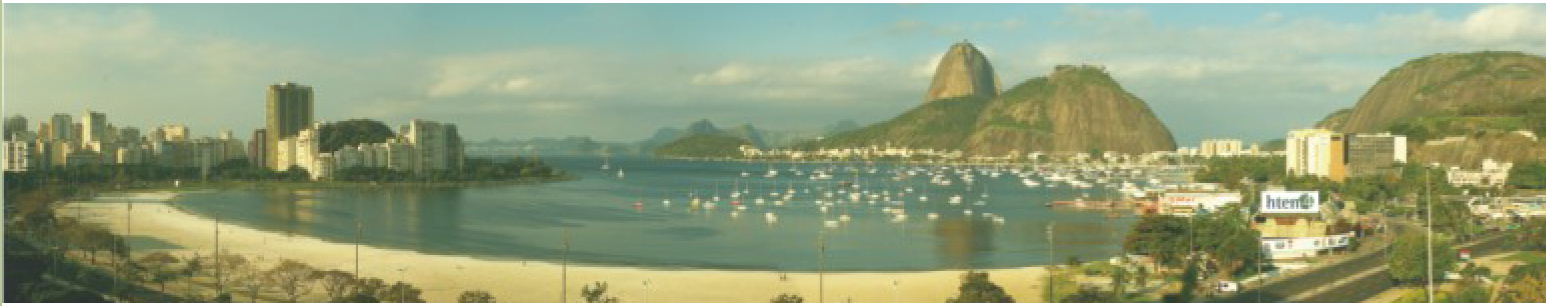


htem4 IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática

Rio de Janeiro, Brasil, de 5 a 9 de maio de 2008

Organização

UFRJ

LIMC UFRJ

Apoio

Ministério da Educação
Secretaria de Ensino Básico

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

CAPES

FAPERJ

SBEM

SBM

SBMAC

ISBN: 978-85-61545-02-4

A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO RIO DE JANEIRO NA PRIMEIRA METADE DO SÉCULO XX

Bruno Alves Dassie

Instituto Superior de Educação do Rio de Janeiro

Universidade Estácio de Sá

O objetivo desta comunicação oral é apresentar alguns detalhes sobre os cursos de formação de professores de matemática na Universidade do Distrito Federal e na Faculdade Nacional de Filosofia. Entre as informações encontram-se dados sobre o ingresso nessas instituições, as estruturas dos cursos e, em especial, dados sobre as disciplinas Prática do Ensino da Matemática e Didática Especial de Matemática. Acreditamos que esta comunicação contribua para as análises do processo de institucionalização do professor de Matemática no Brasil e suas relações com a educação matemática.

INTRODUÇÃO

A análise histórica do processo de formação dos professores de matemática é um fator importante para o exame da institucionalização da educação matemática como campo profissional e científico, pois a trajetória do professor pode mostrar de forma relevante a realidade histórica do ensino. Segundo Schubring (2005),

> Uma abordagem tradicional é, sem dúvida, a análise dos programas do ensino. Como os programas representam as *intenções* – da parte de certos grupos dominantes da comunidade educativa respectiva e, por outro lado, da política do Ministério, uma agencia centralizadora, agindo alegadamente de uma maneira benevolente – as realizações no ensino podem ser bastante diferentes e, assim, os programas significam somente *um* fator de importância variável. Analogamente, a outra abordagem tradicional, a análise dos decretos do governo – frequentemente ligada à análise dos programas – representa também somente um pequeno aspecto do todo e não pode explicar suficientemente a situação real do ensino de uma disciplina escolar e o papel dos seus professores. No entanto, há dois outros assuntos que determinam muito mais decisivamente a realidade do ensino. O primeiro são os *manuais* [...] E o segundo assunto básico é o professor de Matemática. Ele não constituiu um sujeito passivo que recebe os programas e os faz aplicar mas ele representa a pessoa decisiva no processo de aprendizagem (p 9, grifos do autor).

Portanto, é de grande valia para a história da educação matemática no Brasil a análise da formação do professor de matemática. Por exemplo, Soares (2008) caracterizou o professor de matemática, no período que se estende desde a expulsão dos jesuítas até os últimos anos do Império (1759 – 1879), a partir da análise de provas de exames e da legislação vigente, mostrando quais eram os conhecimentos necessários e as exigências legais para o cumprimento das suas funções no ensino primário e secundário. Outras pesquisas nessa perspectiva, após o período delimitado por Soares, podem ser realizadas a partir das Teses de concurso para a entrada nas instituições de ensino secundário, como por exemplo, o Colégio Pedro II. Outro marco para as análises é a fundação dos cursos superiores destinados à formação do professor. No Brasil até a década de 1930 não havia tais cursos. Nossos professores de matemática eram, em sua maioria, engenheiros. Dias (2001), sobre a profissionalização do professor de matemática no Brasil, resume este quadro de maneira muito apropriada. Segundo ele,

> O magistério, ao lado da medicina e da advocacia, já era considerada como uma das profissões liberais no Brasil no século XIX, mas, como se sabe, eram os médicos, engenheiros, advogados ou padres que lecionavam as diversas disciplinas dos currículos escolares, fossem do nível secundário, fossem do nível superior, sem que tivessem para isso nenhuma preparação especial, sem que lhes fosse exigido qualquer tipo de credenciamento educacional específico, além da própria formação científica obtida nas suas escolas e faculdades. A matemática até então pertencia ao domínio dos conhecimentos do engenheiro. [...] Mas, a matemática e o seu ensino não eram considerados como um conhecimento ou uma ocupação estranha à engenharia ou às atividades do engenheiro. [...] No exercício da profissão, os engenheiros encontravam empregos principalmente no serviço público, onde ocupavam cargos técnicos, burocráticos ou de chefia nas diversas obras ou repartições estatais. As possibilidades de emprego para engenheiros em serviço técnicos especializados no setor privado não eram tão grandes, de modo que o magistério era exercício paralelamente, nas escolas públicas ou nas particulares, no ensino ginasial, secundário ou no superior, até mesmo nas aulas e cursos particulares mantidos pelos próprios professores, assim como a atividade política ou jornalística, em alguns casos. Note-se bem que o exercício do magistério pelo engenheiro nem sempre tinha um caráter diletante, nem sempre era uma ocupação que servia apenas para a obtenção de prestígio e *status* social, muito pelo contrário, em muitas situações constituía-se em importante fonte de renda para o sustento de si próprio ou da família (p. 193 – 194, grifo do autor).

A partir deste período, este quadro se altera parcialmente, a partir da fundação, por exemplo, da Universidade de São Paulo – USP –, da Universidade do Distrito Federal – UDF – e da Faculdade Nacional de Filosofia do Rio de Janeiro – FNFi. Dessa forma, o objetivo desta comunicação é apresentar alguns detalhes sobre a formação do professor de matemática, dada no Rio de Janeiro, a partir de documentos da UDF[1] e da FNFi.

A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NA UDF E NA FNFI

A Universidade do Distrito Federal foi criada pelo Decreto nº 5.513, de 4 de abril de 1935 e entre as suas finalidades encontra-se a formação do magistério, em todos os graus (Art. 2). A UDF foi composta por diversos setores, denominados *escolas*. Entre elas, destacam-se a Escola de Ciências e a Escola de Professores. A formação de professores de matemática era dada com a articulação entre

[1] Recentemente alguns documentos da UDF foram localizados no Instituto Superior de Educação do Rio de Janeiro e organizados pelo Centro de Memória Institucional – CEMI.

esta *escola* e a Escola de Professores. O Decreto nº 1.063, de 20 de janeiro de 1939, transfere para a Universidade do Brasil os estabelecimentos de ensino que compunham a UDF, extinguindo esta última. Após este ato, o Decreto nº 1.190, de 4 de abril de 1939, organiza a Faculdade Nacional de Filosofia, Ciências e Letras, criada pela Lei 452, de 5 de julho de 1937, que passa a ser denominada simplesmente de Faculdade Nacional de Filosofia, composta por quatro *seções*. Entre elas, a seção de Ciências e uma seção especial de Didática (Art. 2). A formação de professores de matemática era dada com o Curso de Matemática, na seção de Ciências e com o Curso de Didática.

Os vestibulares

A Escola de Ciências da UDF era responsável por oito cursos e para o ingresso nesta instituição, o candidato deveria prestar um Concurso de Habilitação. Quanto aos conteúdos exigidos para o Curso de Matemática, temos: Análise algébrica, Álgebra superior, Geometria, Geometria analítica e Física. A partir dos programas localizados[2], observa-se que os conteúdos exigidos eram tratados nos programas de ensino implantados pela reforma Francisco Campos para o curso secundário, tanto no Curso Fundamental quanto no Curso Complementar. Já a seção de Ciências da FNFi era responsável por seis cursos. Para o Curso de Matemática, os conteúdos exigidos no vestibular, eram[3]: Português, Matemática, Física e Lógica. Os conteúdos de Matemática eram os mesmos para os cursos de Matemática, Física, Química e História Natural. A partir desses programas, observa-se que os tópicos listados eram contemplados pelos programas do Curso Fundamental, exceto o tópico de Equações algébricas.

A estrutura dos cursos

O curso de formação de professores da UDF foi estruturado para três anos. As disciplinas eram distribuídas de acordo com a seguinte classificação: Cursos de Conteúdo, Cursos de Fundamentos e Cursos de Integração Profissional. A distribuição era a seguinte[4]:

1º ano

1. Cursos de Conteúdo (10 horas semanais): Matemática e Física
2. Cursos de fundamentos (5 horas semanais): Inglês ou Alemão (facultativo) e Desenho

2º ano

Cursos de Conteúdo (10 horas semanais): Matemática e Física

Cursos de Fundamentos (6 horas no 1º período e 3 horas no 2º período): Biologia Educacional (1º período), Sociologia Educacional (2º período) e Filosofia (1º período)

3º ano

1. Cursos de Conteúdo (5 horas semanais): Matemática (1º período) e História e Filosofia da Matemática (1º período);

[2] Para maiores detalhes ver Dassie (2008).
[3] *Programas para os exames de vestibular 1941*. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional, 1940.
[4] Apud Dassie (2008).

2. Cursos de Integração Profissional (6 horas semanais, excluídas a prática de ensino): Introdução ao ensino (1º período), Filosofia da Educação (2º período), Psicologia do Adolescente (1º período), Medidas Educacionais (2º período), Organização e programas de ensino secundário e Prática de ensino.

Quanto aos conteúdos de Matemática o Art. 22, das *Instruções n. 1*, determinava que as cadeiras seriam Geometria Analítica, Análise Matemática e Mecânica. Duas observações devem ser destacadas quanto à confecção deste curso. A primeira delas é sobre a incorporação, a partir do segundo ano, de diversas disciplinas educacionais. A segunda observação é a presença de um curso de História e Filosofia da Matemática, demonstrando que a importância dada a estes conteúdos na formação do professor não é um tema recente.

A estrutura do curso de formação de professores de Matemática da FNFi difere significativamente do curso acima. As disciplinas de Matemática e Física eram distribuídas em três anos (bacharelado) e as disciplinas de Didática em um ano, complementando a formação do bacharel. Vejamos a configuração do curso[5]:

1º ano

1. Física geral e experimental.
2. Análise Matemática
3. Geometria Analítica e projetiva.

2º ano

1. Análise Matemática.
2. Geometria descritiva e complementos de geometria.
3. Mecânica racional.
4. Física geral e experimental.

3º ano

1. Análise superior.
2. Geometria superior.
3. Física Matemática
4. Mecânica celeste.

4º ano

1. Didática geral
2. Didática especial
3. Psicologia educacional
4. Administração escolar
5. Fundamentos biológicos da educação
6. Fundamentos sociológicos da educação

Nas palavras de Silva (2002, p. 113), “a proposta conhecida como 3 + 1, ou seja, três anos de bacharelado e um de licenciatura, reforça fortemente a dicotomia entre as disciplinas de conteúdo e disciplinas pedagógicas”.

[5] *Programas para os cursos de física e matemática*. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional, 1940. *Curso de didática*. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional, 1940.

Sobre as disciplinas *Práticas do Ensino de Matemática* e *Didática Especial de Matemática*

Medeiros, no artigo *Aspectos da Matemática no Rio de Janeiro*, nos mostra que houve uma formação sólida nos cursos quanto aos conteúdos de matemática, tanto na UDF quanto na FNFi. Mas, em relação ao ensino e aprendizagem da matemática? Como as disciplinas pedagógicas contribuíram para a formação do *professor* de Matemática?

Na UDF as respostas para estas questões podem ser dadas parcialmente a partir da trajetória de Euclides Roxo[6]. Sua ligação com a UDF origina-se exatamente no Instituto de Educação. Euclides Roxo era professor de Matemática da Escola Secundária deste instituto e foi *chefe* de Matemática. E, este último cargo era condição para que ele atuasse como professor nos Cursos de Integração Profissional, do terceiro ano do curso de formação de professores da UDF[7]. Tal fato se concretiza, e, em 14 de dezembro de 1934, Euclides Roxo foi nomeado como professor de *Prática do Ensino de Matemática*[8]. Um documento de seu arquivo pessoal denominado *Organização e prática do ensino secundário* nos mostra as orientações que os professores deveriam seguir nesta parte do curso[9]. Segundo o documento, esta disciplina teria como objetivo ministrar "aos futuros professores os princípios de ordem geral, referentes à organização e finalidade dos estudos secundários e, bem assim, levá-los a exercitar esses princípios na prática real do ensino". Para isso, o curso seria dividido em duas partes, uma denominada Geral, de organização e outra denominada Prática. Nas aulas sobre Organização, os conteúdos contemplados seriam os mesmos para todas as turmas, independentemente da especialização. Eram eles: discussão dos objetivos gerais do ensino secundário; sua finalidade social; seus processos gerais; a organização geral dos trabalhos de classe e as leis da aprendizagem; adaptação do ensino às diferenças de turmas ou classes e às diferenças individuais; a organização tradicional do trabalho escolar: a exposição oral e o uso dos compêndios; a nova organização para o ensino: participação ativa dos alunos nos trabalhos da própria classe; ensino por problemas, por projetos e por planos individuais. O trabalho de cada grupo nas aulas de Prática deveria contemplar os seguintes pontos, agora pensados exclusivamente para cada uma das especialidades: objetivos gerais do ensino da disciplina: informativos e educativos; objetivos do ensino da matéria no atual programa do curso secundário; interpretação prática desses programas; a dosagem da matéria pelas várias séries do curso; sua correlação com outras disciplinas; pontos

---

[6] Para maiores detalhes sobre Euclides Roxo e sua atuação, ver Rocha (2001), Dassie (2001), Valente (2004) e Carvalho (2006) e Dassie (2008).

[7] Dassie (2008).

[8] Idem.

[9] Idem.

fundamentais e pontos acessórios; andamento do programa em relação ao ano letivo; planejamento do ensino; planejamento por trimestre, por mês, por semana, por dia; organização prática de uma aula; distribuição lógica e distribuição metodológica; motivação, desenvolvimento e sistematização das noções; a participação possível dos alunos, em cada aula, nos exercícios individuais e coletivos; a parte expositiva e a parte prática do ensino da disciplina; como distribuí-la; como ordenar, fazer realizar e corrigir os exercícios dos alunos; os processos de ensino mais recomendáveis; a observação, a experimentação, a discussão; marcha indutiva e marcha dedutiva; o treino para fixação das noções fundamentais; os hábitos de trabalho a inculcar nos alunos; como verificar o aproveitamento dos alunos: as argüições orais, os exercícios escritos e os exames; exemplificação de exame e testes. Estes pontos deveriam ser desenvolvidos a partir dos exercícios de *observação*, de *planejamento* de aulas e de *participação* no ensino, bem como de discussões das observações de classe. Em relação a cada um deles, temos que os exercícios de *observação* deveriam ser, quando possível, em turmas do próprio professor na Escola Secundária e teriam por fim "levar os futuros professores à análise de situação da classe: organização material, interesse dos alunos, marcha da aula"; os de *planejamento* feito pelos próprios alunos, indicariam os objetivos a alcançar, os recursos de motivação de material, os tipos de exercícios e verificação dos resultados; e os de *participação*, deveriam ser entre os próprios alunos ou em classes, na Escola Secundária, do professor de Prática. Entre os alunos deste curso, encontra-se César Dacorso Netto, oriundo da Escola Politécnica e, então, professor do Colégio São Bento, cujo requerimento de entrada na UDF foi feito em 8 de julho de 1935.

Na FNFi os programas da disciplina *Didática Especial de Matemática*, do ano de 1940, nos ajudam a refletir quais foram as intenções em relação à formação do professor de Matemática nesta instituição. Apesar de não terem sido executados, num momento inicial, como relata Maria Laura M. Leite Lopes[10], a lista de tópicos selecionados apresenta questões bastante significativas sobre educação matemática e suas relações com a formação do profissional. Apesar de extensas, merecem transcrição completa:

> 1. A moderna formação do professor de matemática no país e no estrangeiro; requisitos técnicos e pessoais.
> 2. Valor e contribuição específica do estudo da matemática para a consecução dos objetivos gerais do curso secundário.
> 3. Objetivos específicos do ensino da matemática no curso secundário.
> 4. Histórico da introdução do estudo da matemática no currículo da escola secundária.
> 5. Estudo comparativo do ensino da matemática no currículo secundário dos principais países.
> 6. O ensino da matemática no currículo da escola secundária brasileira; seu histórico e sua situação atual: o programa oficial, sua extensão, seriação e horário.

---

[10] Depoimento concedido em 1º de março de 2007.

7. Estudo analítico e crítico do programa oficial para as três primeiras séries do curso fundamental.
8. Estudo analítico e crítico do programa oficial para a quarta e quinta série do curso fundamental.
9. Estudo analítico e crítico do programa oficial para as séries do curso complementar.
10. Correlação do ensino da matemática com as demais disciplinas do curso secundário.
11. Aplicação das leis gerais da aprendizagem ao estudo da matemática, conclusões didáticas.
12. Peculiaridade e problemas específicos da aprendizagem da matemática no curso secundário.
13. Técnicas específicas de planejamento do ensino da matemática no curso secundário. Plano de curso e planos de aula. Prática de planejamento.
14. O ensino da matemática e a psicologia do adolescente; interesse e problemas específicos de motivação.
15. O problema do método no ensino da matemática no curso secundário; métodos tradicionais e métodos progressistas.
16. O material didático e o livro texto no ensino da matemática no curso secundário; critérios de seleção. A sala ambiente de matemática, sua organização e seu funcionamento.
17. O interrogatório, o exercício e a tarefa no ensino da matemática; problemas e técnicas específicas.
18. As diferenças individuais e o estudo dirigido; trabalho individual e trabalho por equipes.
19. Verificação subjetiva e objetiva do aproveitamento em matemática; critérios e normas práticas.
20. Observação e prática de ensino de matemática em estabelecimentos de nível secundário.

