliar o uso do computador como uma ferramenta didática com as aulas teóricas tradicionais, buscando uma interação que mantivesse as principais vantagens de ambas as abordagens metodológicas, possibilitando a inserção dos alunos como agentes ativos do processo de ensino–aprendizagem.

Cabe aqui um comentário a respeito da nossa opção em manter as aulas teóricas. Não era nosso intuito introduzir uma mudança abrupta nas metodologias de ensino que estavam sendo utilizadas, principalmente por acreditarmos que o professor, verdadeiramente motivado, tentará, sempre, tornar suas aulas, mesmo que expositivas, em experiências inovadoras e instigantes, buscando a cumplicidade dos alunos para atingir suas metas. As novas tecnologias devem ser sempre encaradas como instrumentos que o auxiliam nesse percurso. Além disso, uma aula ministrada em um laboratório de informática pode ter o mesmo caráter de uma aula convencional – o professor sendo o único participante ativo. Nesse caso, o professor estaria simplesmente transferindo o local físico da sua exposição oral, da sala de aula convencional para o laboratório. Essa seria a situação mencionada em (Baldin, 2002, p.33) "...o principal usuário da tecnologia é o professor, que ganha satisfação com a melhoria de suas exposições e produção de material didático, e o aluno é um observador passivo do uso da tecnologia". Obviamente, esse não era o objetivo da nossa proposta.

Outro aspecto relevante deve-se ao fato de as disciplinas de Cálculo I serem oferecidas a várias turmas simultaneamente, o que torna obrigatório o trabalho em equipe. Cabe aos formuladores de uma nova proposta de metodologia de ensino demonstrar aos colegas, principalmente aos mais resistentes às mudanças, a praticidade e as vantagens da introdução de inovações. No momento em que os demais professores participantes da equipe certi£cam-se que não existe um antagonismo entre as novas ferramentas didáticas e as aulas expositivas tradicionais, conseguir-se-á, espontaneamente, o aumento progressivo dos docentes envolvidos nas novas propostas metodológicas.

3. Organização Didático – metodológica do Projeto

As disciplinas de Cálculo I, na UFF, tanto para o Curso de Matemática como para os Cursos de Engenharia, tinham uma carga horária de 6h semanais e as turmas eram compostas, em média, por 40 a 45 alunos. Além das aulas teóricas curriculares, o uso dos laboratórios de informática deu-se da seguinte forma:

- O laboratório do projeto PRODENGE-PRODINE (para os alunos dos Cursos de Engenharia) era equipado com 37 micros e o do PROIN (para alunos do Curso de Matemática) com, aproximadamente, 30 micros. Portanto havia, praticamente, um micro disponível para cada aluno da turma.

- O coordenador do projeto e os professores nele engajados disponibilizavam 2h semanais extracurriculares, para atendimento dos alunos no laboratório, onde eram discutidas as tarefas propostas.[1]

- Foi designado um monitor exclusivamente para atendimento no laboratório. Esse monitor recebia, previamente, a orientação do coordenador da disciplina.

- Foram disponibilizadas várias opções de horários de atendimento no laboratório, que era realizado, tanto pelos professores da equipe, como pelo monitor do laboratório.

- Dentro do horário de funcionamento do laboratório, os alunos tinham acesso irrestrito a ele, podendo lá permanecer mesmo sem a presença da equipe envolvida no projeto. Nesse caso, havia um responsável pelo laboratório, designado pelo Instituto ou Departamento.

- Foi elaborado um texto auto-explicativo (Mello&da Silva, 1999), para uso no laboratório. O texto continha um primeiro capítulo que tratava de comandos do MAPLE V, para possibilitar aos alunos a sua operação. O segundo capítulo alertava aos usuários sobre de£ciências do programa, para que fosse despertada a noção dos limites da tecnologia, fazendo com que os alunos re¤etissem que o *cérebro ainda é a melhor máquina.* Nos capítulos posteriores, eram propostas tarefas sobre conteúdos matemáticos relevantes da disciplina. Algumas delas já apresentavam soluções, a título de exemplos, outras eram propostas para serem resolvidas e, £nalmente, durante as aulas e discussões no laboratório, os alunos eram incentivados a formular suas próprias questões. Com isso o aluno passaria a ser o construtor do seu próprio conhecimento.

---

[1]Essas horas extracurriculares eram oferecidas voluntariamente pelos professores e não constavam da carga horária estabelecida pela UFF.

- Algumas aulas curriculares eram ministradas no laboratório: as 2 ou 3 aulas iniciais do curso, para que o aluno pudesse se familiarizar com o computador e com o programa Maple e, a critério do professor, quando as ferramentas computacionais, como a utilização de animação, colaboravam para a aquisição dos conceitos matemáticos de uma forma mais e£ciente. Apesar de parte do curso ter sido ministrado em sala de aula, a possibilidade que foi aberta aos alunos de utilizarem o laboratório de forma irrestrita, somada ao atendimento extracurricular oferecido pelos professores e monitor, bem como o texto auto-explicativo, fez com que, durante as aulas expositivas, os alunos passassem a trazer as di£culdades e/ou descobertas obtidas durante a elaboração de suas tarefas práticas. Isso enriquecia sobremaneira o ambiente em sala de aula, pois ocorria a troca de informações e experiências com os professores, tornando as aulas curriculares mais dinâmicas e interativas.

- Quanto à avaliação, por exigência curricular da Universidade, mantivemos as 3 provas escritas previstas para a disciplina. Procuramos ¤exibilizar essa exigência curricular, propondo aos alunos que, dentre as tarefas desenvolvidas no laboratório, 3 delas seriam avaliadas, compondo a nota £nal do curso. Como esse era um projeto piloto, atribuiu-se um peso 8 e um peso 2, respectivamente, às provas escritas e aos trabalhos desenvolvidos no laboratório. As tarefas poderiam ser feitas em grupos de, aproximadamente 3 alunos, o que possibilitava a aquisição da capacidade de trabalho em equipe.

4. Observações ao Final do Projeto

Apesar de parecer que o computador é, hoje em dia, utilizado por larga parcela da população, isto não se con£rma na prática. Pudemos observar, durante o curso, que grande parte dos alunos, principalmente os oriundos de camadas de menor poder aquisitivo, ainda demonstravam grande intimidação frente aos computadores. Nossa primeira tarefa era mostrar que o computador é uma ferramenta amigável e de fácil manuseio. Acreditamos que com a popularização do uso do computador, seja em escolas do Estado e Município ou em ONGs voltadas a projetos educacionais, esse quadro, já em um futuro próximo, mude de forma drástica.

Outra observação, de certa forma surpreendente, visto que o curso foi ministrado para alunos do terceiro grau, foi o fato de que, para boa parte dos alunos, o domínio de uma nova tecnologia e a busca de um aprofundamento do conhecimento através de atividades extracurriculares, deveria, obrigatoriamente, ter algum tipo de pontuação (nota). Para o aluno, qualquer esforço que exceda ao mínimo estabelecido no programa curricular tem que ter uma recompensa objetiva, que o aluno vê como sendo a nota. Torna-se um grande desa£o para os professores, modi£car esse entendimento dos alunos, demonstrando que o domínio de qualquer nova tecnologia e aprofundamento dos seus conhecimentos intelectuais implicará, no futuro, em maior valorização e realização pro£ssional.

Dentre os trabalhos desenvolvidos no projeto, os mais bem sucedidos foram àqueles relacionados com *funções implícitas.* As metas desejadas nessa etapa eram que o aluno:

- adquirisse o conceito de função de£nida implicitamente por uma equação, bem como a compreensão do Teorema da Função Implícita;

- aprendesse a derivar implicitamente.

Para o primeiro item, os recursos computacionais, foram extremamente úteis. Em um primeiro exercício, os alunos esboçavam o grá£co de uma equação F(x,y) = 0 dada . A seguir, era proposto que fosse determinado o <u>maior</u> domínio D, onde a equação F(x,y) = 0 de£nisse y como uma função de x, por exemplo, de modo que a função y = f(x) satis£zesse alguma condição dada, como f(x_0) = y_0, sendo que F(x_0,y_0) =0 e fosse diferenciável no interior do domínio D. A £m de encontrar a solução, era necessário determinar os pontos onde o grá£co da equação F(x,y) = 0 admitisse reta tangente vertical. Alguns alunos custavam a entender por que deveriam adotar esse procedimento. Na verdade, não haviam compreendido ainda o Teorema da Função Implícita. Com os recursos grá£cos, bem como algébricos, que o programa permite, juntamente com exercícios que induziam o raciocínio do aluno, £nalmente o conceito matemático era apreendido.

Já para a derivada implícita, o uso do Maple não se mostrou e£ciente; pois, uma vez digitado o comando *implicitdiff (F(x,y)=0,....)*, a fórmula £nal *da derivada implícita* era, automaticamente, mostrada na tela. Foi veri£cado que alguns alunos não sabiam como obter essa fórmula por eles mesmos. Nesse caso, as aulas curriculares do curso se mostravam mais proveitosas. Mesmo assim, o programa mostrou-se útil, uma vez que os alunos podiam comparar os resultados obtidos por seus próprios esforços com aqueles obtidos no laboratório.

Esse tipo de trabalho mostrava, claramente, a necessidade de conjugarmos os recursos computacionais com as aulas expositivas/exercícios normais do curso.

Um exemplo desse tipo de trabalho é dado a seguir:

Exemplo:

- Esboce o grá£co da equação: $y^5 - y - x^2 = -1$. Esse grá£co é dado na £gura 1.

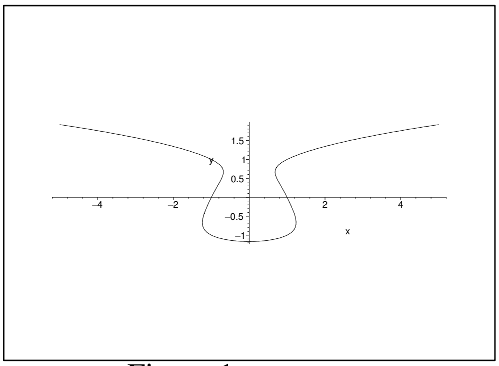


Figura 1

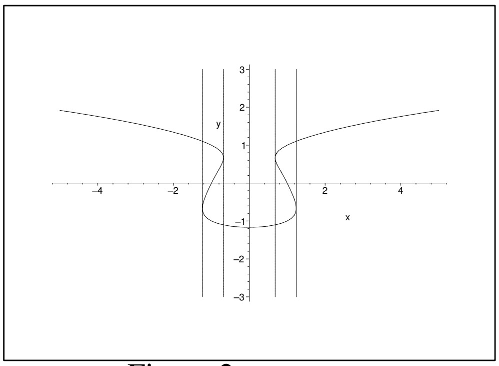


Figura 2

- Determine a interseção desse grá£co com o eixo y.

Essa interseção é o ponto (0, r), onde r é aproximadamente igual a -1,167303978. A £m de obtermos esse valor, executamos os seguintes comandos no Maple:

> **solve(y^5-y=-1,y);**

$$\mathrm{RootOf}(\_Z^5 - \_Z + 1,\ index = 1),\ \mathrm{RootOf}(\_Z^5 - \_Z + 1,\ index = 2),\ \mathrm{RootOf}(\_Z^5 - \_Z + 1,\ index = 3),\ \mathrm{RootOf}(\_Z^5 - \_Z + 1,\ index = 4),\ \mathrm{RootOf}(\_Z^5 - \_Z + 1,\ index = 5)$$

> **evalf(%,10);**

$$0.7648844336 + 0.3524715460\,I,\ -0.1812324445 + 1.083954101\,I,\ -1.167303978,\ -0.1812324445 - 1.083954101\,I,\ 0.7648844336 - 0.3524715460\,I$$

Notemos que o programa dá uma aproximação de todas as raízes, inclusive as complexas, da equação $y^5 - y = -1$.

É usual o aluno estranhar o fato de que, ao digitar o comando *solve*, aparece *RootOf(...)*. Isso é devido à natureza das raízes e à programação do Maple, que procura exibir as raízes da equação de modo preciso. Já o comando *evalf*, exibe os valores aproximados das raízes.

- Determinar o maior domínio possível, D, onde a equação $y^5 - y - x^2 = -1$ de£ne

uma função diferenciável y = f(x), tal que f(0) = r e obtenha o grá£co da função y = f(x).

Os cálculos executados no Maple, fornecem as seguintes retas verticais ao grá£co da equação: x = 0.6819147718, x = - 0.6819147718, x = 1.238948039, x = - 1.238948039.

Veri£camos que D é o intervalo aberto (-s,s) , onde s é aproximadamente igual a 0.6819147718. O grá£co da função y = f(x) pode ser obtido esboçando-se o grá£co da equação dada, como na £gura 1, considerando-se uma restrição para a variação de x.

A partir do momento que o aluno entende a razão de se determinar as retas tangentes verticais, ele já não necessita esboçar, separadamente, o grá£co da função y = f(x). Na própria £gura 2, ele consegue visualizar todas as funções diferenciáveis, y = f(x), com maior domínio possível, que são de£nidas implicitamente pela equação dada.

Observamos que se pode aproveitar o exercício para recordar raízes de polinômios e outros conceitos matemáticos como o Teorema do Valor Intermediário.

5. Perspectivas e Desdobramentos

Essa experiência não ocasionou uma mudança institucional no programa pedagógico do ensino de Cálculo I na UFF, nem isso era o que esperávamos, mas sua in¤uência tem sido importante e continuada. O material produzido pelo projeto continua a ser usado por algumas equipes de Cálculo I e algumas adaptações têm sido feitas pelos professores, observando novas di£culdades que se apresentam em sala de aula. Após a primeira experiência com essa nova metodologia, todos os participantes da experiência, sejam alunos ou professores, passam a incorporar o uso de ferramentas computacionais ao processo de aprendizagem.

Apesar de já estar disponível no mercado a versão Maple 9 (www.mapleapps.com), as versões disponíveis nos laboratórios da UFF, o Maple 5 e 6, são plenamente satisfatórias. Além disso, o texto usado no projeto pode ser adaptado a outros programas utilizados no ensino de Cálculo, como o MPP, um *software* livre, (http://archives.math.utk.edu), ou o MuPAD, não oneroso para uso acadêmico, (www.mupad.de), que estão disponíveis na rede. Isso permite a continuidade da experiência, assim como a sua aplicação em outros estabelecimentos de ensino.

6. Conclusão

Apesar de vários projetos pioneiros nas universidades utilizando recursos computacionais no Ensino da Matemática terem alcançado êxito e obtido boa aceitação por parte de seus participantes, muitas IES ainda não incorporaram as novas tecnologias às suas práticas metodológicas. Isso se deve, em parte, à resistência de alguns professores em buscar cursos de aperfeiçoamento que permitam sua formação continuada.

Uma maneira desses docentes se aprimorarem seria a sua participação nesses projetos de ensino inovadores.

Outro problema encontrado, nos laboratórios das Universidades Públicas, é a falta de manutenção e atualização de equipamentos, o que impossibilita, muitas vezes, a implantação de diversos projetos.

A experiência do trabalho desenvolvido na UFF deixou claro não serem excludentes o ensino nos moldes tradicional e o uso de novas tecnologias. O professor não deve temê-las e sim descobrir como melhor utilizá-las. É sempre bom lembrar que, mesmo com a utilização das mesmas máquinas e dos mesmos programas, as aulas de dois professores serão sempre diferentes e a diferença será o fator humano.

Agradecimentos:

Nossos agradecimentos às professoras Marlene Dieguez Fernandez, chefe do Departamento de Matemática Aplicada da UFF, responsável pelo laboratório PRODENGE-PRODINE, Suely Druck, coordenadora do projeto PROIN, na UFF, pelo apoio dado a essa iniciativa e à professora Cristiane R. Argento, integrante da equipe do projeto, por suas sugestões.

Referências:

BALDIN, Y. Y. (2002) Utilizações Diferenciadas de Recursos Computacionais no Ensino de Matemática (CAS, DGS e Calculadoras Grá£cas), Anais do 1^o IHTEM, Editora IME-UERJ, Rio de Janeiro, (1), 29-38.

CARVALHO, L. M. & GIRALDO, V. (2002) Algumas Ferramentas Teóricas para a Pesquisa em Ensino de Matemática, Anais do 1^o HTEM, Editora IME-UERJ, Rio de Janeiro, (1), 89-104.

HEAL, K. M. & HANSEN, M. I. & RICKARD, K. M. (1996) Maple V Learning Guide, Waterloo Maple Inc., Spring-Verlag, New York.

MELLO, M. H. P. L. & da SILVA, M. O. M. (1999) Introdução ao Maple V, visando o ensino de Cálculo Diferencial e Integral I - funções reais de uma variável real, Projeto CAPES/PROIN, Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática, Niterói, RJ.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 283:293
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 33

A ROBÓTICA EDUCACIONAL CONSTRUINDO CONCEITOS CIENTÍFICOS NO ENSINO MÉDIO: ESTRATÉGIAS DE ALGUNS PROFESSORES

Fred Santos
Universidade Estácio de Sá
fredsantos@bol.com.br

Monica Rabello de Castro
Universidade Estácio de Sá
rabellomonica@uol.com.br

Resumo: *O objetivo deste trabalho foi investigar professores do Ensino Médio usando a Robótica como ambiente tecnológico de aprendizagem na construção do conhecimento cientí£co, especi£camente conceitos da cinemática na confecção de tabelas e grá£cos da função do 1º grau. A análise baseou-se no Modelo da Estratégia Argumentativa e mostrou que, embora a Robótica promova um discurso inovador, as atividades preparadas neste ambiente reproduziram práticas análogas às da aula tradicional.*

Palavras-chave: *1. Robótica Educacional; 2. Construção de Conceitos Cientí£cos; 3. Ambientes Tecnológicos de Aprendizagem; 4. Atividade; 5. Estratégia Argumentativa.*

Abstract: *The aim of this work was investigate high school teachers using the Robotic way as a technology environment of learning for scienti£c knowledge construction speci£cally cinematic concepts for plotting graphics and tables of £rst degree functions. The analysis was based on the Argumentative Strategy Model and corroborate that the activities done in this environment reproduced analogous practices of the traditional classes, although the Robotic way propitiates a new discourse.*

Key words: *1. Educational Robotic; 2. Scienti£c concepts construction; 3. Technology environment of learning; 4. Activity; 5. Argumentative Strategy.*

1. Introdução

O uso de uma tecnologia em sala de aula pode supor apenas atos repetitivos, ou seja, pode reproduzir posturas tradicionais de ensino/aprendizagem em que o professor se limita a usar uma tecnologia para ilustrar sua aula expositiva. Uma outra possibilidade é ver o uso de tecnologias em sala de aula criando diferentes ambientes de interação entre alunos e professores, onde a tecnologia se integra a cada indivíduo como uma extensão de seu próprio corpo, que interage frente a uma situação. No segundo caso, a tecnologia pode ser vista como uma forma de expressão de aprendizagem (Hoyles e Healy, 1999; Noss, Hoyles e Pozzi, 1999; Noss, 2002; Frant et alii, 2003), que permite a cada indivíduo falar sobre o que se está fazendo e, no caso de atividades escolares envolvendo o ensino das ciências, constituir objetos e explicar fatos cientí£cos. Nesse caso, o uso de tecnologia oferece a possibilidade de construção de uma forma diferente de constituir objetos e de relacionar os objetos constituídos a outros já conhecidos. Este tipo de ambiente não pode ser caracterizado simplesmente como ruim ou bom, facilitador ou não da aprendizagem, pois o conhecimento assim produzido pertence a um domínio semântico e epistemológico diferente, o que vem sendo investigado sobretudo pelas chamadas ciências cognitivas.

Uma das principais contribuições das ciências cognitivas da atualidade consiste em destacar o papel da linguagem cotidiana na construção das matemáticas, linguagem aqui entendida como um sistema complexo incluindo gestos, entonações ou qualquer outro signo lingüístico. Desde que Lakoff e Johnson ressaltaram a importância do pensamento metafórico, entendido como a interpretação de um campo de experiências em termos de outro já conhecido (Lakoff e Johnson, 1991), o estudo dos aspectos da linguagem referentes às manifestações não orais na formação dos conceitos matemáticos passou a ser um tema que cada vez mais ganha relevância na investigação da aprendizagem das matemáticas (c.f. Font, 2001, Acevedo, Font e Gimenez, 2002, Lakoff e Núñez, 1998 e 2000, Núñez, 2000, Núñez e Lakoff, 1998, Van Dormolen, 1991).

Este estudo envolve situações do planejamento escolar de alguns professores do ensino médio e as aulas decorrentes desses planejamentos em ambientes tecnológicos de aprendizagem. Quando falamos de ambientes tecnológicos estamos nos referindo a atividades propostas especi£camente com o uso de recursos tecnológicos entendidos como forma de expressão, tal como caracterizados por Solomon e Nemirovsky (Solomon e Nemirovsky 2000; Nemirovsky, 1998). O principal interesse reside em compreender como professores organizam a sequência de assuntos a serem tratados com os alunos, quais conceitos privilegiam, como eles os relacionam no planejamento de suas aulas e como efetivamente implementam seu planejamento, quando incentivados a trabalhar com recursos tecnológicos. Especi£camente, este estudo investiga o uso da Robótica como ambiente tecnológico de aprendizagem através de um estudo comparativo entre duas situações: situação em que o professor planeja suas aulas sem recursos tecnológicos, situação em que o professor planeja suas aulas incentivado a utilizar a robótica e ferramentas computacionais.

Os professores escolhidos não tinham experiência anterior com a robótica em sala de aula. Por este motivo, foram treinados especi£camente para participar deste experimento. No treinamento, além de aprenderem a trabalhar com a robótica, participaram de debates sobre as possibilidades desta vir a ser um motivador para o trabalho cooperativo.

2. O Trabalho Cooperativo com a Robótica produzindo conceitos cientí£cos

A so£sticação das novas tecnologias acarretou maior complexidade em seu uso e na natureza dos problemas a serem resolvidos. A utilização intensiva dessas tecnologias fez emergir a necessidade de novas formas de trabalho e a demanda por "novas" estratégias intelectuais (Levy 1993). O trabalho cooperativo tem sido uma das formas para enfrentar as complexidades das novas tecnologias. A Robótica Educacional oferece aos aprendizes a possibilidade de desenvolver em grupo um projeto comum e as tarefas podem ser divididas e organizadas com o auxílio do educador, exercitando desta forma o trabalho cooperativo (Papert, 1994).

No caso especí£co da Robótica Educacional como ambiente tecnológico de aprendizagem, consideramos três momentos. O primeiro é a manipulação. Neste momento, o aluno aprende conceitos importantes sobre como construir garras pinças e manipuladores para pegar levantar ou empurrar objetos. Também recebe noções rudimentares de simulação de "tato" visto que o robô precisa ser dotado de alguma sensibilidade para não esmagar os objetos manipulados. Essa simulação de tato também é conhecida como "feedback" ou retroalimentação e, permite que um robô manipule ovos sem quebrá-los. Outro momento é chamado propulsão, trata-se do estudo de formas de deslocamento de um robô. Neste esforço, criamos robôs sobre rodas, lagartas, pernas e outros meios não convencionais de movimentação. É um momento fascinante onde somente a imaginação pode limitar a quantidade de soluções dadas a um determinado problema. Finalmente o último momento é relativo ao desenvolvimento de programas para controle de comportamento robótico (behavior).

A informática e outras tecnologias correlatas podem gerar novas motivações e formas de colaboração entre usuários. As atividades que usam a Robótica (Santos 2000), tem sido planejadas de modo que as turmas sejam divididas em equipes e cada equipe desenvolva um projeto. Simultaneamente as equipes montam seus robôs num trabalho cooperativo onde desenvolvem o espírito de equipe. Os projetos básicos são montados a partir de roteiros fornecidos pelo educador. Esses roteiros exigem raciocínio lógico para o seu entendimento e, em função do nível proporcional e crescente de complexidade, levam o aluno a trabalhar de forma organizada para poder concluir a tarefa.

Estas preocupações nos levaram às seguintes questões: Que estratégias o professor engendra em seu planejamento escolar para a construção de conceitos cientí£cos utilizando Robótica Educacional? Que signi£cados são produzidos por professores para os conceitos cientí£cos da cinemática quando planejam atividades utilizando Robótica Educacional? Em quais aspectos a Robótica Educacional modi£ca o planejamento das atividades escolares e os signi£cados atribuídos aos conceitos da cinemática pelo professor?

A aprendizagem de conceitos cientí£cos vem sendo objeto de inúmeras pesquisas em Educação. Muitos estudos realizados, sobretudo, na última década (*cf.*, por exemplo, em Da Rocha Falcão – 1995/2000, Brito e Da Rocha Falcão – 1997, Meira – 1996, Lins e Gimenez – 1997, Attorps – 2003, Lima 1999, Lerman 1998) apontam a aprendizagem dos conceitos como um processo complexo e so£sticado. Além disso, a crença de que a aprendizagem dos fatos e fenômenos cientí£cos tem por base a aquisição de conceitos é bastante forte entre professores (*cf.* por exemplo, Fainguelernt 1994, Fischbein 1994, Lima, 1999 Maia, 2000). Em muitos estudos (*cf*, por exemplo, Sztajn 1998, Healy e Hoyles, 2000), é bastante recorrente a idéia de que a aprendizagem de conceitos e fatos cientí£cos difere de outras por estar sob o domínio da lógica formal, ou seja, o indivíduo não se serve para esta aprendizagem dos mesmos processos que utiliza no quotidiano para pensar e decidir. Contudo, a própria noção de conceito vem causando di£culdades para a compreensão dos processos envolvidos na aprendizagem.

Se hoje a maioria de pesquisadores e professores acredita que o conceito não se limita à de£nição, sendo algo mais abrangente do que esta, ao mesmo tempo, não é clara a maneira como seria possível veri£car seu aprendizado. Sobretudo nos livros escolares, a noção de conceito parece identi£cada com a de de£nição. Alguns autores, seguindo a linha russa da teoria da atividade de Leontiev preferem trabalhar com a noção de objeto ou de atividade ao invés de tematizar a noção de conceito (Lins e Gimenez, 1997). Outros autores (c.f., por exemplo, Fainguelernt-1994, Fischbein-1994) relacionam conceito e representação da seguinte maneira: conceito e representação são coisas distintas, sendo as diferentes representações uma espécie de atributo do conceito. Ao mesmo tempo, a representação também se constituiria numa via de acesso ao conceito, ou seja, através do trabalho e da exploração de diferentes representações, o aprendiz adquiriria o conceito. Nesse sentido, a representação estaria associada à forma enquanto o conceito estaria ligado ao conteúdo (idéia), defendendo a dicotomia do dentro e fora, sobretudo que a representação seria a ação de externar algo interno da mente do sujeito que busca entender um conceito também externo a este sujeito.

Indicadores a que chegamos até aqui, no entanto, contrapõem-se a tal pressuposto. Apesar de existir a possibilidade de, em determinadas situações especí£cas, restringir-se o uso de um conceito, amarrando-o em de£nições com maior ou menor grau de precisão, não existe uma única maneira de se fazer isto e, muito menos, uma maneira que seja a correta. Por um lado, há uma gama de possibilidades para se fazer tal restrição que depende do tipo de uso que se faça de tal conceito. Por outro lado, para que possa haver interação no interior de determinado grupo social, é preciso que alguns signi£cados para os conceitos utilizados sejam compartilhados por este grupo.

Falar em aquisição de conceito pressupõe, portanto, uma signi£cação especí£ca à qual o sujeito deveria chegar. Isto nos parece, do ponto de vista pedagógico, inadequado. Não por considerar que tal signi£cação seja desprezível, o que, evidentemente, ela não é, mas por desconsiderar e, muitas vezes, desquali£car outros signi£cados que poderiam ser ou que são efetivamente produzidos ao longo do processo. Deste modo, voltamos nossa atenção para aquilo que, muitas vezes, é deixado de lado ao longo do processo pedagógico, ao invés de nos preocuparmos em identi£car um caminho que leve aos signi£cados mais comumente esperados, em termos de aprendizagem de conceitos cientí£cos. A questão "O que é um conceito?" deve ser substituída por outra de maior poder explicativo, onde o que está em jogo são os usos concretos, práticos e que constituem, em cada contexto especí£co, o conceito em questão.

O trabalho de identi£car signi£cados comuns, atribuídos a um determinado conceito, vem sendo realizado por pesquisadores que se ocupam do estudo de processos argumentativos (c.f., por exemplo, Van Dormolen, 1991; Acevedo, Font e Gimenez, 2002; Hoyles e Healy, 1999). Este campo de pesquisa tem como objeto de estudo os chamados saberes cotidianos e visa investigar como se constituem tais saberes. Acreditamos, que a teoria da argumentação possa trazer elementos signi£cativos, que nos permitam descrever como se estabelecem algumas possibilidades de uso de um conceito cientí£co, aquilo que torna certos usos/signi£cados mais freqüentes que outros, e ainda, que tipos de articulações podem ser estabelecidas entre estes diferentes usos. Questões como estas nos levaram a investigar até que ponto ambientes tecnológicos de aprendizagem determinam o modo como se lida com conceitos cientí£cos e se os signi£cados produzidos determinam a maneira como são pensadas as atividades envolvendo esses conceitos.

É importante deixar claro que não estamos interessados em propor nenhum tipo de estratégia ou caminho que leve o aluno à aquisição de um dado conceito, ou a concluir uma de£nição rigorosa para este. O que nos interessa investigar é o processo de produção de signi£cados para o conceito pelo professor quando planeja suas atividades escolares. A de£nição de um conceito cientí£co, qualquer que seja ela, é uma das diferentes possibilidades de signi£cação do conceito. Pretendemos veri£car a existência de outras crenças, para além da de£nição, como estas aparecem no momento em que professores planejam suas aulas.

Trabalhamos com a concepção de que construir um conceito é produzir signi£cados para ele e que, ao longo deste processo, o sujeito irá interagir com diferentes demandas, que servirão de base para a constituição de um repertório, cada vez mais amplo, de signi£cados para o conceito. Trata-se de um processo dinâmico, pois a todo instante, o sujeito tem acesso a novas demandas, o que pode levá-lo a produzir novos signi£cados. Para a análise dos aspectos envolvidos na elaboração do planejamento escolar em diferentes ambientes tecnológicos de aprendizagem, optamos por utilizar, como ferramenta de análise, o Modelo da Estratégia Argumentativa, uma vez que nosso interesse está voltado para a dinâmica destes processos.

3. Metodologia

Conceitos, mesmo os cientí£cos, são construídos com a linguagem ambígua do cotidiano. O Modelo da Estratégia Argumentativa (Castro et alii, 2001) foi desenvolvido visando à compreensão aspectos dinâmicos dos processos de ensino/aprendizagem e é baseado na Teoria da Argumentação. Estamos tratando aqui da argumentação que entra em cena nos diálogos do cotidiano, sempre que alguém quer convencer a um outro ou a si mesmo de alguma coisa. A premissa básica é o fato de que desenvolvemos formas de argumentar que se tornam e£cazes porque são compartilhadas por um grupo de pessoas e só são e£cazes para esse grupo de pessoas.

As ações pedagógicas que nos interessam caracterizam-se essencialmente como situações de diálogo onde o locutor tenta convencer a outrem, de que o caminho que escolheu para desenvolver uma determinada atividade é o melhor. A argumentação visa produzir efeitos sobre um outro e não tem como £nalidade única à adesão intelectual, mais freqüentemente ela visa incitar à ação.