Considerações Finais

Neste período encontramos algumas características do processo de institucionalização desta profissão. Além de uma formação específica em nível superior, os decretos de criação ou os relacionados, tanto da UDF quanto da FNFi, determinaram novas condições para o ingresso dos professores nas instituições de ensino. Sobre a UDF, o Decreto 5.515, de 4 de abril de 1935, que regulava a carreira no Distrito Federal, determinava que só poderiam ingressar na profissão de professor de escolas secundárias, os que se diplomassem *professores secundários* por esta instituição (Art. 2). No decreto que organizava a FNFi, o artigo 51, deliberava que a partir de 1 de janeiro de 1943 seria exigido o diploma de licenciado, correspondente ao curso da disciplina a ser lecionada, "para o preenchimento de qualquer cargo ou função do magistério secundário ou normal, em estabelecimento administrado pelos poderes públicos ou por entidades particulares". Portanto, acreditamos que estas informações contribuam para as análises sobre a formação dos professores de Matemática e suas relações com a Educação Matemática.

Referências

Carvalho, J. B. P. (2006). A turning point in secondary school mathematics in Brazil: Euclides Roxo and the mathematics curricular reforms of 1931 and 1942. *International Journal for the History of Mathematics Education*. Vol. 1, n. 1, p. 69 – 86.

Dassie, B. A. (2001). *A Matemática do curso secundário na Reforma Gustavo Capanema*. Rio de Janeiro. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Dassie, B. A. (2008). *Euclides Roxo e a constituição da educação matemática no Brasil*. Tese (Doutorado em Educação) – Departamento de Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. (em andamento).

Dias, A. L. M. (2001). Da bossa das matemáticas à educação matemática: defendendo uma jurisdição profissional. *Revista História & Educação Matemática*. v. 2, n.2. Rio Claro: Sociedade Brasileira de História da Matemática. jan/dez. 2001 – jan/dez. 2002, p. 191 – 221.

Medeiros, L. A. J. *Aspectos da Matemática no Rio de Janeiro*. Disponível em: < http://www.dmm.im.ufrj.br/doc/fnfi-im.htm>. Data de acesso: 26 mar 2007.

Rocha, J. L. (2001). *A Matemática do curso secundário na Reforma Francisco Campos*. Rio de Janeiro, 2001. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Schubring, G. (2005). Pesquisar sobre a história da matemática: metodologia, abordagens e perspectivas. In: Moreira, D.; Matos, J. M. (org). *História do ensino da matemática em Portugal*. Portugal: SPCE, 2005, p. 5 – 20.

Silva, C. M. S. (2002). Formação de professores e pesquisadores de matemática na Faculdade Nacional de Filosofia. *Cadernos de Pesquisa*, n. 117, nov, p. 103 – 126.

Soares, F. S. (2008). *O professor de matemática no Brasil (1759 – 1879)*: aspectos históricos. Tese (Doutorado em Educação) – Departamento de Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Valente, W. R. (2004). (org). *Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil*. Brasília: Editora da Universidade de Brasília.

A INSTRUÇÃO PÚBLICA E O ENSINO DE MATEMÁTICA NO RIO DE JANEIRO NO TEMPO DE D. JOÃO VI

Flávia dos Santos Soares – Universidade Severino Sombra / Instituto Superior de Tecnologia

Flávia dos Santos Soares (fsoares.rlk@terra.com.br)

Resumo: *As informações que se tem a respeito da chegada da família real ao Brasil nos remetem a algumas iniciativas de D. João VI em relação à instrução pública, notadamente a criação das Academias Militares, germe do ensino de Matemática no Brasil. O objetivo deste artigo é elucidar algumas daas medidas tomadas D. João VI em relação à instrução pública do país durante esse período.*

INTRODUÇÃO

Vários documentos destacam em várias gerações o enorme apreço da família real pelos livros, pela ciência e pelos estudos. A própria vinda para o Brasil não deixa de demonstrar isto, visto o enorme esforço feito por D. João VI para trazer os seus livros de Portugal na conturbada fuga para a colônia. D. Pedro II durante toda a sua vida fazia questão de posar para fotografias junto aos livros e certa vez disse que se não fosse imperador gostaria de ser *mestre-escola*. Outros membros da família real como a Imperatriz Leopoldina e a princesa Isabel, também demonstraram interesse especial pelas Ciências, caracterizando o período do Império como frutífero em iniciativas na área.

A instrução pública durante todo o Império, embora o interesse de toda a família real pelas Ciências, permaneceu em situação precária e pouco privilegiada nas decisões parlamentares, e o interesse da família real por uma educação científica não se refletiu da mesma forma em prol da educação do povo. Em muitos aspectos, como em relação aos professores públicos, D. João VI não se manifestou mantendo as condições já existentes. Por outro lado D. João VI pode ser destacado como um dos grandes incentivadores da formação científica do país com a criação de instituições voltada para a Ciência e para o saber.

Este texto tem como objetivo ressaltar alguns desses empreendimentos levados adiante a partir da chegada da família real ao Brasil, em 1808.

D. JOÃO E A INSTRUÇÃO PÚBLICA

No começo do século XIX o Brasil tinha cerca de 3 milhões de habitantes, sendo que um terço dessa população era composta por escravos. Em 1808 a população do Rio de Janeiro era avaliada em 60 mil habitantes. A esses, somam-se os 12 mil ou até 15 mil que a historiografia consagrou como o número de pessoas que teriam vindo para o Brasil juntamente com a família real nas embarcações portuguesas nos anos de 1808 e 1809.

Muitas mudanças ocorreram e medidas foram tomadas a partir da chegada de D. João VI e de sua família ao Brasil. Há quem diga que, paradoxalmente, a chegada da corte foi o primeiro passo em direção à Independência. Sem dúvida, novos habitantes fizeram com que o Rio de Janeiro, num curto espaço de tempo, crescesse em todas as direções, não só no aspecto geográfico como no aspecto urbanístico, cultural, econômico e social, dentre outros.

D. João VI, nos primeiros anos de sua chegada ao Brasil, determinou a abertura de fábricas e manufaturas, dentre elas a *Real Fábrica de Pólvora* instalada na Lagoa Rodrigo de Freitas; criou o *Banco do Brasil*; estabeleceu um esquema de quarentena na ilha de Boa Viagem, em Niterói, para as pessoas recém-chegadas de navio sob suspeitas de doenças contagiosas e criou a *Intendência Geral de Polícia*, que ficou encarregada de serviços públicos como a construção de ruas e o abastecimento de água (CAVALCANTI, 2004).

Prevendo que sua estadia no Brasil não seria curta, D. João VI abriu os portos às nações amigas e tratou de resolver alguns problemas emergenciais de utilidade prática como a falta de engenheiros, médicos e agrônomos no Brasil, não se ocupando de fato com o problema da educação do “povo” brasileiro.

Embora o ensino no Brasil, assim como em outras colônias, fosse negligenciado por Portugal, não sendo permitida nem mesmo a impressão de livros, existia no Brasil do início do século XIX *“homens de ciência e artistas de escol”* (GUIMARÃES, 1941, p.269). Estes homens, que carregavam o privilégio de alguma cultura, eram os oriundos das famílias de posse que haviam ido à metrópole se instruir nas universidades.

Em razão da minoria dos homens cultos que freqüentavam a corte do século XIX, D. João VI, ao instalar-se no Rio de Janeiro, viu-se na necessidade de estimular o surgimento de um ambiente propício à formação de uma elite capaz de prover os quadros administrativos da nova sede do governo imperial e formar profissionais liberais. Os cursos que preparavam os burocratas para o Estado eram os dos estabelecimentos militares, os cursos de Medicina e Cirurgia e o de Matemática (CUNHA, 1980).

Assim, foram criadas Academias Militares e Escolas de Medicina, além de outras instituições de incentivo a *cultura* e ao *saber* como a *Biblioteca Pública*, atendendo as necessidades de um edifício próprio para a colocação da Real Biblioteca e instrumentos de Física e Matemática vindos de Lisboa; o *Museu Nacional*; o *Jardim Botânico*; o *Observatório Astronômico* e, sua iniciativa mais marcante em termos de mudança, a *Imprensa Régia*, responsável pela impressão do primeiro jornal do Brasil, a *Gazeta do Rio de Janeiro*.

Com relação à instrução elementar, sua primeira medida, já que ainda não dispunha de total conhecimento da situação em que se encontrava o ensino no Brasil, foi manter as condições estabelecidas pela Carta Régia de 1799, como o Decreto de 17 de janeiro de 1809. Por este decreto, D. João VI autorizava a *Mesa do Desembargo do Paço* a verificar as cadeiras que se encontravam vagas, proceder aos exames para contratação de professores e *"nomear algum magistrado hábil para examinar a conduta e procedimento dos referidos mestres*[1]*"*.

Ainda no mesmo ano a Mesa do Desembargo do Paço se pronunciava[2] e lembrava a Carta Régia de 1799 quanto à decisão de se criar no Rio de Janeiro uma cadeira de Aritmética, Álgebra e Trigonometria, salientando a importância do estudo da Matemática:

> [...] sendo o estudo da matemática o mais necessário a todas as classes de pessoas que desejarem distinguir-se nas diferentes ocupações e empregos da sociedade, ou científico ou mecânico; convém pelo menos que os seus elementos ou primeiros ramos, como são a aritmética, a álgebra, a geometria teórica e prática, se tornem vulgares, e constituem uma das primeiras instruções da mocidade; por este justificado motivo se deve criar a dita cadeira, na qual se ensinará aritmética até equações do 2o grau inclusivamente; a geometria teórica e prática e trigonometria.

Lembra ainda que o professor deverá ensinar

> [...] o cálculo numérico provisoriamente com o algébrico, tanto das quantidades inteiras, como fracionárias; a resolução das equações algébricas de 1o e 2o graus; e formação das potências, e extração de suas raízes; a teoria das proporções e progressões; regras de três simples e composta, direta e inversa, as de sociedade, de liga e falsa posição, terminando o ensino de aritmética e álgebra com a resolução dos diferentes problemas de mais uso no comércio, como são os que pertencem a juros ou interesses etc., e com a explicação do uso das tábuas de Price, insertas no tratado das Pensões vitalícias de Saint Cirau, publicadas em português.

Para a Geometria teórica o professor

> [...] procurará acostumar o entendimento de seus discípulos a sentir a evidência dos raciocínios, e apreciar a exatidão, e pensar metodicamente. Mostrará sucessivamente o uso e aplicação de todas as proposições de geometria, de que se pode tirar vantagens nas diferentes artes e ofícios na medida das distâncias, superfícies e volumes, expondo o método de pôr em prática as operações geométricas. Passará depois à trigonometria plana, e à descrição e uso dos instrumentos nas diversas operações

[1] Decreto de 17 de janeiro de 1809.
[2] Resolução de Consulta da Mesa do Desembargo do Paço de 14 de julho de 1809.

> geodésicas, como são grafômetros, pranchetas, etc., dando no fim de cada ano letivo alguns ditos exercícios práticos no uso dos instrumentos, e na medida das distâncias etc.

Assim, pela descrição acima percebe-se a ênfase ao estudo dos usos práticos da Matemática sem que a inteção de um estudo teórico aprofundado da disciplina. À instalação de uma cadeira para o ensino de Matemática acrescentava-se uma cadeira de Inglês e outra de Francês providenciando *"o quanto por ora basta para a instrução litterária e instrução pública"*.

Assim, com relação ao ensino de instrução primária e secundária, a vinda da família real para o Brasil não acabou com o sistema das *aulas régias*. Elas continuaram existindo sob a forma das cadeiras isoladas, como as instituídas anteriormente pelo Marquês de Pombal, após a expulsão dos jesuítas, em 1759. Para quem não obtivesse acesso às vagas das escolas religiosas ainda existentes, nas militares ou com os mestres régios, ainda existia a alternativa das vias informais, da educação doméstica, bastante comum às famílias mais abastadas e também à família real (Cf. VASCONCELOS, 2004).

Outros cursos foram criados para a formação de profissionais para o Estado, como os de Agronomia, de Química, de Desenho técnico, de Economia política e Arquitetura. Os cursos de Direito, criados depois da Independência, completaram esse rol de especialistas nas atividades legislativas, da diplomacia e da administração pública (CUNHA, 1980).

Outro curso que continha disciplinas de Matemática eram o curso de Economia. A primeira Aula Pública de Economia do Brasil, mais conhecida como *Aula de Comércio*, foi estabelecida no Rio de Janeiro em 1809 por *José da Silva Lisboa*, futuro *Visconde de Cairu*. Esta aula, prevista para funcionar em horário noturno, estava sujeita à direção e inspeção do *Tribunal da Junta de Comércio*, *Agricultura*, *Fábricas e Navegação* (BIELINSKI, 2000). Os estudos na Aula de Comércio do Rio de Janeiro tinham duração de três anos. O primeiro ano era dedicado à Matemática e os alunos aprendiam Aritmética e Álgebra pelos livros de Bezout. No segundo ano, aprendia-se Geometria pelo mesmo compêndio, noções de Geografia, Comércio, Artes Liberais, moedas, câmbios, agricultura, mineração, artes mecânicas e navegação. No último ano, os alunos aprendiam a escritura mercantil e economia política (CARDOSO, 2002). Segundo Almeida (2000), outras duas escolas de Comércio foram criadas na Bahia e em Pernambuco, mas até 1813 ainda não tinham sido organizadas por falta de candidatos aos concursos para professores.

O ENSINO DE MATEMÁTICA NAS ACADEMIAS MILITARES

Para o ensino das Matemáticas, a medida tomada por D. João VI em relação aos cursos militares, com a criação da *Academia Real Militar* e da *Academia de Marinha*, no Rio de Janeiro, foi das mais importantes.

D. João VI veio ao Brasil fugindo de uma possível – e provável – invasão das tropas napoleônicas. Com o intuito de proteger os domínios portugueses de novos ataques e defender um território, agora bem maior, D. João VI ao chegar no Brasil percebeu que era necessário criar escolas para formar oficiais e engenheiros militares e civis. Para atender a essas necessidades foram criadas a Academia da Marinha, e a Academia Real Militar.

A *Academia da Marinha* instalada em 05 de maio de 1808, na hospedaria anexa ao Mosteiro de São Bento, tinha em sua origem a *Academia Real dos Guardas-Marinha*, criada em Portugal em 1779 e transferida para o Brasil com a vinda da família real em 1808. De Portugal vieram *"todos os instrumentos, livros, modelos, máquinas, mapas e plantas da mesma Academia de Lisboa"* (ALMEIDA, 2000, p. 46).

Os cursos começaram no ano seguinte, em fevereiro de 1809. Na Academia ensinava-se Matemática, Física, Artilharia, Navegação e Desenho. Para o ingresso na Escola *"exigia-se apenas regras de aritmética e versão da língua francesa"* (MOACYR, 1936, p. 52).

O plano de estudos da Academia era composto das seguintes matérias:

> 1º ano: Aritmética, Geometria, Trigonometria a aparelho.
>
> 2º ano: Princípios de Álgebra até equações do 2º grau, inclusive; primeiras aplicações delas à aritmética; Geometria (Seções cônicas); mecânica com aplicação imediata ao aparelho à manobra; desenho de marinha e rudimentos sobre construção dos navios.
>
> 3º ano: Trigonometria esférica; navegação teórica e prática; instrumentos de tática naval; continuação de desenho; rudimentos de artilharia e exercícios de fogo; tática militar e artilharia prática (apud MOACYR, 1936, p. 51-52).

A *Academia Real Militar*, criada dois anos depois da Academia da Marinha foi instituída por meio da Carta de Lei de 4 de dezembro de 1810 em substituição a *Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho*. Tinha em seus objetivos não somente a formação de oficiais para as artes bélicas, mas também de outros profissionais:

> [...] faço saber que a todos que esta carta virem, [...] que se estabeleça no Brasil e na minha atual Corte e Cidade do Rio de Janeiro, um curso regular das Ciências exatas e de observação, assim como de todas aquelas que são aplicações das mesmas aos estudos militares e práticos que formam a ciência militar em todos os seus difíceis e interessantes ramos, de maneira que dos mesmos cursos de estudos se formem hábeis oficiais de Artilharia, Engenharia e ainda mesmo Oficiais de classe de Engenheiros geógrafos e topógrafos, que possam também ter o útil emprego de dirigir objetos administrativos de minas, de caminhos, portos, canais, pontes, fontes e calçadas: hei por bem que na minha atual Corte e Cidade do Rio de Janeiro se estabeleça uma Academia Real Militar para um curso completo de ciências matemáticas, de ciências de observações, quais a física, química, mineralogia, metalurgia e história natural que compreenderá o reino vegetal e animal, e das ciências militares em toda a sua extensão, tanto de tática como de fortificação e artilharia [...] *Carta de Lei de 4 de dezembro de 1810 criando a Academia Militar* (apud MOACYR, 1936, p. 46-47)

Para Silva (2003) a criação da Academia Militar *"representou um importante avanço para o Brasil, pois, por meio dela, houve a possibilidade institucional de ser ministrado no país o ensino da ciência e da técnica"* (p.32). Como o curso não era exclusivo aos militares, a Academia Militar se converte no embrião do ensino da Engenharia Civil no Brasil. Além disso, foi a Academia Real Militar o núcleo formador dos primeiros urbanistas do país, como o visconde de *Beaurepaire Rohan*, autor do primeiro Plano Diretor para a cidade do Rio de Janeiro (CAVALCANTI, 2004).

O curso da Academia Real Militar era formado por 7 anos, sendo que os quatro primeiros anos constituíam o chamado *Curso Matemático*. Somente para a formação de artilheiros e engenheiros era exigido o curso completo (SILVA, 2003).