Quem argumenta está dirigindo seu discurso a alguém, com alguma intenção. Para convencer alguém é preciso levar em conta suas convicções, ou seja, antecipar as reações do interlocutor. Para isso, o locutor levanta hipóteses sobre o que seu interlocutor acredita e aceita como verdadeiro. Nesse sentido, quando nos referimos à retórica de um discurso, estamos falando de aspectos do discurso necessários à argumentação. A retórica, nesse caso, não é uma peça decorativa, mas o essencial da argumentação. A retórica do discurso do educador (Castro, 1997) constitui-se das escolhas nas quais ele se engaja para desenvolver seu raciocínio argumentativo.

A análise baseada no modelo Estratégia Argumentativa vai estudar processos discursivos, relacionando o como se diz, com o que se diz e o porque se diz. A Estratégia Argumentativa é a maneira pela qual descrevemos o engendrar de argumentos durante uma atividade. Atividade é entendida aqui como um processo no qual um indivíduo se engaja e que dá orientação à suas ações e ao seu pensamento. Uma atividade é caracterizada por uma seqüência do diálogo escolhida por conter dados relevantes da questão para a qual o locutor dirige sua argumentação. A análise estratégica busca o que dá inteligibilidade e organização ao discurso do locutor. Parte-se do fato de que a fala tem sempre uma £nalidade. É claro que ele não é livre para falar o que quiser, existem regras e normas que devem ser levadas em consideração sem o qual a fala será taxada como inadequada pelos interlocutores.

A análise da estratégia argumentativa consiste em um trabalho de reconstrução de argumentos. Para isso é necessário escrever esquematicamente qual é o argumento que está sendo usado pelo orador através de enunciados simples que o resumam. A montagem de cada passo do argumento parte da identi£cação e da avaliação da regra de inferência que dá origem à tese. Mas, para compreender uma enunciação, não é su£ciente avaliar o contexto em que o discurso tem lugar e do qual faz parte. Tem-se ainda que compreender a função da enunciação no próprio argumento. A interpretação da argumentação requer toda informação necessária para que se torne possível a representação do argumento no quadro do modelo interrogativo escolhido. Portanto, procuramos compreender como é que a intenção do locutor determina suas escolhas, ou seja, como é que a questão principal para ele determinou a escolha de questões pequenas (questões operatórias) por meio das quais a questão principal se efetiva. Os enunciados são traduzidos numa seqüência de perguntas-respostas e é a coerência dessa seqüência que nos permite compreender e avaliar um argumento. Busca-se aquilo que dá inteligibilidade e organização a fala do locutor.

A construção da Estratégia Argumentativa relaciona os argumentos utilizados pelo locutor de forma a compor uma totalidade coerente. Cada elemento da Estratégia Argumentativa construída deve estar localizado em relação à totalidade, isto é, sua posição no quadro explicativo deve ser justi£cada. Supõe-se que cada elemento está ali porque não poderia deixar de estar, por algum motivo, motivo esse que explica a necessidade de sua existência na composição £nal da Estratégia Argumentativa. As interpretações só são feitas a partir da composição £nal.

A partir da composição do *corpus*, a análise centra-se na reconstrução das estratégias argumentativas que caracterizaram os diversos momentos do diálogo. Para isto, seguimos os seguintes passos: reconstrução de seqüências coerentes de raciocínios; preenchimento dos espaços implícitos; identi£cação dos signi£cados relevantes que foram produzidos; caracterização dos argumentos através de esquemas; interpretação destes esquemas.

Por £m, segue-se a montagem de uma questão em direção à qual os argumentos parecem convergir, tendo como passo inicial para a interpretação do argumento a construção do tema em torno do qual a argumentação se desenvolve.

4. Descrição do Estudo

O campo de investigação foi um colégio estadual do Rio de Janeiro, onde foram gravadas em vídeo entrevistas com quatro professores, duas reuniões dos mesmos para o planejamento de atividades com alunos do 1^o ano e uma destas atividades na qual a observação foi feita para veri£car como o professor implementou seu planejamento. As estratégias de cada professor foram confrontadas com sua performance na atividade realizada com os alunos. As entrevistas individuais foram feitas antes das reuniões em conjunto e logo após a atividade. Interessou-nos provocar um ambiente de debate para que discordâncias de planejamento fossem discutidas por eles.

Os sujeitos da pesquisa, portanto, foram os quatro professores de Física que atualmente lecionam cinemática para turmas de primeira série. Em reunião preliminar com os professores, conversamos sobre o ensino da cinemática abordando os conceitos básicos de movimento, repouso, referencial, trajetória, velocidade, função horária e a utilização de desenhos pelo professor como meio de ilustrar suas aulas. Esta reunião foi gravada em vídeo e o diálogo resultante foi transcrito. O episódio deste estudo que iremos relatar diz respeito ao planejamento dos quatro professores em conjunto e à uma única atividade proposta aos 21 alunos da turma de um dos professores. Um dos outros professores ofereceu-se para participar desta aula, embora não fosse sua turma.

Em uma segunda reunião, foram discutidas as possibilidades que o equipamento de robótica permitiria incrementar em experimentos relacionados à cinemática. Após algumas adaptações para se fazer um robô mover-se com velocidades distintas em cada passada, um dos professores sugeriu construir uma pista sobre uma mesa onde poderia colocar varias faixas pretas feitas com £ta isolante para que fossem percebidas pelo sensor de luminosidade do robô para que este emitisse um sinal luminoso que serviria de guia para que os alunos pressionassem o cronômetro de forma a construir uma tabela espaço x tempo com a qual poderiam construir um grá£co.

A estratégia sugerida é que o robô móvel fosse dotado de um sistema que lhe permitisse acender uma lâmpada toda vez que passasse sobre uma das faixas pretas colocadas no chão. Desta forma, os alunos participantes da experiência poderiam ir anotando os instantes correspondentes e assim teriam os elementos necessários à construção do grá£co. Poderiam ainda variar a velocidade do robô por um dos meios possíveis de comandar e então repetir a experiência quantas vezes fosse necessário. O ideal é que se pudessem fazer as mesmas medições em três ou quatro velocidades diferentes para permitir a generalização dos conceitos que serão relacionados.

A atividade foi realizada com a participação de um grupo de alunos voluntários, onde o equipamento de robótica foi disponibilizado para que dois dos professores propusessem as atividades aos alunos.

Após a atividade, foram feitas entrevistas com os professores, primeiro em grupo e depois individualmente, visando perceber alguma alteração na fala dos professores sobre os conceitos envolvidos e colhendo impressões sobre a validade deste tipo de atividade e ainda colhendo sugestões para aperfeiçoar a prática empregada.

5. Resultados Preliminares

Os resultados mostraram que, embora a Robótica motive os professores e os faça produzir um discurso inovador, as atividades preparadas neste ambiente tendem a reproduzir as atitudes do professor quando em aula expositiva. Na reunião em que prepararam a atividade a ser realizada com os alunos, os professores preocuparam-se em estimular a participação efetiva dos alunos, em preparar esquemas de colaboração de modo que todos os alunos interagissem com o ambiente. No entanto, no momento de realização da atividade, praticamente não aparecem falas dos alunos, a estratégia dos professores foi explicar durante todo o tempo o que cada um deveria fazer. Além disso, foram sempre eles, os professores, que tomam iniciativa de mudar o rumo da atividade ou fazer sugestões. Aos alunos restou apenas seguir o comando de seus mestres. O experimento se assemelhou mais a uma mera ilustração dos conceitos teóricos tratados anteriormente. Os grá£cos foram construídos segundo orientação dos professores que ressaltaram aspectos relativos à relação entre a inclinação da reta e a velocidade do robô.

Na reunião posterior à atividade, no entanto, houve enorme preocupação com a participação dos alunos. Um dos professores, que atualmente leciona também informática, propôs como estratégia usar computadores na elaboração dos grá£cos.

Desta forma, foi proposta nova estratégia para a elaboração de uma nova atividade em que a dinâmica da tarefa, por sugestão baseada na prática com a Robótica do pesquisador, teria as seguintes etapas: dois grupos de quatro alunos entre os quais seriam divididas as seguintes funções: operador do robô, cronometrista, apontador, operador do computador. O apontador seria o responsável por registrar as informações fornecidas pelo cronometrista e que serão necessárias para a confecção dos grá£cos. O operador do computador construiria o grá£co no Excel a partir de um modelo prede£nido pelos professores com as informações provenientes da atividade, fornecidas pelo apontador. Esta nova estratégia ainda não foi implementada.

As situações de debate entre eles, mais do que o ambiente, portanto, favoreceram o aparecimento de alguns aspectos interativos no planejamento de novas atividades para os alunos.

As estratégias argumentativas dos quatro professores envolvidos mostraram algumas diferenças nos signi£cados produzidos para os conceitos da cinemática, bem como o valor atribuído a eles no planejamento escolar. Os conceitos de referencial e de repouso, por exemplo, que estão omissos em dois dos planejamentos anteriores à atividade, aparecem como fundamentais nos quatro planejamentos após a atividade. O conceito de velocidade, que só aparece em sua versão escalar no planejamento anterior à atividade, aparece como grandeza vetorial após o planejamento. Interessante observar que o conceito de velocidade anteriormente apareceu fortemente associado ao coe£ciente angular de uma função de primeiro grau, porém, na experiência, havia um tempo em que o robô não andava em velocidade constante, o que fez com que os professores pensassem em outros signi£cados para a velocidade. Na reformulação do planejamento, os professores resgataram alguns signi£cados dinâmicos para a velocidade. Os demais conceitos apareceram com algumas modi£cações menos signi£cativas.

Referências:

ATTORPS, Iiris. (2003) – Teachers' images of the 'equations' concept – Proceedings of CELME 17.

ACEVEDO, A.; FONT, V.; GIMÉNEZ, J. (2002) - Phenomena related with the use of metaphors, the case of the graph of functions. *Proceedings of the CIEAEM54* (en prensa).

BRITO LIMA, A.P. e DA ROCHA FALCÃO, J.T. (1997) - Early development of algebraic representation among 6-13 year-old children: the importance of didactic contract. XXIth International Conference for the Psychology of Mathematics Education PME-21), vol. 2, pp. 201-208, Lahti (Finlândia).

GODINO, J D.; BATANERO, C. (1994) - Signi£cado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14, 3, 325-355.

CASTRO, M. R. (1997) - Retóricas da rua: educador, criança e diálogo. Rio de Janeiro. USU Ed. Universitária: Amais Livraria e Editora.

CASTRO, M. R., FRANT, J. B. & KINDEL, D. S. (2001) - Estratégia argumentativa: um modelo para a pesquisa de sala de aula. Rio de Janeiro. *ANAIS do X ENDIPE.*

DA ROCHA FALCÃO, J.T. (1995) - A case study of algebraic scaffolding: from balance scale to algebraic notation. Proceedings of the XIXth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol. 2. pp. 66-73. Recife (Brazil).

DA ROCHA FALCÃO, J.T. , LIMA, A.P.B., e outros. (2000)- A didactic sequence for the introduction of algebraic activity in early elementary school. IN: 24^{th} International Meeting of Psychology of Mathematics Education (PME), Hiroshima-Japão, Proceedings, vol. 2, pp.209-216.

FAINGUELERNT, Estela Kauffmann, (1994) - Representação do Conhecimento em Matemática: Transformações no Plano – Translação e Simetria - in: *Bolema*, ano 9, especial 3, p 1-13, UNESP, Rio Claro.

FISCHBEIN, E. (1994) - Intuition in science and Mathematics: an educational approach- Kluwer Academic Publishers, 2a ed, Dordrecht.

FONT, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de grá£cas. El caso de la parábola. *EMA*, 6, 2, 180-200.

FRANT, J., CASTRO, M.R., and ARAUJO, J. (2000). Cabri: a Formação e o Desenvolvimento Pro£ssional de Professores de Matemática. Proceedings of the Cabriworld Congress. PUC-SP.

FRANT, B. F., DALLANESE, C. & outros (2003) – Prótese ou Ferramenta: Um olhar sobre o uso de tecnologia. In: Anais do II SIPEM, Santos.

HOYLES, C. e HEALY, L. (1999) - Linking informal argumentation with formal proof through computer-integrated teaching experiments. - Proceedings of the PME 23, Haifa.

IBARRA, A.; MORMANN, T. (1997) Representaciones en la ciencia. De la invariancia estructural a la signi£catividad pragmática. Barcelona: Ediciones del bronce.

LAKOFF, G. Y NÚÑEZ, R. (1998) Conceptual metaphor in mathematics. En J.P. Koenig (ed) Discourse and Cognition: Bridging the Gap, (pp. 219-237). Stanford: CSLI/Cambridge.

LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. (2000). Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books.

LERMAN, S. (1998) - A moment in the zoom of a lens: towards a discursive psychology of mathematics teaching and learning. PME 22 Stellenbosch, South Africa.

LÉVY, P. (1993) As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro, Ed. 34.

LIMA, Flávio Moraes (1999) - Função, Representação Social e Produção de Signi£cado: Um encontro possível? – Rio de Janeiro, dissertação de Mestrado em Educação Matemática da USU.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J. (1997) - Perspectiva em Aritmética e Álgebra para o século XXI - São Paulo, Papirus Editora.

MAIA, L. S. L. (2000) -A teoria dos campos conceituais: um novo olhar sobre a formação Boletim da Gepem, v.36.

MEIRA, L. (1996) - Atividade algébrica e produção de signi£cados em matemática: Um estudo de caso. M.G. Dias e A. Spinillo (Eds.), *Tópicos em Psicologia Cognitiva (pp.168-192)*. Recife: Editora Universitária da UFPE.

NEMIROVSKY, R. (1998) - Symbol-use, fusion, and logical necssity: on the signi£cance of children's graphing - Proceedings of the ME 22, Stellenbosch.

NOSS, R., HOYLES, C. e POZZI, S. (1999) - This patient should be dead! Or: How can the study of mathematics in work advance our understanding of mathematical meaning-making in general? - Proceedings of the PME 23, Haifa.

NOSS, R. (2002) - Mathematical Epistemologies at work - Proceedings of the PME 26, Norwich.

PAPERT. S. (1994) A Máquina das Crianças: Repensando a Escola na Era da Informática. Porto Alegre: Artes Médicas.

SANTOS, F. (2000) Robótica Educacional com LEGO e ROBOLAB. Rio de Janeiro: Universidade do Estado do Rio de Janeiro / Anais do IV COINFE – IV Congresso Estadual de Informática na Educação.

SANTOS, F. & BASTOS, S. (2001) Apontando Semelhanças entre as Robóticas Educacional e Industrial, Rio de Janeiro: Universidade do Estado do Rio de Janeiro / Anais do V COINFE – V Congresso Estadual de Informática na Educação.

SOLOMON, J e NEMIROVSKY, R. (2000). Taking a second look. Proceedings of the PME 24. Hiroshima.

SZTAJN, P. (1998) - Buscando um per£l da população: quais as crenças dos professores de matemática? - *Zetetike*, v.6, n.10, p.87-103,.

VAN DORMOLEN, J. (1991). Metaphors Mediating the Teaching and Understanding of Mathematics, en A. J. Bishop & S. Melling Olsen (eds.): *Knowledge: Its Growth*

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 295:301
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 34

REPRESENTAÇÕES E INTERPRETAÇÕES DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

Edvaldo Lima da Silva
Faculdade de Ciências
Pós-graduação em Educação para a Ciência
UNESP
edvaldo@fc.unesp.br

Aguinaldo Robinson de Souza
Faculdade de Ciências
Departamento de Química
UNESP
arobinso@fc.unesp.br

Resumo: *As impossibilidades de representação de funções de uma variável complexa através da atribuição exclusiva de posição e da associação entre variáveis e dimensões são tratadas. Sugestões já utilizadas em estudos de fenômenos físicos são implementadas num software educativo de nome F(C): Funções complexas. As associações entre cores e posições permitem que representação de funções de uma variável complexa possa ser visualizada sem a necessidade de divisão de suas partes.*

Palavras-chave: *Software Educativo, Funções Complexas.*

Abstract: *Impossibilities of associations between variables and dimensions (positions) to represent Functions of one Complex Variable are remarked in this work. Suggestions already used on physics phenomenal are implemented in a software called F(C): Funções Complexas. When we use colors in combination with positions, the necessity of share functions of one complex variable in parts (real and imaginary part) to analyze it by graphical representations is not required.*

Key words: *Educational Software, Complex Functions.*

1. Cores e Números Complexos: Uma Associação Proposital

Diante da sociedade tecnológica em que vivemos, a limitação do uso de papel e lápis para a expressão do pensamento é uma restrição que não faz sentido. Na Matemática, por critérios de elegância, prefere-se o mais simples, o mais lógico e o mais direto. Os critérios de validação do conhecimento matemático estão estritamente ligados à forma de uso das ferramentas aceitáveis, que até então parecem ser a escrita tradicional e o pensamento lógico-dedutivo.

Os computadores atuais permitem a utilização de sons, imagens, vídeos e cálculos rápidos e precisos. Para esse trabalho, destacaremos a utilização de imagens e processamento fornecidos pelo uso da tecnologia informática.

No universo das cores, partindo de três cores básicas (vermelho, verde e azul) podemos obter uma in£nidade de outras, faltando apenas o preto para representar a ausência total de cores. De acordo com a intensidade de cada cor básica, podemos obter uma nova cor através de misturas destas. Por exemplo, para se obter a cor amarela na sua intensidade máxima, precisamos do vermelho e do verde em suas intensidades máximas também. Para obter o magenta em certa intensidade, misturamos o azul e o vermelho na mesma intensidade ao qual queremos obtê-lo.

Assim, podemos obter uma in£nidade de cores a partir de combinações desde que admitimos as variações em cada cor básica como estando em intervalos reais de intensidade.

Imaginemos uma distribuição da cor vermelha no intervalo real $[0, 1]$. Para o extremo inferior, associamos à tonalidade mínima e para o extremo superior, o vermelho em sua intensidade máxima. Repetindo essa distribuição para o verde e azul podemos montar um sistema de coordenadas que represente uma determinada composição. Assim, podemos utilizar um sistema do tipo (R, G, B) para representar as porções de cores do vermelho, verde e azul nessa ordem. Desse modo, estaremos trabalhando com o conjunto de pontos de uma região cúbica do espaço que, em termos teóricos, suporta in£nitas ternas (x, y, z) (Thaller, 2000). No entanto, para representações grá£cas utilizaremos um número limitado de cores, onde cada componente pode assumir 256 tonalidades diferentes, uma vez que a visão humana é limitada.

A representação geométrica do conjunto dos números complexos é dada Plano Complexo, em que cada ponto do plano (a, b) é associado ao número complexo $a + bi$ (Ávila, 2000).

Uma associação entre cores e posições do Plano Complexo pode ser obtida desde que seja possível uma relação biunívoca entre cor e ponto. Thaller (2000) apresenta uma distribuição de cores proposital para a representação de funções de uma variável complexa, que estamos utilizando nesse trabalho.

Essa distribuição de cores pelo sistema HLS permite que cada cor visualizada re-

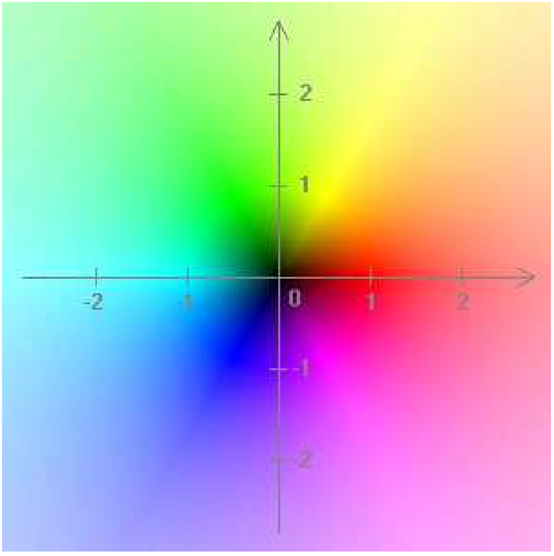


Figura 1: Associação entre Plano Complexo e cores pelo sistema HLS.

presente um único ponto no plano, ou seja, um único número complexo. Assim, ao utilizar esse sistema de distribuição de cores no plano, cada número complexo pode ser identi£cado por uma tonalidade de cor, dispensando posições relativas ao plano. Dessa forma, um número complexo, ora representado por posição (duas dimensões reais) passa a ser distinguido por tonalidade de cor (sem dimensão real).

2. Funções Complexas

Em se tratando de funções com variáveis complexas, as facilidades de interpretação de propriedades e comportamentos de funções reais através da geometria ($\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$) não podem ser aproveitadas, em sua totalidade, para análises de funções complexas. Isso ocorre devido ao fato de as funções complexas serem de£nidas a partir de $\mathbf{C}^2$, ou seja, funções de uma variável complexa, ao qual cada variável complexa é composta de duas variáveis reais (parte real e parte imaginária).

Dada a função de uma variável complexa $f(z) = w$, temos z um número complexo pertencente ao conjunto domínio (**D**) e w, também um número complexo, pertencente ao conjunto imagem (**I**) da função w. Como z e w são números complexos e suas representações são $z = z_1 + z_2 i$ e $w = w_1 + w_2 i$, estamos trabalhando com as variáveis reais z_1, z_2, w_1 e w_2, ou seja, teríamos que conhecer uma forma de representação grá£ca para quatro variáveis reais. A noção de dimensão que temos formado é limitada e abrange representações de até três variáveis reais (tridimensional), ou uma real e outra complexa. Assim, a associação, normalmente utilizada para representações de

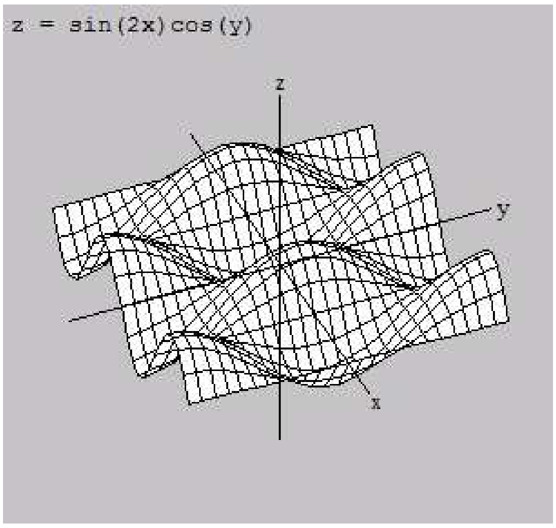


Figura 2: Grá£co de uma função real representada no espaço pelo atributo posição.

funções reais, entre variáveis e dimensões não é possível para que se possa representar inteiramente a função complexa

Costuma-se utilizar as funções reais de£nidas pelas partes real (*u(x, y)* = x_1) e imaginária (*v(x, y)*= y_1) da função complexa (Churchill, 1978), onde em cada parte temos a utilização de uma variável complexa (x, y) e outra real (x_1 para $u(x, y)$ ou y_1 para $v(x, y)$). A função, então, pode ser representada geometricamente através de suas partes pois cada função da parte trabalhará com apenas três variáveis reais, o que não contempla a interpretação da função na sua totalidade. A interpretação geométrica é deixada de lado uma vez que o estudo de funções de£nidas em **C** não é restrito ao uso de uma única variável complexa, estudam-se funções de várias variáveis complexas. Nesse aspecto, as manipulações algébricas ganham maior evidência por não apresentar tais limitações.

3. Dimensões, Cores e Variáveis

Quando Descartes enunciou os princípios da geometria cartesiana, grande foi a sua contribuição decorrente da associação entre álgebra e geometria (Geometria Analítica) (Boyer, 1996). A relação entre variáveis e dimensões foi muito importante para o estudo de funções reais de até três variáveis reais, uma vez que a idéia principal cartesiana é a da extensão (Struik, 1997).

No entanto, a representação cartesiana, amplamente utilizada, tem suas limitações. A começar pela associação entre variáveis e dimensões, não permitindo outros relacionamentos que as variáveis de uma equação possam assumir enquanto representações geométricas. Para problemas que envolvam quatro ou mais variáveis, as representações geométricas £cam comprometidas pela falta de eixos (dimensões) aos quais as variáveis normalmente são associadas.

Depois, essa mesma representação admite apenas o atributo posição como característica da função, ou seja, analisa-se o grá£co de dada função pela disposição de seus pontos.

Reconhecendo a necessidade da interpretação geométrica para o estudo de funções, maneiras de como conceber dimensões, ou melhor, de como relacionar dimensões a variáveis são repensadas. Para que possamos representar funções que necessitem de quatro ou mais variáveis reais (estamos admitindo as variáveis complexas como duplas e as reais como simples), apropriaremos da idéia de utilização de cores como atributos relevantes nas representações grá£cas das funções complexas. Assim como a não exclusividade da associação entre variáveis e dimensões. Associaremos cores às variáveis, além de dimensões (Thaller, 2000).

4. Representações de Funções de uma Variável Complexa através de software

Ao utilizarmos planos coloridos (domínio de cores), as posições e cores de cada ponto podem representar quatro variáveis reais (Lundmark, 2003). Isso é extremamente pertinente para estudos de representações grá£cas de funções de uma variável complexa. Ao se ter de£nido o mapa do plano complexo com um sistema de cores adequado (que permite a distinção dos números complexos), lemos um grá£co desse tipo da seguinte forma: posições para elementos do domínio e cores para elementos da imagem da função (Silva e Souza 2003a). Isto é, de£nida a função $f(z) = w$, com $z = a + bi$ e $w = c + di$, z será representado pela posição no plano (a, b) e w como o atributo cor deste ponto (a posição (c, d) no mapa do plano complexo)

Nesse sentido, o software *F(C): Funções Complexa*s está sendo desenvolvido pelos autores desse trabalho e está vinculado ao Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência[1] da Faculdade de Ciências (UNESP, Bauru).

A característica do software *F(C): Funções Complexas* é gerar grá£cos que possam representar funções de uma variável complexa a partir da de£nição do Mapa do Plano Complexo. Assim é possível analisar e interpretar cores dispostas em posições relativas do plano como sendo representações £eis ao comportamento de funções complexas.

É possível, também, a análise de famílias de funções de uma variável complexa, ou seja, veri£car as alterações da representação ao se trabalhar a variação de coe£cientes

[1] http://www.fc.unesp.br/pos

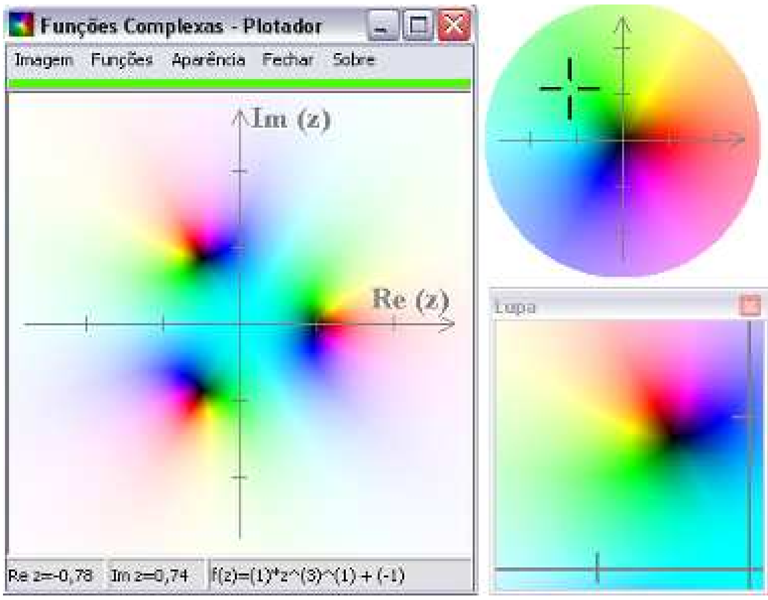


Figura 3: Grá£co de uma função real representada no espaço pelo atributo posição.

especí£cos da função. Assim, os atributos coe£cientes ganham mais sentido ao serem trabalhados algebricamente. Esta funcionalidade é apresentada pelo software através de representações em vídeo.

Alguns exemplos de grá£cos de funções de uma variável complexa, bem como versões do software, referências, estudos de caso e matéria instrucional podem ser obtidos em http://wwwp.fc.unesp.br/∼edvaldo.

Referências:

ÁVILA, G. (2000) Variáveis Complexas e Aplicações, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Cientí£cos, 1-74.

BIGGUS, J. (2003) Sketching the History of Hypercomplex Numbers, http://history.hyperjeff.net/hypercomplex.html, Março.

BOYER, C. B. (1996) História da Matemática, São Paulo, Edgard Blücher.

CHURCHILL, R. V. (1978) Variáveis Complexas e suas Aplicações, São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1-61.

CONWAY, J. B. (1978) Functions of one Complex Variable, New York, Springer-Verlag, 1-10.

LUNDMARK, H. (2003) Visualizing complex analytic functions using domain coloring, http://www.mai.liu.se/∼halun/complex/complex.html, Março.

NEEDHAM, TRISTAN. (2000) Visual Complex Analysis. New York, Claredon Press.

SILVA, E. L. E SOUZA, A. R. (2003a) Desenvolvimento de Software para Representação de Funções de uma Variável Complexa Utilizando Recursos de Cores. XXVI CNMAC (Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional), IBILCE/UNESP.

SILVA, E. L. E SOUZA, A. R. (2003b) Software for Functions of one Complex Variable Representations: Graphics using Colors. XVI SIBGRAPI (Simpósio Brasileiro de Computação Grá£ca e Processamento de Imagem), IME/USP.

STRUIK, D. J. (1997) História Concisa das Matemáticas, Lisboa, Ciência Aberta Gradiva.

THALLER, B. (2000) Visual Quantum Mechanics, New York, Springer-Verlag, 1-14.

WEISSTEIN, E. W. (2003) Complex Number, http://mathworld.wolfram.com/ComplexNumber.html, Março.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 303:310
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 35

ANÁLISE DE FUNÇÕES ELEMENTARES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXAS ATRAVÉS DO SOFTWARE F(C)

Edvaldo Lima da Silva
Faculdade de Ciências
Pós-graduação em Educação para a Ciência
UNESP
edvaldo@fc.unesp.br

Aguinaldo Robinson de Souza
Faculdade de Ciências
Departamento de Química
UNESP
arobinso@fc.unesp.br

Resumo: *Introduzimos os estudos de algumas funções elementares utilizando o sistema de Domínio de Cores HLS para representação de funções de uma variável complexa através do software F(C): Funções Complexas. O Mapa do Plano Complexo é expresso de modo a permitir interpretações grá£cas em funções dos tipos: parte real, imaginária pura e modular. Algumas variações de coe£cientes também são apresentadas de modo a facilitar o estudo em se tratando de variações (famílias).*

Palavras-chave: *Software Educativo, Funções Complexas, Funções Elementares.*

Abstract: *We present some elementary functions studies using HLS Color Domain System to represent functions of one complex variable with F(C): Funções Complexas. The Complex Plane Map is designed to allow graphic interpretations of some kind of functions: real part, pure imaginary and modulus of z. Some variations of coef£cients are explained to make family of functions studies easy.*

Key words: *Educational Software, Complex Functions, Elementary Functions.*

1. Introdução

Neste trabalho propomos uma apresentação de representações de algumas funções elementares de uma variável complexa utilizando o recurso de domínio de cores. As plotagens são feitas através do software *F(C): Funções Complexas* e interpretadas segundo o sistema de cores HLS (Thaller, 2000). Tal software está em desenvolvimento no Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência (http://www.fc.unesp.br/pos) sob a responsabilidade dos autores deste trabalho.

Este estudo se restringe a abordagens visuais das seguintes funções: parte real, imaginária pura e modular. Algumas variações de coe£cientes especí£cos de cada tipo de função serão, na medida do possível, analisadas frente a modi£cações grá£cas.

2. Mapa do Plano Complexo (f(z) = z)

Este é o Mapa do Plano Complexo onde cada cor é associada a uma posição no plano. A partir dessa de£nição, o software *F(C): Funções Complexas* representa todas as outras funções de uma variável complexa. É o mapa de cores para a geração de novos grá£cos. Dada uma função, as posições se referirão aos elementos do conjunto domínio desta função. O atributo cor, de cada posição, se referirá aos elementos do conjunto imagem. Assim, a leitura do grá£co é feita pela posição de tonalidades ou porções de cores na representação da função com leituras do conjunto imagem pelo Mapa de£nido.

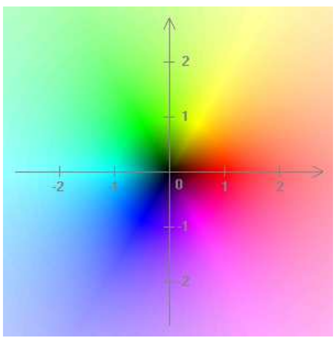


Figura 1: $f(z) = Re(z)$. Mapa do Plano Complexo pelo sistema de cores HLS

Esse mapa é imprescindível para se realizar leituras provenientes de plotagens desses grá£cos de funções de uma variável complexa nesse sistema, pois é a partir dele que as cores ganham signi£cado (Silva e Souza, 2003a).

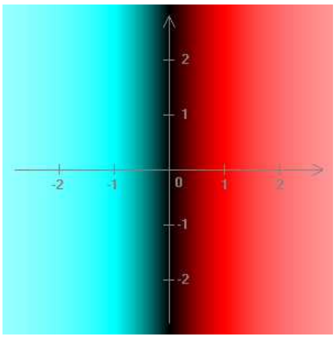


Figura 2: Grá£co da Função Parte Real

3. Função Parte Real (*f(a + bi) = a*)

A característica fundamental desta função é a de apresentar uma repetição de cores na direção vertical. Isso se deve ao fato de, nesta função especí£ca, não importar os valores que a parte imaginária da função possa adquirir, uma vez que apenas a parte real é levada em consideração. Isto é, dada uma posição do grá£co, associamos essa posição ao elemento do domínio (*a* + *bi*) e aplicamos a função (*f(a* + *bi)* = *a*) para saber a cor a ser atribuída (posição $(a, 0)$ no Mapa). Nessa última passagem, o elemento do conjunto imagem (*f(a* + *bi*) deve ser associado a uma cor determinada no Mapa do Plano Complexo.

Ao acrescentarmos um coe£ciente multiplicativo à função, veri£camos ampliações e reduções, ou seja, variação da escala do grá£co. Observe essas variações de *f(z)* = *A*Re(z):*

Nota-se que há uma simetria entre valores positivos e negativos do coe£ciente A, cujo eixo de simetria é o próprio eixo vertical (eixo imaginário).

4. Função Imaginária pura (*f(a + bi) = bi*)

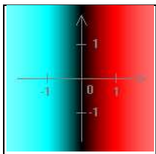
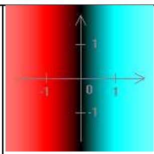
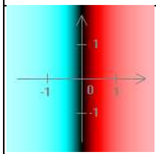
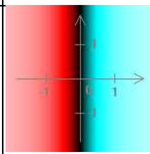
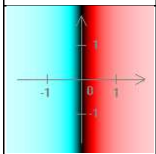
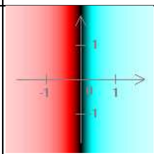
	$A = 1$		$A = -1$
	$A = 2$		$A = -2$
	$A = 3$		$A = -3$

Tabela 1: Variações da $f(z) = A * Re(z)$

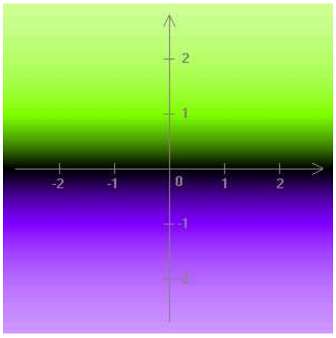


Figura 3: Grá£co da Função Imaginária Pura.

A repetição aqui é na direção vertical, pois a parte real desta função é desprezada ao se compor o conjunto imagem. As cores também coincidem com as atribuídas ao eixo vertical (imaginário) do Mapa do Plano Complexo, pois os números imaginários puros estão de£nidos neste eixo.

Além das observações feitas na função parte real, que também podem ser observadas aqui, as seguintes também valem para ambas, nas suas especi£cidades. Variações *da f(z) = Re(zˆB)*:

Para B não inteiro, tomamos $k = 0$ na extração da raiz para que $f(z)$ continue sendo função, já que é impossível ter duas cores em uma única posição (Conway, 1978):

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + isen\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$$

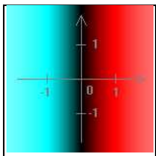
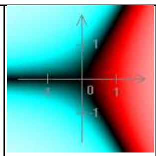
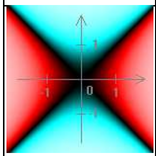
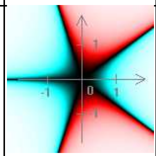
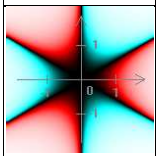
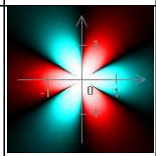
	$B = 1$		$B = 3/2$
	$B = 2$		$B = 5/2$
	$B = 3$		$B = -3$

Tabela 2: Variações da $f(z) = Re(z^B)$

É importante notar que o somatório do número de repetições das tonalidades (ciam e vermelho em porções contínuas) coincide com o dobro do valor de B, ou seja, o grau de z corresponde à metade do número de ciclos de cores no grá£co. Em decorrência de *De Moivre*, "(...) existem exatamente n soluções distintas (...)" para um número complexo *zˆn* (Churchill, 1978).

Por exemplo, para uma tonalidade de vermelho representada pelo número $1 + 0i$, os valores de z, para o qual o coe£ciente B de valor 4, que satisfazem *zˆB = 1 + 0i* são: $1 + 0i$; $0 + i$, $-1 + 0i$ e $-1 - i$. Pois *(1 + 0i)ˆ4 = (0 + i)ˆ4 = (-1 + 0i)ˆ4 = (-1 - i)ˆ4 = 1 + 0i* que é o valor atribuído inicialmente a variável z (Ávila, 2000).

Ao se atribuir valores negativos ao coe£ciente B, percebe-se que há uma inversão, não linear, de cores. Isto é, a relação entre os valores atribuídos ao coe£ciente B não é apenas de inversão de cores, mas também de deformação da função – para *f(z) = Re (zˆ3)* temos a inversão não linear como *f(z) = Re (1/zˆ3).*

Acrescentando valores reais às funções parte real e imaginária pura, percebe-se o seguinte: para coe£cientes reais acrescentados em funções parte real, há translações do grá£co como um todo; para coe£cientes reais acrescentados em funções imaginárias puras, há translações de cores.

As translações do grá£co de função parte real são evidentes. Coe£cientes positivos, translações para a esquerda, coe£cientes negativos, para a direita. Já para funções imaginárias puras isso não ocorre do mesmo modo. A translação é feita com o conjunto de cores representativas, ou seja, se para um coe£ciente C com valor nulo podemos associar às cores do eixo vertical (reta $x = 0$) do Mapa do Plano Complexo, para valores reais atribuídos ao coe£ciente C temos uma translação de todos os pontos (reta

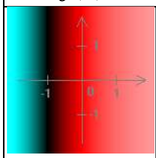
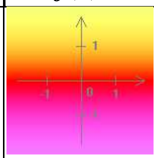
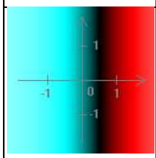
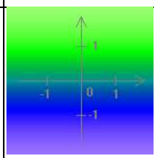
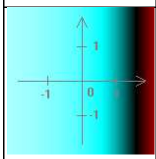
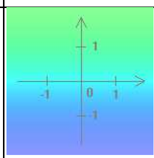
f(z) = Re(z) + C		***f(z) = Im(z)i + C***	
	$C = 1$		$C = 1$
	$C = -1/2$		$C = -1/2$
	C=-π/2		C=-π/2

Tabela 3: Translações de $f(z) = Re(z) + C$ e $f(z) = Im(z)i + C$

$x = C$) do conjunto imagem.

5. Função Modular (*f(a + bi) = sqrt(a^2 + b^2)*)

A função modular apresenta apenas tonalidades da cor vermelha por se tratar de valores absolutos (as associações do eixo real no sentido positivo no Mapa do Plano Complexo são para as tonalidades de vermelho). Assim, há uma regularidade nas posições que tenham distancia iguais do centro.

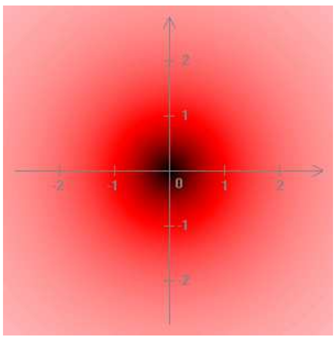


Figura 4: Grá£co da Função Modular

No estudo de alguns coe£cientes poderão aparecer cores com tonalidade de ciam (*f(z) =abs(z) + C*, para C real negativo), as tendências ao branco poderão ser mais rápidas (*f(z) = A*abs(z)*, para A real maior que 1) ou mais lentas (para A real entre 0 e 1),já que o branco puro representa o complexo in£nito.

6. Considerações

É evidente que estudo desse tipo é inviável sem que haja um suporte na ferramenta (software), uma vez que plotagens dessa natureza são impossíveis de ser realizadas com apenas papel e lápis (ou giz e lousa) (Silva e Souza, 2003b). Assim, a justi£cativa de aceitação desse modo de representar e interpretar funções de uma variável complexa está estritamente atrelado ao fato de adoção de novas tecnologias em aulas de Matemática.

Ademais, não podemos pensar a utilização desse software, e suas representações, como algo independente de estudos algébricos. Este estudo não tem como £nalidade a substituição do desenvolvimento tradicional promovido para a compreensão de tal conceito. Pois, sem um suporte algébrico, essas representações podem não passam de simples combinações de cores que atrai curiosidades pelo seu colorido (Needham, 2000).

Experiências em salas de aula estão sendo desenvolvidas para que as costumeiras abstrações algébricas possam ganhar sentido no processo de aprendizagem. O uso desse tipo de ferramenta poderá permitir que as rigorosidades suportadas pela Matemática não continuem a ser dominantes nos processos de ensino e aprendizagem

Referências:

ÁVILA, G. (2000) Variáveis Complexas e Aplicações, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Cientí£cos, 1-74.

CHURCHILL, R. V. (1978) Variáveis Complexas e suas Aplicações, São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1-61.

CONWAY, J. B. (1978) Functions of one Complex Variable, New York, Springer-Verlag, 1-10.

NEEDHAM, T. (2000) Visual Complex Analysis, New York, Claredon Press.

SILVA, E. L. E SOUZA, A. R. (2003a) Desenvolvimento de Software para Representação de Funções de uma Variável Complexa Utilizando Recursos de Cores. XXVI CNMAC (Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional), IBILCE/UNESP.

SILVA, E. L. E SOUZA, A. R. (2003b) Software for Functions of one Complex Variable Representations: Graphics using Colors. XVI SIBGRAPI (Simpósio Brasileiro de Computação Grá£ca e Processamento de Imagem), IME/USP.

THALLER, B. (2000) Visual Quantum Mechanics, New York, Springer-Verlag, 1-14.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 311:319
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 36

CONTRIBUIÇÃO DO DESENVOLVIMENTO DAS HABILIDADES DE FORMAÇÃO E DE GENERALIZAÇÃO DE CONCEITOS PARA A MELHORIA DA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA:

APLICAÇÃO EXPERIMENTAL REALIZADA NO INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UERJ

Roberto Lopes de Abreu
Departamento de Estruturas Matemáticas
Instituto de Matemática e Estatística
UERJ
rabreu@ime.uerj.br

***Resumo**: Este trabalho apresenta os resultados das experiências realizadas pelo autor no IME-UERJ com aplicação experimental de uma Metodologia de ensino de Matemática, elaborada para desenvolver as habilidades de formação e de generalização de conceitos, cujo desenvolvimento insu£ciente é, no entendimento do autor, responsável direto pelas di£culdades de aprendizagem escolar.*

***Palavras-chave:** Ensino; Aprendizagem; Conceitos.*

Abstract: *This work presents the results accomplished by the author at IME-UERJ with experimental application of a methodology for Mathematics teaching elaborated to develop the formation abilities and generalization of concepts, whose insuf£cient development, under the author's viewpoint, leads directly to the dif£culties of school learning.*

Key words: Teaching; Learning; Concepts.

1. Introdução

Em função da persistência do fracasso escolar, denunciado pelas estatísticas o£ciais mais recentes, e a despeito das medidas que vêm sendo aplicadas nos campos econômico e social e com respeito às macroestruturas educacionais no País, buscamos investigar as raízes do problema no âmbito dos processos de ensino e de aprendizagem.

As experiências - realizadas pelo autor no Instituto de Matemática e Estatística da UERJ, na disciplina Introdução à Lógica - evidenciaram a necessidade signi£cativa das habilidades de formação e de generalização de conceitos para a aprendizagem e que as mesmas habilidades correspondem ao conjunto de três habilidades básicas: identi£cação de indícios essenciais do conceito, elaboração do conteúdo do conceito no grau de máxima generalização e utilização da linguagem adequada. Tais experiências indicaram que para a maioria dos alunos, durante os níveis Fundamental e Médio, tais habilidades foram desenvolvidas em níveis insu£cientes para uma aprendizagem no estágio de criação e, na maioria dos casos, também de produção.

A experiência, cujos resultados apresentamos neste trabalho, consistiu na aplicação de instrumentos de avaliação do nível de desenvolvimento das citadas habilidades, na utilização de uma Metodologia de ensino orientada para o desenvolvimento dessas habilidades e de um sistema de controle que permite estabelecer o grau de importância do desenvolvimento de tais habilidades para se lograr a aprendizagem no estágio de criação, o que foi efetivado através de análise comparativa entre os níveis de desenvolvimento de cada habilidade básica e o desempenho escolar de cada aluno, com a utilização de um algoritmo e de indicadores especí£cos.

2. Entendendo a experiência

Nos tratamentos qualitativo e quantitativo dos dados, consideramos o "princípio da relatividade das condições necessárias e su£cientes para a ocorrência de um evento", segundo o qual, quanto maior for o número de casos em que a condição está presente e o evento ocorre, maior será o grau de su£ciência de tais condições e quanto menor for o número de casos em que a condição está ausente e o evento ocorre, maior será o grau de necessidade da condição considerada. Na experiência, a "condição" foi o aluno atingir o desenvolvimento das habilidades de formação e de generalização de conceitos em níveis "ótimo" ou "su£ciente", considerando-se separadamente cada uma das três habilidades básicas, e o "evento" foi o aluno estar classi£cado na turma no "Grupo de maior êxito" na disciplina. Os níveis "ótimo" e "su£ciente" correspondem, respectivamente, aos estágios de "criação" e de "produção" no processo de aprendizagem, sendo tais estágios atribuídos segundo os seguintes critérios:

1. Consideramos que foi atingido o estágio de “criação” quando o aluno ou grupo de alunos é capaz de compreender uma situação problêmica “nova”, isto é, nunca vista antes e sem nexos lógicos ou com nexos lógicos frágeis com situações conhecidas, além de ser capaz de solucioná-la, mesmo sendo necessário utilizar conhecimentos ainda não construídos pelo mesmo aluno ou grupo de alunos;

2. O estágio de “produção” é atingido quando o aluno ou grupo de alunos é capaz de compreender uma situação problêmica “nova”, porém apresentando nexos lógicos fortes com situações já conhecidas, sendo capaz de solucioná-la utilizando conhecimentos já construídos pelo mesmo aluno ou grupo de alunos.

Naturalmente, há que se considerar uma certa relatividade – graus diferenciados - com respeito aos níveis de criação e de produção, bem como a existência de uma “fronteira” de certa inde£nição entre os dois níveis. Os níveis “ótimo” e “su£ciente” com respeito ao desenvolvimento das habilidades mencionadas são atribuídos segundo os critérios apresentados no quadro abaixo:

	Ótimo	**Su£ciente**
Identi£cação de indícios essenciais	Identi£ca todos os indícios essenciais e não apresenta qualquer indício não essencial como essencial	Identi£ca todos os indícios essenciais e apresenta algum não essencial como essencial
Elaboração do conteúdo no grau de generalização adequado	Apresenta o conceito no grau de generalização adequado ao contexto	Apresenta o conceito num grau de generalização não adequado ao contexto
Utilização da linguagem adequada	Expressa a idéia de modo completo e preciso, sendo possível compreendê-la diretamente da expressão apresentada	Expressa a idéia de modo completo e preciso, não sendo possível compreendê-la diretamente da expressão apresentada

Os resultados apresentados neste trabalho se referem às experiências realizadas no primeiro semestre letivo de 2003, sobre uma amostra constituída pelos alunos matriculados na disciplina “Introdução à Lógica”, em sua grande maioria recém ingressados. Os grupos de maior e de menor êxito na disciplina foram organizados em função das médias £nais obtidas pelos alunos na disciplina, através da aplicação do método estatístico “dos quartis”, sendo incluídos no primeiro grupo aqueles que obtiveram média £nal maior ou igual a 5,8 e no segundo grupo os alunos com média £nal menor do que este valor. Os indicadores do grau de importância do desenvolvimento das habilidades de formação e de generalização de conceitos para a aprendizagem foram estabelecidos com o emprego do Método estatístico "CNSR", desenvolvido pelo autor.

3. Resultados obtidos

1 - Relação entre o desenvolvimento das habilidades de formação e de generalização de conceitos e o nível de êxito na aprendizagem

Pode-se observar no quadro abaixo que a concentração no grupo de maior êxito na aprendizagem de alunos que lograram maior nível de desenvolvimento em cada habilidade básica é signi£cativamente maior do que a concentração daqueles que lograram menor nível de desenvolvimento.

QUADRO 1

Distribuição dos alunos que alcançaram maior e menor nível de desenvolvimento das habilidades básicas no grupo de maior êxito na aprendizagem

	2003.1	
	Maior desenvolvimento	Menor desenvolvimento
Indícios	60%	47%
Conteúdo	67%	52%
Linguagem	67%	54%

2 - Importância do desenvolvimento das habilidades de formação e de generalização de conceitos para o êxito na aprendizagem

Para estabelecer o nível de importância do desenvolvimento das habilidades de formação e de generalização de conceitos, foram de£nidos os indicadores da necessidade – Inec – e da su£ciência – Isuf – de tal desenvolvimento para que os alunos fossem classi£cados no "Grupo de maior êxito" na aprendizagem.

O indicador de necessidade está relacionado ao percentual de alunos que apresentaram baixo desenvolvimento das habilidades e baixo nível de aprendizagem:

$$\text{Inec} = \frac{M}{M+N}$$

onde M e N correspondem aos percentuais de alunos de baixo desenvolvimento das habilidades classi£cados, respectivamente, nos grupos de menor e de maior êxito na aprendizagem. O indicador da su£ciência do desenvolvimento das habilidades de formação e de generalização de conceitos se relaciona com ao percentual de alunos que apresentaram alto nível de desenvolvimento das habilidades e alto nível de aprendizagem:

$$\text{Isuf} = \frac{A}{A+B},$$

onde A e B correspondem ao percentual de alunos de alto desenvolvimento das habilidades e classi£cados, respectivamente, nos grupos de maior e de menor êxito na aprendizagem.

Os dados obtidos na pesquisa, já consolidados, e os resultados gerados pela aplicação do algoritmo CNSR estão expressos no quadro abaixo:

QUADRO 2 Algoritmo CNSR para determinar os indicadores de importância do desenvolvimento das habilidades básicas para a aprendizagem

	A	N	B	M	**Inec**	**Isuf**	**n = Inec x Isuf**
Indício	60%	47%	40%	53%	0,53	0,60	0,32
Conteúdo	67%	52%	33%	48%	0,48	0,67	0,32
Linguagem	67%	54%	33%	46%	0,46	0,67	0,31

onde A eB correspondem aos alunos que alcançaram o nível "ótimo" ou "su£ciente" de desenvolvimento das habilidades básicas e apresentaram, respectivamente, um alto e um baixo nível de desempenho na aprendizagem, e MeN correspondem aos alunos que apresentaram desenvolvimento insatisfatório das habilidades básicas e foram classi£cados, respectivamente, nos grupos de menor e de maior êxito na aprendizagem. Os valores Inec = 0,53 e Isu = 0,60, indicam probabilidades de 47% e de 60% para um aluno alcançar um alto nível de aprendizagem no caso em que tenha apresentado, respectivamente, baixo ou alto nível de desenvolvimento da habilidade de identi£car os indícios essenciais dos conceitos. Podemos observar que o desenvolvimento das habilidades consideradas se apresentou mais su£ciente do que necessário, isto é, os alunos que desenvolveram as habilidades em níveis mais altos apresentaram desempenho melhor na aprendizagem, mas uma parte signi£cativa daqueles que apresentaram baixo nível de desenvolvimento das habilidades também lograram bom desempenho na aprendizagem.

Os dados apresentados no Quadro 3 e os grá£cos abaixo permitem distinguir com mais detalhes o desempenho quanto à aprendizagem dos alunos que alcançaram maior (Ma) e menor (Me) nível de desenvolvimento das habilidades básicas de formação e de generalização de conceitos.

A análise dos grá£cos permite perceber que, entre os alunos de maior desenvolvimento em possibilitou melhor desempenho na aprendizagem do que o desenvolvimento das outras duas habilidades. Já entre aqueles de menor nível de desenvolvimento das habilidades, não houve distinção entre as básicas quanto à aprendizagem. Por outro lado, os grá£cos evidenciam a superioridade dos alunos que desenvolveram mais as habilidades sobre os demais, quanto à aprendizagem.

QUADRO 3 Distribuição dos alunos entre os intervalos de valores correspondentes às médias £nais na disciplina

Médias / Habilidades	0 a 4		4 a 6		6 a 8		8 a 10	
	Ma	Me	Ma	Me	Ma	Me	Ma	Me
Indício	26%	35%	26%	23%	43%	35%	13%	6%
Conteúdo	22%	30%	22%	24%	44%	36%	11%	9%
Linguagem	0%	31%	33%	23%	67%	36%	0%	10%

Ma: alunos que apresentaram maior desenvolvimento das habilidades básicas
Me: alunos que apresentaram menor desenvolvimento das habilidades básicas

Grá£co 1

Alunos de maior desenvolvimento — Alunos de menor desenvolvimento

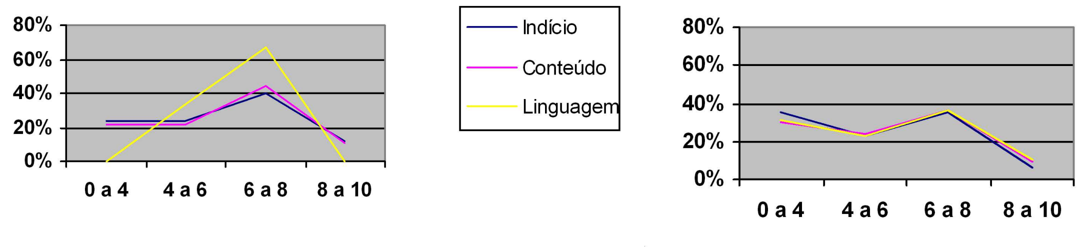


Figura 1: Desenvolvimento das habilidades básicas da formação e da generalização de conceitos X Média de aproveitamento do aluno na disciplina

4. Conclusões

Os resultados obtidos indicam que, efetivamente, o desenvolvimento das habilidades de formação e de generalização de conceitos contribui de modo signi£cativo para um maior nível de aprendizagem e apontam para a necessidade de aperfeiçoamento tanto da metodologia utilizada como aporte para o desenvolvimento das habilidades de formação e de generalização de conceitos quanto dos instrumentos de controle e de avaliação da aprendizagem. O fato da diferença de desempenho escolar detectado entre os alunos que desenvolveram as habilidades em maior nível e aqueles que o £zeram em nível mais baixo ter sido pequena, exceto quanto à linguagem, indica que foi possível para um número signi£cativo de alunos se sair bem na avaliação de aprendizagem sem um desenvolvimento adequado das habilidades mencionadas. Isso mostra que os instrumentos de avaliação de aprendizagem e, também, aqueles próprios da experiência, devem ser aperfeiçoados no sentido de maior exigência de raciocínio lógico e de maior e£cácia em seus propósitos.

Portanto, no prosseguimento da experiência no próximo semestre letivo (2004.1) pretendemos revisar tanto a metodologia e seus instrumentos, como os métodos e os critérios de avaliação da aprendizagem e do desenvolvimento das habilidades, inclusive aperfeiçoando os respectivos instrumentos.

Referências

ABREU, R. L. (2000) Método de las condiciones necesarias y su£cientes relativizadas – CNSR: Uma aplicación en el proceso de aprendizaje. In Revista Cubana de Educación Superior, Vol XX, n^o 3, pp:85 – 92. Centro de Estúdios para el Perfeccionamiento de la Educación Superior, Universidad de La Habana, Cuba.

MOYSÉS, L.(1997) Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática. Papirus, S.Paulo, SP.

RUBINSTEIN, S. L. (1966) El proceso del Pensamiento. Ed. Universitaria, La Habana, Cuba.

VIGOTSKII, L. S. (1994) Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. In Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem. Editora da USP.

DAVÝDOV, V. V. Tipos de generalización en la enseñanza. Ciudad de La Habana, Cuba. Editorial Pueblo y Educación.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 321:328
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 ©2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 37

REFLEXÕES ACERCA DO PROBLEMA DE ALHAZEN

Luiz Carlos Guimarães
Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática
UFRJ
lcg@labma.ufrj.br

Resumo: *O estudo da re¤exão em espelhos (ou bilhares) não retilíneos tem origens bastante antigas. Neste trabalho indicamos como um ambiente de geometria dinâmica poderia ser utilizado para propiciar um "passeio"pelas idéias introduzidas por autores como Alhazen, Huygens, Dandelin e outros ao estudar este problema. O ponto de vista adotado é estritamente geométrico, mas veremos que a linguagem do Cálculo, assim como a da Álgebra, aparecem necessariamente na descrição das estruturas evidenciadas pelo problema.*

Palavras-chave: *Geometria Dinâmica, História da Geometria, Cáusticas, Bilhares.*

Abstract: *The study of re¤ection on non straight mirrors (or billiards) has very classical origins. In this paper we indicate how a dynamical geometry environment could be put to use in a walk through of the ideas put forth by such authors as Alhazen himself, Huygens, Dandelin and others when studying this problem. The point of view we follow trough is strictly geometrical, but we'll see nevertheless that the language of Algebra and Calculus is unavoidable in the description of the structures made evident by the problem.*

Key words: *Dynamic Geometry, History of Geometry, Caustics, Billiards*

Consideremos o seguinte enunciado: "*Dada uma superfície re¤etora, a posição de um ponto luminoso, e a posição de um ponto pelo qual passa o raio re¤etido, encontrar o ponto do espelho no qual se dá a re¤exão*" [H, pg.294].

Ptolomeu tratou con£gurações particulares desse problema (algumas delas reaparecem, na forma de exercícios em textos escolares, principalmente nos primeiros anos do século XX). Ibn al-Haitham (Alhazen) viria a retomá-lo, com maior generalidade, num tratado em que aperfeiçoa o conceito de "imagem" de um corpo [R]. Outras referências podem ser encontradas em [S]. A galeria de autores que se ocupou posteriormente do problema, de uma forma ou de outra, é bastante extensa. Uma pequena amostra incluiria Huygens, Sluze, Wallis, Steiner, Quetelet, Dandelin, Cayley, etc.

Este artigo pretende apresentar um histórico de alguns tratamentos geométricos que esse problema recebeu, antigos e mais recentes, bem como um exemplo de tratamento que ele poderia receber em um moderno ambiente de geometria dinâmica. A ênfase aqui é em "geométrico": vamos evitar o recurso a equações.

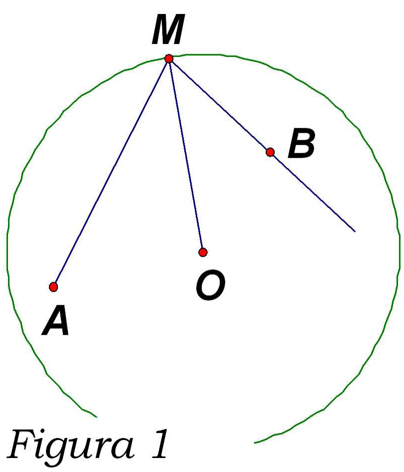


Figura 1

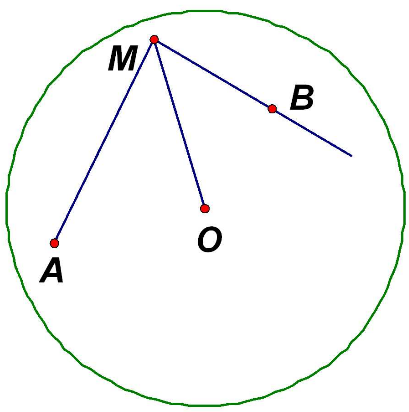


Figura 2

Na £gura 1, acima, o círculo de centro O é o espelho, A é o ponto luminoso, e B é o ponto por onde passa esse raio, após ser re¤etido no ponto M desse círculo.

Note que, de acordo com as leis de re¤exão, os ângulos $\angle$AMO e $\angle$OMB são iguais. Temos assim duas restrições a serem satisfeitas pelo ponto M. Se relaxamos uma delas (isto é, se admitirmos pontos fora do círculo, como na £gura 2), podemos buscar o lugar geométrico dos pontos M do plano tais que, de M, os segmentos AO e OB são vistos segundo o mesmo ângulo (isto é, $\angle$AMO=$\angle$OMB). Este lugar geométrico é facilmente construído em um ambiente de geometria dinâmica como [T], obtendo-se a curva representada na £gura 3, abaixo. Por razões que £carão claras mais tarde, chamaremos este lugar de curva de Apolônio. As interseções dessa curva com o espelho circular nos dão as soluções procuradas. Para as posições de A e B representadas na £gura 3, o problema tem quatro soluções, representadas pelos pontos Mi, i=1,..4. A outras con£gurações poderão corresponder duas ou, excepcionalmente, três soluções.