Os cursos se iniciaram em 1811 com as seguintes disciplinas:

> 1º ano: Aritmética, álgebra, Geometria, Trigonometria, Desenho.
>
> 2º ano: Álgebra, Geometria, Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Descritiva, Desenho.
>
> 3º ano: Mecânica, Balística, Desenho.
>
> 4º ano: Trigonometria Esférica, Física, Astronomia, Geodésica, Geografia Geral, Desenho (SILVA, 2003, p.33).

Como referência didática, a Carta de criação da Academia Militar recomenda para Álgebra e para o Cálculo Diferencial e Integral os livros de *La Croix*; para a Trigonometria Esférica, *Legendre*; além das obras de *Euler* e *Bezout*. Como observa Valente (1999) *"será das Academias Real Militar e dos Guardas-Marinha que virão professores e livros didáticos de Matemática para o ensino nos preparatórios e liceus provinciais"* (p. 107)

Alguns dos professores citados por Silva (2003) que teriam composto o primeiro corpo docente do Curso Matemático são: Francisco Cordeiro da Silva Torres e Alvim (1775-1856); Antônio José do Amaral (1782-1840); José Saturnino da Costa Pereira (1773-1852); José Victorino dos Santos e Souza (1780-1852) e Manoel Ferreira de Araújo Guimarães (1777-1838).

Uma outra observação interessante feita por Valente (1999) é que enquanto a Academia Real Militar se transforma num curso superior, a Academia da Marinha ia se configurando num curso de nível secundário. De qualquer forma são nos cursos destinados ao ensino técnico e militar que vão se estabelecendo os elementos para a definição de uma Matemática escolar que será utilizada nos séculos seguintes.

> Todo o *menu* de conteúdos de matemática elementar fica já definido. Estão constituídos os temas que poderão ser ensinados aos alunos que já passaram pela escola primária, que sabem as quatro operações fundamentais da Aritmética. Os conteúdos da Matemática secundária ficam definidos, quer seja pela Academia Real Militar, por meio da Matemática

> elementar necessária ao aprendizado da Matemática superior, quer seja pela Academia Real dos Guardas-Marinha, pela necessidade de formação de profissionais do mar (VALENTE, 1999, p.107).

A Academia Militar passou por diversas reformas e regulamentos. Após a Independência do Brasil, passou a denominar-se *Academia Imperial Militar*. Dez anos mais tarde, em 1832, um decreto declarou extinta a Academia Imperial Militar e instituiu a *Academia Militar e de Marinha do Brasil* (SILVA, 2003, p. 34). A reestruturação e ampliação do ensino superior no Brasil proporcionada por D. João VI a partir de 1808 fizeram com que os estudos de Matemática, Física e outras Ciências se deslocassem dos cursos controlados pela Igreja para os cursos médicos e militares (CUNHA, 1980, p.63). Inicialmente limitado ao Rio de Janeiro e depois estendido a outras regiões do país, as escolas de Engenharia constituíram-se nos únicos espaços onde se ensinou Matemática superior até 1933 (CASTRO, 1999).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

De fato, as mudanças proporcionadas pela chegada da família real ao Brasil foram muitas e diversas. As medidas de D. João VI em relação à instrução pública e o ensino elementar foram discretas. O ensino de Matemática ministrado nas Academias Militares, apesar do avanço que esta iniciativa representa para a futura matemática escolar que se configurou no século XX, incentivava muito mais o seu caráter utilitário do que científico.

Assim, como bem diz Tobias (s.d):

> se o rei se preocupava e plantava escolas, não o era diretamente por amor à cultura em si, nem por amor à educação e nem tampouco por amor à educação brasileira; simplesmente era por interesse seu e interesse de Estado; antes de mais nada, eram finalidade e preocupação desmesuradamente profissionalizantes e utilitárias.a finalidade, por conseguinte, da educação de D. João VI era de formar, não o homem, não o brasileiro, mas sim, exclusivamente, o profissional [...] o oficial, para defender a nação [...] o médico para cuidar da saúde [...] e o engenheiro, sem o qual, o exército não poderia andar e nem o rei nada fazer (p.155)

De qualquer forma as medidas tomadas a partir do século XIX proporcionaram uma nova vida para a cidade do Rio de Janeiro e outras províncias abrindo caminho para que outros membros da família real pudessem por sua vez implementar outras ações em prol da instrução e da Ciência brasileira.

Referências

Almeida, J. R. P. (2000) *A instrução pública no Brasil (1500-1889).* Tradução Antonio Chizzotti. Guedes, Maria do Carmo (Ed.). 2. ed. São Paulo: EDUC.

Cardoso, T.M.R.F.L. (2002). As luzes da Educação: fundamentos, raízes históricas e prática das aulas régias no Rio de Janeiro (1759-1834). Bragança Paulista: Editora da Universidade São Francisco.

Castro, F. M. O. (1999). *A Matemática no Brasil.* 2. ed. Campinas: Editora da UNICAMP.

Cavalcanti, N. (2004). *O Rio de Janeiro Setecentista*: a vida e a construção da cidade da invasão francesa até a chegada da corte. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Coleção das Leis do Império do Brasil. Coleção publicada pela Imprensa Nacional em texto integral digitalizado. Inclui Cartas de Leis, Decretos, Alvarás, Cartas Régias, Leis e Decisões imperiais publicados entre os anos de 1808 e 1889. Disponível em: http://www2.camara.gov.br/legislacao/publicacoes/doimperio. Acesso em: 30/03/2006.

Cunha, L. A. (1980). *A Universidade temporã*: o ensino superior da Colônia à Era de Vargas. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira; UFC.

Guimarães, A. C. A. (1941). Ação cultural e política no governo de D. João VI. *Separata dos "Anais" do Terceiro Congresso de História Nacional*. v. III. Rio de Janeiro: Instituto Histórico / Imprensa Nacional.

Moacyr, P. (1936). *A instrução e o Império*: subsídios para a história da educação no Brasil. v. I (1823-1853). São Paulo: Nacional.

Silva, C. P. (2003). *A Matemática no Brasil*: uma história do seu desenvolvimento. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher.

Soares, F. S. (2007). *O Professor de Matemática no Brasil (1759-1879):* aspectos históricos. Rio de Janeiro. Tese de Doutorado – Departamento de Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Tobias, J. A. (1986). *História da Educação Brasileira.* 2. ed. São Paulo: Juriscredi, s.d.

Valente, W. R. (1999). *Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730-1930).* São Paulo: Annablume/Fapesp.

Vasconcelos, M. C. C. (2004). *A Casa e os seus mestres:* a Educação doméstica como uma prática das elites no Brasil de oitocentos. Rio de Janeiro,. Tese (Doutorado em Educação) – Departamento de Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

PROJETO "JOÃO DA SILVA" – PIONEIRISMO EM TELEDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Leandro Silvio Katzer Rezende Maciel*

O objetivo desta comunicação é apresentar detalhes sobre o Projeto "João da Silva", uma telenovela educativa. Em particular, sobre as questões relativas ao ensino da Matemática. Produzido no início da década de 70 do século passado pela Fundação Centro Brasileiro de Televisão Educativa (FCBTVE), este programa teve como coordenador pedagógico, e um dos idealizadores, o professor de Matemática Manoel Jairo Bezerra. A comunicação constará de uma breve introdução da história da radiodifusão educativa no Brasil, seguida da exposição do Projeto "João da Silva". Para complementar a exposição oral, será exibido o documentário "Memórias da Teleducação", com depoimentos e trechos da telenovela.

1 – INTRODUÇÃO

A radiodifusão educativa pública no Brasil apresenta uma trajetória inconstante, com momentos de qualidade intercalados com períodos de ostracismo. A falta de planejamento e as diversas intervenções no setor impediram os profissionais da teleducação de desenvolver um trabalho de contínua qualidade. Uma das conseqüências é a ausência de uma política de preservação do acervo de documentos, sons e imagens em movimento das emissoras de radiodifusão públicas e o resultado é a escassez de material histórico relevante. Por este motivo, torna-se importante o registro daquele que foi um dos primeiros projetos de teleducação do país, o Curso Supletivo "João da Silva".

2 – BREVE HISTÓRICO DA RADIODIFUSÃO EDUCATIVA NO BRASIL

A primeira transmissão via rádio, em território brasileiro, ocorreu durante a exposição comemorativa do centenário da independência do Brasil, inaugurada em sete de setembro de 1922. Sete meses depois, no dia 20 de abril de 1923, Edgard Roquette Pinto fundou a primeira rádio do país, a Rádio Sociedade do Rio de Janeiro.

* Pós-graduado em Gestão de Recursos Humanos e Analista de Recursos Humanos da Associação de Comunicação Educativa Roquette Pinto.

Observa-se que a radiodifusão surgiu no Brasil essencialmente educativa, pois, de acordo com o artigo 3º do seu primeiro estatuto, a Rádio Sociedade foi “fundada com fins exclusivamente científicos, técnicos, artísticos e de pura educação popular”. (A*pud* Milanez, 2007a, p.18)

Em 1926 esta rádio transmitiu aulas de Língua Portuguesa, Física, Química, Francês, História, Biologia, Inglês e Silvicultura. Dez anos depois a Rádio Sociedade foi doada para o Governo Federal do Brasil e passou a se chamar Rádio Ministério da Educação (Rádio MEC).

O Boletim Informativo da Rádio MEC de agosto de 1951 apresenta um raro pioneirismo registro do pioneirismo da radiodifusão educativa: aulas de matemática, aos sábados, com o professor J.C. Mello e Souza.

Ao longo de mais de 70 anos a rádio brasileira teve diversos programas educativos com aulas de matemática. Destacam-se: Projeto “Minerva”, da década de 70 do século passado; Universidade do Ar da Rádio Nacional, de 1947; e, Colégio do Ar, produzido e transmitido nos anos de 1950 pela Rádio MEC e com a participação do professor Jairo Bezerra:

> Comecei a trabalhar na Rádio MEC em 1956. Naquele ano, o professor Aristóteles de Paula Barros, diretor do Colégio do Ar, do Serviço de Radiodifusão Educativa, convidou-me para dar aulas de Matemática pelo rádio. Aí, começou uma das melhores experiências educativas da minha vida. Inicialmente apresentei um Curso de Matemática, incluindo a História da Matemática que, como escreveu o professor Paula Barros, em 10 de julho de 1962, era de elevada audiência, de excelente motivação e de conteúdo altamente significativo. (*Apud* MILANEZ, 2007a, p.148-149)

2.1 – A Teleducação

Em 1952 Edgard Roquette Pinto e Tude de Souza tentam criar a primeira emissora de televisão educativa do Brasil. O projeto, contado em detalhes pela Revista PN de 19 de dezembro de 1960, não foi adiante por motivos políticos.

Na década de 60 do século passado, dois professores trabalharam na criação dos primeiros programas de teleducação do Brasil: Alfredina de Paiva e Souza, pela TV Rio, que produziu em 1961 um curso destinado à alfabetização; e, Gilson Amado, pela TV Tupi, a partir de 1962, com o

Curso de Preparação para Exames de Madureza pela TV. O volume um do material didático abordava os seguintes conteúdos de matemática:

> Exercícios de revisão do curso primário; Expressões com números inteiros; Como aprender a resolver problemas; Problemas sobre as quatro operações; Múltiplos e divisores; Curiosidades; Exercícios de revisão de aritmética; Regras práticas para o cálculo mental rápido; A noção de número; Frações; Redução de Frações ao mesmo denominador; Operações com frações; Expressões com frações; Problemas sobre frações; Problemas envolvendo frações de uma mesma grandeza; Números decimais; Operações com números decimais; Sistema legal de unidade de medida; Unidades de comprimento; Unidades de área; Unidades de volume; Unidades de massa; Razões e proporções; Números proporcionais; Divisão em partes proporcionais; Regra de três; Porcentagem; Juros Simples (BEZERRA, [ca 1970], apostila nº 2, p. 18)

Em 1967 surge a FCBTVE, que foi a primeira experiência não eventual do Governo Federal em Teleducação. Seis anos após a sua criação o seu primeiro presidente, Gilson Amado, conseguiu que esta Fundação ganhasse a outorga do canal dois do Rio de Janeiro.

Durante esta fase de pioneirismo diversos projetos foram executados, dentre eles: "SACI", do Ministério da Educação; "Meu Pedacinho do Chão", da TV Cultura de São Paulo; "João da Silva" e "Conquistas", ambos produzidos pela FCBTVE. Todos estes programas apresentavam conteúdos de matemática.

3 – O PROJETO "JOÃO DA SILVA"

"João da Silva" foi pioneiro por ser o primeiro Curso Supletivo de teleducação do Brasil elaborado para ser transmitido em todo o país e em formato de telenovela, bem como por ganhar o Prêmio Japão – organizado pela emissora de televisão japonesa Nihon Hôso Kyokai (NHK), que premia os melhores programas da teleducação mundial.

O Projeto teve como um dos criadores o Professor Jairo Bezerra e foi produzido entre os anos de 1972 e 1973. Os alunos que concluíam com aproveitamento os seus estudos recebiam Certificado de Conclusão das quatro séries iniciais do antigo primeiro grau.

O Curso ganhou este nome em virtude do seu protagonista, interpretado pelo ator Nelson Xavier, chamar-se João da Silva e representar um personagem típico das grandes cidades brasileiras: "um moço de 25 anos, natural do município de Triunfo, em Pernambuco. (...) Órfão de pai (...), deixou o 2º ano primário para trabalhar. (...) Resolveu tentar a sorte no Rio de Janeiro" (FUNDAÇÃO CENTRO BRASILEIRO DE TELEVISÃO EDUCATIVA, [ca 1972], p.2)

"João da Silva" teve a coordenação pedagógica do professor Jairo Bezerra, Produção Geral de Fernando Pamplona, Roteiro de Lourival Marques e Direção de Jacy Campos. Foram 135 capítulos, com aulas de Matemática, Comunicação e Expressão, Estudos Sociais, Ciências e Educação Moral e Cívica.

Como aspecto de formação e de aprendizado do aluno-telespectador, destaca-se que a recepção do projeto era organizada de duas formas: nos chamados Telepostos (os telespectadores assistiam o Curso no próprio Teleposto e recebiam orientação de monitores) e semipresencial, com a recepção das aulas em domicílio e assistência aos alunos-telespectadores em núcleos de atendimento, denominados Centros Controladores. Havia ainda a recepção em domicílio sem qualquer vínculo com os Telepostos ou Centros Controladores.

O material didático do curso era composto de cinco volumes cujo um dos autores era o professor Manoel Jairo Bezerra. O conteúdo pesquisado indica ainda que, em cada volume, seguia uma prova que deveria ser remetida para a FCBTVE.

Atualmente diversos programas de teleducação utilizam estruturas de recepção semelhantes ao pioneiro "João da Silva": Salto para o Futuro, do Ministério da Educação; Telecurso da Fundação Roberto Marinho (FRM); e, Tecendo o Saber, também da FRM, e que utiliza a dramaturgia como recurso educacional.

4 – O PROJETO "JOÃO DA SILVA" E O ENSINO DA MATEMÁTICA

A disciplina de matemática era inserida de acordo com as situações-problema delimitadas pelo programa. Cada capítulo tinha um objetivo específico, todos relacionados com as séries iniciais do antigo 1º grau. Ao final do volume cinco do material didático do Curso Supletivo João da Silva há um índice geral das disciplinas:

> 1. Numeração: Algarismos – Leitura e escrita de números e quantias; Dezena, centena, milhar, dúzia; Algarismos romanos; Valor absoluto e relativo dos algarismos; O milhão e o bilhão; Números cardinais e ordinais; Números pares e ímpares; Números ordinais. 2. Adição de números inteiros: Nomenclatura – modo de fazer – exercícios – problemas. 3. Multiplicação de números inteiros: Multiplicação por 10, 100 e 1.000; Adição de parcelas repetidas; Tabela de multiplicar; Multiplicação por 9 (dedos); Dobro, triplo, quádruplo; Como multiplicar; Problemas; Multiplicação abreviada por 11; Multiplicação abreviada por 15. 5. Divisão de números inteiros: Metade, terça e quarta partes; Tabela de dividir; Como dividir; Propriedades; Problemas. 6. Quatro operações com inteiros: Estimativas e arredondamentos; Problemas fundamentais de multiplicação e divisão; Problemas com várias operações; Múltiplos e divisores; Como efetuar uma expressão; Problemas usando o vocabulário comercial; Adições e multiplicações abreviadas; Sistema legal de medidas; Medidas de comprimento; Medidas de massa; Medidas de tempo; Medidas de superfície e volume; Medidas de líquidos; Histórico e escrita de números. 8. Noções de Comércio: Preenchimento de cheques; Preenchimento de promissórias; Uso de cheques; Conta conjunta; Nota fiscal, fatura, duplicata; Porcentagem; Uso de tabelas; Juros; Troca de moedas de outros países; Como obter empréstimo em bancos. 9. Uso de tabelas: Tabelas de quadrados e cubos; Tabela de financiamento das COHABs. 10. Como fazer e interpretar gráficos. 11. Geometria: Figuras planas; Sólidos geométricos; Cálculo de perímetros; Cálculo de áreas; Cálculo de volumes; Perímetros, áreas, volumes; Figuras planas e sólidos mais comuns. 12. Frações: Noções e representações; Fração de um número; Tantos por cento de quantias; Leitura e escrita; Adição e subtração; Escala; Comissão e desconto; Número misto; Adição e subtração de números mistos; Multiplicação. 13. Números decimais: Leitura e escrita; Adição e subtração; Multiplicação; Problemas; Divisão por 10, 100, 1000; Tantos por cento de quantias; Divisão de inteiro por decimal; Divisão de decimais; Problemas de divisão. 14. Curiosidades e números cruzados. 15. Revisão: Problemas de cursos SENAI e do PIPMO; Números cruzados; Exercícios de numeração; Frações; Operações com decimais; Sistema legal de medidas; Prova de matemática. (KURY, [ca 1973], v.5, p. 129-133)

Quanto a uma possível análise do conteúdo didático observa-se que cada tópico abordado apresenta explicações, exercícios prontos e exercícios a serem resolvidos. Alguns destes com o que o autor chamou de curiosidades matemáticas:

> Você compreendeu bem a brincadeira que a professora apresentou no bar do Sr. Artur? Ela mandou fazer uma adição de quatro parcelas e garantiu que o resultado era sempre 3.944. Lembra-se de quais eram essas parcelas? 1ª parcela – Ano em que você nasceu; 2ª parcela –

> Ano em que nasceu uma pessoa de que você goste; 3ª parcela – Sua idade em 1.972; 4ª parcela – idade dessa pessoa, de que você gosta, em 1972. Experimente e, se fizer a adição corretamente, achará a soma 3.944. Observação: Se a adição for feita com as idades em 1973, o resultado será sempre 3.946. (KURY, [ca 1973], v.1, p. 16)

Como exemplo de tele-aula, há, dentre outros, um problema apresentado durante a telenovela educativa e utilizado como recurso pedagógico no material didático:

> Você viu na TV o Sr. Edson dizer que ele precisava construir uma caixa d'água, na forma de um paralelepípedo de 4 m por 3 m, por 2 m, isto é, 4 m de comprimento, 3 m de largura e 2 m de altura. O Sr. Edson mostrou primeiro que na parte inferior ou na **base** do paralelepípedo poderia construir 4 X 3 quadrados de 1 m de lado. E, a seguir, mostrou que sobre cada um desses quadrados poderia construir tantos cubos de 1 m de aresta quantos fossem os metros de aresta (2 nesse caso). Então, poderia construir 4 X 3 X 2 cubos de 1 m de aresta (...) e o volume da caixa d'água seria 24 m³ ou 24.000 l. O volume de uma caixa d'água que tenha a forma de um paralelepípedo é obtido calculando o produto dos números que indicam as medidas do comprimento, da largura e da altura do paralelepípedo, e acrescentando a unidade de volume – m³ ou dm³ ou cm³ - conforme a unidade de comprimento – m ou dm ou cm – das dimensões do paralelepípedo (KURY, [ca 1973], v.3, p. 36)

Nota-se também que a interdisciplinaridade e a contextualização são uma das características deste objeto de estudo.