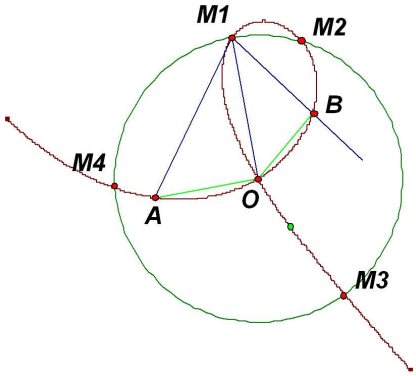


Figura 3

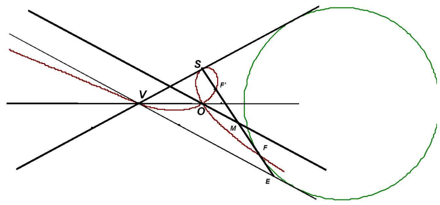


Figura 4

Observe que esta maneira de formular o problema, embora seja a mais natural, leva a uma solução de difícil implementação: a curva que construímos tem grau três. Para que isto fosse comprovado, teríamos que introduzir coordenadas e equações, o que preferimos evitar neste trabalho. Outra coisa que é obtida de forma muito fácil, em coordenadas, é a redução de ordem do problema: em lugar de buscar a interseção de uma curva de grau três com uma curva de grau dois, basta computar a interseção de uma cônica com o círculo. Na verdade, isto também pode ser obtido por um raciocínio geométrico, e esta é a forma em que as soluções originais foram obtidas. A formulação que preferimos aqui, no entanto, nos dá a oportunidade de evidenciar o relacionamento desta curva com a solução de outros problemas, também clássicos, que aparecem um pouco mais tarde na literatura. Ela tem também a vantagem de ser facilmente generalizada, para o caso em que a curva re¤etora é uma cônica, em lugar de um círculo.

A tese original de Quetelet [Q] se ocupava do seguinte problema: estudar a curva descrita pelos focos de uma seção plana variável de um cone circular reto, onde os planos de seção têm sempre em comum uma reta perpendicular a uma das geratrizes do cone. À curva assim obtida Quetelet deu o nome de "focal", e a ela Dandelin dedicou posteriormente um bonito artigo [D]. O problema pode ser inteiramente estudado no plano que contém o eixo do cone e é perpendicular aos planos de seção. Na £gura 4, acima, vemos a £gura correspondente. SE é a projeção do plano de seção, S é a projeção da reta comum a esses planos, e F, F' são os focos. O ponto O corresponde à seção ortogonal ao eixo, quando os dois focos coincidem.

Aparentemente, Quetelet e Dandelin não se deram conta da equivalência entre a curva que estudaram e a curva na £gura à esquerda, que já era associada ao problema de Alhazen pelo menos desde a época de Barrow. A conexão não foi percebida nem mais tarde por Steiner, que estudou a curva à esquerda no contexto de uma generalização do problema de Apolônio, nem por van Rees, que generalizou o problema das "focais" para o caso onde o cone não mais era restrito ao caso circular. Gomes Teixeira, utilizando coordenadas, é quem estabelece a equivalência [ver T, pgs 53].

Em uma versão mais completa deste texto mostraremos que as propriedades que Dandelin deduz para a curva são, no entanto, su£cientes para construir, a partir dos pontos O, A e B, o vértice S e os demais elementos necessários para caracterizar a focal. Dandelin mostra, por exemplo, que a focal é duplamente assintótica à reta VE. Mostra também que o círculo com diâmetro FF', e centro em M contém sempre o ponto O. Disto resulta, em particular, que as retas OF e OF' são sempre ortogonais entre si, e que as duas tangentes à curva no ponto O têm a mesma propriedade.

1. Cáusticas por Re¤exão

Estreitamente relacionado ao problema que estamos considerando, está o problema de determinar as cáusticas (por re¤exão neste caso) geradas por um ponto luminoso A, colocado a uma distância £nita ou in£nita de uma curva que serve de espelho. No contexto de nossa primeira £gura, isto eqüivale a manter o ponto luminoso A £xo, e buscar as posições B onde a iluminação é máxima. Na £gura 5, abaixo, representamos o lugar geométrico dos raios luminosos re¤etidos, a partir da fonte A £xa, pelo espelho circular com centro O. Observe que a envoltória dos raios é uma curva com dois ramos, e quatro cúspides.

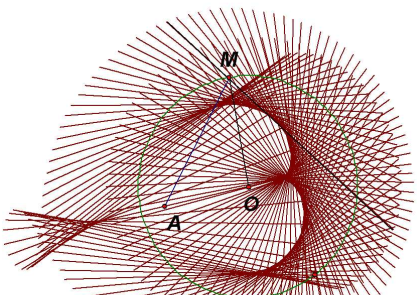


Figura 5

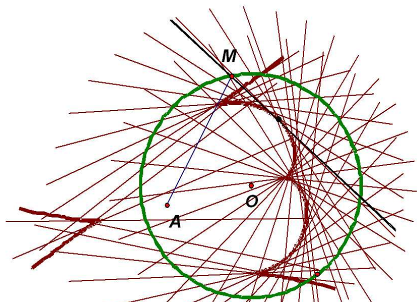


Figura 6

Para construir a cáustica, podemos proceder de forma bem geométrica: rodamos o ponto M de um ângulo θ, obtendo um ponto M'. A re¤exão do raio luminoso OM' intercepta a re¤exão do raio OM em um ponto C_θ . Este é o ponto de interseção de duas tangentes à envoltória procurada. Portanto, se £zermos θ tender a zero teremos, como limite, um ponto sobre a envoltória. O resultado é ilustrado na £gura 6.

Duas observações cabem aqui: esta é uma daquelas ocasiões onde uma quantidade, que no caso é θ , deve poder ser tomada "tão pequena quanto se queira", mas não pode assumir efetivamente o valor zero. Além disto, num ambiente computacional (de Geometria Dinâmica), como é o nosso caso, existem restrições numéricas a que θ assuma um valor demasiado pequeno. Quão drásticas são estas restrições irá depender da particular implementação que estivermos usando. Por outro lado, o uso deste tipo de ambiente abre um precioso espaço para a exploração. Considere, por exemplo a £gura 7, abaixo, onde construímos a curva de Apolônio para uma posição do ponto B sobre a cáustica: neste caso, a curva é sempre tangente ao círculo, o que poderia ser "comprovado" empiricamente variando a posição de B. A cáustica corresponde assim, para um ponto luminoso £xo, às posições de B onde o problema de Alhazen tem três soluções. A demonstração deste fato será apresentada em outra ocasião, pois nos afastaria demais do objeto deste trabalho. É interessante observar aqui que Quetelet e Dandelin, embora tenham escrito sobre as focais e sobre as cáusticas do círculo, aparentemente não levaram em conta a estreita relação entre os dois problemas.

Outro que trabalhou em um problema relacionado, mas sem, aparentemente, se dar conta das conexões, foi Steiner. Inicialmente, lembremos aqui o problema de Apolônio clássico: dados dois pontos A e B, em um plano, encontrar os pontos P desse plano para os quais a razão entre as distâncias AP e BP é constante, e igual a uma razão dada. Seja Q o ponto desse lugar geométrico que está entre A e B. Resulta que a solução do problema é um círculo, passando por Q, e que, para um ponto P sobre esse círculo, os ângulos $\angle$APQ e $\angle$QBP são iguais. Em [S], Steiner estuda a seguinte generalização desse problema: dados dois segmento AF e BF', em um plano, encontrar os pontos desse plano de onde AF e BF' são vistos sob mesmo ângulo. A solução é uma cúbica circular (£gura 8) e, para o caso onde F e F' coincidem, esta é a curva que estivemos considerando até o momento. Cabe ressaltar aqui que esta construção apresenta di£culdades consideráveis para as implementações atuais de

Geometria Dinâmica.

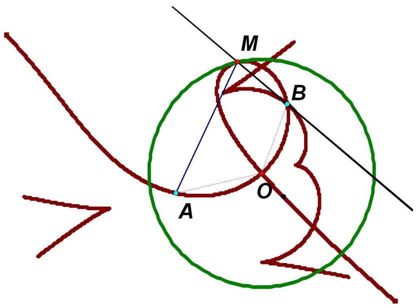


Figura 7

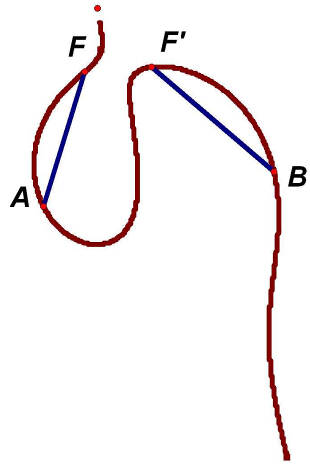


Figura 8

A generalização do problema de Alhazem que mencionamos no início deste trabalho pode ser enunciada da forma seguinte:

“Dados um espelho cônico, um ponto luminoso A, e um segundo ponto B por onde o raio re¤etido deve passar, determinar os pontos M do espelho onde se deve dar a re¤exão.”

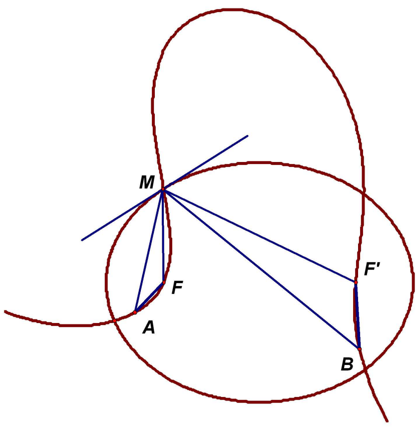


Figura 9

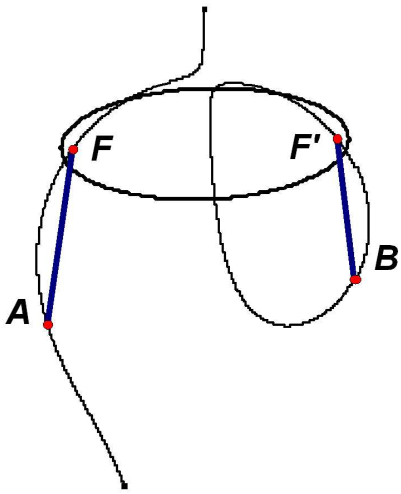


Figura 10

Na £gura 9, F e F’ são os focos da cônica. A propriedade importante a ressaltar aqui é que o raio incidente e o raio re¤etido formam ângulos iguais com os raios focais no ponto de re¤exão, isto é, $\angle$AMF = $\angle$ FMB.

Assim como no caso anterior, o problema pode ser resolvido encontrando os pontos de interseção da cônica com a curva de Apolônio. Para a con£guração mostrada acima, continuamos tendo quatro soluções, mas é simples conseguir uma con£guração, como a mostrada na £gura 10, onde existem seis soluções. Vemos assim que a simpli£cação que é possível no caso circular não representa um modo de solução su£cientemente geral para ser usado em outros casos.

Este enunciado mais geral, ou o problema correspondente para cáusticas, não parecem ter recebido atenção na literatura clássica. Mais recentemente, o problema de estudar as cáusticas determinadas por uma curva qualquer recebeu uma certa atenção, especialmente no contexto da teoria das singularidades [ver os artigos de Bruce et alii, e o livro de Arnold]. Por outro lado, o problema de bilhares, descendente direto do problema de Alhazen, continua a gerar uma enorme quantidade de pesquisa. Uma dessas linhas de investigação, que se pode datar pelo menos de 1881 [Baker], é o estudo desse problema em espaços mais gerais que o Euclidiano.

Um ponto que certamente merece investigação é a utilidade, como motivador para o ensino de geometria, do estudo deste tipo de problemas em contextos didáticos. Sobre isto parece concordar a Comissão Kahane [K]. Em nossa opinião, a forma em que diversos conteúdos de matemáticas "elementares" e aplicações à Física se juntam neste problema o torna um assunto especialmente adequado para atividades de exploração destinadas à formação continuada de professores de matemática. Bons problemas de geometria, como o que acabamos de expor, podem funcionar como um canal de comunicação entre a chamada "Matemática escolar" e idéias que ainda hoje são objeto de investigação.

Referências:

[A] Arnold, V. I.: Singularities of Caustics and Wavefronts. 1998, Kluwer, Dordrecht.

Baker, M.: Alhazen's Problem. American Journal of Mathematics, 1881. Vol. 4, No. 1, pgs. 327-331.

[Bar] Barrow, Rev. I.: Lectiones xvii Cantabrigiae in scholis publicis habitae in qvibvis opticorum phaenomenon genuinai rationes investigantur, ac exponuntur. Londini, Gulielmi Godbid (1669). Lect. ix.

[B] Bruce, J. W., Giblin, J., Gibson, C. G.: On Caustics by Re¤ection. Topology, 21 (1982),179-199.

[D] Dandelin, G.: Mémoire sur Quelques Propriétés Remarquables de la Focale Parabólique. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, volume 2 (1822); pp. 171 - 206

[H] Heath, T.H. : A History of Greek Mathematics, Oxford, 1921.

[K] Commission de ré¤exion sur l'enseignement des mathématiques. Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement, Janvier 2000. Disponível em: http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportEnseignementGeometrie /html/RapportEnseignementGeometrie.html. Ver também:

Kahane, J-P. (Directeur): Enseignement des sciences mathématiques : Commission de ré¤exion sur l'enseignement des mathématiques : Rapport au ministre de l'éducation nationale (2002). Paris, O.Jacob/Centre National de Documentation Pédagogique.

[Q] Quetelet, A.: Mémoire sur une nouvelle manière de considérer les caustiques, produites, soit par ré¤exion soit par réfraction. in Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles volume 3 (1826); pgs. 89–138.

[R] Ronchi, V. : Optics – The Science of Vision. 1957, New York, NYU Press.

[S] Smith, J.D.: The Remarkable Ibn al-Haytham. The Mathematical Gazette, 76 (1992), pgs. 189-198.

[T] Gomes Teixeira, F.: Traité de Coubes Spéciales Remarquables, Tome I, 1908, Coimbra, Imprimérie de la Université.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 329:336
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 38

DESCRIÇÕES COMPUTACIONAIS, CONFLITOS E O CONCEITO DE DERIVADA

Victor Giraldo
Departamento de Métodos Matemáticos
Instituto de Matemática
UFRJ
victor@im.ufrj.br

Luiz Mariano Carvalho [1]
Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
UERJ
luizmc@ime.uerj.br

***Resumo**: Vários aspectos do uso de ambientes computacionais como ferramentas no ensino de cálculo vêm sendo discutidos na literatura de educação matemática. Efeitos positivos e negativos na imagem de conceito de estudantes têm sido apontados. Discutimos a potencialidade pedagógica de descrições computacionais, baseadas principalmente na noção de retidão local, para o conceito de derivada.*

***Palavras-chave:** Descrições; Con¤itos Teórico-Computacionais; Derivada; Imagem de Conceito; Computadores; Ensino.*

***Abstract:** Different aspects concerning the use of computational environments as tools in the teaching of calculus have been discussed in the mathematics education literature. Positive and negative effects on learners' concept images have been pointed out. We address some pedagogical potentialities of computational descriptions (mainly based on the notion of local straightness) for the concept of derivative.*

***Key words:** Description; Theoretical-Computational Con¤icts; Derivative; Conceptual Image; Computers; Teaching.*

[1] Procientista - UERJ, Pesquisador - CNPq.

1. Introdução

Quando apresentaram a teoria de *imagem de conceito* (Tall & Vinner, 1981), David Tall e Shlomo Vinner detiveram-se nas incompreensões causadas por con¤itos entre partes das estruturas cognitivas dos estudantes relacionadas à derivada e à continuidade. O aumento no uso de novas tecnologias no ensino de matemática, principalmente a partir do meio dos anos 80, colocou em cena novos tipos de situações potenciais de con¤ito. No caso do Cálculo, em particular, a confrontação entre a estrutura £nita dos algoritmos computacionais e a natureza intrinsecamente in£nita dos principais conceitos (como limite, derivada e integral) pode levar os estudantes a situações de aparente contradição e confusão. Essas situações potenciais de con¤ito, no ensino de cálculo e em outras áreas da matemática, vêm sendo discutidas nas últimas duas décadas em vários trabalhos, apontando-se uma gama variada de aspectos positivos e negativos. Esses resultados sugerem que os efeitos das novas tecnologias no ensino/aprendizagem de matemática independem de qualquer característica inerente aos equipamentos, dependendo, sobretudo, do enfoque pedagógico adotado.

Nesse breve artigo resumiremos um estudo apresentado em (Giraldo et alii, 2003a) e (Giraldo&Carvalho, 2003a) sobre o caso da *descrição* do conceito de derivada usando a noção de retidão local. Faremos uma compilação dos conceitos de imagem de conceito; da noção de retidão local como raiz cognitiva para o conceito de derivada; do nosso conceito de con¤ito teórico-computacional; e, prosseguiremos a discussão teórica utilizando as noções de *descrição*, *zona de conforto* e *zona de con¤ito*. Baseando-nos nesse referencial teórico, sustentaremos que, a partir de um enfoque adequado, con¤itos teórico-computacionais podem atuar como fatores importantes para o enriquecimento das imagens de conceito dos estudantes.

2. Alguns Conceitos

Na teoria desenvolvida por Tall e Vinner (1981), a *imagem de conceito* é a estrutura cognitiva completa associada a um conceito matemático que está na mente de um indivíduo. Ela compreende todas as £guras mentais, propriedades, associações mentais e processos relacionados a um dado conceito. As partes con¤itantes de uma imagem de conceito de um indivíduo são denominadas pelos autores *fatores potenciais de con¤ito*. E, quando diferentes fatores potenciais de con¤ito são evocados simultaneamente, são chamados de *fatores de con¤ito cognitivo*.

Barnard & Tall (1997) denominaram cada porção da imagem de conceito na qual cada indivíduo pode focar sua atenção a cada momento como *unidade cognitiva*. Unidades cognitivas podem ser símbolos, teoremas, representações, propriedades ou qualquer outro aspecto relacionado ao conceito. Essa teoria sugere que uma imagem de conceito rica tem que, obrigatoriamente, incluir não só a de£nição formal[2], mas também uma vasta gama de ligações com as unidades cognitivas e entre elas próprias.

Tall (1986a) de£niu *organizador genérico* como sendo um micro-mundo que permite ao estudante manipular exemplos e contra-exemplos de um especí£co conceito matemático ou de um sistema conceitos relacionados. A feitura do programa *A Graphic Approach to Calculus* (Tall et alii, 1990) motivou uma reformulação teórica dessa noção. Em Tall (1989), o autor propõe que a estrutura de um organizador genérico dever estar baseada em uma *raiz cognitiva*. Raiz cognitiva é um conceito fundador; uma ponte entre os conhecimentos anteriores dos alunos e as teorias mais so£sticadas em construção. É uma unidade cognitiva com duas propriedades fundamentais: (1) é compreensível para os estudantes no início da seqüência de aprendizagem e (2) permite expansões cognitivas na direção de novos desenvolvimentos teóricos.

Tall, em (1989 e 2000), a£rma que a noção de *retidão local* é uma raiz cognitiva adequada para o conceito de derivada. Essa noção é baseada na percepção humana de que uma curva parece reta se observada de bem próximo.

3. Descrições e Con¤itos

Em Giraldo & Carvalho (2003b), de£nimos uma *descrição* como sendo qualquer referência a um conceito matemático, empregada em um contexto pedagógico, contendo limitações inerentes em relação à de£nição formal associada (veja também, Giraldo & Carvalho, 2003c e Giraldo et alli, 2003b). Descrições podem ser desenhos (como uma £gura de retas secantes tendendo à tangente), fórmulas (como as usuais regras algébricas de cálculo de derivadas), sentenças faladas ou escritas (como a sentença largamente utilizada: “a reta tangente aproxima a curva localmente”). As limitações inerentes a cada uma das descrições podem levar estudantes a situações de aparente contradição ou confusão, quando a teoria associada parece estar errada ou não poder ser aplicada no caso particular. Utilizamos o termo *con¤ito*[3] ao nos referirmos a situações como essa, e a con¤ito teórico-computacional quando o con¤ito está associado a uma descrição computacional (Giraldo & Carvalho, 2003a; Giraldo et alii, 2003a). A nossa questão aqui é entender uma descrição como uma fonte potencial de con¤itos.

A noção de retidão local (Tall, 1989, 2000) é um exemplo de descrição para o conceito de derivada. Podemos conceber uma descrição como sendo constituída de duas facetas: algumas vezes ela se encaixa na teoria matemática associada, e algumas vezes parece estar em contradição com essa. Referimo-nos a essas duas facetas como *zona*

[2]Por *de£nição formal*, entendemos a de£nição de um conceito consensualmente aceita pela comunidade matemática, dentro de contextos teóricos, sociais e históricos bem de£nidos.

[3]Empregamos, aqui, o termo *con¤ito* em um sentido diferente do usado em (Tall & Vinner, 1981). Chamamos de con¤ito uma aparente contradição em uma situação pedagógica, enquanto que Tall &Vinner usam o termo ao se referir a uma porção inconsistente da imagem de conceito de um indivíduo.

de conforto e *zona de con¤ito*, respectivamente. Embora tenhamos de£nido uma descrição como uma referência contendo limitações intrínsecas, essas limitações podem ser concretizadas sob a forma de con¤ito de maneiras muito diferentes, e mesmo nem o serem. A fronteira entre as zonas de conforto e de con¤ito depende de todo o contexto pedagógico: as imagens de conceito anteriores, atitudes e crenças dos estudantes; estratégias e decisões dos professores, etc.

Nossa hipótese é que a fronteira entre as zonas de conforto e con¤ito tem uma in¤uência crucial na imagem de conceito dos estudantes. Acreditamos que a maneira pela qual uma descrição é tratada pode converter os con¤itos associados em fatores de enriquecimento ou estreitamento. A literatura de Educação Matemática provê evidências para essa hipótese (por exemplo: Abrahão,1998; Belfort et alii, 2003; Belfort & Guimarães, 1998; Doerr & Zangor, 2000; Hadas et alli, 2000; Hunter et alli, 1993; Laudares et alli, 2000).

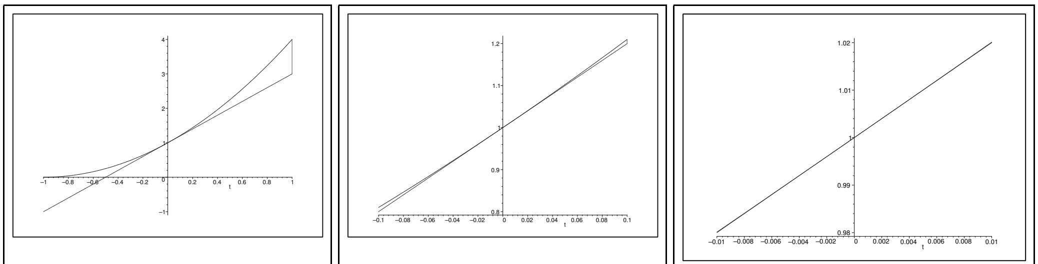
4. Um Organizador Genérico para Aprendizagem de Derivadas

Propusemos um organizador genérico, denominado *Melhor Reta* (Giraldo, 2001), com o objetivo de permitir aos usuários construírem conexões entre unidades cognitivas através de processo de magni£cação local, comparando as descrições algébrica e grá£ca do conceito de derivada. *Melhor Reta* é uma rotina de *Maple* com as seguintes entradas: a função f, um ponto x_0 no domínio da função, uma inclinação a para uma reta passando por $(x_0, f(x_0))$ e um valor numérico para $h = \Delta x$; e, como saída: o grá£co de$f$ e da reta $r(x) = ax + f(x_0)$ no intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$, um segmento vertical ligando a curva e a reta representando a diferença $\rho(h) = |f(x_0 + h) - r(h)|$, e os valores numéricos de $\rho(h)$ e ρ(h)/h. A idéia principal é comparar grá£ca e algebricamente os comportamentos locais da curva $y = f(x)$ e da reta $y = r(x)$ para $a = f'(x_0)$ e $a \neq f'(x_0)$ (ou seja, para as retas tangente e não-tangentes).

Mostrando ambas as representações, algébrica e grá£ca, tivemos como objetivo proporcionar uma visão ampla sobre o fato que, entre todas as retas passando por $(x_0, f(x_0))$, a tangente é a reta que *melhor aproxima* a curva, no sentido bem preciso que não apenas $\rho(h)$ tende para zero, mas que a razão ρ(h)/h também. A representação grá£ca permite a interpretação geométrica da aproximação. De fato, quando o usuário magní£ca o grá£co, através da diminuição de h, esse valor atua como a unidade de medida da £gura.

Se a reta exibida não for a reta tangente, $\rho(h)$ tende a zero, $\rho(h)/h$ não, e o segmento vertical é sempre visível (Figura 2). Por outro lado, se a reta for a tangente, ambos tendem a zero e o segmento vertical desaparece rapidamente (Figura 1). No caso da reta não tangente $\rho(h)$ e h decrescem numa razão balanceada (logo $\rho(h)/h$

não tende para zero); enquanto que no caso da reta tangente $\rho(h)$ decresce numa taxa mais elevada (portanto $\rho(h)/h$ tende para zero). Como h é a dimensão horizontal da janela gráfica, e $\rho(h)$ é o segmento vertical quando a janela é magnificada, o segmento desaparece no caso da reta tangente e fica visível no caso de retas não tangentes.

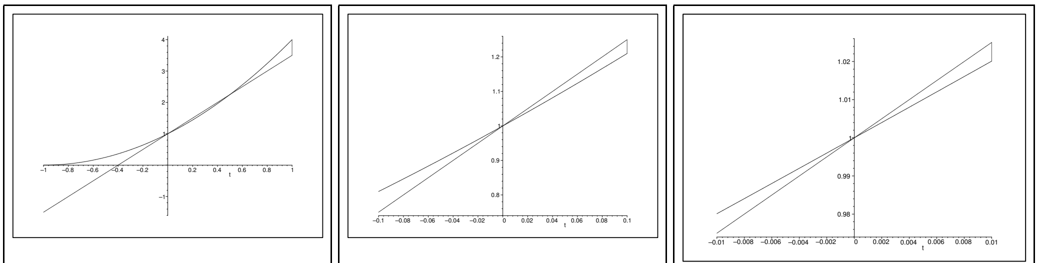


$h = 1$
$\rho(h) = 1 \quad \frac{\rho(h)}{h} = 1$

$h = 0,1$
$\rho(h) = 0,01 \quad \frac{\rho(h)}{h} = 0,1$

$h = 0,01$
$\rho(h) = 0,0001 \quad \frac{\rho(h)}{h} = 0,01$

Figura 1: Tela do organizador genérico *Melhor Reta* para a reta tangente.



$h = 1$
$\rho(h) = 0,5 \quad \frac{\rho(h)}{h} = 0,5$

$h = 0,1$
$\rho(h) = 0,04 \quad \frac{\rho(h)}{h} = 0,4$

$h = 0.001$
$\rho(h) = 0,0049 \quad \frac{\rho(h)}{h} = 0,49$

Figura 2: Tela do organizador genérico *Melhor Reta* para uma reta não tangente.

Há duas descrições principais para a derivada envolvidas na elaboração do *Melhor Reta*. A primeira, obviamente, é a noção de retidão local. A segunda é a noção de aproximação local, em geral expressa pela frase: "a reta tangente ao gráfico da função, aproxima a função na vizinhança do ponto". Uma limitação dessa segunda descrição é que o significado do termo "aproxima" é matematicamente impreciso. No entanto, no contexto de cálculo infinitesimal esse termo tem um significado preciso: a tangente **aproximar** a curva, significa que a razão $\rho(h)/h$ **tende para zero**. Por outro lado, em um contexto mais amplo, poder-se-ia dizer que todas as retas cortando a curva em algum ponto seriam *aproximações* para a função nesse ponto, no sentido em que a diferença $\rho(h)$, entre a curva e cada uma dessas retas tende para zero (desde que a função seja contínua).

Durante o experimento ilustrado pelas Figuras 1 e 2, mantemo-nos na zona de conforto da descrição baseada na retidão local. Entretanto, a primeira tela (da esquerda) pode nos levar à zona de con¤ito da aproximação local. Não há uma clara distinção entre a reta tangente e a não tangente, logo a idéia de aproximação não £ca precisa. Ao seguirmos com o processo de magni£cação, voltamos para a zona de conforto da aproximação local, pois podemos compreender o signi£cado matemático de **aproximação** tanto algébrica quanto gra£camente. Assim sendo, o organizador genérico *Melhor Reta* pode apontar uma interseção entre as zonas de conforto e de con¤ito de duas descrições diferentes. Em Giraldo & Carvalho 2003a, 2003b, 2003c; e em Giraldo et al., 2003a, 2003b fazemos uma análise ampla dessa questão entre outras.

5. Observações Finais

Várias pesquisas, entre elas as citadas na introdução desse artigo, mostram que descrições (em especial as computacionais) podem ter papéis opostos: podem atuar tanto como fatores de estreitamento assim como de enriquecimento da imagem de conceito dos estudantes. Nossa investigação sugere que se os con¤itos são explorados dentro de um ambiente pedagógico propício - ao invés de serem simplesmente evitados - podem disparar um processo de enriquecimento das imagens de conceito dos estudantes. Belfort & Guimarães (1998) e Hadas et alli (2000) exempli£cam experiências nas quais estudantes se bene£ciam de situações de con¤ito, sob a condução cuidadosa dos professores. Doerr & Zangor (2000) con£rmam que uma condição essencial para o sucesso de tal estratégia é a postura do professor; tanto da sua consciência das limitações da máquina, mas também da importância que ele(a) demonstra pelo raciocínio dedutivo em matemática. Entretanto Abrahão (1998) e Laudares & Lachini (2000) mostram que essa perspectiva não é desenvolvida de forma natural. Logo, quando preparando o currículo para cursos de licenciatura e de formação permanente, é necessário enfocar as potencialidades e as limitações (e as limitações e as potencialidades) das ferramentas tecnológicas.

O potencial pedagógico de uma descrição de um conceito matemático não reside apenas em quão acuradamente ela descreve o conceito, mas também o quanto ela **não** o descreve. Ou seja, a e£cácia de uma descrição depende da aplicação judiciosa tanto da zona de conforto quanto da de con¤ito. E ainda, zonas de conforto e de con¤ito de descrições diferentes podem se complementar uma a outra e se constituir em um poderoso recurso pedagógico.

Referências:

ABRAHÃO, A.M.C. (1998). *O Comportamento de Professores frente a Alguns Grá£cos de Funções $f : R \to R$ Obtidos com Novas Tecnologias*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brazil.

BARNARD, T. & Tall, D. (1997). 'Cognitive units, connections and mathematical proof'. *Proceedings of the 21st Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Finland, vol 2, pp. 41-48.

BELFORT, E.; CARVALHO, L.M. & GIRALDO, V. (2003). 'Con¤itos teórico-computacionais em geometria dinâmica'. *Anais do III Encontro de Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Vassouras, Brazil.

BELFORT, E. & GUIMARÃES, L.C. (1998). 'O papel do software educativo na formação continuada de professores de matemática'. *Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática*, São Leopoldo, Brazil, vol. II, pp. 104-107.

DOERR, H.M. & ZANGOR, R. (2000). 'Creating meaning for and with the graphing calculators'. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 41 (2), pp. 143-163.

GIRALDO, V. (2001). *Best Line*. Maple routine. Available for download on:
www.im.ufrj.br/~victor

GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. (2003a). 'Local straightness and theoretical-computational con¤icts: computational tools on the development of the concept image of derivative and limit'. 3rd *Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italy. Available for download on:
www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings_draft/TG9_draft

GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. (2003b). 'Descriptions and de£nitions in the development of the concept image of derivative'. *Proceedings of the Conference of the British Society for Research into Learing Mathematics*. Shef£eld, United Kingdom, 23 (1), pp. 19-24.

GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. (2003c). 'Descrições e con¤itos teórico-computacionais: o caso da retidão local'. *Anais do II Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática*. Santos, Brazil. Available in CD-Rom.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L.M. & Tall, D. (2003a). 'Using theoretical-computational con¤icts to enrich the concept image of derivative'. Chapter 5 in Pope, S. and McNamara, O. (eds.) Research in Mathematics Education, Papers of the British Society for Research Into Learning Mathematics, vol. 5, pp. 63-78.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L.M. & Tall, D. (2003b). 'Descriptions and de£nitions in the teaching of elementary calculus'. *Proceedings of the 27th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Honolulu, USA, 2, pp. 445-452.

HADAS, H.; HERSHKOWITZ, R. & SCHWARZ, B (2000). 'The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments'. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 44, pp. 127-150.

HUNTER, M.; MONAGHAM, J.D. & ROPER, T. (1993). 'The effect of computer algebra use on students' algebraic thinking'. In R. Sutherland (ed.) *Working Papers for ESCR Algebra Seminar*, London University, Institute of Education, London, England.

MAPLE V release 5. (1998). Waterloo Maple Inc.

LAUDARES, J.B. & LACHINI, J. (2000). 'O uso do computador no ensino de matemática na graduação'. *23a Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*. Caxambu, Brazil. Available on: www.anped.org.br

TALL, D. (1986a). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using a Computer Graphics*. Ph.D. Thesis, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, United Kingdom.

TALL, D. 1986b. *Graphic Calculus*, software for BBC compatible computers. Glentop Press, London.

TALL, D. (1989). 'Concept images, generic organizers, computers and curriculum change'. *For the Learning of Mathematics*, vol. 9 (3), pp. 37-42.

TALL, D. (2000). 'Biological brain, mathematical mind and computational computers'. *Proceedings of the* 5^{th} *Asian Technology Conference in Mathematics*. Chiang Mai, Thailand, pp. 3-20.

TALL, D. & VINNER, S. (1981). 'Concept image and concept de£nition in mathematics, with special reference to limits and continuity'. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, pp. 151-169.

VINNER, S. (1983). 'Concept de£nition, concept image and the notion of function'. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 14 (3), pp. 293-305.

VINNER, S. (1991). 'The Role of De£nitions in the Teaching and Learning Mathematics'. In D.O. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, pp. 65-81.

HTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 337:341
Artigo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Comunicação 39

A UERJ NO PROJETO FAPERJ/SBM DE FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

J.P. Carneiro
IME/UERJ
jpqc@uninet.com.br

J.C. Faulhaber
IME/UERJ
claudio@ponze.ufrj.br

Neyde Felisberto
IME/UERJ
neyde.felisberto@ig.com.br

M. Ângela Lobão
IME/UERJ
malob@uol.com.br

C.A. de Moura
IME/UERJ
demoura@ime.uerj.br

Rosana de Oliveira
Fac. Educação/ UERJ
rosanaol@dh.com.br

Resumo *Relatamos e avaliamos a experiência da participação do IME/UERJ no projeto da FAPERJ/SBM para aprimoramento de professores de matemática do ensino médio e fundamental no estado. Esse projeto, iniciado em 2002, envolve ainda a UFF, a UFRJ, a PUC-Rio e o IMPA.*

Palavras-chave *Professores de Matemática; Educação Continuada; Matemática no Ensino Médio.*

Abstract *This paper brie¤y reports and outlines a £rst analysis of the experience that the Statistics and Mathematics Institute of State University of Rio de Janeiro – IME/UERJ could draw from a year-and-half continuing education course designed for high school mathematics teachers. This course, an initiative of the Brazilian Mathematics Society – SBM –, is part of a project suported by FAPERJ and also joined by other four academic institutions, namely UFF, UFRJ, PUC-Rio and IMPA.*

Key Words *Mathematics teachers; Continuing Education; High-school Mathematics.*

1. Antecedentes

O Instituto de Matemática e Estatística da UERJ – IME/UERJ – tem atuado no ambiente de professores do ensino médio e fundamental, por meio do Curso de Especialização em Ensino e Aprendizagem na Matemática, implantado em 1997 e cujo público vem justamente desse meio. O IME também está envolvido em um outro Curso de Especialização, este em fase de implantação e formando parte de um elenco de mais de uma dezena de cursos com idêntico objetivo, em diferentes áreas, e inseridos em um convênio entre a UERJ e a Secretaria de Estado de Educação.

Apesar de ser notório, já há um bom tempo, o desempenho insatisfatório da maioria de nossos estudantes de 2º grau, particularmente na área de Matemática[1], recentes avaliações internacionais, como o exame PISA, onde os nossos resultados se revelaram desastrosos, dramatizaram esse desempenho, clamando por urgentes providências. Esse foi um dos pontos insistentemente enfatizados em numerosas discussões durante o anterior HTEM, em 2002, em particular na mesa-redonda que encerrou o evento.

A SBM – Sociedade Brasileira de Matemática – submeteu, durante o primeiro semestre de 2002, à FAPERJ – Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro – um projeto para melhoria do ensino de matemática no estado. Mobilizando cinco instituições acadêmicas, o IMPA, a PUC-Rio, a UERJ, a UFF e a UFRJ, o projeto se iniciou no mês de setembro daquele ano, com previsão inicial de um ano e meio de duração, para o que foram alocados recursos, parcialmente liberados, pelo período de 12 meses.

2. Estrutura e Filoso£a

Levando em consideração as de£ciências de formação presentes em grande parte dos cursos de licenciatura em matemática atualmente disponíveis, o projeto se baseia essencialmente em reforçar a cultura matemática do professorado atuante nas nossas escolas do 2º grau. Enfatizou-se desde o início não se estar oferecendo um curso de rotinas a ser seguidas, obedecidas robotizadamente na sala de aula de cada um dos alunos cursistas, mas se estar fornecendo um cabedal de conhecimentos ao qual a grande maioria nunca tivera acesso.

As disciplinas oferecidas, apesar de comporem um conjunto comum a todas as instituições participantes, foram desenvolvidas de forma e em seqüências particularizadas

[1]– o que não é um *privilégio* nacional, cf. KLINE [1973] –

para cada uma delas, de modo que alguns pontos de nossa experiência provavelmente não estarão presentes nas demais[2].

No período foram oferecidas as seguintes disciplinas, cada uma com duração de um trimestre, para ambas as turmas admitidas, respectivamente em setembro e dezembro de 2002:

- Funções I
- Vetores e Coordenadas no Plano
- Seminário I
- Funções II
- Geometria Plana
- Seminário II
- Progressões e Matemática Financeira
- Seminário III
- Trigonometria e Números Complexos
- Geometria Espacial
- Matrizes e Sistemas Lineares
- Seminário IV.

Serviu de importante apoio bibliográ£co a Coleção do Professor de Matemática, editada pela SBM, bem como a Revista do Professor de Matemática.

Procurou-se enfatizar tanto o potencial do uso de aplicativos computacionais (em particular, CAPRI, MAPLE, EXCEL, WINPLOT) como as limitações inerentes à simulação digital, £nita, para grandezas contínuas, in£nitas, cf.[MOURA]. A comunicação via correio eletrônico e a busca de informações na Web foi sempre incentivada. Em particular, o portal do curso[3] foi amplamente utilizado, contendo apostilas, exercícios, projetos, notas, referências bibliográ£cas.

Os Seminários dedicaram boa parte do tempo para a discussão e avaliação de textos didáticos, tendo como peça fundamental de discussão LIMA [2001].

[2]O presente texto, apesar de re¤etir pontos discutidos no decorrer do curso, ainda se encontra em fase de revisão pelos autores, a £m de expressar efetivamente idéias comuns.

[3]http://www.ime.uerj.br/˜ensinomedio

3. A prática

Uma das primeiras dúvidas surgidas foi a respeito do critério de seleção dos/as alunos/as cursistas. Por meio de um teste padrão de conhecimento poderíamos escolher os mais bem preparados entre os candidatos. Mas são exatamente esses a quem deve bene£ciar o projeto? Não seriam exatamente os não aproveitados que vão justamente continuar contribuindo para aqueles alarmantes índices negativos que mencionamos?

Os critérios utilizados no processo seletivo foram bem ¤exíveis – por exemplo não se estabeleceu uma nota mínima – conduzindo-o a um papel meramente classi£catório. Assim, ambas as turmas admitidas se caracterizaram por uma grande heterogeneidade. Não seria esse um aspecto positivo, apesar de provocar mais lentidão nas discussões e exposição do conteúdo previsto?

4. Considerações Finais

As avaliações dos/as cursistas foram obtidas a partir de provas escritas individuais e alguns projetos desevolvidos coletivamente. Consideramos o aproveitamento satisfatório, se medido em termos dos que permaneceram até o £nal. Deve-se indagar se, diante da heterogeneidade das turmas, padrões universais são justi£cáveis. O que se deve avaliar: aonde cada cursista chegou ou o que ele/a evoluiu?

O índice de desistência foi elevado, apesar de ter sido indicado pelas avaliações apresentadas pelos/as cursistas, ao £nal de cada trimestre, um desejo comum de que continuássemos a adotar o padrão, ritmo e conteúdo escolhidos. Esta foi uma indicação de que um projeto dessa ordem e com esses objetivos deve considerar a disponibilização de alguma forma de auxílio para os/as cursistas de modo a lhes permitir uma carga didática menor em suas instituições. De fato, essa deveria ser justamente a contribuição das escolas, onde eles/as trabalham, ao projeto.

Referências

KLINE, M. [1973] Why Johnny can't add: the failure of the new math. St. Martin's Press, New York.

SIAM J. [1995] ARIANE 5 - UM ERRO NUMÉRICO (OVERFLOW) LEVOU À FALHA NO PRIMEIRO LANÇAMENTO - Boletim SBMAC, Tradução de José Nivaldo Hinkel (http://www.sbmac.org.br)

MOURA, C.A. de (editor) [1999]: MATEMÁTICA: POR QUÊ e PARA QUÊ?, Ciência Hoje na Escola, Vol. 8, SBPC, Rio, Nov. 1999 (ISBN 85-86055-09-3).

MOURA, C.A. de [1980] SHAZAM, ESTE É UM TRABALHO PARA O A.N., Not. Soc. Bras. Matem. 9(2), p.11-27, Rio.

LIMA, E.L. (editor) [2001]: Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio; VITAE-IMPA-SBM.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 343:344
Artigo convidado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Artigo convidado 40

HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Eduardo Sebastiani Ferreira
UNICAMP
esebastiani@uol.com.br

1. Apresentação:

Todos os estudiosos da História de Matemática são unânimes em dizer que o Cálculo Diferencial foi "inventado" por Leibniz e Newton, de forma independente; mas, para que isso ocorresse, foi necessária toda uma evolução nos conceitos matemáticos. Newton bem disse que estava apoiado em ombros de gigantes. Para conhecer um pouco destes "gigantes", de que Newton falou, convidei a Profa. Sueli Rodrigues da UNICAMP, grande pesquisadora dos primórdios do Cálculo, que nos fala desde Arquimedes até Galileu, Fermat e tantos outros.

Quando Leibniz publicou seus dois artigos, que deram o nascimento de Cálculo, isto em 1684 e logo depois em 1687 Newton publica seu *Principia*, foi a grande revolução na Matemática, duas visões diferentes sobre os mesmos conceitos: uma estática e outra dinâmica. Para falar sobre este momento tão importante na História da Matemática eu convidei a Profa. Sandra Visokolski da Universidade de Córdoba na Argentina, uma das grandes especialistas de Newton que conheço.

Logo depois destes acontecimentos, inicia-se na Europa e na Inglaterra um grande movimento para colocar o Cálculo Diferencial à disposição dos estudantes, um primeiro livro é publicado por L'Hospital em 1696, fortemente criticado na Academie des Sciences de Paris, principalmente por Rolle, e na Inglaterra por Berkely. Fazia-se necessário colocar os conceitos usados no Cálculo em ordem, principalmente o de in£nitésimos, que ora eram considerados diferentes de zero e em outros momentos como nulos. Para comentar sobre este esforço matemático que se iniciou com Cauchy e só termina com Weirstrass, temos a Profa. Ìtala D'Otaviano, também da UNICAMP.

Essa história sempre para aí, mas para nós £ca sempre uma pergunta: E o que aconteceu no Brasil com esse estudo? Vem então a Profa. Circe Dynnikov, da UFES, grande historiadora da Matemática Brasileira para nos contar o que ocorreu no Brasil, como o estudo do Cálculo Diferencial foi introduzido no nosso país e mesmo como alguns matemáticos brasileiros pesquisarão este assunto, como, por exemplo, Souzinha.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 345:349
Artigo convidado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

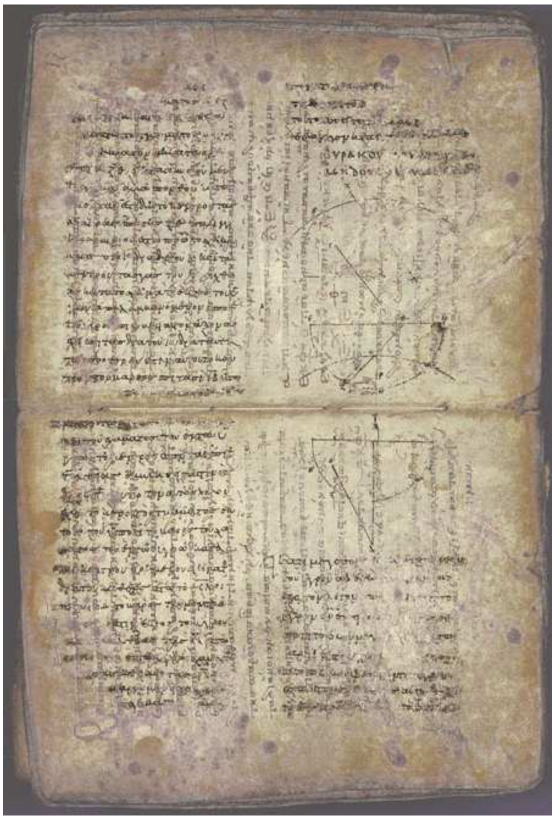
Artigo convidado 41

HISTÓRIA DO CÁLCULO PRECURSORES: ARQUIMEDES E A ESCOLA DE GALILEU

Sueli I. R. Costa
Instituto de Matemática - UNICAMP
13083-970 Campinas SP - Brasil
sueli@ime.unicamp.br

Arquimedes, que é considerado o mais importante dos matemáticos gregos e de toda antigüidade, viveu em Siracusa na Magna Grécia, onde hoje é a ilha de Sicília na Itália, de cerca de 287 AC a 212 AC. Há um certo consenso em se considerar como o importante marco inicial na história do Cálculo os trabalhos de Arquimedes e muito especialmente "O Método que Trata dos Problemas Mecânicos". Muitas de suas impressionantes descobertas foram feitas a partir de concepções inspiradas na equivalência e equilíbrio de modelos físicos. A idéia do cálculo de áreas e volumes pelo processo de "atomização", o qual engendra o conceito de limite e de "in£nitésimos", e a associação com princípios físicos de equivalência e equilíbrio é descrita em "O Método".

Esta obra esteve desaparecida por mais de mil anos e só foi encontrada em 1906 em Constantinopla (hoje Istambul) pelo matemático dinamarquês J. L. Heiberg num palimpsesto da liturgia católica ortodoxa. O texto original raspado contém trabalhos de Arquimedes numa versão de um copista do século X. Cabe registrar que, como foi também bastante divulgado recentemente, este pergaminho desapareceu novamente da década de 1920 e reapareceu num leilão em 1998 onde foi vendido de uma família francesa para um anônimo americano que o tem disponibilizado para pesquisa através de uma fundação. Através das novas tecnologias foi possível descobrir no palimpsesto um outro texto de Arquimedes até então desconhecido que parece ser o primeiro registro de resultados em Combinatória (associados ao "Stomachion") que tem sido



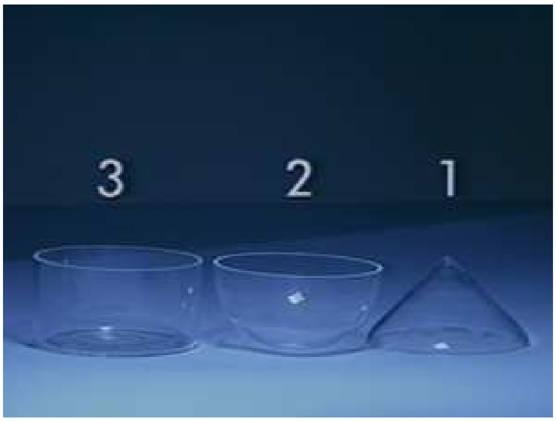
estudado por R. Netz da Universidade de Stanford, E.U.A.

Em “O Método” Arquimedes descreve seu método de descoberta de resultados que posteriormente foram por ele provados pelo método da exaustão, o qual também abriga a noção de limite através da aproximação de uma £gura por outras “menores” e “maiores” de área conhecida. Arquimedes menciona em seus trabalhos seus antecessores Demócrito, (c. 460 - c.370 AC, que concebeu um cone como decomposto em fatias e expressou seu volume) e Eudoxio, (c. 408 – c. 355 AC, mentor do método da exaustão).

O historiador Plutarco (c.50 – 100 DC) relata de maneira épica as descobertas e inventos de Arquimedes principalmente nas estratégias de defesa de Siracusa durante a guerra púnica (216-212 AC), ao £nal da qual ele foi morto por um soldado do general Marcelo, e descreve a inscrição que teria sido feita em seu túmulo ilustrando um de seus resultados favoritos: A relação entre os volumes de uma esfera e um cone inscritos em um cilindro..

Propondo o que viria a ser formalizado como o princípio de Cavalieri, Arquimedes argumenta que a soma dos volumes da semi-esfera e do cone deveria ser igual ao volume do cilindro (uma vez que as fatias correspondentes da esfera e do cone se equilibravam com a fatia do cilindro). Como o volume do cone é 1/3 do volume do cilindro ele concluiu que a proporção entre os três volumes teria que ser 3 : 2 : 1.

Arquimedes tinha muita consciência que a forma com que concebera os resultados



era mais importante do que própria prova destes. É interessante transcrever trechos da introdução de "O Método", que é endereçada a Eratóstenes (c.276 – c. 196 AC), ele também um grande matemático (foi quem estimou pela primeira vez a medida da circunferência da Terra) e diretor da biblioteca de Alexandria.

De Arquimedes a Eratostenes
Saudações

....

Acreditei ser oportuno con£ar-te por escrito ... as características de um método segundo o qual será possível abordar a investigação de certas questões matemáticas através da mecânica. Algo que além disto estou convencido que não é menos útil que a demonstração dos teoremas.

...

que pode representar uma contribuição não pouco proveitosa à investigação matemática, pois suponho que alguns de meus contemporâneos ou sucessores chegarão a encontrar pelo método exposto resultados que não me tenham ocorrido.

.

Estas idéias de Arquimedes foram tão férteis que in¤uenciaram o desenvolvimento do Cálculo e, em geral, de grande parte da Matemática como a concebemos hoje . Destacamos a seguir duas seqüências importantes destas idéias.

Pappus (Alexandria – sec. III DC) em sua "Coleção" (Sinagoga) descreve muitos dos resultados de Arquimedes e estabelece na mesma linha de pensamento duas novas proposições relacionando volumes e áreas de superfícies de revolução ao centro de massa ou centroide de £guras (conceito este também utilizado por Arquimedes).

No período do Renascimento os trabalhos de Arquimedes são reintroduzidos na Europa. As primeiras traduções na Itália datam de 1460, estimulam novos desdobramentos e tem uma importância capital no desenvolvimento de resultados que possibilitarão o advento do Cálculo Diferencial e Integral no século XXVII . Um grande destaque deve ser dado ao que chamamos Escola de Galileu (1564 –1642) na qual incluímos seus antecessores, contemporâneos e discípulos. Embora Galileu não seja conhecido por contribuições especí£cas e signi£cativas em matemática, ele teve um papel crucial na disseminação e estímulo ao desenvolvimento de conceitos que possibilitaram o advento do Cálculo. Em seu "Discorsi e Demonstrazioni Matematiche in Torno a due Nuove Scienze attenneti alla Mecanica ed ai Movimenti Localli", 1638, enaltece a importância e cita resultados de Arquimedes muitas vezes e menciona em especial um seus contemporâneo, Luca Valério (1552-1618) como prosseguidor destes resultados. Algo particularmente interessante no livro de Galileu acima citado é a menção cheia de "contornos" que ele faz aos indivisíveis, os quais haviam sido considerados heréticos pelo Concílio de Constança. O papel da inquisição na Itália no possível tolhimento de outros desenvolvimentos nesta direção parece pois relevante.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) que foi discípulo de Galileu e professor na Universidade de Bolonha, também in¤uenciado por Kepler, assume amplamente os indivisíveis e estabelece o princípio que leva seu nome em 1635 em seu "Geometria Indivisilibus Continuorum" (Figuras planas de mesma altura e com segmentos transversais correspondentes de mesmo comprimento tem mesma área . Da mesma forma, sólidos de mesma altura com secções transversais de mesma área têm o mesmo volume).

O espetacular desenvolvimento da Ciência na Europa do século XVII está associado ao grande intercâmbio e difusão de idéias. A in¤uência dos trabalhos de Arquimedes e suas continuidades pela Escola de Galileu é notória e pode ser detectada por exemplo na grande correspondência de Cavalieri com os matemáticos franceses que in¤uenciaram Leibniz e nos leituras e contatos feitos pelos matemáticos ingleses predecessores de Newton (Wallis, Barrow e Gregori)

Neste encontro que engloba história e tecnologia destacamos a emblemática inspiração que tem sido para nós o Arquimedes de "O Método" e seus seguidores tanto na concepção de Matemática como na proposição de projetos de investigação pelos alunos de Cálculo, com a utilização de recursos computacionais.

Ao propormos temas interdisciplinares, a discussão de possibilidades e o estabelecimento de conjecturas através da experimentação e visualização, que posteriormente poderão eventualmente ser provadas estaremos de alguma forma em forte sintonia com os argumentos arquimedianos.

Algumas Referências:

- T.L.Heath, *The Works of Archimedes*, Dover, 1953.
- C.H.Edwards, *The Historical Development of the Calculus,* Springer, 1982.
- S. Stein, *Archimedes, What Did He Do Besides Cry Eureka*, The Math Assoc. of America, 1999.
- S. Costa, M.A.Grou e F. Passos, *Pela Trilha de Arquimedes*, Programa de Vídeo, Editora da Unicamp, 2001.
- Galileu Galilei, *Duas Novas Ciências* (Tradução de "Discorsi e Demonstrazioni Matematiche in Torno a due Nuove Scienze attenneti alla Mecânica ed ai Movimenti-Localli", 1638) Inst. Cultural Ítalo-Brasileiro, 1988.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 351:355
Artigo convidado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Artigo convidado 42

HISTÓRIA DO CÁLCULO PÓS LEIBNIZ E NEWTON

Itala M. Loffredo D'Ottaviano
Grupo de Lógica Teórica e Aplicada CLE/IFCH
UNICAMP
itala@cle.unicamp.br

Os matemáticos suíços Jakob Bernoulli [1654, 1705] e Johann Bernoulli [1667, 1748], irmãos, que mantiveram assídua correspondência com Leibniz, foram os seus primeiros divulgadores. Johann, o mais talentoso, foi professor do Marquês Guillaume F. A. de l'Hospital [1661, 1704], entre 1690 e 1692, a quem teria cedido, por via de um obscuro acordo, descobertas que seriam usadas na redação do primeiro livro sobre o cálculo in£nitesimal, **l'Hospital 1696** (**Analyse des in£niment petits pour l'intelligence des lignes courbes**). Apesar da pendência sobre a produção intelectual de resultados contidos neste livro, a realidade é que **l'Hospital 1696** dá o melhor tratamento, até então, ao caráter inconsistente das quantidades in£nitesimais. Isto se revela, imediatamente, na axiomatização por ele utilizada.

Tendo o cálculo diferencial e integral sobrevivido às críticas iniciais, restava a tarefa de consolidá-lo, o que signi£cava estabelecer conceitos e princípios claros e rigorosos, inclusive para justi£car a existência e propriedades dos in£nitésimos, sobre os quais fora edi£cado. Mas isso não seria conseguido, pelo menos no prazo desejado pelos matemáticos do século XVIII.

Já com a teoria de limites despontando no horizonte matemático, Augustin-Louis Cauchy [1789, 1857] faria, sem sucesso, uma das últimas tentativas da época para conseguir essa fundamentação, tratando os in£nitésimos não mais como quantidades £xas, mas como variáveis tendendo a um limite, particularmente a zero. Concentrando-se, então, na emergente teoria de limites, Cauchy, em **Cauchy 1821** e **Cauchy 1826**, introduz importantes resultados sobre continuidade e convergência de funções, bem como sobre séries, diferenciação e integração, e em **Cauchy 1829** introduz as variáveis complexas e funções complexas, tornando-se, com isso, o grande precursor do novo cálculo diferencial e integral.

Mas os contornos de£nitivos desse novo cálculo seriam traçados por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass [1815, 1897], com sua aritmetização, através da qual problemas remanescentes dos trabalhos de Cauchy seriam sanados. Em particular, a Weierstrass se creditam a de£nição rigorosa de limite através dos ε's e δ's, e as correspondentes de£nições de continuidade, diferenciabilidade e outras noções a£ns. A publicação de sua extensa obra, pela qual é considerado o pai da moderna análise, só é iniciada, no entanto, nos últimos anos de sua vida, mais precisamente em 1894. Entre os poucos artigos publicados em vida, destaca-se **Weierstrass 1854**, no qual introduz a teoria de *funções abelianas*. Foi através de cursos, basicamente, como os ministrados na Universidade de Berlin, nos períodos de 1859-1860 (*Introduction to analysis*), e 1860-1861 (*Integral calculus*), que divulgou grande parte de seus resultados inéditos sobre séries, funções periódicas, funções elípticas, funções abelianas, cálculo de variações, etc. Suas obras completas são editadas entre 1894 e 1927 (**Weierstrass 1894-1927**), com uma reedição em 1967.

Muitos outros grandes matemáticos colaborariam, de forma signi£cativa, na construção, aperfeiçoamento e consolidação do cálculo diferencial e integral com base na teoria de limites, como Carl Friedrich Gauss [1777, 1855], Bernard Placidus J. N. Bolzano [1781, 1848], Augustus De Morgan [1806, 1871], George Boole [1815, 1864], Leopold Kronecker [1823, 1891], Julius W. R. Dedekind [1831, 1916], Georg Cantor [1845, 1918], David Hilbert [1862, 1943] e Georg F. B. Riemann [1826, 1866], entre outros. Destacamos, entre estes, Cantor, com sua teoria do in£nito e resultados sobre números ordinais e cardinais, indispensáveis tanto para a lógica quanto para a matemática contemporânea.

Porém, o retorno - de£nitivo, ao que parece - dos in£nitésimos ao cenário da matemática, deve-se a Abraham Robinson [1918, 1974], que em **Robinson 1996** (edição revisada da primeira edição publicada em 1996) apresenta uma nova teoria para a análise matemática, baseada nos in£nitésimos e com o uso da teoria de modelos, à qual denomina *análise não-standard*. Segundo suas palavras, no prefácio de **Robinson 1996**, essa obra foi esboçada em 1960, tendo sido suas idéias iniciais apresentadas, em novembro do mesmo ano, em seminário realizado na Universidade de Princeton, nos Estados Unidos, depois, em janeiro de 1961, no encontro anual da *Association for Symbolic Logic*, e posteriormente em **Robinson 1961** (**Non-standard analysis**, *Proceedings of the Royal Academy of Sciences of Amsterdam*).

Pin 1987 analisa as críticas históricas ao método das ¤uxões de Newton e, especialmente, às idéias de Leibniz, e conclui que a redenção de Leibniz vem, de certo modo, através de Abraham Robinson, em sua análise não *standard*:

El Análisis no-standard viene a otorgar razón a la intuición de Leibniz, a legitimar su instalación en la aporía y, al tiempo, redimile de ella, a procurar un modelo en el que dos magnitudes que di£eren por una magnitud in£nitamente pequeña son - en el registro al menos, que interesaba a Leibniz - equiparables entre sí, sin que ello excluya a tal diferencia del concepto propio de magnitud (p.101).

Trabalhos de lógicos, matemáticos e £lósofos de vários países, em particular do Brasil, e o crescente interesse da comunidade cientí£ca internacional pelas lógicas não-clássicas, notadamente pelas lógicas paraconsistentes, têm contribuído para o advento de novas teorias baseadas nessas lógicas – em particular do cálculo diferencial paraconsistente -, e a expansão de seus campos de aplicação.

Em 1963, Newton Carneiro Affonso da Costa introduz suas hierarquias de cálculos proposicionais paraconsistentes $C_{n,}1\leq n\leq \omega$, de cálculos de predicados e de cálculos de descrições (**da Costa 1963, 1963**^{a} e **1974**).

Da Costa 1986 introduz a teoria paraconsistente de conjuntos CHU$_1$, que tem como lógica subjacente o sistema C_1 de da Costa e é obtida a partir da teoria clássica da conjuntos CHU de **Church 1974,** que estende, por sua vez, a teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel (ZF).

O sistema CHU$_1$ é bastante adequado para o desenvolvimento de teorias matemáticas não-clássicas, em particular para a construção de um cálculo diferencial paraconsistente, como proposto por da Costa.

Mortensen 1995 (Inconsistent mathematics), tendo como lógicas subjacentes lógicas paraconsistentes distintas de C_1, introduz um cálculo diferencial paraconsistente. O cálculo diferencial paraconsistente que estamos desenvolvendo com o estudante de Doutorado Tadeu F. Carvalho, desenvolvido a partir de princípios estabelecidos por Leibniz e l'Hospital para os in£nitésimos, utiliza o formalismo lógico e conjuntista de da Costa, e tem como teoria de conjuntos subjacente à teoria CHU$_1$. Inclui a construção de uma extensão algébrica **A** para o anel R dos números reais, denominada um *hiperanel*, com o acréscimo de elementos in£nitesimais aos elementos de R; e de uma outra extensão algébrica para **A**, **A***, que denominamos um *quase anel*, que contém, além dos elementos de **A**, também elementos in£nitos. Construímos superestruturas paraconsistentes sobre o hiperanel **A**, e o quase anel **A**^{q} - requisitos essenciais para a introdução de um Teorema de Transferência entre o cálculo diferencial clássico e o cálculo diferencial paraconsistente, que obtivemos recentemente - utilizamos elementos da análise não *standard*, introduzidos por **Robinson 1996, Robinson & Zakon 1967** e **Stroyan & Luxemburg 1976**.

Fora do contexto puramente matemático, como é o caso da *física quântica*, há conjecturas que, em se con£rmando, di£cilmente encontrarão no cálculo diferencial clássico o ferramental adequado, ou su£ciente, para o tratamento matemático exigido. Não é nova esta questão, como ilustra o trecho abaixo, transcrito de uma mensagem de Einstein, encaminhada ao Secretário da Royal Society, por ocasião do bicentenário da morte de Isaac Newton, e que pode ser lida em **Pais 1995**:

É apenas na Teoria Quântica que o Método Diferencial de Newton torna -se inadequado, e de fato, a causalidade falha. No entanto, o último veredicto ainda não foi pronunciado. Possa o espírito do método de Newton dar-nos o poder para restabelecermos a concordância entre a realidade física e a característica mais comum dos ensinamentos de Newton - a causalidade estrita.