Outra perspectiva de estudo deste projeto, além da crítica aos volumes, é a sua comparação com as demais obras do professor Manoel Jairo Bezerra, bem como sua observação dentro do contexto do Movimento da Matemática Moderna.

5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Projeto "João da Silva" foi um marco para a teleducação brasileira e, conseqüentemente, para o ensino da matemática. A tentativa pioneira de educar uma grande massa de cidadãos excluídos do ensino formal, a utilização de uma tecnologia, a serviço da educação, em um formato de dramaturgia, e o prêmio inédito concedido pela televisão Japonesa, fez deste curso supletivo um paradigma para a época.

O estudo do Projeto “João da Silva” pode ser realizado sobre diversos aspectos, além dos já expostos neste documento: análise do roteiro da telenovela; da qualificação da mão-de-obra empregada na execução deste projeto; das dificuldades tecnológicas encontradas na época; bem como qualquer outra abordagem relacionada à educação, história e tecnologia da matemática e demais áreas do conhecimento aplicáveis a um curso supletivo do antigo primeiro grau.

Observa-se ainda que o professor Manoel Jairo Bezerra teve um profundo envolvimento com a radiodifusão educativa, participando por mais de vinte anos na elaboração, coordenação e consultoria de programas de rádio e televisão educativos. Ao lado de Gilson Amado e Alfredina de Paiva e Souza é um dos pioneiros da teleducação no Brasil.

Referências

BEEZERRA, Manoel Jairo et al. **Curso de preparação para exame de madureza pela TV Tupi e Rede de Emissoras Associadas, art. 99**. Universidade de Cultura Popular: Rio de Janeiro, 4 vol., [ca 1970].

BOLETIM INFORMATIVO RÁDIO MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Rio de Janeiro: Rádio MEC, ano I, nº 11-14, junho-setembro 1951.

FUNDAÇÃO CENTRO BRASILEIRO DE TELEVISÃO EDUCATIVA. Telenovela João da Silva: Capítulo 1A. Rio de Janeiro: FCBTVE, [ca1972], 30 p.

FUNDAÇÃO CENTRO BRASILEIRO DE TELEVISÃO EDUCATIVA. Departamento Pedagógico. Projeto Curso Supletivo João da Silva. Documento datilografado. Rio de Janeiro, [ca 1973]. paginação irregular.

KURY, Adriano da Gama et al. **Curso Supletivo “João da Silva”**. Rio de Janeiro: FCBTVE, v.1-5, [ca 1973].

MACIEL, Leandro Silvio Katzer R. **O curso supletivo “João da Silva” e o ensino da matemática: pioneirismo em teleducação**. 96p. Trabalho monográfico (Graduação em Matemática) - Universidade Estácio de Sá, Rio de Janeiro, 2008.

MEMÓRIAS da teleducação. Produzido por: Leandro Silvio Katzer R. Maciel (org.). Imagens cedidas: Associação de Comunicação Educativa Roquette Pinto. Rio de Janeiro: 2008. 1. DVD

MILANEZ, Liana (org.). **Rádio MEC: herança de um sonho**. Rio de Janeiro: ACERP, 2007a.

MILANEZ, Liana (org.). **TVE Brasil: cenas de uma história**. Rio de Janeiro: ACERP, 2007b.

PN, *O escândalo da TV Educativa no Brasil. Revista semanal*, ano XXI, nº 457. PN: Rio de Janeiro, 19/12/1960

TELECURSO: histórico, metodologia pedagógica, fundamentos e como participar. http://www.novotelecurso.org.br Acesso em: 21 mar. 2008.

MATEMÁTICOS EDUCADORES E SUAS REFLEXÕES PEDAGÓGICAS

Autor: MS. Francisco Regis Vieira Alves[1]- fregis@etfce.br
Autor: Doutor Hermínio Borges Neto[2] - hermínio@ufc.br
Autor: Doutor. (a) Rosélia Costa de Castro Machado [3]– rosélia@ufc.br

Neste trabalho, discutir-se-ão as concepções de matemáticos que produziram saberes não apenas relacionados à Matemática, mas também, de natureza pedagógica e filosófica. No Brasil, ainda se encontram cursos de graduação, que oferecem formação estanque baseada em disciplinas específicas e pedagógicas. Corre-se o risco de produzir profissionais que apresentam a concepção de que matemático não se preocupa com outros aspectos, além do que os lógico-formais. A vigilância didática seria atribuída apenas aos pedagogos. Diante deste contexto, pretende-se resgatar a preocupação pedagógica dos matemáticos. Para tanto, abordar-se-ão resumidamente elementos que se acredita os mais adequados à atividade do professor. Estes elementos podem ser encontrados nas reflexões dos seguintes eruditos: Lacroix (1765-1843); Pascal (1623-1662); Condorcet (1743-1794), Poincaré (1854-1912) e Condillac (1715-1780).

Palavras-Chave: Historia da Matemática, Filosofia, Ensino.

[1] Professor do Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará – CEFET/CE.
[2] Professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará – UFC.
[3] Professora do Departamento de Educação da Universidade Federal do Ceará – UFC.

ALGUMAS REFLEXÕES DE MATEMÁTICOS EDUCADORES DO PASSADO

Algumas questões relacionadas à Matemática como, por exemplo, aspectos didáticos, pedagógicos, históricos, epistemológicos e filosóficos, nem sempre são devidamente conhecidas e divulgadas, como oriundas de uma preocupação diretamente revelada por matemáticos.

Segundo Aparecida, M. & Vicente, A, (2001, pg. 46), temos duas frentes de manifestação deste saber: a científica e a pedagógica. Por outro lado, vários trabalhos indicam que em cursos de graduação, o enfoque principal não é o educativo e, sim, o conteúdo. Além disso, as disciplinas de caráter pedagógico são trabalhadas sem articulação (IGNATIUS, 2003, pg. 163).

O estudante e/ou o professor, recém saído de uma Licenciatura em Matemática, em virtude de sua formação hermética entre as disciplinas específicas e as pedagógicas, pode desenvolver uma falsa *concepção* de que matemáticos não se preocupam com Educação e somente os competentes profissionais da linha pedagógica.

Poincaré ensinava sobre a necessidade de olhar o passado para que possamos apreender as idéias dos grandes mestres. Neste sentido, orientar-nos-emos pelas reflexões de Poincaré, na medida em que apresentaremos eminentes matemáticos de séculos passados que podem ser perfeitamente enquadrados como práticos da educação. Sublinhamos apenas a expressão "matemático educador" para designar a formação inicial em Matemática pura.

Dos séculos XVIII ao XIX, encontramos inúmeros cientistas de grande representatividade e produção nas ciências matemáticas. Torna-se imperioso mencionar Silvestre-François Lacroix (1765-1843). Lacroix explicava que:

> todo homem que necessita tornar sua existência útil à sociedade deve marchar constantemente em direção a um objetivo; não sem nenhum esforço dirigido para um mesmo sentido, ele poderá alcançar o verdadeiro sucesso, e conseguir algum direito com respeito à estima de seus contemporâneos e o reconhecimento dos que virão após ele. Completamente entregue ao trabalho do ensino, eu sempre voltei às minhas meditações sobre o modo de apresentar os resultados da ciência por meio de fatos os mais simples e na ordem mais natural. (LACROIX, 1838, pg. 167)

Diante de sua atitude como matemático educador descrita há pouco, criticava os métodos de formação nas escolas centrais da França, onde se verificava uma instrução rígida completamente determinada pelo professor. E sublinhava que lhe foi concedido a liberdade de refletir sobre os modos de aperfeiçoar os cursos que lhe eram confiados.

Lacroix (1838, pg. 168) lembra que apresentava, perante auditórios, os métodos concebidos. Sua aplicação poderia confirmar a necessidade de modificá-los algumas vezes. A partir disto, obtinha procedimentos metodológicos próprios que poderiam assegurar o sucesso dos seus livros.

Neste contexto de reflexão sobre o ensino, explicava que o ensino de ciências era submetido a regras semelhantes às artes: a escolha de exemplos é mais importante do que sua quantidade; qualquer verdade bem aprofundada esclarece muito mais sobre o método do que um grande número de teorias que discutem de uma maneira incompleta (Idem, 1838, pg. 169).

Por parte do aluno, ele destaca que em cada ciência encontramos coisas que não podem ser ensinadas diretamente pelo professor. E em virtude da quantidade de procedimentos nesses ramos da Matemática, orientava no sentido de que a memória seria necessária para a condução das descobertas. A única forma de o professor cultivar, porém, tal memória nos seus alunos é o seu uso freqüente, sem que se caracterize um trabalho forçado e de repetições contínuas, como vemos hoje em dias as repetições e mecanizações de rotinas matemáticas sem sentido.

A partir destas suas últimas palavras levantamos o seguinte questionamento: a memória ou memorização pode apresentar seus limites diante de teorias mais avançadas ? Recorrendo a Lacroix, observamos que ele admite indiretamente que sim, quando declara que diante de objetos matemáticos mais complexos, não existe inconveniência em recorrer aos livros. Dizia ainda não ver necessidade de sobrecarregar a memória de demonstrações e fórmulas (*Idem*, 1838, pg. 185).

Até o momento, falamos sobre dois grandes matemáticos, que ao longo de sua carreira profissional forneceram enorme contribuição ao saber matemático. Todavia, é interessante observar que tal contribuição pode ocorrer antes mesmo de se tornarem matemáticos profissionais. Detalhes são descritos nos grandes tratados sobre a História da Matemática (BALL, 1919;; BOSSUT, 1810; CAJORI, 1896; HOEFER, 1874), onde identificamos episódios biográficos de matemáticos que manifestaram desde cedo suas habilidades criativas.

È o caso de Blaise Pascal (1623-1662), o qual apresentou admiráveis habilidades desde os onze anos. No livro intitulado *Pensées de Blaise Pascal et de Nicole*, editado em 1858, sua irmã Madame Perier descreve a forma extraordinária com que seu pequeno irmão, começa a adquirir, apesar da proibição direta de seu pai, as habilidades da Geometria Plana. A autora afirma que:

> seu espírito inquieto não se limitou com as palavras proibitivas do pai, e lançou-se numa investigação pelas propriedades das figuras planas. Ele passava horas num quarto, onde costumava fazer sua recreação, desenhando com carvão, círculos, triângulos, e nomeava-os. Sua irmã relata que, por falta de livros, ele mesmo criava suas definições e axiomas e buscava as propriedades entre elas. Conseguia até realizar *demonstrações* (PERIER, 1858, pg. 26).

Na idade adulta, quando se tornou conhecido por meio de suas produções e métodos inovadores, mostrou-se à frente dos geômetras de sua época. De fato, Hoefer (1875, pg. 418) lembra que ele penetrou mais profundamente do que qualquer geômetra de sua época, o espírito de uma nova *análise* que surgia naquele contexto, que mais tarde coroaria a invenção do *cálculo*.

Diante da perspectiva adotada, não podemos deixar de mencionar dois matemáticos brilhantes nas suas áreas e que cultivaram profunda preocupação educacional. O primeiro, Jean-Antoine-Nicolas Caritat (1743-1794), conhecido como o marquês de Condorcet. Figura ilustre na Matemática, Filosofia e na Educação (LAURA, 2003, pg. 173), Condorcet aconselhava que era importante deixar ver no ensino apenas o mínimo possível de denominações a métodos arbitrários.

Explicava ser necessário que o professor despertasse a curiosidade ou a necessidade dos alunos sem desagradar-lhes e observar as disposições naturais dos alunos (...). Não se deve começar a exercitar os mais fracos senão quando já estiverem instruídos pelo exemplo dos outros. (CONDORCET, 1903, *apud*, LAURA, 2003, pg. 235)

A segunda figura ilustre é de Henri Poincaré (1854-1912), lembrando que este fora considerado, durante muito tempo, um gênio universal (ROLLET, 1999, pg. 5). Dentre dos seus artigos mais representativos, extraímos dois ensinamentos que merecem nossa atenção.

Em relação ao primeiro, ele dizia que as definições em matemática são enunciadas como convenções, contudo a maior parte dos espíritos se revoltará se quisermos impor por meio de convenções arbitrárias. (POINCARÉ, 1904, pg. 268). No segundo, ele afirmava que a satisfação do mestre não se podia resumir ao seu objeto de ensino. Devemos nos preocupar antes de tudo do com o que é o espírito do aluno e com que queremos que ele se torne (POINCARÉ, 1899, pg. 159).

Em virtude da quantidade de trabalhos produzidos por Poincaré e outros que falam sobre este (ROBADEY, 2006; ROLLET, 1999), sublinhamos sua filosofia pessoal de apresentação do discurso matemático, enquanto desenvolvia suas investigações. Robadey (2006, pg. 202) salienta que a importância da pesquisa de Poincaré reside também na busca pela significação geométrica, das quantidades introduzidas nos cálculos.

Ele apresentava uma mudança de referência matemática no seu discurso, ora mais formal, rigoroso; ora mais heurístico e intuitivo. Em sua tese, a autora registra que podíamos identificar até mesmo uma mudança de expressões e verbos empregados para a comprovação e discussão de suas investigações (ROBADEY, 2006, pg. 197).

Para concluir, falaremos sobre o filósofo francês Étienne Bonnot de Condillac (1715-1780). Ao mesmo é atribuído uma perspectiva *sensualista*[4], quando atribui os sentidos a base das idéias. De fato, ele sustenta que os sentidos são a causa ocasional das impressões que os objetos nos

[4] Designação que se dá a uma doutrina segundo a qual todos os conhecimentos e todas as faculdades do espírito decorrem da sensação, sendo todo o conteúdo do espírito humano produto da experiência; é, pois, uma forma de empirismo.

trazem. É a alma que sente, é a mesma que as sensações pertencem e sentir é a primeira faculdade que evidenciamos na mesma (CONDILLAC, 1754, pg. 6).

> Ele lembra que a condução dos sentidos nos auxiliaria em nossa instrução e que as crianças são uma prova disto. Elas adquirem seus conhecimentos sem nosso auxílio; e mesmo diante de obstáculos que colocamos ao desenvolvimento de suas faculdades. Como elas começaram sozinhas a desenvolver suas faculdades, elas sentirão que podem desenvolvê-las mais, se elas sabem, para alcançar este desenvolvimento, o que elas realizaram para começar (CONDILLAC, 1754, pg. 7).

O papel do *erro* é objeto de reflexão para Condillac. De fato, um desejo presente pode trazer um falso julgamento, pois pode ter sido julgado precipitadamente; mas o erro é momentâneo. Nossa atenção equivocada sente a necessidade de julgar a segunda vez, e agora julga melhor. A experiência obtida corrige os equívocos. (...) Nosso erro não dura. Se num momento nos equivocamos, noutro se desfaz o equívoco (CONDILLAC, 1754, pg. 9).

Ainda referindo-se ao *erro*, ele adeverte que:

> após a infância, os *erros* começam, na medida em que nossa natureza começa e cessar de nos advertir dos equívocos; ou seja, julgando coisas que podem ter poucas ligações com outras de primeira necessidade, não sabemos verificar nossos julgamentos, para reconhecer se estes são verdadeiros ou falsos (CONDILLAC, 1754, pg. 11).

A riqueza das idéias de Condillac a respeito do *erro* é inquestionável, embora percebamos a ausência da preocupação no que se refere à causa do *erro*. De fato, se os homens freqüentemente erram, podemos concluir que eles cometeram equívocos sempre, sejam em relação as coisas, sejam em relação a um conhecimento. É imprescindível saber por que eles se equivocam, poder estabelecer que o erro depende de uma causa permanente (BROCHARD, 1879, pg. 9).

Observamos a atenção desenvolvida pelos educadores matemáticos elencados e, concluímos que suas atividades extrapolavam seu interesse científico pelo saber matemático, na medida em que propuseram reflexões em várias dimensões que, de algum modo, se encontram relacionadas com a Matemática. Doravante passaremos a retirar alguns ensinamentos e orientações que acreditamos serem profícuas ao professor de Matemática.

IMPLICAÇÕES PEDAGÓGICAS PARA O PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Costumeiramente, o professor de Matemática é visto pelos alunos como um agente complicador de problemas. Há diversas ocasiões em que sua missão se torna árdua, no momento, por exemplo, da necessidade de generalização e aprofundamento das idéias matemáticas, como na situação de realizar uma prova ou *demonstração*.

De fato, no momento da apresentação de uma teoria, deve-se atuar sob a égide da *intuição* e, apenas numa etapa posterior, o raciocínio lógico. Jamais o percurso inverso. O professor de

Matemática se depara, então, com um dilema: abordar os conteúdos valorizando o papel das aplicações ou pode tentar fortalecer a busca da *verdade matemática*.

Uma atitude aconselhável será apresentar os resultados matemáticos de modo mais claro e simples possível, como defendiam Lacroix (1838) e Condillac (1798), contudo, isso nem sempre é tão fácil como tencionamos. De fato, ele sugere à utilização da ordem natural, entretanto, a ordem natural histórica dos conceitos do cálculo apresenta seu divisor de águas e pedra angular com os trabalhos de Newton e Leibniz (BOYER, 1939, pg. 188).

Seu estudo inicial era guiado pela *intuição*, uma vez que eram problemas em aberto naquela época, formulações imprecisas adotadas por seus antecessores. Assim, os *erros* do passado experienciados por estes matemáticos poderão reaparecer no momento de seu ensino/aprendizagem.

O professor de Matemática, baseado nestas reflexões, deve preconizar o ensino intuitivo dos conteúdos, todavia, temos de salientar outra barreira considerável. Mesmo que todos estejam de acordo com a cadeia de deduções, característica do *raciocínio lógico*, aparentemente inatacável, não existe unanimidade sobre o ponto de vista da solidez em que estes argumentos repousam, de sorte que as ciências chamadas *exatas* apresentam um aspecto surpreendente de um edifício solidamente construído sobre fundações moventes (CLERÉ, 1899, pg. 6).

A concepção deste princípio é uma questão de sentimento, de intuição, e não de raciocínio, questão na qual cada um intervém com a clareza que lhe é própria (CLERÉ, 1899, pg. 6). Neste sentido, Borel (1926, pg. 7) lembra que, uma vez, Poincaré declarou que não havia sentido dizer se a Geometria Euclidiana era verdadeira ou falsa. Esta observação pode ser comparada com a famosa frase de um filósofo inglês que falou: A matemática é uma ciência na qual nunca se sabe o que se esta falando e nem mesmo se o que se diz é verdadeiro ou falso (BOREL, 1926, pg. 7).

Podemos depreender que, mesmo que aparentemente mais explícito, linear, rigoroso, discursivo, o *raciocínio lógico* possui bases no *raciocínio intuitivo*, portanto, sua compreensão depende das fundações em que fora estabelecido. Temos que compreender as idéias de base intuitiva dos conteúdos e tal capacidade não pode ser transmitida por um passe de mágica. Cleré (1899, pg. 13) lembra que a forma de conhecimento mediado pela intuição é individualmente experienciada e, conforme Ricouer (1988, *apud*, APARECIDA, 2001, pg. 48), o que é experienciado por uma pessoa não pode se transferir como tal e tal experiência para mais ninguém.

Encontramos muitos filósofos que sustentam a impossibilidade de se atingir à *verdade matemática* por meio da intuição. Brochard (1979, pg. 27), por exemplo, lembra que o erro não é apenas ausência de conhecimento verdadeiro, mas uma coisa positiva, outra coisa diferente da verdade. Podemos nos equivocar quando unimos as idéias, e não somente quando fazemos uso dos sentidos ou da imaginação; é o próprio entendimento humano que é falível.

Sendo assim, ao professor, cabe a missão de propiciar as situações de retomada das estratégias utilizadas; de aprofundamento dos seus conhecimentos que obtiveram êxito, como também dos conhecimentos que se manifestaram ineficazes, para que o percurso daquele entendimento equivocado possa ser conscientemente evitado ou re-utilizado em outra ocasião.

Antes de finalizar, recordamos o episódio acerca da atividade intuitiva de Blaise Pascal, quando criança, nomeando as figuras geométricas. Certamente, o *raciocínio intuitivo* deste matemático evolui na idade adulta e nesta, apresenta formas diferenciadas de organização. Sendo assim, o que pode dar garantia ao professor que, mesmo pautando sua didática por meio de um ensino intuitivo, sua *intuição*, se encontra em sintonia e/ou mesmo nível que a *intuição* dos alunos?

Suspeitamos que não, e o que nos leva a tal desconfiança baseia-se em Condillac (1754, pg. 123) ao explicar que perceber e sentir duas *sensações* são a mesma coisa: ora esse sentimento toma o nome de *sensação*, assim que a impressão se faz atualmente sobre os nossos sentidos, ora toma o nome de *memória*, assim que esta sensação que não se faz atualmente se nos oferece como uma sensação que se fez. A *memória* não é, pois, mais do que a sensação transformada.

Portanto, a *intuição* buscada pelo mestre apresenta sua base nas experiências vivenciadas e orientada por conhecimentos mediatizados. Podemos dizer que seu percurso segue do conhecido para o conhecido. Por outro lado, o percurso trilhado por seu aluno, como diria Condillac (1798, pg. 64), segue do conhecido para o desconhecido. Sua *intuição* é instigada por uma sensação que se faz naquele momento, de maneira inusitada. Seus conhecimentos mobilizados de forma idiossincrásica são imediatizados.

Referências

Aparecida, M.B. & Vicente, A. M. (2001). *Filosofia da Educação Matemática*, Coleção Tendências em Educação Matemática, São Paulo: Autêntica.

Ball, W.W.R. (1919). *A short account of the History of Mathematics*, London: Macmillan and Co. Limited.

Bertrand, J. (1891). *Blaise Pascal par Joseph Bertrand*, Paris: Calmann Lévy Editeur.

Borel, E. (1926). *Space and Time*, London : Blackie & Son Limited.

Boyer, C. B. (1939). The *concept of the Calculus: a critical and historical discussion of the derivative and the integral*, New York: Columbia University Press.

Bossut, C. (1810). *Histoire génèrales de mathematiques*, Paris: Chez Louis Librarie, Tome I.

Brochard, V. (1879). *De l´erreur* (Thése de Doctorat), Faculte de Lettres de Paris, Paris: Germer Bailliere et Berger.

Cajori, F. (1896). *A history of elementary mathematics with hints on methods of theaching,* New York: The Macmillan Company.

Cléré, R. (1899). *Necessité Mathematique de l´existence de Dieu*, Paris: Librarie Bloud et Barral.

Condillac, E. B. (1754). *Traité des sensations*, Paris: Librairie – au Palais Royal.

Condillac, E. B. (1798). *La langues de Calculs – oeuvres de Condillac*, Paris: Imprimerie De CH. Houel.

Hoefer, F. (1874). *Histoire des mathématiques: depuis leur origine jusqu´au commencement du dix-neuvième siècle*, Paris: Librarie Hachette.

Ignatius, M. N. (2003). *Repensando a Licenciatura de Matemática a partir das falas de alunos concluintes: as disciplinas pedagógicas*, pg. 163-169, *In*: Anais do I seminário nacional de Licenciatura em Matemática, Salvador.

Lacroix, S.F. (1838). *Essais l´enseignement en general et de celui des mathematiques en particulier*, Paris: Bachelier, Imprimeur – Librarie.

Laura, M. M. G. (2003). *Quatro visões iluministas sobre a Educação Matemática:* Diderot, D´Alembert, Condillac e Condorcet (Tese de Doutorado), UNICAMP.

Perier, M.(1858). *Pensées de Blaise Pascal précédées de sa vie*, Paris: Librarie de Firman Didot Frères.

Poincaré, H. (1904). *Les définitions générales em mathématiques*, L´enseignement Mathématique, Vol. 6, 258-283.

Poincaré, H. (1899) *La logique et l´intuition dans la science mathématique,* L´enseignement Mathématique, Vol. 1,158-162.

Robadey, A. (2006). *Differentes modalités de travail syr le general dasn lês recherches de Poinaré sur systèmes dynamique* (thèse de doctorat), Université Paris 7.

Rollet, L. (1999). *Henri Poincaré: Des Mathematiques à la Philosophie – études du parcours intellectuel, social et politique d´um mathématicien au début du siécle* (Thèse de Doctorat), Université Nancy 2.

A PESQUISA SOBRE A PRÓPRIA PRÁTICA NO ENSINO SUPERIOR DE MATEMÁTICA

Gilda de La Rocque Palis

Depto. de Matemática e Depto. de Educação

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

gildalarocque@gmail.com

"Uma das principais vantagens da pesquisa em sala de aula é que ela é,

por definição, relevante" (P. Cross, 1996).

Resumo: Neste trabalho discutimos a pesquisa do professor sobre a sua própria prática em disciplinas de matemática no Ensino Superior, fora do âmbito da formação de docentes da Escola Básica. Este gênero de pesquisa tem o potencial de trazer melhorias ao ensino e à aprendizagem no ciclo superior e à formação profissional de seus docentes, além de construir uma ligação entre pesquisadores em educação matemática e matemáticos que ensinam no ciclo superior.

INTRODUÇÃO

Este trabalho visa a discutir e a incentivar a pesquisa do professor sobre a sua própria prática (PPP), em disciplinas de Matemática do Ensino Superior. Este gênero de pesquisa. tem merecido crescente atenção, no exterior, por seu potencial para ensejar mudanças didático-pedagógicas consideradas necessárias naquele nível de ensino. Apresento tendências de conceituação deste gênero de pesquisa, exemplos de trabalhos nesta área, publicações e instituições que vêm encorajando este gênero de investigação e oferecendo apoio aos professores interessados em tais estudos.

PESQUISA SOBRE A PRÓPRIA PRÁTICA (PPP)

A PPP tem vários nomes (pesquisa do professor, professor pesquisador, professor reflexivo, prático-reflexivo). Em geral, os estudos que tratam da PPP abordam a prática de docentes da Educação Básica ou a dos formadores desses docentes. Tem havido questões sobre a legitimidade epistemológica deste gênero de pesquisa (Ponte, 2002, 2004; Lüdke, 2001). O professor pesquisador de sua própria prática alia investigação e ensino: em face de um problema didático, submete-o a exame crítico, resolve-o da melhor maneira possível e divulga sua solução. Esse trabalho beneficia o próprio professor e os alunos, gera conhecimento e desenvolve a cultura profissional da comunidade de referência.

Quanto à PPP no Ensino Superior, o potencial da chamada "pesquisa em sala de aula" (*classroom research*) vem sendo examinado, há tempos, por Cross (1996). Poucos docentes universitários sabem alguma coisa sobre processos de aprendizagem, diz Cross; a maioria tem somente a experiência como alunos. A aprendizagem — para eles, prazerosa — é sentida como difícil e ameaçadora por muitos estudantes; é preciso desvendá-la melhor. Os alunos devem ser observados cuidadosamente, enquanto procuram entender uma idéia que o professor pretende ensinar-lhes. Docentes universitários que se engajam em PPP, usando suas salas de aula como laboratórios, têm muito a contribuir para o conhecimento crescente sobre a aprendizagem em condições reais.

No que se segue, chamarei de "matemáticos" aos matemáticos que lecionam disciplinas de Matemática no Ensino Superior.

ENSINO UNIVERSITÁRIO DE MATEMÁTICA, MATEMÁTICOS E PESQUISADORES EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SUPERIOR.

Dentre as questões prementes no ensino universitário de Matemática, está o número crescente de alunos que enfrentam problemas com a transição do Ensino Médio para o Superior. Há muitas outras preocupações, relativas a mudanças pedagógicas e curriculares que vêm ocorrendo, ou que precisam ocorrer, devido a fatores vários: o rápido desenvolvimento das tecnologias computacionais; os apelos por integração com outras disciplinas, por iniciativas de inclusão e diversidade, por mais eficiência nos cursos de serviço, pelo emprego de múltiplas formas de avaliação, pelo trabalho em grupo, pelo desenvolvimento de habilidades de apresentação e comunicação etc.

Os Departamentos de Matemática devem estar atentos às necessidades discentes e enfrentar o ensino e a aprendizagem de Matemática mais a sério; precisam aceitar que, para algumas das dificuldades dos alunos, há causas epistemológicas e pedagógicas; os problemas não se reduzem aos chavões "o aluno é fraco", "o aluno está desmotivado". Parece existir, entre matemáticos, o sentimento de que a pesquisa em Educação Matemática tem pouco a contribuir com o Ensino Superior de Matemática (e possivelmente com outros níveis também), diz Holton (2000). É grande o fosso entre os dois grupos, não sendo fácil aproximá-los.

Questões teóricas, consideradas relevantes pelos pesquisadores em Educação Matemática universitária (por exemplo: qual a natureza da abstração no aprendizado de Matemática? E das definições matemáticas?) podem ser bastante distintas de questões práticas que os matemáticos consideram importantes (por exemplo: como podemos ajudar os alunos a se moverem com desenvoltura entre os quadros numérico, gráfico e algébrico? Que nível de desenvolvimento de habilidades algébricas é suficiente?). A separação entre as duas comunidades vai além de questões de interesse dos dois grupos. Outro fator relevante: a pesquisa em Educação Matemática está muito fundamentada em epistemologia e metodologia da Psicologia e da Educação. Em geral céticos a respeito, os matemáticos desconhecem tais paradigmas.

Nardi et al. (2004) também dizem que a interação entre matemáticos e pesquisadores em Educação Matemática tem sido menos produtiva do que deveria e poderia ser. Baseada num estudo com vinte matemáticos de universidades inglesas, a mencionada autora apresenta as visões dos mesmos sobre este relacionamento em termos de obstáculos, características desejáveis e benefícios potenciais. Alguns dos participantes referem-se à literatura sobre Educação Matemática como indecifrável. Porém, expressaram forte interesse por estudos que foquem o ensino e a aprendizagem de conceitos ou tópicos específicos, demonstraram reservas quanto à literatura que não recomenda práticas efetivas e deram preferência a investigações naturalísticas bem focadas: “pessoas reais se debatendo com dificuldades reais em tempo real”. Simpson (2000) também reconhece a dificuldade de ler e usar a pesquisa em Educação Matemática, defende o professor como pesquisador e diz que grande parte da pesquisa em Educação Matemática começou com professores examinando seu próprio ensino.

O SURGIMENTO DE UM TERCEIRO GRUPO NO CENÁRIO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR

Segundo Banchoff et al. (2002), o debate sobre os propósitos e a utilidade da pesquisa em Educação Matemática liga-se à emergência da *Scholarship of Teaching and Learning*[*] em Matemática, uma área que pode ajudar a estabelecer uma ponte entre pesquisadores em Educação Matemática do Ensino Superior e os matemáticos que ensinam nesse nível.

Iniciativa lançada em 1998, pela *Carnegie Academy for the Scholarship of Teaching and Learning* (CASTL), no âmbito do seu programa de Educação Superior, a SoTL incentiva professores de todas as áreas (Matemática, Física, História, Engenharia, Enfermagem etc.) a olharem com novos olhos os seus esforços pedagógicos, abraçando, no Ensino Superior, a noção de professor como pesquisador da sua própria prática. Ademais, a CASTL encoraja os docentes universitários a publicar a sua experiência de ensino, defendendo que uma atividade, para se reputar acadêmica (*scholarship*), deve apresentar três características: ser pública, ser suscetível de revisão

[*] Usarei a sigla SoTL para me referir a esta noção porque não encontrei uma expressão vernácula apropriada para ela, que poderia ser traduzida por *Pesquisa Especializada em Ensino e Aprendizagem*, *Especialização em Ensino e Aprendizagem*, *Especialista em Pesquisa Pedagógica*, etc

crítica e de avaliação, ser acessível para permuta e uso por outros membros da comunidade universitária.

Essas questões estão, há anos, na essência do projeto da *Carnegie Foundation* sobre SoTL, iniciado com Boyer (1990), que convoca a academia a mover-se além do já velho debate *ensino versus pesquisa*, e a dar ao termo “acadêmico” um sentido mais amplo, introduzindo a *scholarship of teaching*. Segundo Dewar (2007), Boyer propôs à universidade uma nova visão de *scholarship*, para aproveitar os talentos lá presentes e encorajar conexões, de fato necessárias, entre universidade e comunidade. Depois de Boyer, o conceito de *scholarship of teaching* foi reformulado para *scholarship of teaching and learning*, e extensamente revisto por Shulman (Shulman, 1993, 1999; Hutchings et al.,1999).

Um número crescente de professores está começando a refletir mais sistematicamente sobre a qualidade da aprendizagem que pode estar ocorrendo em suas aulas. Os trabalhos com a perspectiva SoTL situam-se em diversos contextos (inter)disciplinares, usam distintos métodos de pesquisa, com variados níveis de fundamentação teórica. Esse movimento expandiu-se por diversas instituições norte-americanas de nível superior, várias delas sem pós-graduação estrita, e atingiu outros países.

De maneira ampla, a SoTL é um gênero de investigação que dirige sua atenção para o ensino e a aprendizagem do aluno em sala de aula. Inicia-se com questões, que podem ser muito diversas, propostas por docentes sobre a aprendizagem discente. O professor pesquisador usa então os conhecimentos da disciplina específica, e da área educacional geral e relacionada à área disciplinar em questão, para investigá-las metódica e sistematicamente. Como o movimento SoTL procura dirigir-se a professores que não têm, via de regra, formação em pesquisa educacional, mas que trazem à cena o ponto de vista do docente e o do aluno, pode ser necessário que os participantes se familiarizem com paradigmas da pesquisa educacional apropriados a este gênero de investigação. O resultado é submetido à crítica da comunidade de referência e publicado como artigo de pesquisa, portfólio de cursos, estudo de caso, ensaio reflexivo, material instrucional investigado empiricamente, apresentação oral em congressos, etc. O estudo deve apoiar-se em trabalhos de outros e permitir que estes construam a partir do primeiro. Os principais objetivos desse tipo de pesquisa são: melhorar o aprendizado dos alunos e a formação do professor, e promover um avanço na prática de ensino na comunidade docente em geral.