Referências

CAUCHY, A. L. Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique 1er. partie (analyse algébrique).**Oeuvres complètes 2**, v.3. Paris, 1821.

? Résumé des leçons sur le calcul in£nitésimal / Leçons sur le calcul différentiel. **Oeuvres complètes 2**, v.4. Paris 1826 /1829.

CHURCH, A.A formulation of the simple theory of types. *Journal of Symbolic Logic*, v.5, p.56-68, 1974.

da COSTA, N.C.A. **Sistemas formais inconsistentes**. Tese, Curitiba: Ed. UFPR, 68 p., 1963.

da COSTA, N.C.A. Calculus propositionels pour les systèmes formels inconsistents. *Comptes rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, n.257, p.3790-3793, 1963a.

da COSTA, N.C.A. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.15, n.4, p. 497-510, 1974.

da COSTA, N.C.A. On Paraconsistent Set Theory. *Logique et Analyse*, v.115, p. 361-371, 1986.

.

DE l'HOSPITAL, G.F.A. **Analyse des in£niment petits pour l'intelligence des lignes courbes**. Paris, 1696.

D'OTTAVIANO, I.M.L. On the development of paraconsistent logic and da Costa's work**.** *Journal of Non-Classical Logic*, v.7, p. 89-152, 1990.

D'OTTAVIANO, I.M.L, FEITOSA, H.A. História da lógica e o surgimento das lógicas não-clássicas. **Coleção História da Matemática para Professores** (Preprint). Sérgio Nobre (org.). Rio Claro: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2003.

LINTZ, R. **História da matemática**, v.1. Blumenau: Editora da FURB, 1999.

MORTENSEN, C. **Inconsistent mathematics**. Dortrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. (Mathematics and its Applications, v. 312)

PAIS, A. **Sutil é o Senhor** (A Ciência e a Vida de Einstein). Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira (2. ed.), 1995.

PIN, V.G. Ontologia e historia del calculus (la tarea de Abraham Robinson). *Theoria-Segunda Época* -Año II, p. 97-119, 1987.

.

ROBINSON, A. Non-standard analysis. *Proceedings of the Royal Academy of Sciences*, ser. A, n. 64, p. 432-440. Amsterdam: 1961.

ROBINSON, A. **Non-standard analysis** (Edição revisada da 1. ed. de 1966) Princeton: Princeton University Press, 1996.

ROBINSON, A., ZAKON, E. A set theoretical characterization of enlargements. *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*. C.I.T., Holt, Rinehart and Winston, p. 109-122, 1967.

STROYAN, K.D., LUXEMBURG, W.A.J. **Introduction to the theory of in£nitesimals**. New York: Academic Press (1.ed.), 1976.

WEIERSTRASS, K.T.Z. Zür theorie der abelschen functionen. *Crelle's Journal*. Berlin, 1854.

WEIERSTRASS, K.T.Z. **Matematische werke von Karl Weierstrass**. Berlin: Mayer & Müller, 1894-1927.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática

págs: 357:363
Artigo convidado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Artigo convidado 43

CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL NO BRASIL NO SÉCULO XIX

Circe Mary Silva da Silva
UFES
circe@npd.ufes.br

Resumo *O ensino do Cálculo Diferencial e Integral no século XIX surgiu no Curso Matemático da Real Academia Militar do Rio de Janeiro, em 1810. Desde seu início, apresentou uma forte in¤uência da bibliogra£a francesa, pois em 1812, foi traduzido para o português por Francisco Cordeiro da Silva Torres, docente da referida academia, a obra Tratado Elementar de Cálculo Diferencial e Cálculo Integral (edição de 1802) de Sylvestre Lacroix para ser usado como livro texto. Em 1842, foi redigida nova obra para o ensino do Cálculo: Elementos de Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral, segundo o sistema de Lacroix para uso da Escola Militar, por José Saturnino da Costa Pereira, senador do Império e lente da mesma escola. Pretende-se mostrar como os conceitos básicos do Cálculo como função, limite e derivada são apresentados na obra de José Saturnino da Costa Pereira.*

1. Introdução

De acordo com Dhombres, os historiadores da educação têm negligenciado os estudos sobre as relações educacionais entre as ciências, como ela é produzida e a sua popularização através do ensino. Os primeiros livros de Matemática, com conteúdos de Cálculo e Geometria Analítica, escritos na França visavam à formação de uma nova elite constituída por militares, engenheiros e industriais. Foi visando esse público que estes livros foram escritos e somente em segundo lugar a preparação de professores para as escolas. O surgimento desse manuais desempenhou um papel fundamental porque de certa forma uniformizou o ensino da Matemática. O mesmo ocorreu no Brasil, que teve na Academia Militar do Rio de Janeiro o centro de formação dessa elite. Nesta instituição, os livros-texto franceses tiveram grande repercussão. Os autores de maior sucesso, na França, foram no século XVIII, Etienne Bézout (1730-1783); Legendre (1757-1833) e Sylvestre Lacroix (1757-1833), no século XIX. Esses autores foram muito lidos também no Brasil. A indicação dos livros-texto na carta de Lei de 1810, que criou a Real Academia Militar no Rio de Janeiro, tornou o uso do livro-texto obrigatório, gerando assim uma situação similar à francesa, que segundo Dhombres justi£ca em certa medida o sucesso dos livros de Lacroix, que faziam parte das listas o£ciais de livros recomendados para as escolas.

Os docentes que se empenharam na dura tarefa de publicar os livros-texto para o ensino da Matemática, no Brasil, eram pessoas com diferentes atividades e formação: engenheiro, militar, escritor, jornalista, político e educador. Por exemplo, **Manoel Ferreira Araújo Guimarães** (1777-1838) era escritor, matemático, jornalista, político e professor. O visconde de Jerumirim, **Francisco Cordeiro da Silva Torres** (1775-1856), dividia suas atenções e interesses entre a engenharia e o ensino da Matemática, contribuiu muito para a construção das principais obras hidráulicas do Rio de Janeiro e traduziu e publicou em 1812 o primeiro livro-texto de Cálculo Diferencial e Integral de autoria de Lacroix destinado aos alunos da Real Academia Militar do Rio de Janeiro. Entre os primeiros docentes dessa Academia encontram-se além dos dois nomes já citados, **José Saturnino da Costa Pereira** (1773-1852). Ele permaneceu atuando nessa Academia vários anos, pois em 1837, encontramos um documento manuscrito, assinado por ele, em que faz uma análise dos livros-texto utilizados na Academia. Esse documento revela que os livros de Lacroix continuavam a serem utilizados bem como os livros de Legendre para Geometria e Trigonometria. A carência de livros para o Cálculo Diferencial e Integral, inclusive a edição já esgotada da tradução de Lacorix, deve ter motivado o autor a escrever a obra que foi publicada em 1842, mas que por "harmonia" deveria continuar a se apoiar na doutrina de Lacroix.

2. José Saturnino da Costa Pereira

A £m de darmos uma idéia de como os conceitos básicos do Cálculo Diferencial eram ensinados nas escolas militares até metade do século XIX, no Brasil, utilizaremos o livro intitulado "Elementos de Calculo Diferencial e de Cálculo Integral segundo o sistema de Lacroix, para uso da Escola Militar" de José Saturnino da Costa Pereira, que foi o documento principal de nossa análise.

José Saturnino da Costa Pereira (1773-1852), nasceu em Sacramento, atualmente cidade localizada no Uruguai e bacharelou-se em matemática pela Universidade de Coimbra. Retornando ao Brasil, exerceu, além da docência na Academia Militar, várias funções públicas: foi o£cial do corpo de engenheiros, pertenceu ao Conselho do Imperador, foi senador do império pela província de Mato Grosso, em 1828, em tornou Ministro da Guerra em 1837. Traduziu o *Tratado Elementar de Mecânica*, de Francouer e, como contribuição pessoal, anexou nele doutrinas extraídas de diversas obras de outros autores como Poncy, Bossut, Marie, etc. Traduziu também muitas obras de Lacroix. Publicou dezoito livros. Entre eles, uma obra dedicada ao imperador Pedro II, intitulada *Recreação moral e cientí£ca ou biblioteca da juventude* (1834-1839). Foi um escritor muito ativo, e suas obras abrangem além da Matemática diversas áreas: Lógica, Geogra£a, Astronomia, Ótica, História e Literatura.

O livro de Cálculo Diferencial possui 133 páginas, não contêm introdução, prefácio ou índice, mas apresenta duas páginas com £guras geométricas. Este livro foi impresso na Tipogra£a Nacional, no Rio de Janeiro em 1842. O texto matemático não nos dá pistas quanto a autores que se apoiou para a redação do texto, com excessão de Lacroix que é mencionado no título. Mas, teria sido unicamente esse autor? A formação de Pereira foi na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, que na época usava principalmente as obras de Bézout e que até 1821 continuava a usar os Elementos de Euclides como livro-texto para o primeiro ano do curso de matemática na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra (Actas das Congregações da Faculdade de Matemática (1772-1820), p. 188-189).

Para o autor, o objeto do Cálculo Diferencial é a indagação do limite de uma função. Todavia, esse conceito central para a fundamentação do Cálculo, que ele pretende apresentar, não é de£nido. Ele aparece de forma intuitiva e sem uma notação própria.

3. Desenvolvimento dos conceitos: limite e coe£ciente diferencial

O primeiro conceito apresentado é o de função e ele aparece relacionado à idéia de dependência entre variáveis e constantes:

"A palavra **função** denota a dependência que uma quantidade tem de outras, e que pode exprimir-se por equações; assim se diz que u é função de x, quando se pode ter uma equação em que se exprima a dependência que u tem de x; de maneira que , das mudanças dos valores de x, resultem as que devem ter os valores de u. Exprime-se que u é função de x pela forma u=f(x)" (Pereira, 1842, p. 1).

A in¤uência de Sylvestre Lacroix (1765-1843), autor francês de livros-texto que se popularizou na França no século XIX, é visível na formulação que Pereira apresenta.

Interessante é a maneira como ele introduz o conceito de limite. A partir de um exemplo de uma função linear ele começa suas considerações:

Seja a função u= ax, h um aumento que recebe x. Daí surge uma nova função u'=ax+ah. Fazendo a diferença entre u e u' e após dividindo por h tem-se $\frac{u'-u}{h} = a$.

"O limite da relação $\frac{u'-u}{h}$ é o valor que esta relação se aproxima a medida que diminue a quantidade h, de que podemos aproximar quanto quisermos" (p. 3).

Nenhum questionamento sobre a existência do limite é feito, da mesma forma em Lacroix.

Os termos aproximar-se, desvanecer eram usados livremente, sem qualquer melindre por Pereira e antes dele por Lacroix. Pereira diz que "Quando os crescimentos de uma função e da variável, de que ela depende diminuem ao mesmo tempo, sua relação não se desvanece, mas tende a um limite de que se aproxima por graus, e existe entre esse limite e a função, de que ele deriva, uma dependência mútua, que se determina uma pela outra reciprocamente (1842, p. 5)". Essa aproximação por graus não é comentada, assim como não se encontra nenhuma explicação para a expressão "...quantidades suscetíveis de se desvanecerem ao mesmo tempo, depois de terem passado por todos os graus de pequenez" (p. 9). Pereira não menciona o termo "in£nitamente pequeno", seguindo a tradição de Lacroix, que apenas em curta nota de rodapé faz referência a quantidades in£nitamente pequenas ("....é sobre esse princípio que Leibniz fundou o cálculo diferencial, considerando as diferenças como diferenças in£nitamente pequenas" (Lacroix, p.6).

O autor não aborda a questão da continuidade. O estudo da diferenciabilidade é feito junto com limites.

Para introduzir o conceito de diferencial, o autor vale-se de um exemplo:

Se $u = ax^3$ então $u' = ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3$.

Donde vem, $u' - u = 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3$

O primeiro termo de u'-u, isto é, $3ax^2h$ tem o nome de diferencial, com a notação du, assim

$$du = 3ax^2h.$$

Passando ao limite, deve-se dividir esta equação por h, mas antes substituindo a quantidade h por dx, isto é, $du = 3ax^2dx$ daí, após a divisão tem-se:

$$\frac{du}{dx} = 3ax^2$$

A primeira expressão $du = 3ax^2dx$ chama-se **diferencial** e a segunda expressão $\frac{du}{dx} = 3ax^2$ chama-se **coe£ciente diferencial**.

Após esse exemplo, introduz a de£nição de coe£ciente diferencial:

"O limite da relação dos crescimentos, ou o coe£ciente diferencial, se obtem dividindo a diferencial da função pela diferencial da variável; e reciprocamente, obtem-se a diferencial da função multiplicando o coe£ciente diferencial pela diferencial da variável" (p. 6).

Essa passagem ao limite é ainda algo misterioso. O limite ainda não é um conceito matemático independente, com uma de£nição própria, mas é algo sugerido pela intuição, a medida que h se aproxima de zero, a relação $\frac{u'-u}{h}$ aproxima-se de um valor, chamado o limite da relação. O limite é um valor e parece que sempre existe.

Lacroix e seu seguidor Pereira assumiram a tradição de Leibniz que utilizou o termo coe£ciente diferencial para a derivada. Felix Klein criticou a notação de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ para a derivada, bem como o termo coe£ciente diferencial porque a notação sugere que procedeu-se a um quociente de diferenças, mas não se está pensando em $\frac{dy}{dx}$ como um quociente no qual dy e dx tenham uma signi£cação própria e independente. Na visão formalista de Leibniz, era completamente indiferente o signi£cado real que pudessem ter as diferenciais, ou mesmo que não tivessem nenhum signi£cado, o que importava mesmo eram as operações com aquelas magnitudes que chegavam sempre a rsultados corretos.

Não há exercícios propostos, nem exemplos numéricos em todo o texto. Não aparece o conceito de continuidade explicitamente. Após apresentar a diferenciação de funções de uma variável, diferenciações sucessivas, diferenciação das funções transcendentes e diferenciação a duas variáveis, o autor mostra como o conceito de coe£ciente diferencial se aplica a teoria das curvas.

4. Considerações £nais

A introdução do Cálculo Diferencial e Integral como disciplina do Curso Matemático da Academia Militar do Rio de Janeiro e posteriormente na Escola Central, seguiu uma trajetória um pouco diferente daquela da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, fundada em 1772, que orientou-se fortemente nos livros de Bézout. Segundo relatório do reitor, Francisco Lemos, de 1777, o livro adotado para a disciplina do segundo ano (Cálculo Diferencial e Integral) era o compêndio de Bézout. E ainda nos diz Franscisco Gomes Teixeira (1851-1933), matemático português, que foi José Monteiro da Rocha, um dos primeiros docentes de matemática da referida faculdade que traduziu os "Élements d'Analyse mathématique" de Bézout e que esta foi publicada em edições de 1775, 1785 e 1812 (Teixeira, 1934, p. 229). Embora os primeiros docentes do curso matemático da Real Academia Militar no Rio de Janeiro tenham obtido sua formação quase que exclusivamente em Portugal, e portanto tenham estudado pelos livros de Bézout, eles não trouxeram esta tendência para o ensino na Academia Militar. As traduções dos livros de Lacroix, bem como o livro de Saturnino Pereira que segue o modelo de Lacroix foram os livros adotados na Academia. O conceito de derivada introduzido nesses livros ainda não apresentava uma fundamentação adequada. O mesmo pode-se dizer a respeito dos conceitos de função, limite e continuidade. Relativamente às regras de derivação não havia nenhuma di£culdade na sua demonstração e utização. Percebe-se que Lacroix e seus seguidores foram in¤uenciados por Lagrange, preferindo utilizar sua linguagem, e tratando o cálculo o mais algebricamente possível. Os in£nitamente pequenos não são abordados e a derivada é entendida como um coe£ciente diferencial, sendo para isso adotada a notação de Leibniz $\frac{dy}{dx}$.

Estamos conscientes de que é necessário que as pesquisas sobre esse tema se ampliem para que possamos falar com mais profundidade do real ensino da Matemática nas escolas militares e de engenharia, no século XIX. Usamos como referencial os livros didáticos, que é um dos parâmetros do ensino, mas não é certamente o único.

Referências

ACTAS DAS CONGREGAÇÕES DA FACULDADE DE MATEMÁTICA (1772-1820). Coimbra: Coimbra Editora, 1982.

CAMARGO, A. M. A. ; MORAES, R. B. **Bibliogra£a da Impressão Régia do Rio de Janeiro**. São Paulo: EDUSP/Kosmos, 1993.

CAUCHY, A. **Résumé des Leçons donnés a l'École Royale Polytechnique, sur le Calcul Ini£nitésimal.** Paris: De L'Imprimerie Royale, 1823.

COURANT, R. **Cálculo Diferencial e Integral**. Porto Alegre: Editora Globo, 1970.

DHOMBRES, J.French Mathematical Textbooks from Bézout do Cauchy . In. **Historia Scientiarum**, n28, (1985).

GUICCIARDINI, N. Three traditions in the calculus: Newton, Leibniz and Lagrange. In: **Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of Mathematical Sciences**. Ed. (Ivor Grattan-Guinness). Londres: Routledge, 1992.

LACROIX, S. **Tratado Elementar de Cálculo Diferencial e integral**. (Tradução de Francisco Cordeiro da Silva Torres Alvim). Rio de Janeiro: Impressão Régia, 1812.

____. **Traité Élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral**. Paris: Gauthier-Villars, 1867.

LAGRANGE, L.. **Theorica das Funções Analíticas**. (Tradução de Manoel Jacinto Nogueira da Gama). Rio de Janeiro: Impressão Régia, 1812.

LEMOS, F. **Relação geral do estado da Universidade (1777)**. Coimbra: Atlândida Editora, 1980.

PEREIRA, J.S.C. **Elementos de Calculo Diferencial e de Calculo Integral: segundo o systema de Lacroix.** Rio de janeiro:Typogra£a Nacional, 1842.

____. manuscrito códice IG^3-5. de 2 de junho de 1837 (Arquivo Nacional).

SILVA, C.M.S. A Primeira Faculdade de Matemática. In: **Perspicillum**, vol. n.l, novembro 1994.

____. O conceito de derivada no ensino da matemática no Brasil do séc. XIX. **Actas** do ICME-8 Satellite meeting of the International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics. 24-30 julho 1996, Braga, p. 80-87.

SILVA, 1. F. **Dicionário Bibliográ£co Português: estudos de Inocêncio Franciscoda Silva aplicáveis a Portugal e Brasil**. Tomo segundo. Lisboa. Imprensa Nacional, 1859.

TEIXEIRA, F.G. **Histórias das Matemáticas em Portugal**. Academia das Ciências de Lisboa. Lisboa: Imprensa da Universidade, 1934.

IHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 365:366
Artigo convidado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Artigo convidado 44

CONEXÕES ENTRE CONHECIMENTOS E SABERES EM AMBIENTES INFORMATIZADOS: A MEDIAÇÃO DO PROFESSOR

Lulu Healy e Ana Paula Jahn
Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática
PUC/São Paulo
{lulu, jahn}@pucsp.br

Considerações de pesquisas recentes sobre o papel da tecnologia na Educação Matemática têm destacado a importância de contemplar as complexas inter-relações entre todos os elementos do sistemas de aprendizagem integrando tecnologia. Estes elementos incluem, entre outros: o domínio matemático e sua estrutura epistemológica; os recursos trazidos pelos aprendizes; as possibilidades e limites da própria tecnologia; a estruturação didático-pedagógica dos sistemas de aprendizagem pelo professor no contexto de uma dada instituição. Em geral, embora com reconhecida importância, a in¤uência deste último elemento na construção de signi£cados matemáticos pelos aprendizes não tem sido documentada de forma tão extensiva como os demais. Nesta contribuição, pretendemos, baseados em duas pesquisas – uma envolvendo a modalidade presencial e a outra *a distância* – abordar aspectos que ampliam os questionamentos sobre a mediação do professor em ambientes informatizados. Mais precisamente, para estudar como as intervenções do professor podem in¤uenciar nas interações dos aprendizes com noções matemáticas, buscamos comparar duas abordagens instrucionais. Tais abordagens foram desenvolvidas com base em uma importante diferença entre perspectivas construtivistas e aquelas apoiadas na ideologia sociocultural. A primeira – £lling-outwards (FO) – enfatiza um ¤uxo no qual conhecimentos pessoais evoluem gradualmente na direção de saberes institucionalizados. A segunda – £llinginwards – é caraterizada por um ¤uxo na direção contrária, de saberes institucionalizados para conhecimentos individuais.

Os resultados obtidos quando esta comparação se realiza em um sistema presencial sugerem que a mediação do professor acontece de forma inter-relacionada às particularidades das ferramentas tecnológicas disponíveis – alguns exemplos serão apresentados para ilustrar estas relações. No caso de sistemas *a distância*, a questão não é apenas como diferentes abordagens interferem nos signi£cados construídos pelos aprendizes, mas também se as ferramentas disponíveis possibilitam, para todos os participantes, formas de expressar seus conhecimentos no processo de evolução destes.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 367:382
Artigo convidado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Artigo convidado 45

MATEMÁTICA E SOCIEDADE

Francisco Duarte Moura Neto
Instituto Politécnico
Campus Regional de Nova Friburgo
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
fmoura@iprj.uerj.br

Resumo *Apresento algumas idéias em defesa da conveniência social de intensi£car a difusão da matemática, a partir do seu ensino, como forma de capacitar os cidadãos a lidar com questões complexas e a contribuir com o aprofundamento da democracia. Inicio re¤etindo sobre a gênese da matemática através da abstração e da honestidade metodológica (rigor). Em seguida considero a questão da relação da matemática com a sociedade através do mercado, da informação, do aprofundamento da democracia e da pesquisa. Justi£co a natureza ímpar da investigação baseada em modelos matemáticos e por £m concluo que a sociedade contemporânea deve apoiar o ensino de matemática, com vistas ao seu aperfeiçoamento.*

Palavras-chave *Ensino de matemática, sociedade contemporânea, informação, mercado, democracia, modelos matemáticos, pesquisa.*

"O objetivo £nal de uma aula deveria ser formar futuros pesquisadores, e não decoradores de matéria."
Stephen Kanitz, 2003.

"...a verdadeira e inexpugnável glória de Deus começa onde termina a linguagem."
Luis Fernando Veríssimo, 2003.

1. Abstração

1.1 Linguagem

Corro rápido, tropeço, estou caindo. Meus braços se lançam para a frente para amparar o meu corpo e minimizar o trauma da queda. Nenhuma palavra foi dita e ainda assim há uma mobilização dos braços e mãos para a proteção do meu eu total. Sou um sistema integrado e cooperativo de monitoramento sensorial, comunicação e£ciente e pronta atuação.

Registro impressões: coloco a mão na água o que me provoca sensações — quente, agradável, fria. Aprendo e me recordo. Palavras não as uso.

E palavras, para quê? Os seres humanos se organizam em sociedade e é vantajoso se comunicarem. Essa comunicação não é interna (dentro de algum eu), pré-existente, e tem que ser construída — a linguagem surge. Esta serve para disseminar as informações do presente e combinar as ações do futuro. A partir dela, se relatam as experiências e as vivências que são repassadas como memória coletiva. A glória da sociedade começa na linguagem.

As palavras — sons imprecisos conectados a uma abstração — nomeiam e substituem as coisas. As palavras começam a se relacionar e surge a noção de modelo (verbal) que se espelha na realidade. Devido à constância do uso e à busca da honestidade na linguagem, ter chegado à matemática foi um passo.

1.2 A£nal, o que é abstração?

Há uns anos atrás, para se pagar uma conta em um banco, tinha-se que escolher um caixa. Que escolha difícil. Se eu escolhesse a £la 'errada' £cava muito mais tempo do que se tivesse ido para a £la do caixa ao lado, a 'certa', que diminuía rapidamente. Era tal qual o que acontece ainda hoje em supermercados.

A introdução da £la única foi um avanço. Não sei quem teve a idéia, mas julgo que tem a aceitação da maioria das pessoas. Inicialmente, a organização e manutenção da £la única era proporcionada por postes de 0,80m de altura e cordas interligadas. Mas o brasileiro é 'matemático', adora economia, 'logo' adora abstrações e pintou a £la única no chão. Substituiu a materialidade da £la única pela sua essência lógica — é genial, é abstração, no fundo isso é matemática.

1.3 Uma otimização invisível

É possível que a forma primitiva de contagem fosse um procedimento não-lingüístico em que se estabelecesse uma relação biunívoca entre dois conjuntos materiais. Por exemplo, contava-se o número de integrantes de uma tribo estabelecendo-se uma correspondência biunívoca entre estes e os dedos das mãos e dos pés de um indivíduo — deve ser por isto que as palavras dígito e dedo têm a mesma raiz.

A forma primitiva de contar seria um complicador nos processos de troca. Emparelhar dois a dois vários jarros de azeite e galinhas para realizar uma grande troca seria um tanto inconveniente.

De tanto o processo de contagem primitivo ser repetido em tempos remotos, sua essência foi abstraída introduzindo-se o conceito de número: o processo de contagem de elementos de um conjunto de objetos materiais passa a ser o estabelecimento de uma correspondência biunívoca entre o dito conjunto e um conjunto abstrato, o conjunto dos números naturais, $I\!N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Desta forma, o processo de contagem moderno, que utiliza o conjunto dos números naturais, é um *modelo matemático* (lingüístico) do processo de contagem primitivo (material).

Há indícios que levam a crer que o grau de conhecimento dos números que os povos primitivos tinham estaria em relação direta com as condições econômicas dos mesmos: quanto mais intensas e freqüentes eram as trocas comerciais entre tribos primitivas, maior era o conhecimento que detinham dos números [1]. Ora, se por um lado o volume de trocas comerciais propiciam o surgimento, maturação ou consolidação da noção de número, por outro lado, a posse desta ferramenta 'lubri£ca a máquina' ao permitir uma maior agilidade nas trocas comerciais.

Uma observação chave aqui é que a noção de número vem no sentido de **otimizar** as trocas comerciais porque torna e£ciente um dos processos subjacentes à troca, o processo de contagem.

Este é um aspecto sutil e de rara apreciação do qual a sociedade deveria estar ciente: através da abstração de procedimentos materiais (um jogo que a matemática pratica bem), a matemática é capaz de imprimir uma otimização fantástica, por vezes imperceptível, em diferentes situações. Não é à toa, claro, que a matemática tem uma tradição de vários milênios.

2. Argumentação

2.1 Distinção fundamental: o todo e a parte

Reconheço-me, separo-me do todo, sou uma parte — existo! (Claro: Penso, logo existo). Reconheço outras partes e partes de partes. E uma parte com partes reconheço como um todo. Além disso, sou capaz de falar sobre isso. Vou da matéria à linguagem (e logo, logo chego à matemática).

2.2 Método axiomático

A matemática, além da abstração de particularidades de objetos, também se debruça sobre formas de argumentação, procedimentos formais considerados corretos para se chegar a conclusões [8]. Uma forma de argumentação introduzida por Aristóteles é o silogismo, ilustrado aqui por um exemplo clássico: sabendo-se que Sócrates é um homem e que todos os homens são mortais, conclui-se que Sócrates é mortal.

A noção de silogismo tem um análogo natural, material, que a precede e a motiva. A matemática imita (abstrai) as relações do mundo sensorial. Materialmente, uma parte de uma parte de um todo é uma parte desse todo — reconheço isto — e este fato se consubstancia na linguagem como um silogismo. Sócrates é uma parte dos homens que por sua vez é uma parte dos mortais, o todo, e assim, Sócrates é uma parte do todo, isto é, dos mortais.

Considero um outro exemplo de como o mundo material in¤uencia (através da abstração) o 'mundo das idéias de Platão' — o mundo da linguagem precisa e dos métodos de argumentação honestos. Uma £leira de dominós colocados em pé e próximos uns aos outros de forma que a queda de um provoque a queda do outro é um exemplo material do qual o princípio de indução matemática é um modelo (lingüístico, abstrato).

A partir de uma postura de questionamento sem tréguas, profunda honestidade metodológica e busca de rigor, os gregos chegaram ao *método axiomático*, formato ainda hoje aceito de apresentação de teorias matemáticas. Partindo de conceitos primitivos não de£nidos e axiomas (a£rmações assumidas verdadeiras) constróem-se, por procedimentos simbólicos — procedimentos de argumentação, como, por exemplo, os silogismos — outras a£rmações verdadeiras ou teoremas.

A matemática lida com processos de dedução (de conclusões) — processos formais — a partir de premissas aceitas como verdadeiras (axiomas). Essas premissas procuram retratar algum aspecto da realidade. Se a adequação do processo formal de dedução é aceito, a correção de uma dedução pode ser veri£cada mecanicamente. Quando a conclusão se choca com a realidade que se procura verbalizar através da matemática, o que se questiona são as premissas. Este processo de modelamento é um exercício de raciocínio muito útil em situações práticas.

3. Vida em sociedade

3.1 Mercado

Um dos mecanismos de desenvolvimento das sociedades é a troca. A troca pode ser vista como um meio prático, expedito, de facilitar (intermediar) a cooperação na sociedade. Troca-se o milho colhido pelo fornecimento de água, pela manutenção da segurança ou pelo acesso à educação, etc.

A frase da *Sears Roebuck* 'Satisfação garantida ou o seu dinheiro de volta' enuncia de forma simples — denuncia — uma compreensão admirável de que uma troca tem que ser boa para os envolvidos. Expressa um princípio básico da vida em uma sociedade democrática: tem que ser igual para todos.

Para se realizar trocas justas, que só é possível com compreensão de causa, recorre-se a conceitos matemáticos. Às vezes contam-se os objetos alvo da troca, ou quem sabe determina-se a sua área, ou o seu volume, etc. Estes são conceitos abstratos, matemáticos. Quanto mais so£sticado o produto (por exemplo, um *palm-top*, uma hora de acesso à Internet) mais

complexas são as medidas adequadas para apreçar, de forma justa, o bem a ser trocado. Para o consumidor (ou a nação) interagir conscientemente com o mercado — de produtos cada vez mais complexos — precisa de matemática.

3.2 Informação e compreensão

Um conceito importante para entender informação é que esta pode ser dada por *extensão* — através de um banco de dados (BD) — ou por *compreensão* — através de um modelo matemático. Para ilustrar este ponto, assuma que lido com informações referentes ao preço de ampliação de fotogra£as coloridas.

Por extensão digo que 1 ampliação custa 5 unidades monetárias (u.m.), 2 ampliações custam 10 u.m., 3 ampliações custam 15 u.m., e assim por diante até, vá lá, 100 ampliações custam 500 u.m.. Denoto por C_n o preço de n ampliações. O BD[1] é dado abaixo:

• BD (extensão)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
C_n	0	5	10	15	20	25	30	35	$\cdots$

Por compreensão, digo que o preço de n ampliações é $5 \times n$ u.m., com $n \in I\!N$ e tenho um modelo descritivo ('cinemático'):

• Modelo descritivo (compreensão)

$$C_n \;=\; 5 \times n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

São claras algumas vantagens da informação ser dada por um modelo matemático em comparação com um BD:

1. Usando o BD, para se obter o valor de um certo número de ampliações, há que realizar uma busca no BD, que pode ser demorada. Já usando o modelo matemático há apenas que se realizar uma conta simples.

2. O BD pode, potencialmente, ocupar muito espaço de memória ao passo que o modelo matemático ocupa um espaço muito reduzido.