Hutchings (2000) abraça, sob a perspectiva SoTL, uma PPP elaborada, como a de Schoenfeld (1998), afim à pesquisa acadêmica tradicional, mas também formas menos desenvolvidas de pesquisa em ensino-aprendizagem, com algumas das seguintes características: documentam uma prática de sala de aula e a disponibilizam para seus pares em ambientes relativamente informais, podem ou não rever a literatura relacionada à situação estudada, podem ou não explicitar métodos de coleta e análise de dados, podem ou não ter uma abrangência muito restrita e não contemplar tentativas de generalização além da própria sala de aula do professor. Quanto mais elaboração teórica, mais o trabalho se aproxima de uma pesquisa em Educação Matemática universitária, qualificada como pesquisa tradicional, na qual adquirem maior importância os métodos de pesquisa, os quadros teóricos, os estudos empíricos, as questões de reprodutibilidade etc. Ao longo da vida, alguém pode engajar-se em diversas formas desse trabalho. Uma característica que diferencia os dois gêneros é a comunidade de referência: a da pesquisa em Educação Matemática Superior é a comunidade acadêmica; a do SoTL, a comunidade profissional. A SoTL tem suas raízes na sala de aula e espera-se que ela retorne à sala de aula.

Segundo Hutchings et al. (2002), o propósito é abrir os sentidos para o possível e útil: seria lamentável se os modelos de SoTL fossem limitados de tal forma que somente uns poucos professores pudessem ou desejassem engajar-se nesse tipo de trabalho. Os autores pretendem estender esse movimento da forma mais ampla possível — como um enorme guarda-chuva, sob o qual um amplo espectro de trabalho pode florescer. Essa posição tem recebido críticas (ver, por exemplo, Connolly et al., 2007) e a comunidade SoTL como um todo tenta resolver questões de rigor e validade de seus trabalhos. (Glassick et al. (1997).

A seguir, damos alguns exemplos de PPP na área de Ensino Superior de Matemática no Brasil, e alguns, no exterior, que são qualificados como SoTL pela literatura específica. O número de trabalhos aqui mencionados é pequeno; havia que fazer escolhas. Dois dentre os escolhidos o foram por apresentarem farto material de consulta e estudo *on-line*. A limitação de espaço não me permite comentar os trabalhos, maiores detalhes serão dados por ocasião da apresentação oral deste estudo.

EXEMPLOS DE PPP EM MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR

No Brasil, as PPPs não se acham com facilidade: elas podem ser raras, os autores podem não as identificar como tais, ou ambas as coisas. Encontrei poucos exemplos delas entre nós; dentre eles, menciono os trabalhos de Frota (2006, 2007), Palis (2001, 2006, 2007, 2008) e Palis et al. (1999).

Dentre os trabalhos que encontrei sobre PPP em Matemática, e classificados como SoTL pela literatura, menciono alguns a seguir, lembrando que já citei os de Schoenfeld (1998), Lerch (2002) e Stonewater (2002): Sandefur (2007), Cooperstein (2007), Salem et al. (2007, Fullilove e Treisman (1990) e Treisman (1992).

O compromisso da comunidade SoTL com a divulgação vem sendo realizado através da difusão de informações e recursos *on-line* por diversas organizações educacionais, construindo-se uma infra-estrutura de suporte ao desenvolvimento profissional de docentes. Ademais, já existem periódicos específicos nesta área: o *Journal of the Scholarship of Teaching and Learning* e o *International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning*. Dentre as instituições, além da *Carnegie Foundation*, há várias organizações que disponibilizam as mais variadas informações sobre SoTL. Podemos citar dois consórcios de universidades norte-americanas: o RUCASTL (*Research University Consortium for the Advancement of the Scholarship of Teaching and Learning) e* o CIRTL (*Center for the Integration of Research, Teaching and Learning*).

CONCLUINDO

O objetivo deste artigo é promover o desenvolvimento da PPP e divulgar sua expansão no Ensino Superior de Matemática, por considerar a PPP extremamente relevante como apoio a práticas voltadas para a aprendizagem dos alunos e ao preparo profissional de docentes. O movimento SoTL, que abarca este gênero de investigação, encontra a resistência previsível na "academia", que tem reforçado, há muito tempo, a distinção entre pesquisa e ensino em termos bem definidos. Contudo, as realizações da SoTL, em tão pouco tempo, têm sido impressionantes: consórcios, periódicos, congressos e adeptos em diferentes países. O movimento vem se fortalecendo.

Professora universitária há muitos anos, sempre defendi a valorização desta atividade profissional. Preocupei-me com a desvalorização da pesquisa na área de ensino e aprendizagem no ensino superior e a pouca visibilidade das reflexões que os docentes universitários realizam sobre a própria prática. No País, são necessários meios de divulgação abrangentes, para levar estas reflexões ao conhecimento dos docentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Banchoff, T. e Salem, A. (2002). Bridging the Divide. Research versus Practice in Current Mathematics Teaching and Learning. *In:* Huber, M. T. e Morreale, S. P. (eds.). Disciplinary Styles in the Scholarship of Teaching and Learning. Exploring Common Ground. American Association for Higher Education, Washington, D. C.

Boyer, E. (1990). Scholarship Reconsidered. Princeton, New Jersey: The Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching.

Connolly, M. R., Bouwna-Gearhart, J. L. e Clifford, M. A. (2007). The Birth of a Notion: The Windfalls and Pitfalls of Tailoring an SoTL-like Concept to Scientists, Mathematicians, and Engineers. *On-line* em: www.cirtl.net/publications.html

Cooperstein, B. (2007). Learning to Think Mathematically. Open Educational Resources:

Cross, K. P. (1996). Classroom Research: Implementing the Scholarship of Teaching. American Journal & Pharmaceutical Education, v. 60, p. 402-7.

Dewar, J. (2007). Scholarship of Teaching and Learning: What? And Why Now? Association for Women in Mathematics Newsletter, 37 (6), p.26-28.

Frota, M. C. R. (2006). Investigações na sala de aula de Cálculo. 29ª Reunião da ANPED.

Frota, M. C. R. (2007). Sintetizar idéias e atribuir sentido às fórmulas para aprender Cálculo. Anais do XXXV Cobenge, CD-Rom.

Fullilove, R. E., & Treisman, P. U. (1990). Mathematics Achievement Among African-American Undergraduates at the University of California, Berkeley: An Evaluation of the Mathematics Workshop Program. *Journal of Negro Education*, 59, p. 463-78.

Glassick, C. E., Huber, M. T. e Maeroff, G. I. (1997). Scholarship Assessed: A Special Report on Faculty Evaluation. Fifth AAHE Conference on Faculty Roles and Rewards. San Diego, California.

Holton, D. (2000). Personal Thoughts on an ICMI Study. Department of Mathematics and Statistics, University of Otago, New Zealand.

Hutchings, P. (2000). Approaching the Scholarship of Teaching and Learning, Introduction to *Opening Lines: Approaches to the Scholarship of Teaching and Learning*, The Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching.

Hutchings, P., Babb, M. e Bjork, C. (2002). The Scholarship of Teaching and Learning in Higher Education, An Annotated Bibliography.

Hutchings, P e Shulman, L. S. (1999). The Scholarship of Teaching: New elaborations, new developments. The Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching.

Lüdke, M. (coord.) (2001). O professor e a pesquisa. Campinas: Papirus.

Nardi, E. e Iannone, P. (2004). On the fragile, yet crucial, relationship between mathematician and researchers in mathematics education. Anais do PME 28, v. 3, p 401–8.

Palis, G. L. R. e Santos, C. L. (1999). “How students and computers interact while investigating the behavior of numerical sequences”. Proceedings do "The 11th Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics”, New Orleans, EUA: Addison Wesley.

Palis, G. L. R. (2001). “Avaliação usando portfólio: Aprendendo como os alunos aprendem acerca de enunciados condicionais quantificados”. Série de pré-prints do Departamento de Matemática da Puc-Rio, Mat. 08-A/2001.

Palis, G. L. R. (2006). “Uma aproximação à questão da integração curricular de matemática com arquitetura”. Anais do III SIPEM (Seminário Internacional de pesquisa em Educação Matemática), out./2006, Águas de Lindóia, SP. CD-Rom.

Palis, G. L. R. (2007). Investigando alguns desafios da incorporação do software Maple em cursos regulares do ciclo superior inicial. Anais do IX ENEM, Belo Horizonte, Brasil. CD-Rom.

Palis, G. L. R. (2008). Analisando a própria pratica: Cálculo na Arquitetura. (Em processo de revisão).

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In: GTI (org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (p. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2004). Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática. *Educar em Revista*, 24, p. 37-66. Curitiba: UFPR.

Salem, A. e Michael, R. (2007). Calculus Conversations: Making Student Thinking Visible. Open Educational Resources.

Sandefur, J. (2007). Problem Solving: What I have learned from my students. In K, Hyoung Ko & D, Arganbright, D. (Eds.), Enhancing University Mathematics: *Proceedings of the First KAIST International Symposium on Teaching.* CBMS Issues in Mathematics Education, v.14.

Schoenfeld, A. (1998) Reflections on a Course in Mathematical Problem Solving. In A.H. Schoenfeld, J Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate mathematics education* III, 81-113. CBMS Issues in Mathematics Education, v.7.

Shulman, L. S. (1993). Teaching as Community Property: Putting an end to pedagogical solitude. Change 25, 6, p. 6-7.

Shulman, L. S. (1999). Taking Learning Seriously. Change 31, 4, p. 11-7.

Simpson, A. (2000). What use are mathematics education researchers? Newsletter MSOR.

Stonewater, J. (2002). The Mathematics Writer's Checklist: The Development of a Preliminary Assessment Tool for Writing. In: Mathematics. School Science and Mathematics 102 (7 N), p. 324-34.

Treisman, P. U. (1992). Studying students studying calculus: A look at the lives of minority mathematics students in college. *College Mathematics Journal*, 23, p. 362-72.

Witman, P. D. e Richlin, L. (2007). The Status of the Scholarship of Teaching and Learning in the Disciplines. International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning, v. 1, n. 1.

O USO DE TECNOLOGIA NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA PODE AUXILIAR NA PRODUÇÃO DE MUDANÇAS EM SUA PRÁTICA PEDAGÓGICA?

Nielce Meneguelo Lobo da Costa – UNIBAN
Ruy César Pietropaolo – UNIBAN
Alexandre Campos Silva – PUCSP

Resumo

O propósito desse artigo é o de discutir o uso da tecnologia em um Projeto de formação profissional continuada desenvolvido pela PUCSP[1] *em convênio com a SEESP*[2]*. Inicialmente discorremos sobre tecnologia na formação do professor de Matemática; em seguida abordamos o processo de educação continuada em análise e apresentamos o ambiente de ensino a distância*[3] *que deu suporte ao curso. Em particular, analisamos um dos módulos do curso, o de "Novas tecnologias e seu uso nas aulas de Matemática" e discutimos a questão posta no título:* ***O uso de tecnologia no processo de formação do professor de matemática pode auxiliar na produção de mudanças em sua prática pedagógica?*** *Finalizando apresentamos as conclusões sobre a tecnologia usada no contexto da formação profissional, como provocadora de mudanças na prática profissional do professor.*

Palavras-Chaves: ***1. Formação de Professores; 2. Educação Matemática; 3. Informática na Educação; 4.Educação Bimodal.***

[1] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
[2] Secretaria Estadual de Educação de São Paulo.
[3] O kmsociety - Learning management System – Ambiente de EaD utilizado no projeto.

O USO DE TECNOLOGIA NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA PODE AUXILIAR NA PRODUÇÃO DE MUDANÇAS EM SUA PRÁTICA PEDAGÓGICA?

Nielce Meneguelo Lobo da Costa – UNIBAN
Ruy César Pietropaolo – UNIBAN
Alexandre Campos Silva – PUCSP

INTRODUÇÃO

Hoje não mais podemos ignorar a tecnologia e nem seu potencial nos processos que envolvem a aprendizagem. Especificamente em relação ao computador, consideramos que, uma vez presente no ambiente de aprendizagem ele não é neutro e interfere no processo, exercendo uma influência que deve ser considerada e investigada.

Neste artigo discutimos o uso da tecnologia em um Projeto de formação profissional continuada desenvolvido pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP) em convênio com a Secretaria Estadual de Educação de São Paulo, o curso de *"Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio"*. Analisamos as contribuições que a tecnologia pode ter dado ao desenvolvimento profissional dos docentes. O processo de educação continuada se desenvolveu formato bimodal, ou seja, incluiu parte presencial e parte a distancia, assim sendo a tecnologia permeou todo o curso. Os professores-alunos tiveram o suporte de um ambiente de ensino a distância[4] por meio do qual puderam se comunicar tanto com os professores-formadores quanto com os demais professores-alunos e, além disso, o ambiente foi utilizado para a disponibilização de materiais de apoio, assim como para o depósito e compartilhamento das produções desses professores-alunos. No curso, além dos estudos teóricos e matemáticos os professores-alunos, trabalhando em pequenos grupos, criaram e analisaram seqüências didáticas, para em seguida, desenvolver pesquisas em suas salas de aula e, ao final, escrever uma monografia individual.

Tecnologia e a Formação de professores de Matemática

A fundamentação teórica sobre formação de professores e tecnologia veio de autores tais como Valente e Masetto, que nos auxiliaram na construção da mediação da aprendizagem. Para Valente (1999), o processo de construção do conhecimento nos ambientes virtuais está intimamente ligado à abordagem pedagógica utilizada e é a abordagem de *"estar junto virtual"* que oferece as melhores condições para o desenvolvimento de situações de aprendizagem. Nela pressupõem-se a participação constante de todos os alunos e também o acompanhamento e

[4] Ambiente EaD utilizado no projeto: kmsociety LMS (Learning management System) disponível em: www.kmsociety.com.br/pucmat

assessoramento do professor; privilegia-se a construção colaborativa do conhecimento, dada a facilidade para trocas de informações e pesquisa pela internet. O planejamento de cursos de formação de professores em ambientes virtuais deve focar o processo de aprendizagem, as reflexões sobre as práticas pedagógicas, a comparação entre o ensino e a aprendizagem nos ambientes convencionais e nos virtuais. É fundamental, ainda, a integração das estratégias de mediação e a escolha de técnicas em concordância aos objetivos pretendidos (Masetto, 2000).

Partindo da hipótese que quando a formação se faz com uso da tecnologia o professor se familiariza com ela, o que pode levá-lo a ter um novo olhar sobre ela, procuramos investigar se o uso de tecnologia pode auxiliar na produção de mudanças na prática pedagógica.

A PESQUISA E O PROJETO DE FORMAÇÃO CONTINUADA

O projeto desenvolveu-se durante um ano letivo, tendo 360 horas aula, sendo 180h presenciais e 180h a distância e envolveu seiscentos professores do Ensino Médio da rede pública estadual, indicados pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. E esses foram organizados em 15 turmas e o conteúdo Matemático foi escolhido a partir dos eixos temáticos abaixo apresentados, que foram os organizadores do Curso:

- (MI) Matemática e sua inserção no currículo – 48 horas.
- (MII) Utilizando resultados de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de números e funções – 80 horas.
- (MIII) Utilizando resultados de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem em geometria – 80 horas.
- (MIV) Utilizando resultados de pesquisas sobre análise de dados – 64 horas.
- (MV) Novas Tecnologias e seu uso nas aulas de Matemática - 48 horas.
- (MVI) Matemática e suas interfaces com outras disciplinas - 40horas.

Foram preparados seis módulos (MI a MVI), um para cada eixo temático, sendo a carga horária distribuída 50% na modalidade presencial e 50% a distância. No início de cada módulo foram feitas palestras por especialistas da área sobre assuntos pertinentes ao módulo.

A metodologia de desenvolvimento do curso foi a de estudos teóricos e resolução de problemas. A cada encontro presencial havia a proposição de um problema ou atividade a ser desenvolvida ao longo da semana. A busca da solução pelo professor-aluno poderia envolver estudos e pesquisas individuais, além de debate por meio do fórum do ambiente. Destacamos que havia a possibilidade de uso de email, inclusive para contatos e esclarecimentos de dúvidas com o professor-formador. Ao final o professor-aluno disponibilizava sua atividade no portfólio individual. No próximo encontro presencial do módulo a solução do problema (ou a atividade) era discutida pelo formador. A avaliação do professor-aluno no módulo envolveu o acompanhamento das suas atividades pelo professor e, levando-se em consideração as características específicas de cada módulo, foram feitas avaliações particulares. Além dos módulos, fez parte do processo de formação a realização de uma pesquisa em sala de aula – que gerou a monografia de conclusão de curso – feita com a supervisão de um professor orientador por aluno. O importante papel desse trabalho de conclusão foi o levar cada professor-aluno a desenhar uma seqüência didática (com o auxílio de um grupo de outros professores-alunos), empreender a pesquisa em sua sala de aula e, a seguir, analisar e obter os resultados de pesquisa. Procurou-se, dessa forma, criar condições do professor-aluno refletir sobre sua prática.

Nossa pesquisa sobre o processo de formação continuada envolveu 152 alunos[5], mas pelas limitações normais de um artigo faremos um recorte focando de forma mais específica o módulo de "*Novas tecnologias e seu uso nas aulas de Matemática*".

A COMUNIDADE DE APRENDIZAGEM VIRTUAL

O curso foi hospedado na plataforma de EaD KmSociety[6] – Learning management System – Tal ambiente apresenta ferramentas informáticas assíncronas de comunicação tais como *Fórum* , *Ajuda* (suporte ao usuário) e *Email.* O ambiente tem uma tela de abertura, na qual o professor-aluno faz o login para acesso; disponibiliza para cada um participante um portfólio, uma agenda, uma midiateca e a ferramenta tutoria com a qual se comunica com o

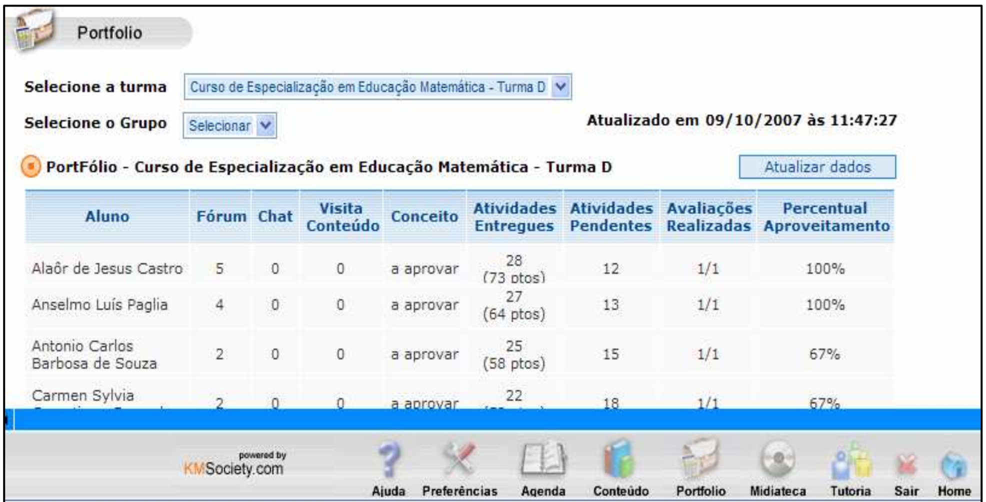


Figura 1 – Tela do portfólio no kmsociety na visão de professor

[5] Respectivamente das turmas: H, N, F e D.
[6] www.kmsociety.com.br/pucmat

professor-formador. Na figura 1 está uma visão geral de portfólios de turma

Na figura 2 apresenta-se a tela correspondente a “tutoria”

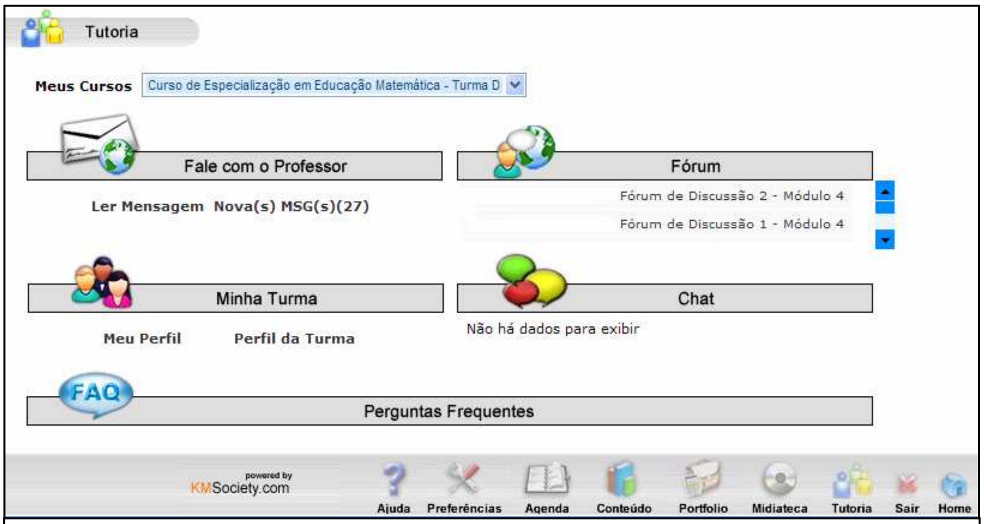


Figura 2: Tela “tutoria” do Kmsociety

No curso, o ambiente de EaD possibilitou a comunicação e interação entre os professores-formadores e os professores-alunos por ferramentas tais como: agenda, e-mails e fóruns de discussão, além de ter sido utilizado para a apresentação dos materiais de apoio, assim como para o depósito e compartilhamento das produções dos alunos. No ambiente os participantes apresentaram as tarefas da semana propostas pelos formadores, assim como realizaram auto-avaliação e puderam interagir com os docentes do curso e com os seus colegas de turma. Além disso, a infra-estrutura da Universidade, tais como laboratórios de informática e a Biblioteca, com farto material em Educação Matemática esteve a disposição dos alunos.

Como afirmam Paloff & Pratt (2002), a troca de mensagens nos fórum de discussão, onde todos expressavam seus pensamentos, contribuiu no processo de aprendizagem. Abaixo alguns depoimentos que evidenciam discussões sobre a matemática envolvida:

> *Oi pessoal, conseguiram achar as 11 superfície de um cubo? Consegui!!! Com a ajuda dos colegas da escola. Se precisar me escreva. (Aluno I - 25/05/2006 22:45:47).*
>
> *Caros Colegas..... Estou com dúvidas no exercício 2 da atividade em questão. Não consegui perceber a diferença na representação no diagrama de Venn entre os conjuntos dos quadriláteros notáveis definidos por Euclides, Legendre e Hadamard, para mim são todos iguais a não ser em seus conceitos. Os conceitos mudam o diagrama de Venn? (Aluno 17/05/2006 22:27:34*
>
> *Como representar o diagrama de Venn com os conjuntos dos quadriláteros notáveis definidos por Legendre? Alguém poderia me ajudar? Estou pesquisando nos livros que tenho em casa mas não tenho nada que fala sobre o diagrama de Venn. (Aluno I - 17/05/2006 19:41:04)*
>
> *Vamos ver se eu entendi: f é a função; f(x) é o valor que a função assume no ponto x; Portanto, x é a variável independente da função e y é a variável dependente, pois todos os valores de y dependem dos valores que x assumir. (Aluno N - 30/06/2006 20:35:48)*

Vale ressaltar que a liberdade de expressão no fórum de discussão estimulou o diálogo e a troca de experiências. A participação foi estimulada pelo professor e em nenhum momento eles foram reprimidos. Concordamos com Pallof & Pratt (2002) quanto à liberdade de expressão ter estimulado o diálogo entre eles. Isto aparece claramente em alguns depoimentos nos fóruns como, por exemplo:

> *Olá pessoal. Para provar que a raiz de 2 é irracional é a mesma para provar que a raiz de 3 é irracional? (Aluno E 12/06/2006) 21:38:32h*
>
> *"Eu complemento. Se aprendemos somente de uma forma, como ter certeza se ela é a forma mais correta? " Sobre sua pergunta, Edgar , achei duas formas de se provar se a raiz de 3 é irracional, mas para mim é muito complexo.Fiz uma pesquisa pelo google.Vc ira achar um montão de provas. Abraços" (Aluno A 14/06/2006, 18:37:39)*
>
> *Olá Alberto. Obrigado pela dica... Realmente há outras formas de provar que um número é irracional, e como você escreveu - é muito complexa - Um abraço e até Sábado... (Aluno E 14/06/2006 21:57:38)*

Como se pode inferir pelos depoimentos acima o Aluno A e o Aluno E, estão trocando experiências e sinalizando que têm dificuldades para provar que $\sqrt{3}$ é irracional.

O fato dos alunos se encontrarem semanalmente na Universidade intensificou e deu continuidade ao diálogo entre eles. Desta forma a comunicação foi potencializada por terem dois ambientes de interação, a sala de aula e o fórum de discussão no ambiente de EaD.

> *Edgar, Que bom! Caso tenha alguma dúvida quanto ao uso do programa, fique a vontade para perguntar. Conheço bem este software. Neide (Aluno N para aluno E 5/06/2006 22:35:06)*

Caros colegas visitem que terão algumas orientações sobre a função translação: www.prof2000.pt/users/folhalcino/aula/funcoes10/funcoestransformacoes. (Aluno N para todos 24/06/2006 19:35:18)

A utilização do ambiente de aprendizagem reforçou a utilização de tecnologia no processo de aprendizagem, pois essa não foi utilizada apenas como uma ferramenta de solução de problemas matemáticos, mas como uma ferramenta de comunicação e interação entre todos. Eles puderam experimentar o que é participar de um ambiente virtual de aprendizagem pela Internet e refletiram sobre a prática pedagógica e a relação aluno-professor conforme mencionado em alguns depoimentos abaixo:

Olá Adelson! Uma das grandes tarefas do professor de Matemática no ensino de geometria é promover o salto de validações perceptivas para validações dedutivas. (Aluno E 25/05/2006 23:15:09)

... é importante salientar e reafirmar tudo o que os nossos colegas já disseram, o ensino de Análise Combinatória deve ser iniciado logo nos primeiros anos de estudo para que as tomadas de decisões destes alunos, e a compreensão do mundo real já ocorra a partir das séries iniciais. (Aluno V 06/09/2006 20:05:40)

NOVAS TECNOLOGIAS E SEU USO NAS AULAS DE MATEMÁTICA

É importante ressaltar que todos os módulos do curso utilizaram tecnologia e não apenas o específico de Novas Tecnologias. Todos eles a utilizaram para a discussão de atividades focadas nos conteúdos curriculares do Ensino Médio, tais como: o módulo de Geometria, em atividades no laboratório de informática utilizando o software Cabri-géomètre, ou o de Números e Funções com o software Graphmatica, ou ainda o de Análise de dados que fez uso do software Excel. Neste artigo foi feito um recorte e focamos nossa atenção no módulo específico de tecnologia e suas propostas para a sala de aula.

O módulo de Novas Tecnologias teve carga horária de 48h distribuídas em três encontros presenciais de 8h cada um e 24h a distancia, distribuídas em três semanas. Como anunciaram Jahn e Healy (2006) a proposta foi a de *"subsidiar reflexões sobre as relações recíprocas entre práticas matemáticas, aprendizagem e tecnologias digitais"– p. 5*. Nesse sentido, o módulo apresentou momentos de discussão de aspectos didáticos e cognitivos sobre o computador no ensino de matemática comparando-os com os que ocorrem em ambientes convencionais de aprendizagem. Os encontros envolveram discussões sobre a informática no Ensino Médio, com base nas indicações dos PCN[7] e o desenvolvimento de atividades de uso de planilhas eletrônicas (Excel); de uso de calculadoras científicas, de uso de software de geometria dinâmica (Cabri-géométre), de uso do software para o estudo de funções

[7] Parâmetros Curriculares Nacionais

(Graphmatica) e apllets da internet tais como a calculadora de cores (Colour calculator[8]). Os professores-alunos complementaram o estudo com atividades a distância as quais envolveram a participação em dois fóruns de discussão, a leitura de textos e artigos e a análise didática de atividades, além de relatórios das oficinas presenciais feitas no laboratório de informática. A avaliação do módulo foi feita por meio da análise dos relatórios dos professores-alunos sobre as oficinas das quais participaram, das inserções nos fóruns e das atividades de análise didática. Ao final do curso Ao final do módulo os alunos tiveram como atividade avaliar o curso, respondendo à pergunta: *Descreva os aspectos marcantes de sua trajetória no curso.* A partir dos dados coletados nos fóruns, nos relatórios e na última atividade procedemos a analise.

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O módulo de tecnologia na aula de matemática auxiliou a reflexão sobre a docência na presença das TICs, como podemos observar nos depoimentos abaixo:

> *A Tic é uma ferramenta de trabalho, ficou claro com o estudo desse módulo que o importante é a mediação que o professor vai fazer dela. Vimos também que devemos explorar de forma inteligente as diferentes ferramentas que tivermos a disposição. O nosso aluno precisa saber operar a máquina, mas também trabalhar de forma critica os resultados obtidos. É importante estarmos a par das orientações legais para o uso dessas fontes de informação, e ter também um plano de trabalho para melhor explorar e aproveitar tudo que as novas tecnologias tem a nos oferecer.(ultima atividade – Aluno B)*

> *Achei também muito importante, embora tenhamos encontrado um pouco de dificuldade a cobrança para a exploração do Fórum, a troca de conhecimentos com o grupo enriquece o trabalho como um todo. .(ultima atividade – Aluno D).*

Um exemplo de discussão sobre o papel o das TICs ocorreu no fórum com o tema: *Você é contra ou a favor do uso da calculadora no Ensino de Matemática*?. Nele o aluno opinou e discutiu com os colegas e com o professor-formador sobre a prática pedagógica.

> *Como foi discutido no nosso grupo, o uso da calculadora, sendo ferramenta cabe ao professor direcionar e orientar o educando. Pessoalmente, faço o uso da calculadora com meus alunos. Pois muitas atividades, são longas e com o uso da calculadora otimizamos e muito na aula o nosso tempo. Isso não quer dizer que o aluno se utilizará somente da calculadora e não teremos desafios de lógica ou de raciocínio. E mesmo nos utilizando pouco uso da calculadora nem todos sabem a tabuada. Tenho certeza que isso não é culpa da calculadora. (Aluno A 21/08/2006 13:31:13)*

Observamos que entre os aspectos marcantes do curso os professores-alunos citaram o desenvolvimento da prática pedagógica. Como exemplo, os depoimentos:

> *Acredito que o curso esta refletindo (...) na minha pratica diária, visto que a partir das atividades praticas e teóricas desenvolvidas aqui observo meu crescimento profissional.*

---

[8] Colour calculator é um applet desenvolvido pela canadense N. Sinclair, disponível em http://tapor1.mcmaster.ca/

Julgo que a forma como o curso foi implantado, atinge os objetivos propostos, mas assinalo o exíguo tempo em sala de aula, especialmente nas aulas de laboratório de informática, como algo que possa ser aperfeiçoado com o tempo.

No laboratório de informática, foi bárbaro o trabalho desenvolvido com Cabri-géomètre, mesmo embora termos trabalhado no módulo II com ele, neste módulo a dinâmica para mim foi surpreendente, muito além de construções, mas nas validações e justificativas, pois com as construções com o Cabri, o aluno é motivado a analisar as relações entre os objetos geométricos e desenvolve argumentos para explicar as validações de suas relações. (Aluno E1)

Um aspecto marcante nesse módulo é que usei a calculadora de cores no 6º série do ensino fundamental para poder explorar os números decimais e os resultados foram interessantes pois os alunos ficaram atentos a aula toda e com o auxilio da calculadora perceberam as regras de divisibilidade, frações próprias e impróprias, dizimas periódicas e não periódicas e números decimais. (Aluno F)

O Aluno F, por esse depoimento sinaliza que já utilizou a atividade em sua sala de aula, o que é uma evidência de influência do curso na prática docente.

Este módulo foi muito diferente dos demais, mesmo já tendo trabalhado com o Graphmatica, Cabri Geometrice e o Excel, pudemos ter o contato com a calculadora cientifica, o Dynagraph e o Colour calculator. Softwares diferentes, cada um com sua singularidade, interessantes e de fácil manuseio. São excelentes ferramentas para a investigação, analise e interpretação. Onde o discente, poderá construir manipular e se apropriar dos resultados obtidos para construir e solidificar os conceitos.

Os alunos indicaram que foi relevante a abordagem de novos aspectos de uso das TICs no ensino da matemática, como se observa pelas inserções seguintes:

... perceber uma outra visão sobre calculadora, além do uso de computadores que sempre considero como destaque.Fiquei fascinado com a utilização da calculadora de cores e mesmo do micromundo Dynagraph, tem como a forma de explorar funções matemáticas de uma maneira diferente da usual do currículo de matemática. (Aluno E1)

A aprendizagem compartilhada e a ajuda do grupo surgem como aspectos marcantes:

Os trabalhos em grupo com a subseqüente discussão aberta com os demais grupos da sala sobre as conclusões obtidas, onde conseguimos expor nossas idéias, contribuir para o aprendizado do outro e colocar-se a disposição de mudar nosso ponto de vista ou simplesmente respeitar a do outro; foi um dos pontos mais alto do módulo. Ver a matemática sob um novo olhar é muito gratificante, e inserir os alunos na utilização de novas tecnologias (...) para manipular, construir gráficos (uma forma rápida e eficiente), investigar, visualizar, podendo apropriar-se de propriedades e conceitos com mais facilidade. (Aluno PC)

CONCLUSÕES

A tecnologia potencializou a aprendizagem compartilhada, observamos que houve colaboração por meio do ambiente de EaD, principalmente nas situações problemáticas para os professores-alunos, isto é, quando enfrentavam dificuldades na realização das atividades. As atividades de análise didática foram fundamentais assim como os fóruns de discussão para provocar a reflexão sobre a prática. Concluímos que quando a tecnologia é usada no contexto da formação profissional, inclusive sendo analisada e acompanhada de propostas de uso no contexto da Matemática, ela pode provocar mudanças na prática profissional do professor. Para isso é fundamental que as atividades e situações propostas na formação favoreçam a exposição e debate das idéias dos professores participantes da formação, a colaboração e a aprendizagem compartilhada.

REFERÊNCIAS

Jahn, A. e Healy, L. *Novas tecnologias e seu uso nas aulas de Matemática*. Proem Editora, São Paulo, 2006.

Masetto, M. "Mediação Pedagógica e o Uso das Novas Tecnologias" In: MORAN, J. e al. Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica, Editora Papirus, Campinas, S.P., 2000.

Ponte, J.P. *Da formação ao desenvolvimento profissional*. Conferência no Encontro Nacional de Professores de Matemática. In: Actas do ProfMat 98, pp. 27-44. Lisboa: APM, 1998. Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm> Acesso em 20/07/2003.

_____. *O conhecimento profissional dos professores de matemática*. Relatório final de Projecto "O saber dos professores: Concepções e práticas". Lisboa: DEFCUL, 1997.

Pallof, R. M; Pratt, Keith. *Construindo comunidades de aprendizagem no ciberespaço – Estratégias eficientes para a sala de aula on-line*. Porto Alegre: Artmed, 2002.

Valente, J. A. *Computadores na Sociedade do Conhecimento.* Campinas: NIED/Unicamp, 1999.

UMA PROPOSTA DE CUSTOMIZAÇÃO DO MOODLE PARA CURSOS DE MATEMÁTICA

Aline Santiago [a], Francisco Mattos [b], Rafael Barbastefano [c], Thiago Moraes [d], Rodrigo Devolder [a], Luiz Carlos Guimarães [a]

[a] LIMC-Instituto de Matemática, UFRJ aline@duplodesign.com.br, rodrigodevolder@gmail.com, luizguima@gmail.com. [b] CAP-UERJ – francisco.mattos@gmail.com. [c] MPECM-DEPRO-CEFET/RJ – rgb@cefet-rj.br. [d] PESC-COPPE-UFRJ – thiago@cos.ufrj.br.

Resumo: Desenvolvemos uma proposta de interface, projetada para diferentes públicos, tanto para educação à distância, quanto para educação presencial, levando em consideração os interesses que conduzem a utilizar o Moodle como uma ferramenta de ensino. O projeto de interface é baseado nos estudos de Ergonomia da Interação Homem-Computador, com especial atenção à usabilidade de sistemas, aqui relacionada à capacidade de um sistema ser usado de modo fácil e com eficiência. Assim, propomos uma customização do Moodle visando facilitar o aprendizado e simplificar os processos de interação entre usuários. Tratamos um caso específico do projeto envolvendo o ensino de matemática, para o qual desenvolvemos módulos específicos, que permitem maior suporte tanto à navegabilidade quanto aos processos interativos de aprendizagem específicos. Descrevemos neste trabalho o projeto de um dos módulos.