[1] Sempre o vemos em lojas de fotocópias.

A diferença essencial entre o BD e o modelo descritivo consiste na forma distinta de apresentar uma função: através de uma tabela (informação por extensão — BD) ou através de uma expressão analítica, (informação por compreensão — modelo descritivo).

Agora, considero a contribuição de Newton: modelos causais[2] ('dinâmicos') que capturam a informação também por compreensão.

Modelos descritivos, grosso modo, tratam de responder a perguntas do tipo: — *O que aconteceu?* ('What'). Já modelos causais se concentram em: — *Como aconteceu?* ('How')[3]. Neste caso, o modelo causal adequado traduz como o preço de $n+1$ ampliações é obtido, a partir de informação prévia:

• Modelo causal (compreensão)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_{n+1} & = & C_n + 5, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ C_0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Este exemplo é muito simples, mas quero frisar que o modelo causal é conceitualmente mais so£sticado que o modelo descritivo e este mais so£sticado que o modelo BD. De fato, todos os três modelos que apresentei estão conectados: a solução do modelo causal é dada analiticamente pelo modelo descritivo e explicitamente pelo BD.

Em suma, o modelo matemático é capaz de comprimir/compactar informação de forma não-trivial porque a compreende. Essa é uma diferença crucial em se lidar com informação usando modelos matemáticos ou não.

Em uma sociedade cada vez mais conectada através de canais de informação, há que prover os cidadãos com ferramentas adequadas para que possam compreender a informação.

3.3 Planejamento

A matemática imita o tempo e gera cenários a partir de modelos, gera o futuro e surge o planejamento — uma escolha, quem sabe ótima — pela abstração, pela linguagem. A sociedade ganha.

3.4 A matemática é democrática?

Em torno de 2000 a.C. os egípcios já possuiam certas noções de matemática. Para fazer um ângulo reto — útil na construção de pirâmides — os arquitetos amarravam 12 segmentos de corda (segmentos básicos) de mesmo tamanho, de sorte a fazer uma curva fechada. Ao forçar que essa curva fechada £casse na forma de três segmentos

[2]O modelo causal, no caso da astronomia, envolve a 2^a lei de Newton e a lei da atração gravitacional. Já o modelo descritivo é constituído pelas leis de Kepler e o BD é devido a Tycho Brahe.

[3]A pergunta — *Por que aconteceu?* ('Why'), Newton a desviou da atenção dos cientistas por crer ser esta um empecilho ao entendimento cientí£co, [3].

de reta interligados com comprimentos 3, 4 e 5 segmentos básicos, o ângulo oposto ao segmento de tamanho 5 seria reto.

Não há evidências que eles soubessem demonstrar os resultados matemáticos que conheciam, antes pelo contrário. Por exemplo, uma descrição algorítmica de como determinar o volume de uma pirâmide truncada termina com a seguinte 'justi£cativa' da validade do procedimento: 'Você encontrará o resultado certo' [2]. Isto parece indicar uma abordagem dogmática da matemática em uma sociedade autoritária como foi o Egito dos faraós em que os habitantes eram condicionados a uma obediência inquestionável aos governantes.

O formato atual de apresentação das teorias cientí£cas —o método axiomático — em particular e mais fortemente da matemática, é profundamente democrático. É passível de entendimento por todos. As regras são claras, as deduções compreensíveis. A familiaridade com essa forma de argumentação traz vantagens ao praticante. Capacita-o a evitar argumentos falaciosos, demagógicos. Passa a compreender que muitas das discórdias que indivíduos mantém acaloradamente, quando honestas, baseiam-se no fato que aqueles atribuem signi£cado diferente a palavras iguais ou signi£cado igual a palavras diferentes.

Que sociedade que pode prescindir de indivíduos capazes de entender se uma questão é semântica ou sintática? A matemática é um exercício que ajuda a perceber essa distinção.

A matemática é assim um instrumento poderoso de questionamento que permite um entendimento profundo de regras e suas conseqüências. Todos temos vivências que mostram que qualquer pessoa pode aprender matemática quando têm acesso a instrução matemática de alta qualidade. O domínio de sua técnica torna o indivíduo mais apto à cidadania plena e a ter uma postura mais democrática.

4. Investigação assistida por matemática

" — Arquimedes, esta coroa é de ouro?"

"(...) to £nd a shape of a bell by means of the sounds which it is capable of sending out."
Sir A. Shuster, 1882.

"Can one hear the shape of a drum?"
Marc Kac, 1966.

Decerto todos nós já nos deparamos com a resolução de problemas, mas talvez não de um ponto de vista matemático. Crianças adoram resolver problemas. "O que é o que é que atravessa o rio e não se molha?” *in* Rocha (1987)[4], [6]. Elas adoram a ambigüidade inerente aos problemas, uma das quais é que estes, geralmente, parecem admitir mais do que uma ou nenhuma resposta. Isso também fascina pesquisadores.

Abordo aqui, utilizando um exemplo bastante elementar, o carácter único e mais abrangente, da *investigação assistida por matemática* — da modelagem matemática, [7] O exemplo proposto talvez seja simples demais: seria importante construir um exemplo mais complexo para que a relevância da modelagem matemática pudesse ser mais bem compreendida, até mesmo pelos matemáticos.

Procuro enfatizar a necessidade do ensino de matemática levar em conta a visão de modelar. Apresento esta interface entre a matemática e suas aplicações, a *modelagem,* usando um exemplo em Álgebra Linear, e contrasto os assim chamados problemas direto e inverso.

4.1 Modelos

Considero um determinado sistema e quero estudar sua fenomenologia, seu comportamento. Penso o sistema como se fosse uma *caixa preta* cujo mecanismo interno desconheço, e que a um *estímulo (entrada/input)*, responde com uma *reação (saída/output).*

Meu objetivo é prever o comportamento da caixa (sistema) em diferentes situações. Assim, em particular, gostaria de responder as seguintes perguntas:

P_1: Dado um estímulo qualquer, antecipe a reação correspondente;

P_2: Conhecida a reação, determine que estímulo a provocou.

Qualquer pensador, observador, já se deparou com perguntas desta natureza. Quanto este aumento de salário diminuirá os atritos familiares? O que provocou a greve? etc.

Não estou, no entanto, interessado em previsões de natureza genérica, mas apenas naquelas baseadas em **descrições cientí£cas** do comportamento da caixa preta. Para tanto, associo à situação real, um modelo físico e um modelo matemático e farei previsões obtidas a partir deste. Quero explicitar a contribuição do ‘olhar’ matemático. Ele não exclui outras visões, ele complementa.

Por *modelo físico* entendo uma descrição dos fenômenos envolvidos utilizando conceitos como por exemplo, massa, energia, momento, carga, e transferências destes, etc. Em qualquer área de estudo haverão conceitos fundamentais no qual seu discurso é realizado. A esses conceitos continuo a chamar, por abuso de linguagem, de modelo físico.

Por *modelo matemático*, entendo qualquer tipo de objeto matemático, como por exemplo um conjunto com uma relação de equivalência, uma função, um espaço vetorial, um grupo, uma cadeia de Markov, uma rede neural, um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares, etc.

[4] A ponte, a sombra, ...

A metodologia que me guia na determinação de um modelo, aqui chamada de *modelagem*, nada mais é do que o *método cientí£co*, que apresento devidamente ornamentado por um jargão 'modernizante'.

Nas situações práticas reais busca-se escolher ou desenvolver um modelo matemático que melhor descreva o modelo físico adotado, desde que não entre em contradições com a situação real ou que não se desvie muito dos fenômenos envolvidos.

4.2 Detetive em ação: observar o 'rastro' do crime

Se quiser desvendar um crime, isto é prever o comportamento das pessoas em determinada situação, um detetive deve procurar traçar um cuidadoso per£l das pessoas e conhecer tanto quanto possível o episódio e as circunstâncias. Assim, deve ter em mente vários elementos do acontecimento, dos seus antecedentes, e dos seus desdobramentos, procurando buscar informação onde ela esteja disponível, o que, sensatamente, inclui o local do crime. Ele deverá observar, e experimentar (no sentido de fazer perguntas e analisar as respostas de pessoas relacionadas ao crime), e colecionar esse conhecimento factual.

Analogamente, devo ganhar intuição sobre o comportamento da caixa preta, e para tal inicio a *etapa observacional e experimental* do projeto. Aplico diferentes estímulos à caixa preta e anoto as respectivas reações.

Prossigo organizando os dados experimentais, de forma a prepará-los para a análise, formando o *banco de dados real ou experimental.* Isto é crítico posto que a forma de organizar realça determinados aspectos em detrimento de outros. Entre as diferentes formas de representar informação tem-se as tabelas, os diagramas, e os grá£cos.

É possível também montar um catálogo dos estímulos possíveis, bem como um outro das reações imagináveis.

Uma das vantagens que a construção de um modelo matemático da situação traz é poder responder às perguntas P_1 e P_2 formuladas anteriormente, bem como a outras perguntas que porventura surjam, sem a todo o momento recorrer à experimentação. Só pode pensar assim quem teve acesso ao aprendizado de matemática.

Por outro lado, o BD permite uma resposta a algumas perguntas e muitas pessoas £cariam satisfeitas com esse modo de resolver as questões. Então, porque construir um modelo matemático da situação? Entre os vários motivos possíveis, apresento três:

1. uma vez em posse de um modelo matemático da situação, é possível calcular-se baseado neste, candidatos a resposta para uma gama mais ampla de valores do estímulo. Fica assim à disposição um ambiente natural no qual diversos cenários e hipóteses podem ser gerados e testados rapidamente;

2. uma vantagem que se sobressai na modelagem matemática, é a *compactação* da informação como já comentado na seção anterior. De fato, a partir do modelo, £cam evidenciadas estruturas adicionais no banco de dados, e essa informação é su£ciente para substituir porções vastas deste mesmo banco, resultando efetivamente numa compactação, e isto signi£ca compreensão;

3. é possível dar-se um salto enorme em compreensão do fenômeno estudado através da construção de um modelo causal[5].

4.3 A arte da abstração: caracterização do modelo

Devo escolher um modelo adequado à situação e a este processo denomino de *caracterização* do modelo. Ressalto que este processo não é uma aplicação da matemática (não é a mera execução de um algoritmo); é sim, uma atividade *inteligente*, uma arte, que demanda uma educada sensibilidade para a sua melhor execução. De fato é isto tão verdadeiro, que, por vezes, nas situações mais so£sticadas ou novas, a etapa de caracterização pode necessitar o desenvolvimento de estruturas matemáticas ainda inexistentes.

Para caracterizar o modelo posso, por exemplo, me engajar em uma *análise exploratória de dados*, onde os 'contemplo' e inicio a formulação de relações simples entre os mesmos.

Para £car mais claro, retorno ao exemplo. Assuma que tanto o estímulo quanto a reação possam ser quanti£cados/descritos cada um deles por três medições que coleciono em vetores, o vetor *sinal de entrada*, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^t \in I\!R^3$, e o vetor *sinal de saída*,

$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^t \in I\!R^3$.

Evidentemente que descrever os sinais de entrada e saída como elementos de $I\!R^3$ faz parte da etapa de caracterização[6]. A construção de tabelas relacionando esses dados se constitui essencialmente no tipo de modelo mais simples, o modelo BD.

Uma análise exploratória de dados pode sugerir adotar como razoáveis as seguintes hipóteses adicionais sobre o funcionamento da caixa preta:

H_1 : Repetindo-se diversas vezes o mesmo sinal de entrada, o mesmo sinal de saída se consuma;

H_2 : Se o sinal de entrada for ampliado α vezes, ao sair pela caixa preta permanecerá ampliado pelo mesmo fator;

H_3 : Ao somar dois sinais na entrada, o sinal de saída será a soma dos sinais de saída de cada um dos sinais quando entrados individualmente.

Estas hipóteses encerram um exemplo de um *modelo físico* da situação real.

Matematicamente, a primeira hipótese signi£ca que a atribuição *entrada* $\rightarrow$ *saída* é uma função, que denoto por $\mathcal{F}$ e denomino-a função *comportamento* da caixa preta. Já as segunda e terceira hipóteses essencialmente caracterizam $\mathcal{F}$ como sendo uma função linear.

[5]Foi isso efetivamente que ocorreu com a astronomia a partir da contribuição de Newton.

[6]Note a natureza não seqüencial da modelagem. Antes mesmo de começar a anotar resultados experimentais, que tratei acima na montagem do BD espelhando-me na atividade de um detetive, já deveria ter começado a caracterizar o modelo!

Assim, a adoção destas hipóteses permite a obtenção de um modelo mais so£sticado do que o BD, um modelo descritivo.

Valendo as hipóteses, organizar os dados consoante serem dados de estímulo ou de reação, conforme sugeri antes, corresponderia, respectivamente, à construção do domínio e do contradomínio da função comportamento da caixa preta.

No exemplo, a caracterização do modelo é £nalizada assim que especi£co que o modelo matemático do comportamento da caixa preta é uma função e que ela é linear.

4.4 Processamento de dados: identi£cação do modelo

Sei que o modelo da caixa é uma função linear, mas desconheço qual delas é. De qualquer forma, se o estímulo é denotado por $\boldsymbol{x} \in I\!R^3$, a resposta $\mathcal{F}(\boldsymbol{x})$ será dada pelo produto $A\boldsymbol{x} \in I\!R^3$, onde A é uma matriz 3×3, que desconheço.

Estamos então em condições de de£nir uma terceira pergunta (que não é tão fundamental como as outras duas, mas que é instrumental na resposta àquelas):

P_3: A partir de um conjunto de dados, determine a matriz A.

Neste exemplo, a *identi£cação* do modelo é tão somente a obtenção de A, ou pelo menos a obtenção de uma aproximação da mesma. Diz-se também que é a *resolução do problema inverso*[7].

No exemplo considerado, é muito fácil identi£car o modelo. Assuma conhecidos os valores das reações aos estímulos $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, a base canônica de $I\!R^3$. Isto é, digamos que temos a informação contida no seguinte *banco de dados ideal*

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{a}_1, \quad \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{a}_2, \quad \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{a}_3. \tag{45.1}$$

Então, as colunas da matriz A são formadas pelas imagens dos vetores $\boldsymbol{e}_j$, $\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_j)$, para $j = 1, 2, 3$, isto é:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2) & \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}. \tag{45.2}$$

Se a Eq. (45.1) for conhecida, vê-se, pela Eq. (45.2), que a resposta à pergunta P_3 é mais do que automática. Não é assim, no entanto, que se responde a essa pergunta na prática. O contato entre o modelo matemático e a realidade (intermediado pelo modelo físico e pelos dados experimentais), ou seja, a introdução da realidade no modelo dá-se precisamente com a resposta à pergunta P_3, a partir de um banco de dados real e grande, proveniente de medições, com toda a ambigüidade que daí advenha, isto é, com todas as contradições entre os dados experimentais e as hipóteses H_1 a H_3 que porventura existam. A escolha dos critérios (por exemplo, mínimos quadrados), que nortearão esse contato ou ajuste, não se constitui em matemática. Mas, uma vez estabelecidos, sua aplicação é matemática, [7].

[7]—Qual designação adotar? Se você for estatístico talvez você pre£ra estimação (dos parâmetros) do modelo, ao passo que se você for um otimizador, você pre£rará dizer identi£cação, ou determinação se você for um experimentalista.

4.5 O ganho da investigação assistida por matemática

Note que as perguntas P_1 a P_3 são de natureza distinta. As perguntas P_1 e P_2 são perguntas legítimas/naturais de qualquer pessoa que tenha se debruçado sobre a questão do comportamento da caixa, ao passo que a pergunta P_3 já só a faz um 'modelador', ou seja, aquele que busca caracterizar ou criar um modelo para descrever o comportamento da caixa preta.

Esta distinção precisa ser compreendida e valorizada se se quer que a matemática deva ser ensinada. Uma outra vantagem que há em se construir um modelo matemático é que as perguntas P_1 a P_3 podem ser respondidas a nível do modelo, neste caso de forma muito simples, e é o que farei.

Para a primeira delas, dado $\boldsymbol{x}$, um sinal de entrada, a resposta se resume a calcular o produto $A\boldsymbol{x}$. Isto é, com o modelo descritivo, pode-se, em princípio, a partir de manipulações mecânicas (algoritmos), reconstruir o BD. Já a segunda é resolvida com o auxílio da inversa de A. Se $\boldsymbol{y}$ é a saída, a entrada que a provoca é: $A^{-1}\boldsymbol{y}$. A terceira pergunta, que consiste na determinação do próprio A, foi resolvida na Eq. (45.2).

Esquematicamente, mostramos na tabela abaixo a informação necessária às respostas, bem como o tipo de processamento que deve ser realizado. É costume denominar P_1 de *problema direto* e, em contraposição, P_2 e P_3 de *problemas inversos*.

Pergunta	Informação necessária	Resposta/Caracterização do processamento de informação
P_1	$(\boldsymbol{x}, A)$	$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$
P_2	$(\boldsymbol{y}, A)$	$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{y}$
P_3	$(\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{a}^i),\ i = 1, 2, 3$	$A = (\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \boldsymbol{a}^3)$

Fica claro aqui que, como a resposta às perguntas P_1 e P_2 depende de A é necessário, em princípio, ter respondido a pergunta P_3 para só então tratar das outras.

Optei por considerar apenas um modelo linear e determinístico, para facilitar a compreensão. Modernamente modelos não-lineares e/ou probabilísticos possuem inúmeras aplicações relevantes; não obstante, mesmo no contexto desses modelos mais so£sticados, continua a haver a distinção entre as classes de BD, de modelos descritivos e de modelos causais.

Enfatizo que, para usar modelos matemáticos em situações práticas, o investigador tem que responder a pergunta P_3 (identi£car o modelo) e antes disso tem que caracterizar o modelo — isto é, tem que modelar a situação — e para isso tem que fazer escolhas (o que nem sempre é trivial e pode ser arriscado ou constrangedor) e muitas contas.

5. A melhoria do ensino de matemática

5.1 A necessidade da matemática

A sociedade contemporânea tem vivido momentos de rápidas mudanças, com alterações do conhecimento, dos artefatos, da organização social, dos meios de atendimento às necessidades básicas, do ambiente natural e, em conseqüência, de valores e de comportamento. Como em outros momentos semelhantes da história do homem, o desvio do aparente

equilíbrio leva à busca de outras âncoras, um novo equilíbrio dinâmico, a partir do questionamento do *status quo*.

A matemática tem um papel a desempenhar para que se atinja um novo equilíbrio? Que motivos levam tantos a falarem que a matemática é importante? A matemática tem lugar neste novo cenário de máquinas calculadoras cada vez mais potentes? Será que ainda há razões su£cientes para promover o ensino de matemática?

A matemática é uma das mais efetivas e precisas formas de comunicar idéias e informações e em algumas áreas é a única linguagem efetiva para a formulação e resolução de problemas. A tecnologia avançada é baseada em matemática. Matemática é uma ferramenta cada vez mais útil nas engenharias, nas ciências sociais e da saúde. A matemática, como um assunto de estudo em si mesmo, desenvolvendo conceitos e

técnicas, tem dado contribuições cujo impacto econômico é comparável ao impacto produzido por inovações tecnológicas. Computadores tornaram possível o uso de modelos matemáticos em áreas que antes não se cogitava em utilizá-los; o entendimento da matemática permite que os resultados de um *software* sejam analisados de forma crítica e sensata. Além disso, a matemática é um excelente exercício para o desenvolvimento do pensamento e do raciocínio lógico e preciso, e para a capacidade de executar atividades rotineiras que exijam atenção a detalhes.

A atividade de pesquisa estabeleceu £rmemente a importância do entendimento conceitual para um indivíduo se tornar pro£ciente em um assunto. Quando um indivíduo entende matemática, ele é capaz de usar o seu conhecimento de forma ¤exível. É capaz de combinar conhecimento factual (banco de dados), facilidade de executar procedimentos (algoritmos) e entendimento conceitual (modelos) de forma produtiva. Não obstante a importância central da experimentação para o avanço do conhecimento, é através da linguagem matemática que o conhecimento se organiza, se estrutura, sendo esta, assim, também fundamental.

5.2 Sociedade

Re¤ito brevemente sobre sociedade. Qual o sentido da sociedade? A£nal, porque um indivíduo aceita inibir a sua capacidade natural de disputar utilizando a força bruta? O ser humano escolheu viver em sociedade pela vantagem do aumento da estabilidade (ao atendimento das necessidades básicas) e da riqueza de sua existência (ao vivenciar a arte e a descoberta intelectual). O indivíduo cede a sua liberdade natural em troca da proteção e das oportunidades que o grupo lhe oferece.

Como vantagens da sociedade, é bom lembrar, vez por outra, que a água que nos chega tratada e encanada, e os supermercados que nos oferecem iguarias diversas são uma conquista dela, dos pactos que foram sendo feitos pelas gerações que nos precederam.

O ganho na implantação de instituições e procedimentos deve, então, ser medido pelo grau de aperfeiçoamento da sociedade que tal construção permite, traduzido na experiência de desenvolvimento e realização pessoal, a felicidade.

Em sociedades primitivas, o controle adequado e o suporte aos indivíduos e suas atividades de forma a que a sociedade seja boa para todos, é mais direta e mais simples: na comunidade onde se vive, todos se conhecem e todos são próximos, ou colaboram ou são banidos da comunidade — desvios são imediatamente detectados e socialmente coibidos.

Nas sociedades mais complexas, no mundo globalizado, a noção de comunidade se transforma. Surgem diversas comunidades. Há a comunidade dos professores, dos matemáticos, dos políticos, dos empresários, etc. Por vezes estas comunidades são confundidas com grupos de interesse. O monitoramento individual é mais rarefeito.

A idéia da conveniência do estabelecimento de parcerias entre diversos atores sociais para a proposição, suporte e execução de projetos, pode ser entendida como um moderno mecanismo de controle social sobre a utilização dos recursos, necessariamente limitados, cada vez mais disputados, disponíveis em sociedades mais complexas. Se é possível estabelecer parcerias aumenta o grau de con£abilidade na importância e no sucesso do projeto.

5.3 Melhoria do ensino

Personalidades, organizações nacionais e internacionais manifestam a opinião da necessidade da melhoria do ensino de matemática.

Devemos nos ocupar com a busca dessa melhoria?

O *California State Board of Education* adotou, a partir de Dezembro de 1997, o *Mathematics Content Standards for California Public Schools — Kindergarten Through Grade Twelve*, com esse objetivo em mente.

Para dar resposta ao clamor da melhoria do ensino de matemática várias questões têm que ser colocadas. Começo por me restringir: falo do Brasil. O que signi£ca melhorar e porque devemos melhorar?

Tenho certeza que se ensina matemática muito bem a diversos indivíduos no Brasil e elas/es aprendem — várias são as medalhas que brasileiras/os têm conquistado nas Olimpíadas Mundiais de Matemática.

Ah, o problema não é esse? O desa£o é democratizar esse ensino, expandindo-o a toda a população em idade escolar? É vantajoso mesmo?

Um dos grandes mecanismos de difusão do conhecimento e avanço da humanidade tem sido a imitação e se eles, os californianos, estão estabelecendo um padrão de ensino de matemática, porque não imitá-los?

Qual é uma das motivações deles? '*To **compete**[8] sucessfully in the worldwide economy, today's students must have a high degree of comprehension in mathematics*'.

Ao invés de apontar para o mercado global, para a competição econômica, para os produtos tecnológicos cada vez mais so£sticados, opto por apontar aos aspectos de natureza humanista para justi£car o ensino de matemática.

Ao contrário do motivo expresso no padrão da Califórnia, o motivo correto para promover a melhoria do ensino de matemática na sociedade moderna é a profunda relevância da matemática para que o indivíduo possa ter acesso a uma vida melhor, em uma sociedade melhor: '*To lead meaningful lives in the worlwide community, today's students must have a high degree of comprehension in mathematics*'.

Este motivo é mais de acordo com os anseios, ainda que implícitos, da vida em sociedade e da convivência. Só faz sentido participar de uma comunidade, fazer uma sociedade, e 'abrir os portos às nações amigas' se a idéia é organizar, pactuar de tal forma que todos ganhem. Esta é uma concepção democrática: é mais forte, mais estável, mais de encontro aos anseios da população brasileira que está cansada de modelos sociais de exclusão.

E a matemática no Brasil? O estado do ensino de matemática é grave: professores/as desmotivados/as e despreparados/as, alunos/as desmotivados/as e mal formados/as, mesmo os/as alunos/as que têm facilidade em aprender matemática, não estão tendo acesso à sua compreensão. Há, além disso, que universalizar o entendimento da matemática.

Não tenho certeza, porém, que a relevância da matemática, entendida como um *modus operandi* libertador, profundamente revolucionário, seja amplamente reconhecida, nem mesmo entre a comunidade acadêmica, que dirá em geral.

O problema do ensino de matemática só pode ser resolvido se a sociedade quiser. A mobilização da sociedade para resolvê-lo é difícil, requer empenho, e demanda um profundo conhecimento do problema em si, e mais, um entendimento claro de porquê isso é um problema para a sociedade. É certo que isso é uma escolha que depende do tipo de sociedade que almejamos. Se essa clareza não é alcançada, o problema não existe e nada há a ser resolvido.

Portanto, o primeiro passo para resolver o problema do ensino de matemática é investir esforços para que os atores sociais, e isso inclui os matemáticos, percebam com muita clareza que a matemática e seu ensino se revestem de importância para a sociedade. Julgo que as re¤exões que apresentei ajudam a justi£car a necessidade do ensino de matemática e a relevância da sua melhoria. Discuti o papel da matemática no aperfeiçoamento da sociedade e no aprofundamento da democracia. Há que ampliar essa discussão. Em seguida, é crucial envolver a sociedade, diversos parceiros sociais, na confecção de um retrato bastante £el do estado do ensino de matemática, para que ações relevantes sejam desenhadas, pactuadas e executadas.

A£nal, a matemática é vantajosa para a sociedade? A glória da sociedade resplandece com o fulgor da matemática.

[8] Grifo meu.

Referências

[1] B.J. CARAÇA, Conceitos Fundamentais da Matemática, Lisboa, 1975.

[2] W. DUNHAM, Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics, Penguin Books, New York, 1990.

[3] RICHARD FEYNMAN, The Character of Physical Law, The M.I.T. Press, Cambridge, 1986.

[4] M. KAC , Can one hear the shape of a drum?, Am. Math. Monthly, 73(4, part II):1-23, 1966.

[5] STEPHEN KANITZ, Estimulando a curiosidade, Coluna Ponto de Vista, Veja, 29/10/2003, p. 20, Editora Abril, São Paulo.

[6] RUTE ROCHA, O que é, o que é?, Quinteto Editorial Ltda, 1987.

[7] A.J. SILVA NETO & F.D. MOURA NETO, Escolha de Modelos — Problemas Inversos em Engenharia, SBMAC, Santos, 1999.

[8] C. TOMEI, Euclides — A conquista do espaço, Odysseus Editora, São Paulo, 2003.

[9] LUIS F. VERÍSSIMO, A glória de Deus, O Globo, 19/10/2003, p. 7, Rio de Janeiro.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 383:384
Resumo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Resumo 46

Aarão Leal de Carvalho Reis

Paulo Marcos Cabral Junior[1]
Universidade Estácio de Sá

1. Introdução

Aarão Reis, Bacharel em Ciências Físicas e Matemáticas e Engenheiro Geógrafo e Civil, participou ativamente do desenvolvimento do Brasil. Assumiu importantes funções públicas, tais como, Diretor dos Correios, Diretor da Estrada de Ferro Central do Brasil, Diretor do Loyde Brasileiro, Presidente do Banco da República do Brasil e Deputado Federal. Mesmo nas épocas em que desempenhou importantes cargos, jamais se afastou do magistério. Lecionou na Escola Politécnica por 25 anos consecutivos. Escreveu diversos livros de matemática, publicou dezena de artigos e pareceres, envolvendo instrução pública, educação e engenharia, e, ainda, traduziu alguns livros de cunho Positivista. Seu livro "Curso Elementar de Mathematica – vol 1 – Arithmetica" foi indicado seguidamente em três programas consecutivos (1895, 1897 e 1898) do Antigo Gymnasio Nacional, atual Colégio Pedro II. Nesta época, este colégio era uma referência de ensino para todas as escolas no território brasileiro. O livro citado atendia o programa aprovado pelo decreto 15 janeiro de 1894, que regulamentava os programas de ensino deste colégio para os anos 1895, 1897 e 1898. Neste trabalho, são citados as obras públicas, os artigos e os livros editados, bem como, uma analise comparativa do conteúdo do livro e o programa de ensino proposto pelo decreto.

Figura 1: Foto de Aarão Reis

2. Observações Finais

Este trabalho é parte de uma pesquisa, que está sendo realizada como monogra£a de £nal do curso de licenciatura matemática, orientada pelo professor Bruno Alves Dassie, que ministra a disciplina *História da Educação Matemática no Brasil*, onde meu interesse por este assunto foi despertado.

[1]pmarcos@openlink.com.br

Referências:

ABRANCHES, D. (1918) *Governo e Congressos da República dos Estados Unidos do Brazil*. I vol., Bibliogra£as. Rio de Janeiro: 1918.

BELTRAME, J. (2000). *Os Programas de Ensino de Matemática do Colégio Pedro II: 1837 a 1932*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. (Dissertação de Mestrado), 2000.

VELHO SOBRINHO, J.F. (1947) *Dicionário biobibliográ£co brasileiro.* Rio de Janeiro: [s.n.], 1947.

REIS, A., REIS, L. (1897) *Curso elementar de mathematica,. vol.I - Arithmetica - Teórico, Prático e Aplicado*. 2.ed. Rio de Janeiro: João Leopoldo da Cunha, [1897].

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 385:386
Resumo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Resumo 47

NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA DINÂMICA

José Paulo Q. Carneiro[1] - UERJ
Magali Catarina Bastos[2] - Colégio Esplendor

Resumo: *Identi£cando os números complexos com os pontos ou vetores do plano, as operações com números complexos traduzem-se por meio de transformações geométricas, como translações, homotetias e rotações, possibilitando o uso da Geometria Dinâmica para ilustrar propriedades e aplicações dos números complexos.*

Palavras-chave: *Geometria Dinâmica; Números Complexos; Transformações Geométricas.*

Abstract: *Identifying complex numbers with points or vectors in the plane, operations with complex numbers translate into geometrical transformations, such as translations, dilatations and rotations, making possible the use of Dynamical Geometry to illustrate properties and applications of complex numbers.*

Key words: *Dynamical Geometry; Complex Numbers; Geometrical Transformations.*

Os números complexos, nascidos no contexto algébrico de resolução de equações, foram tratados inicialmente como monstros sem sentido, como se vê pelo nome até hoje remanescente de “imaginários”. Somente há 200 anos, compreendeu-se que os complexos não têm nada de “irreal”; são apenas os pontos ou vetores do plano, que se somam por composição de translações e se multiplicam por composições de rotações e homotetias.

Atualmente são claros na Matemática o papel central dos números complexos e suas inúmeras utilidades em problemas que envolvem rotação, círculo, funções “circulares”, movimentos periódicos, circuitos elétricos, corrente alternada, astronomia e motores. Mas esta visão geométrica ainda não se incorporou ao ensino, onde permanece dominante o hábito de introduzir os complexos de modo puramente algébrico e formal, não ocorrendo aplicar números complexos a problemas de Geometria, como se faz desde Gauss.

A Geometria Dinâmica abriu novos caminhos para a apresentação da geometria e, portanto, para o ensino dos números complexos, permitindo resolver problemas, formular conjecturas e ilustrar propriedades e teoremas, inclusive o Teorema Fundamental da Álgebra, normalmente considerado um tema de Matemática superior.

[1] jpqc@uninet.com.br
[2] magalicbastos@yahoo.com.br

Referências:

CARNEIRO, J.P. (1998), Resolução de Equações Algébricas, Editora Universidade Santa Úrsula

CARNEIRO, J.P. (2000), Aplicaciones geométricas de los Números Complejos – con Cabri - XXV Jornadas de Resolución de Problemas; Seminario Internacional – San Martin de los Andes – Argentina

NEEDHAM, T. (2001); Visual Complex Analysis, Oxford University Press.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 387:387
Resumo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Resumo 48

UMA VISÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Ana Cristina Vieira[1] - USU / IEM
Luiz Mariano Carvalho[2] - UERJ

Isaac Barrow, professor de Matemática em Cambridge de 1662 a 1670, primeiro a ocupar a cadeira de Lucasian, apresentou em seu livro "*Lectiones Geometricae*" (1670) uma visão geométrica para a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo.

O referido livro apresenta 13 conferências compostas, em sua maioria, de teoremas envolvendo tangentes, áreas e medidas de arcos. Deter-nos-emos nas conferências X e XI que contêm teoremas equivalentes ao Teorema Fundamental do Cálculo.

Com base na conferência X, § 11, e na conferência XI, § 19, onde Barrow prova que a diferenciação e a integração são operações inversas e de£ne a integração como um somatório, pretendemos construir no "software" Cabri a demonstração proposta por Barrow para algumas funções elementares, como por exemplo, as funções quadrática, exponencial e logarítmica.

Este trabalho está sendo desenvolvido como monogra£a do Curso de Especialização em Aprendizagem Matemática da UERJ.

Referências:

CHILD, J.M. (1916) The Geometrical Lectures of Isaac Barrow. The Open Court Publishing Company

[1] anacristina_vieira@ig.com.br
[2] luizmc@ime.uerj.br

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 389:390
Resumo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Resumo 49

ANÁLISE DO PROBLEMA DE APOLÔNIO VIA GEOMETRIA DINÂMICA

André Luis Trevisan[1] - (Bolsista IC - Fapesp) - UNICAMP
Profa. Dra. Sandra A. Santos [2] - UNICAMP

1. Introdução

Com o intuito de analisar um problema clássico de geometria - o Problema de Apolônio - buscamos um paralelo entre os raciocínios e as mídias existentes em períodos diversos da História.

2. O Problema de Apolônio

Dados três objetos, cada um dos quais pode ser um ponto, uma reta ou uma circunfe-rência, traçar a circunferência que é tangen-te a cada um destes três objetos.

3. Desenvolvimento

Guiados inicialmente pelo texto de Rezende & Queiroz, 2000, como forma de encaminhar o estudo dos conceitos preliminares de geometria plana, seguimos com a inversão em círculos, inspirados na obra de Guzmán, 1990. Baseados em Eves, 1997, realizamos uma pesquisa histórica do problema. Com ênfase na obra de Viète (ver Fig. 1), procuramos resgatar seu trabalho (Viète, 1970) e retomá-lo dentro de uma perspectiva de aprendizagem oferecida por ambientes informatizados. As soluções de Viète para o problema de Apolônio (ver Fig. 2), feitas com régua e compasso, foram interpretadas e reconstruídas com auxílio de *softwares* de Geometria Dinâmica, particularmente o *Tabulæ* e o *Cabri-Géomètre* (ver Fig. 3). A ferramenta computacional revelou-se fundamental na validação de conjecturas e no encaminhamento prévio à sistematização do raciocínio.

[1]andretrevi@yahoo.com.br
[2]sandra@ime.unicamp.br

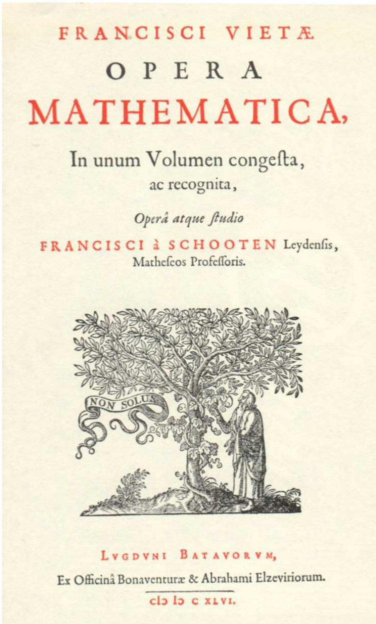


Figura 1

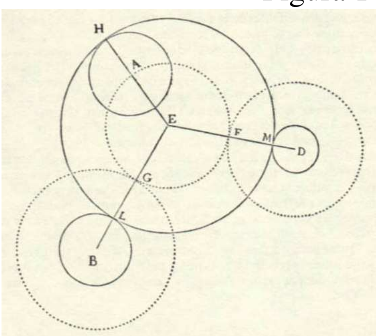


Figura 2

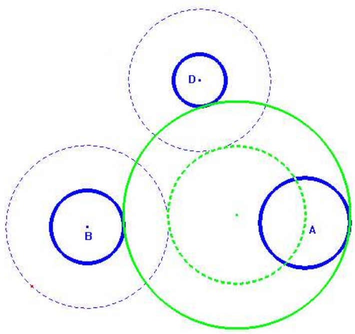


Figura 3

Referências:

EVES, H. (1997) Introdução à História da Matemática, trad. Hygino H. Domingues, 2.ed., Campinas(SP), Editora da Unicamp.

GUZMÁN, M. (1990) Aventuras Matemáticas, trad. João Felipe Queiroz, Lisboa, Gradiva.

REZENDE, E.Q.F & QUEIROZ, M.L.B. (2000). Geometria euclidiana plana e construções geométricas, Campinas (SP), Editora da Unicamp.

VIÈTE, F. (1970) Opera Mathematica, recognita: Francisci a Schooten, vonwort und register von Joseph E. Hofman, New York, G. Olms.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 391:392
Resumo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Resumo 50

CUSTO DO CALÇAMENTO DE RUAS: UMA EXPERIÊNCIA COM MODELAGEM MATEMÁTICA E PLANILHAS ELETRÔNICAS

Clarissa Trojack Della Nina[1] - PUCRS
Helena Noronha Cury (Or.)[2] - PUCRS

1. Introdução

Este trabalho apresenta uma experiência usando modelagem e planilhas eletrônicas, com o objetivo de calcular o custo de calçamento de uma determinada rua de uma cidade do interior do RS. A tarefa foi realizada como conclusão de uma disciplina do curso de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática da PUCRS, para veri£car a possibilidade de trazer temas da realidade para o processo de ensino e aprendizagem na Educação Básica, usando a metodologia da modelagem e recursos computacionais.

2. Pressupostos teóricos

Conforme Bassanezi (2002), a Modelagem Matemática funciona como elemento motivador para a aprendizagem, ampliando o conhecimento de Matemática, mas, sobretudo, estruturando a maneira de pensar e agir.

Cláudio & Cunha (2001) consideram que o uso do computador permite um ensino que não se limita à apresentação de problemas bem comportados, mas também àqueles ligados à realidade, o que vem facilitar a resolução dos mesmos.

Particularmente na atividade relatada, o uso do software Excel permitiu uma fácil manipulação dos dados, boa visualização dos resultados e obtenção da solução £nal. As novas tecnologias estão sendo gradativamente incorporadas ao dia a dia e, por isto, devem ser testadas e utilizadas tanto por professores como por alunos, nas mais variadas formas.

3. Desenvolvimento

Para realizar o estudo, foram coletados dados referentes à rua escolhida, ao levantamento topográ£co, ao projeto da obra, à

[1] trojack@viavale.com.br
[2] curyhn@pucrs.br

contratação de mão-de-obra, à compra de material, aos valores e, por £m, ao modo de pagamento. A partir das informações, foram construídas planilhas no Excel envolvendo cada uma das etapas.

4. Conclusão

A realização da experiência mostrou que é possível trabalhar com modelagem, usando dados da realidade e empregando recursos computacionais. A partir dos resultados, apresentados e discutidos ao £nal da disciplina do curso de Mestrado, a autora se propôs a planejar estratégias de ensino, que serão implementadas em suas aulas de matemática na Educação Básica.

Referências

BASSANEZI, R. C. (2002). Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo: Contexto.

CLAUDIO, D. & CUNHA, M. L. (2001). As novas tecnologias na formação de professores de Matemática. In: CURY, Helena N. (org.) Formação de Professores de Matemática: uma visão multifacetada. Porto Alegre, EDIPUCRS.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 393:394
Resumo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Resumo 51

O ESTADO DA ARTE DO ENSINO-APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA NA REGIÃO NORTE FLUMINENSE

Salvador Tavares[1] - CEFET
Vera Fazoli Viana (Or.)[2] - CEFET, FAFIC

1. Introdução

O desempenho dos nossos alunos em Matemática tem sido criticado e os resultados nos Exames Nacionais têm atestado falhas no ensino-aprendizagem desta disciplina. E em Geometria não tem sido diferente. Encontrar falhas nos cursos tradicionais de Geometria não é muito difícil, mas o que a academia precisa é encontrar os caminhos para superar essas falhas. O objetivo desta comunicação cientí£ca é apresentar a pesquisa que fez um levantamento do "estado da arte" do ensino de Geometria nas escolas da região norte-¤uminense do Estado do Rio de Janeiro quanto ao desempenho dos alunos e quanto ao currículo desenvolvidos para identi£car os problemas, discuti-los e fornecer sugestões de soluções viáveis para a sua resolução.

2. A Pesquisa

A pesquisa seguiu os seguintes passos:

– Elaboração dos questionários para serem aplicados aos docentes e aos alunos visando levantar quais os conteúdos que vêm sendo trabalhados na geometria escolar, bem como os conteúdos que os alunos identi£cam como tendo sido trabalhados na escola.

– Elaboração das questões de Geometria para serem aplicadas aos alunos da 1^a. Série do ensino médio visando levantar os conhecimentos que efetivamente eles dominam após oito anos de escolaridade.

– Aplicação do questionário entre os docentes para levantar os conteúdos contidos no currículo de Geometria das escolas da região.

– Aplicação do questionário entre os alunos da 1^a. Série do ensino médiopara levantar os conteúdos que eles identi£cam como sendo trabalhados na Geometria escolar.

[1] saltavares@terra.com.br
[2] vfazoli@censanet.com.br

- Aplicação do teste para levantar o conhecimento de Geometria dos alunos com no mínimo oito anos de escolaridade.

– Análise e avaliação das respostas dos questionários aplicados.

– Divulgação dos resultados da pesquisa.

– Reunião com os professores e alunos pesquisados para uma avaliação conjunta dos resultados e para estudar propostas de soluções viáveis para resolução dos problemas que eventualmente forem detectados.

3. Observações Finais

Pretende-se fazer a divulgação das propostas de soluções resultantes da avaliação conjunta ao £nal da pesquisa.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 395:396
Resumo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Resumo 52

JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

T.C.E. Sera£m[1] - UNISAL-Lorena-SP
L.C. Queiroz[2] - UNISAL-Lorena-SP

1. Introdução

"Durante muito tempo, a Educação Matemática foi radicalmente fundamentada em uma metodologia de construção lógico-formal dos conceitos, teoremas e fórmulas, o que gerou uma aversão à Matemática por parte da maioria dos alunos." (LANNES&LANNES, 2001)

Os jogos podem ser usados como uma ferramenta auxiliar porque além de transmitirem conhecimentos, tornam o aprendizado mais prazeroso.

2. Desenvolvimento

"Partindo da consideração de que as atividades lúdicas podem contribuir para o desenvolvimento intelectual da criança, CRATTY sugere a utilização de atividades motoras sob a forma de jogos para o domínio de conceitos (como, por exemplo, de linhas retas, curvas, círculo, triângulo, de letras minúsculas e maiúsculas, de para cima/para baixo e esquerda/direita) e para desenvolvimento de algumas capacidades psicológicas, tais como: memória, avaliação e resolução de problemas. CRATTY apóia-se nos modelos cognitivos de Piaget, Bruner, Guilford e nos vários tipos de comportamentos ligados à resolução de problemas, pesquisados por Gagné e Guilford." (AGUIAR, 1998)

Foram pesquisadas propostas de jogos matemáticos em alguns livros didáticos de Matemática de 5^a à 8^a série.

3. Resultados e Discussão

Foram encontradas algumas propostas de atividades lúdicas que podem servir como base para construção de jogos e algumas propostas de jogos matemáticos, segundo (GIOVANNI et alii, 1998), (GIOVANNI&GIOVANNI JR., 2000), (JAKUBOVIC,1999), (LANNES&LANNES, 2001) e (MATSUBARA&ZANIRATTO, 1998).

(LANNES&LANNES, 2001) propuseram o jogo de xadrez em várias aplicações de temas matemáticos abordados e o jogo da batalha naval.

[1]tatipinksp@bol.com.br
[2]queiroz@dequi.faenquil.br

Referências:

AGUIAR, J. S. (1998) Jogos para o ensino de conceitos: leitura e escrita na pré-escola. São Paulo: Ed. Papirus, p.36, 1998.

GIOVANNI, J. R., CASTRUCCI, B. & GIOVANNI JR., J. (1998) A conquista da matemática – nova. São Paulo: FTD, 1998.

GIOVANNI, J. R. & GIOVANNI JR., J. (2000) Matemática: pensar e descobrir – novo. São Paulo: FTD, 2000.

JAKUBOVIC, J. (1999) Matemática na medida certa - 6^a e 8^a séries: ensino fundamental. São Paulo: Scipione, 1999.

LANNES, R. & LANNES, W. (2001) Matemática, volume 2. São Paulo: Editora do Brasil, 2001.

MATSUBARA, R. & ZANIRATTO (1998) Big Mat: matemática: história, evolução, conscientização - 5^a série. São Paulo: IBEP, 1998.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 397:398
Resumo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Resumo 53

APLICAÇÕES DE SOFTWARES NO ENSINO DE MATEMÁTICA

T.C.F. Campos[1] - UNISAL-Lorena-SP
L.C. Queiroz[2] - UNISAL-Lorena-SP

1. Introdução

Entre as diversas abordagens propostas nos últimos anos sobre a questão “informática na educação”, propõe-se um olhar crítico sobre a utilização de softwares educativos, com a intenção de compreender as características do conhecimento informatizado e procurar discutir as implicações que estas re¤exões sobre o conhecimento teriam para a educação, particularmente no que se diz respeito ao uso de recursos informatizados nas escolas. Considera-se que ambas as abordagens são importantes e complementares, (BITTENCOURT, 1998).

[1] tere_cristi@yahoo.com.br.
[2] queiroz@dequi.faenquil.br

2. Desenvolvimento

É de fundamental importância a re¤exão sobre a aplicação da informática na educação matemática, o seu potencial e a in¤uência que o computador e os softwares podem exercer sobre os alunos, (WEISS&CRUZ, 1991).

Com o computador e os softwares o professor de Matemática dispõe de diversos recursos auxiliares para o processo ensino-aprendizagem. O uso dessa tecnologia permite a visualização de objetos geométricos em vários ângulos, perspectivas, confecção de grá£cos, a resolução de cálculos, etc.

Foi realizado um levantamento de propostas de aplicações de softwares, como recursos auxiliares, no ensino de determinados temas matemáticos em alguns livros didáticos de 5^a à 8^a série.

3. Resultados e Discussão

A aplicação do software Cabri-Géomètre é sugerida em um dos volumes da coleção Matemática (7^a série) (Lannes&Lannes, 2001) e no artigo de (BITTENCOURT, 1998). O referido livro didático contém explicações básicas de construções geométricas referentes aos temas abordados pelos autores.

O artigo trata o uso do Cabri-Géomètre de uma forma re¤exiva e não instrutiva.

No mesmo volume citado da coleção de livros didáticos, os autores adotam o

Microsoft Word na introdução da congruência de triângulos, dando explicações claras do manuseio desse programa em relação ao tema.

Os autores continuam sugerindo o uso de softwares no volume da 8^asérie, indicando o Microsoft Excel na construção de tabelas, para explorar as operações aritméticas presentes em expressões matemáticas.

Referências:

BITTENCOURT, J. (1998) Informática na educação? Algumas considerações a partir de um exemplo. Rev. Fac. Educ., (24), 1, 23-26, 1998.

LANNES, R. & LANNES, W. (2001) Matemática. São Paulo: Editora do Brasil, 2001.

WEISS, A. M. L. & CRUZ, M. L. R. M. (1991) A informática e os problemas escolares de aprendizagem. Rio de Janeiro: Dp&a editora, 2^a edição, p.22, 1991.

IIHTEM 2º Colóquio de
História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 399:400
Resumo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Resumo 54

DIFICULDADES DO ENSINO APRENDIZAGEM

V. Fagundes [1] - UNISAL-Lorena-SP
L.C. Queiroz[2] - UNISAL-Lorena-SP

1. Introdução

"Os problemas de aprendizagem referem-se às situações difíceis enfrentadas pelo indivíduo normal e pelo indivíduo com desvio do quadro normal mas com expectativas de aprendizagem a longo prazo." (JOSÉ&COELHO, 1999).

2. Desenvolvimento

Tendo em vista que a Matemática trata-se de uma linguagem expressa por meio de símbolos, este trabalho aborda algumas di£culdades apresentadas pelos alunos na apreensão de operações e enunciados matemáticos.

3. Resultados

Identi£cou-se a discalculia como um grupo de desordens que impedem o aluno de compreender processos aritméticos, e tem como causas aspectos pedagógicos, capacidade intelectual limitada e disfunções do sistema nervoso central, (JOSÉ&COELHO, 1999).

Os distúrbios de aritmética foram encontrados nos mais diferentes graus, em alunos que apresentaram incapacidade para:

- relacionar símbolos a quantidades;
- associar símbolos auditivos a visuais;
- visualizar conjuntos de objetos dentro de um conjunto maior;
- compreender o princípio de conservação de quantidades;
- executar operações aritméticas;
- obedecer e recordar seqüências dos passos que devem ser dados em operações diversas;
- escolher princípios para solucionar problemas de raciocínio aritmético;

conforme (JOSÉ&COELHO, 1999), (CORRELL&SCHUWARZE, 1974) e (PAIN, 1985).

[1] fagundesvaldirene@ig.com.br
[2] queiroz@dequi.faenquil.br

4. Conclusões

Para poder identi£car e diagnosticar distúrbios de aprendizagem matemática, o professor deve conhecer antes de mais nada as di£culdades que o aluno enfrenta evitando rótulos e distinguindo comportamentos provenientes de vários aspectos como emocionais, afetivos e cognitivos.

As di£culdades no aprendizado de Matemática são diversas, por isso cabe ao professor ou a um pro£ssional quali£cado determinar o nível de capacidade do aluno e o tipo de desordem que ele apresenta, analisando se o distúrbio é uma discalculia ou se está relacionado a outros distúrbios como de leitura e escrita.

Referências:

JOSÉ, E. A. & COELHO, M. T. (1999) Problemas de Aprendizagem. São Paulo: Ática, 1999.

CORRELL, W. & SCHUWARZE, H. (1974) Distúrbio da Aprendizagem. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1974.

PAIN, S. (1985) Diagnóstico e Tratamento de Aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas, 1985.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 401:402
Resumo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Resumo 55

F(C): FUNÇÕES COMPLEXAS

Edvaldo Lima da Silva [1] - UNESP
Aguinaldo Robinson de Souza [2] - UNESP

1. O Software

Com o advento da utilização de tecnologias pela sociedade, transformações sobre as formas usuais de relacionamentos são modi£cadas em vista a novas potencialidades possibilitadas por essa nova ferramenta. Na Educação Matemática, percebe-se a real necessidade da inclusão de novas ferramentas para auxílio no ensino e na aprendizagem.

Ao tratarmos conceitos envolvendo Funções de uma Variável Complexa, normalmente nos deparamos com limitações de representações baseadas em dimensões reais. Por meio dos computadores pessoais é possível explorar outras mídias para signi£cação e linguagem. Podemos destacar, como motivação e viabilização, o poder de processamento, utilização de imagens estáticas e em movimento facilmente encontradas nos computadores.

Para representação de Funções Complexas utilizamos o que se denomina Mapa de Cores, já utilizado em interpretações na Mecânica Quântica e em Cursos de Análise Complexa Visual. Através do Mapa podemos de£nir o domínio de uma função a partir de distribuição de cores, ou seja, relacionamos biunivocamente cor a ponto do plano. A plotagem terá signi£cados e leituras a partir da de£nição desse Mapa.

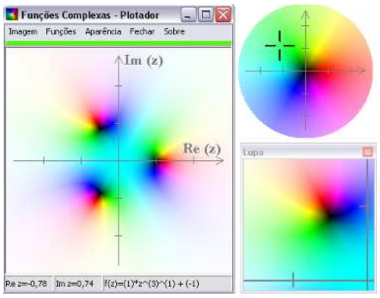
F(C): Funções Complexas é um software em desenvolvimento pelo Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência da UNESP de Bauru que visa a introdução dessa nova abordagem de representação, em vista da di£culdade encontrada na representação de entes que se comportem com 4 variáveis ou mais.

2. Ferramentas

O Mapa do Plano Complexo faz parte do software e é responsável Pelas leituras imediatas da função para um determinado número complexo.

A utilização de geração de vídeo, também presente no software, é uma funcionalidade capaz de desenvolver percepções sobre o comportamento da Função ao se manipular coe£cientes. Tornando-se, assim, o estudo dinâmico para uma variedade indeterminada de casos.

[1] edvaldo@fc.unesp.br
[2] arobinso@fc.unesp.br



Tela Principal.

Referências:

NEEDHAM, TRISTAN. (2000) Visual Complex Analysis. Claredon Press.

THALLER, B. (2000) Visual Quantum Mechanics, Springer-Verlag, 1-14.

LEÃO, MARCELO. (2001) Borland Delphi 6 & Kylix. Axcel Books.

AYRES, JOHN. (2000) Delphi Graphics and Game Programming Exposed with DirectX. Wordware Publishing Inc.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 403:404
Resumo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Resumo 56

CRIPTOGRAFIA RSA NO ENSINO DA TEORIA DOS NÚMEROS

José Maria Magalhães [1] - Soc. Téc. Educacional MG
Rafael Augusto Silva Nogueira[2] - Soc. Téc. Educacional MG
Sandra Mara Jorge[3] -UFMG

A variabilidade na amplitude da aprendizagem é um fator signi£cativo para a discussão da didática de ensino de toda e qualquer disciplina. Mais ainda, quando consideramos a especi£cação do desenvolvimento das capacidades individuais de cada ser humano, isto é, o fato de cada pessoa ter suas preferências disciplinares e didáticas. Existe, quase sempre, um hiato entre a teoria e sua aplicabilidade prática. Na matemática essa distância é bastante nítida. A falta de correlação com a aplicação prática desperta uma noção natural de inutilidade de conceitos, levando a questionamentos como: para que existem números primos? Qual a importância de serem in£nitos? Qual a utilidade do máximo divisor comum? Primo entre si, e daí?

Na teoria dos números conceitos como: cálculo de divisor comum entre dois números, determinação e in£nidade dos números primos, aritmética modular e fatoração, formam a base de funcionamento do método de criptogra£a RSA que, atualmente, garante a segurança da informação na maioria dos grandes sistemas comerciais.

A proposta deste trabalho é de que a explanação desses conceitos seja realizada paralelamente à metodologia de construção do RSA, interagindo teoria e prática pedagógicas. Essa abordagem tem o intuito de tornar a disciplina apreciada e imediatamente útil, levando à prontidão necessária para o aprendizado ao integrá-lo com um problema real da humanidade, a segurança da informação. Para que o interesse do aprendiz seja e£cazmente aguçado, cabe ao professor apresentar a lógica algorítmica necessária e suas implementações, através dos algoritmos de Euclides, Euclidiano estendido e expansão modular, indispensáveis na construção do RSA. Este trabalho inclui a implementação dos algoritmos acima citados e de um protótipo computacional do método RSA.

Referências:

AGRAWAL, M.; KAYAL, N. & SAXENA, N. (2002) PRIMES is in P. Department of Compute Science & Engine-

[1] jomagalhaes@pro2.com.br
[2] rafael@pro2.com.br
[3] sandra@mat.ufmg.br

ering – India Institute of Technology Kanpur. Índia, 2002.

COUTINHO, S. C. (2000) Números Inteiros e Criptogra£a RSA – Série Computa ção Matemática. IMPA/SBM. Rio de Janeiro; 226 pp, 2000.

MACHADO, P. A. & VIEIRA, A. C. (2001) Números Inteiros e Criptogra£a – Aspectos Teóricos e Computacionais. Reunião SBM; Dept^o Matemática ICEX – UFMG. Belo Horizonte, 2001.

RIBENBOIM, P. (1997) Vendendo Primos. Matemática Universitária (22/23): 1.13 p; junho/dezembro, 1997.

SINGH, S. (2001) O livro dos códigos. A Ciência do Sigilo – Do Antigo Egito à Criptogra£a Quântica. Record. Rio de Janeiro, 2001.

IIHTEM 2º Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática
págs: 405:406
Resumo selecionado
Luiz M. Carvalho e Carlos A. de Moura (editores)
ISBN: 85-89498-02-6 © 2004, Editora IME-UERJ

Resumo 57

ALUNOS DO CURSO DE MATEMÁTICA × ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS DE CÁLCULO

Luciana Gastaldi S. Souza [1] - UEL
Regina Luzia C. de Buriasco[2] - UEL

Visto que a disciplina de Cálculo I é considerada como uma base para a de Análise, £zemos um estudo avaliativo para veri£car como os alunos lidam com alguns conceitos matemáticos considerados básicos. Participaram desse estudo alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da UEL que tinham cursado uma vez a disciplina CDI 1. O estudo foi feito por meio de um teste, constituído de dez questões. Para subsidiar teoricamente o trabalho, foram utilizados os Conceito Imagem e Conceito De£nição de Tall e Vinner. Percebemos que os alunos têm uma grande de£ciência no manejo da língua escrita, manejo este que os impede de expressar £elmente suas idéias na direção de um pensamento matemático mais avançado. Também notamos que possuem muita di£culdade em demonstrar resultados generalizados. As questões da prova que pediam demonstrações de resultados genéricos foram maciçamente deixadas em branco. Uma das principais di£culdades observadas foi a aquisição de um pensamento matemático lógico, no qual o aluno faça um encadeamento dos seus pensamentos e construa conceitos de£nições mais consistentes. Propomos que a disciplina de Análise Real seja conduzida mediante a Investigação Matemática por entender que esta promove uma dinâmica de aula mais ativa e envolvente, permitindo a argumentação, o uso da indução e da analogia como ferramentas para re£nar o pensamento dos alunos, gerando uma aprendizagem signi£cativa e mais e£caz.

[1] lucianagastaldi@aol.com
[2] reginaburiasco@sercomtel.com.br

Referências

AZCÁRATE et alli. (1996) Cálculo diferencial e integral, Madrid: Editorial Síntesis S.A.

BALACHEFF, N. (1991) The bene£ts and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In: BISHOP, A.; MELLIN-OLSEN, S. & VON DORMOLEN, J. (Eds.), Mathematical knowledge: its growth trough teaching. Dordrecht: Kluwer, , pp. 175 – 192.

COBIANCHI, A.S. (2001) Estudos de continuidade e números reais: matemática, descobertas e justi£cativas de professores. 2001. Tese (Doutorado), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

DIAS, M. S. (2002) Reta real – conceito, imagem e conceito de£nição. Dissertação (Mestrado), PUC / São Paulo.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, .,BRUNHEIRA, L., VARANDAS, J. M., & FERREIRA, C. (1999) O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, 7(2), 41-70.

TALL, D. (1991) Advanced mathmatical thinking, Dordrecht: Kluwer.

VINNER, S. The role of de£nitions in the teaching and learning of Mathematics._In: TALL, D. (1991) Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer, p.65 a 81.

Índice de Autores

Abreu, Roberto Lopes de, 311
Aguiar, Carlos Eduardo, 257
Anjos, Marta F. dos, 79

Baldin, Yuriko Y., 139
Baltar Bellemain, Paula M., 183
Barbastefano, Rafael G., 229
Baru£, Maria Cristina B., 35
Bastos, Magali Catarina , 385
Belfort, Elizabeth, 237
Bellemain, Franck, 155
Bianchini, Waldecir, 19
Brandão, Leônidas de O., 191
Brum, Jaqueline M., 85
Buriasco, Regina Luzia C. de, 405

Cabral Junior, Paulo Marcos , 383
Calsani, Ivana A. da S., 139
Campos, T.C.F., 397
Carneiro, José P.Q., 203, 337, 385
Carvalhaes, Cláudio G., 163
Carvalho, Luiz Mariano, 329, 387
Castro Barbosa, Augusto C., 163
Castro, Monica Rabello , 283
Concordido, Cláudia F.R., 163
Costa, Sueli I. R., 345
Cury, Helena N., 43, 391

D'Ottaviano, Itala M. Loffredo, 351
Dassie. Bruno A., 115

Fagundes, V., 399
Fainguelernt, Estela K., 221
Faulhaber, J.C. , 337
Felisberto, N. , 337
Fossa, John A., 67, 73, 79

Freitas, Maria T. M., 123

Gani, Danusa Chini, 237
Giraldo, Victor, 329
Gottlieb, Franca C., 221
Grimberg, Gérard E., 265
Guimarães, Luiz Carlos , 321
Guimarães, Thiago, 229

Healy, Lulu, 365

Jahn, Ana Paula, 365
Jorge, Sandra Mara, 403
Jurkiewicz, Samuel, 107

Kozakevicius, Alice de J., 147
Kubrusly, Ricardo S., 19

Leventhal, Gilda, 107
Lins , Bibi, 247
Lobão, M.A. , 337
Lopes, Silvana Marini R., 171

Magalhães , José Maria, 403
Marques, Ivan C., 51
Mattos, Francisco, 229
Mello, Maria Hermínia de P.L., 273
Motta, Carlos E.M., 43
Moura Neto, Francisco Duarte, 367
Moura, C.A. de , 337

Naidon, Roberta , 147
Nina, Clarissa Trojack D., 391
Nogueira, Rafael A.S., 403

Oliveira, R. , 337

Queiroz, L.C., 395, 397, 399

Rodrigues, Daniel W.L., 11
Rodrigues, Maria H.W.L., 11

Santos, Angela R., 19
Santos, Fred, 283
Santos, Sandra A., 123, 389
Sebastiani Ferreira, Eduardo, 343
Sera£m, T.C.E., 395
Silva, Andrea V. da, 203
Silva, Circe Mary Silva da, 357
Silva, Edvaldo Lima da, 295, 303, 401
Silva, Mário Olivero M. da, 273
Silva, Marcelo Chaves, 211
Silveira, Marcos A. da, 95
Souza, Aguinaldo Robinson de , 295, 303, 401
Souza, Giselle C. de, 73
Souza, Luciana Gastaldi S., 405

Tavares, Salvador, 393
Trevisan, André Luis, 389

Valente, Wagner R., 27
Valladares, Renato J.C., 1
Viana, Vera Fazoli, 393
Viana, Marger da C. V., 131
Vieira, Ana Cristina, 387