1. INTRODUÇÃO

A década de 90 trouxe ao cenário o fenômeno web, e com isso, a interface que era uma questão restrita ao desenvolvimento de aplicativos de software, passou a fazer parte de todos os tipos de negócios e indústrias, através de seus websites, e aos poucos passou a fazer parte dos processos educacionais. Hoje, a World Wide Web, popularmente conhecida como www, é entre as novidades tecnológicas a de maior sucesso educacional. A *rede mundial de computadores* é considerada uma ferramenta poderosa para a Educação a Distância - EAD, pois integra texto, áudio e vídeo, permitindo estas aplicações em procedimentos interativos (Mioduser & Nachmias, (2002)).

Com o objetivo de ampliar e facilitar o acesso, as interfaces devem ser fáceis de usar, intuitivas e funcionais. Desse modo a Internet pode representar uma poderosa ferramenta para milhões de pessoas que a utilizam para diversas atividades de comunicação, comerciais, pesquisas, além de abrir espaço para novas aplicações no campo educacional. Neste sentido, o quesito usabilidade torna–se fundamental. Uma página *web* bem projetada facilita a interação do usuário, permitindo-lhe executar a tarefa desejada com menor esforço e economia de tempo, o que, de acordo com Santos (2003), contribui para a criação de uma experiência com maior grau de satisfação.

Em especial o uso da Internet para ensino de matemática apresenta dificuldades relacionadas às limitações com a representação e à comunicação. Isto restringe o uso para aplicações que utilizam tópicos de matemática e suas representações, devido às dificuldades para comunicar representações de Algébra e Geometria, por exemplo. Desse modo os projetos de softwares destinados à EAD, necessitam de cuidados especiais relacionados à usabilidade.

Este trabalho apresenta dois exemplos para customização em projetos que desenvolvemos para ensino de Álgebra e Geometria à distância. Desenvolvemos no LIMC/UFRJ dois módulos para o Moodle, um para o Tabulæ Colaborativo, e outro para o MathChat, de acordo com conceitos de usabilidade e regras para o uso de cores, tipografia, diagramação e organização dos elementos na página. Apresentamos alguns conceitos relacionados à customização e em seguida, descrevemos o projeto da página do Tabulæ Colaborativo onde serão abordadas questões relacionadas à hierarquia dos itens, à organização, à diagramação, ao tratamento do texto e dos links, ao uso de cores e à tipografia. Ao longo dessas seções, será apresentado um exemplo da proposta de interface para o Moodle.

2. CONCEITOS TEÓRICOS

2.1 Usabilidade

Em *Ergonomia da Interação Homem-Computador*, a usabilidade pode ser definida como a capacidade de um sistema ser usado facilmente e com eficiência pelo usuário. Para Scapin (1993, *apud* Moraes, 2001), a usabilidade está diretamente ligada ao diálogo na interface, sendo a capacidade do software em permitir que o usuário alcance suas metas de interação com o sistema. De acordo com Garrett (2002), o conceito de usabilidade significa coisas diversas para pessoas diferentes. Os projetos baseados em usabilidade buscam soluções fáceis de usar e.

2.2 Interação Humano-Computador

Segundo Preece (1994), a Interação Humano-Computador – IHC auxilia na execução das atividades de forma produtiva e segura. Essa é uma atividade multidisciplinar que extrai conceitos e habilidades da ciência da computação, psicologia, sociologia, antropologia e desenho industrial. Preece afirma que a ergonomia é provavelmente a disciplina que tem sido associada com o estudo de IHC por mais tempo, desde meados dos anos 60.

Além de projetar sistemas de forma que os usuários possam desenvolver suas tarefas de maneira segura, eficiente e agradável, deve-se ressaltar também o aspecto da produtividade, uma vez que a cada dia um maior número de pessoas utiliza o computador.

2.3 Design de Interface

O design de interface humano-computador não compreende somente o domínio das ciências do computador. Elementos como psicologia da percepção (como nós vemos), psicologia cognitiva (como adquirimos conhecimento) e fatores humanos (como interagimos com o equipamento) são pontos cruciais para o sucesso do design. O desafio é projetar um sistema, cujas capacidades possam ser entendidas pelos usuários e que possam ser imediatamente acessadas. (Foley, 1996)

Segundo Moraes (2001), o conceito de interface passou a ser usado a partir da década de 70, sendo descrito como os aspectos do sistema com os quais o usuário entra em contato, consistindo de uma linguagem de entrada para o usuário e de saída para o computador e um protocolo para interação.

2.4 Arquitetura da Informação

Os *websites* consistem de várias páginas conectadas por múltiplos links. O número, a direção e a organização desses links determinam a arquitetura de informação do site. Rosenfeld e Morville (2002) definem a arquitetura da informação das seguintes formas:

- A combinação da organização, rotulagem e esquemas de navegação dentro de um sistema de informação.
- O design estrutural de um espaço de informação para facilitar a realização de tarefas e acesso intuitivo ao conteúdo.
- A arte e a ciência de estruturar e classificar websites e intranets para ajudar pessoas a encontrar e gerenciar informação.
- Uma disciplina emergente e comunidade de prática focada em trazer princípios de design e arquitetura para o campo digital.

De forma mais resumida, a arquitetura da informação está relacionada com a criação de esquemas organizacionais e de navegação que ajudam os usuários a se moverem através do conteúdo do site eficientemente e efetivamente, Garrett (2002). Pode-se dizer, portanto, que a arquitetura da informação trata da organização dos elementos que compõem um *website*, considerando o relacionamento entre eles e a facilidade de localização e navegação.

3. APLICATIVOS IMPLANTADOS

3.1 Tabulæ Colaborativo

O Tabulæ Colaborativo - TC foi concebido como uma ferramenta para Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador (CSCL), com características de Geometria Dinâmica e compartilhamento de construções geométricas através da Internet, ou utilizando redes locais (Guimaraes et al. (2005)). Assim, o software permite a aplicação de estratégias didáticas colaborativas em cursos à distância ou em atividades realizadas em aulas em laboratório (Mattos et al. (2005)).

3.2 MathChat

O MathChat (figura 1) (Barbastefano, 2002) se posiciona como uma interface para o ensino com o objetivo de usar as funcionalidades de sistemas de computação algébrica (CAS) associado a um programa de Chat. O usuário pode enviar mensagens de texto junto com comandos do CAS Maxima, um programa livre com as funcionalidades similares às do Maple, enviando assim textos simples, símbolos matemáticos, além dos cálculos algébricos. O MathChat é, portanto, uma interface para uma aplicação localizada remotamente de modo que o estudante tenha acesso com a mesma facilidade nos laboratórios das universidades, em casa ou em qualquer outro lugar que possa acessar a Internet.

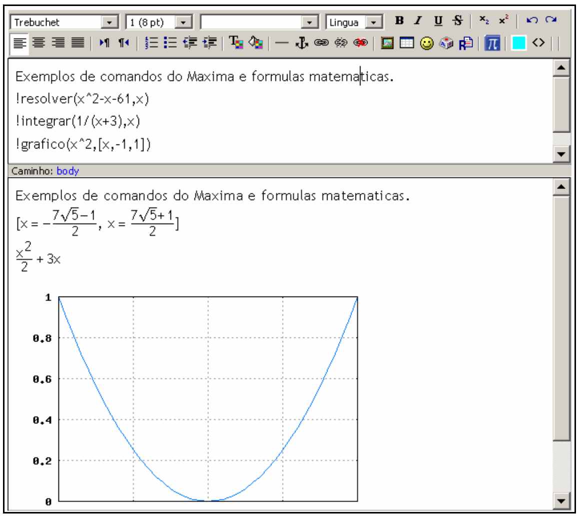


Figura 1: MathChat mostrando fórmulas e comandos do Máxima.

4. O PROJETO DA PÁGINA PROPOSTA PARA O MOODLE

Sobre o design da página, LYNCH & HORTON (2002) tratam da importância de se estabelecer um layout lógico e consistente, o que permite uma boa navegação do usuário. O uso do grid facilita o design da página, evitando que o layout possa parecer confuso e irregular. Este aspecto pode ser observado na figura 2 no projeto da formatação do Moodle.

Figura 2: Exemplo de layout seguindo grade (esquerda) e exemplo de layout não seguindo.

O designer deve priorizar a forma, a disposição, a harmonia e o equilíbrio dos elementos na página. Além disso, ele deve desenhar uma hierarquia de informações eficiente, minimizando os passos que levam às páginas de menu. Quanto menor o número de passos para a realização de uma tarefa, mais fácil e rápida é a interação do usuário.

Na década de 1990, surgiram sistemas específicos para gerenciamento das técnicas instrucionais. Os sistemas para Instrução Gerenciada por Computador- CMI (Computer-Managed Instruction) foram desenvolvidos para permitir o gerenciamento de registros, o controle, a inscrição e as tarefas relacionadas às atividades instrucionais, quando utilizadas ferramentas computacionais, operando de modo remoto. Estes sistemas permitem que estudantes trabalhem de modo independente, através de terminais conectados a um computador de grande porte.

O Moodle, desenvolvido por Dougiamas (1999) (2000), é muitas vezes identificado como Sistema de Gerenciamento de Aprendizado (LMS) ou Ambiente Virtual de Aprendizagem (VLE). Referenciado em teorias de leitura e escrita, baseadas no construtivismo social, trouxe para o aprendizado elementos de reflexão e interação ativa relacionadas aos objetos de ensino, aos professores e principalmente entre os estudantes.

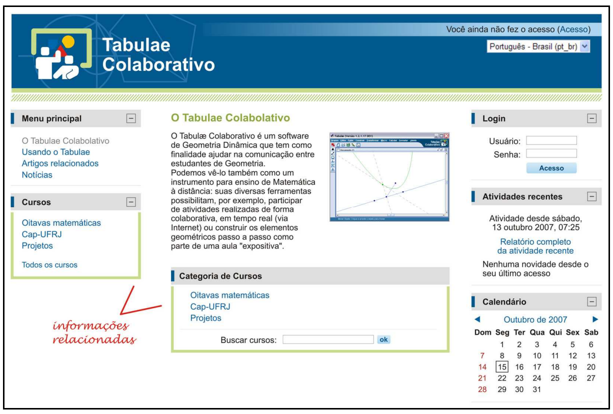
O Moodle foi desenvolvido como um sistema web onde a criação de cursos não exige grandes conhecimentos de informática, sendo acessível a todo usuário da rede mundial de computadores. Neste sistema, os professores podem criar cursos e adicionar módulos didáticos baseados em atividades de leitura e escrita. As vantagens em utilizar uma plataforma para ensino e aprendizagem são as possibilidades de propor atividades que os estudantes podem acessar e executá-las de modo remoto e de modo síncrono ou assíncrono.

Considerando as dificuldades relacionadas ao ensino on-line de matemática, Nason & Wodruff (2002) (2004), procuramos implementar elementos de usabilidade que permitam modificações da interface para atender às necessidades específicas ao ensino de matemática e que permitam a personalização da interface. Estas modificações visam criar um ambiente favorável à aprendizagem.

4.1 Hierarquização e Agrupamento de Elementos

As interfaces gráficas digitais são organizadas geralmente em volta de uma única página inicial. Nesse caso, os esquemas hierárquicos são os mais indicados, pois as interfaces iniciam de uma visão mais geral para as telas de sub-menus e conteúdos, divididas segundo uma ordem específica crescente. No caso do Moodle, as páginas vão desde a pagina inicial com uma visão geral do site passando pelos cursos e pelas disciplinas com suas atividades, fóruns, lições, chats etc.

De acordo com MEMÓRIA & BRANDÃO (2005), a hierarquia dessas telas deve refletir a relevância do conteúdo no desenho da página, reservando áreas maiores ou de maior importância, para o conteúdo mais relevante. Assim, neste caso, além de destacar as áreas principais e a navegação, há a preocupação com o agrupamento das informações relacionadas.



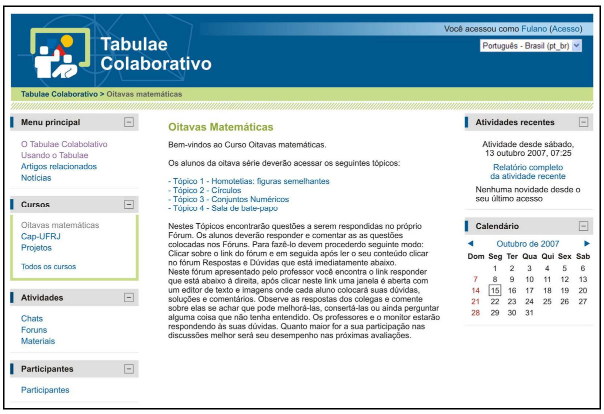


Figura 2: Exemplo da página inicial e página interna do Moodle

Observamos que nas páginas internas o posicionamento deve ser semelhante, sem grandes mudanças, para que o usuário não tenha que aprender a página mais uma vez.

4.2 Organização e Diagramação

Optamos por alinhamento à esquerda, pois, de acordo com LYNCH & HORTON (2002), esse alinhamento é o mais legível para web devido a sua margem esquerda ser regular e previsível e a margem direita irregular. Dessa forma, a margem direita irregular confere mais variedade e atrativo à página, sem interferir na leitura. Uma vez que os textos com alinhamento justificado costumam formar "canais" vazios nos blocos de texto, que são forçados a chegar no limite da linha

Os blocos de texto numa página web não devem ter parágrafos muito longos. Os títulos e os cabeçalhos acima de corpos de texto também são alinhados à esquerda rente à margem. Destacamos estas características na figura 1, a seguir.

4.3 Tratamento de Texto e Links

A utilização de realces de texto na interface é uma boa maneira para orientar o usuário. Podemos usar itálico, negrito, sublinhado ou cor diferenciada, estabelecendo uma estrutura de informações e acrescentando uma variedade visual que chama a atenção. Ao usar o texto colorido, devem-se escolher tons que contrastem com o fundo da página e evitar cores que possam ser confundidas com o padrão azul e violeta dos links da internet. Optamos no projeto por diferenciar: cor de título, cor de texto, cor de link ativo e cor de link visitado. Padrão que se repete em todas as páginas do site.

Nesta proposta de interface, optamos por usar texto em negrito preto para os títulos dos menus e em negrito verde para os títulos do texto (da página). Nos links, optamos pelo azul nos links ativos, roxo para os links visitados, e cinza para o link referente à página atual.

4.4 Cores

A cor é um elemento fundamental na estética de uma página na web. Por suas qualidades atrativas, pode-se usar determinadas cores para identificar áreas ou um determinado grupo de informações. As cores, assim como todos os elementos da página devem convergir para que a experiência do usuário seja a mais eficiente e confortável possível. Por isso é necessário ter conhecimento teórico sobre o funcionamento das cores como variável informativa. Nielsen (2000) recomenda o uso de cores de fundo lisas ou padrões de fundo sutis. Os elementos gráficos de fundo, principalmente quando muito coloridos, podem interferir na capacidade de reconhecer as formas das palavras. Esse mesmo autor trata ainda da importância das cores nos links. Geralmente, os links já visitados pelo usuário são diferenciados dos que ainda não foram vistos pelo uso de outras cores. Quando essa regra não é respeitada, o sentido de estrutura e localização do visitante da página fica deficiente e a navegação sofre uma perda significativa em sua eficácia.

A figura a seguir exemplifica o tratamento que aplicamos segundo estes princípios.

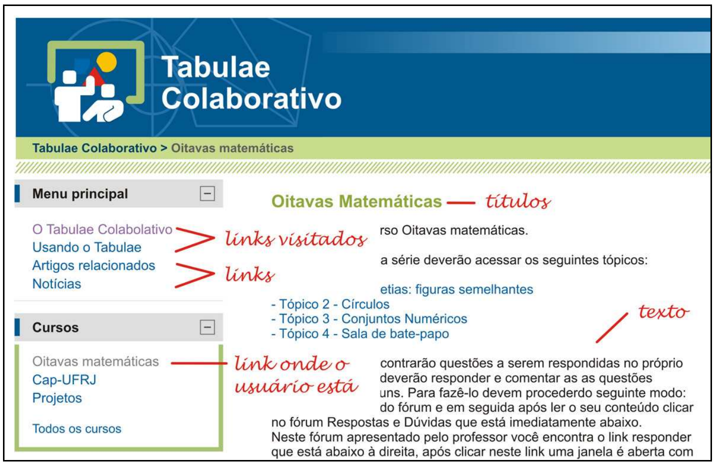


Figura 3: Tratamento das cores na página

Se bem utilizadas, as cores podem facilitar o processo de comunicação, direcionando o olhar do leitor a regiões específicas da página, contribuindo para a compreensão do layout ou da navegação. Usar cores para guiar o caminho que o usuário deve seguir, atribuindo uma hierarquia ao seu conteúdo, é um artifício que facilita a usabilidade.

É aconselhável usar a mesma cor para agrupar elementos relacionados. A repetição dos elementos unifica, organiza e fortalece, acrescentando interesse visual, consistência e ênfase. No exemplo abaixo, as informações referentes aos cursos são apresentadas da mesma maneira, ou seja, como uma borda verde em volta. A escolha das cores azul e verde visa estabelecer uma identidade visual com a interface do software Tabulæ que é desenvolvido pelo LIMC-UFRJ.

4.5 Tipografia

Uma boa tipografia vai garantir unidade gráfica, determinando legibilidade, e a escolha de uma família de letras confere ainda consistência ao projeto. Algumas fontes são mais legíveis que outras na tela do computador. Segundo Lynch & Horton (2002) a fonte Times New Roman é considerada uma das mais legíveis no papel, no entanto, na resolução da tela, que é inferior ao papel, o seu tamanho parece pequeno e a sua forma se mostra irregular. Segundo esses autores, a legibilidade na tela é influenciada pela altura –x (altura de uma letra “x”) e o tamanho geral da fonte.

Fontes como Georgia e Verdana foram desenvolvidas especialmente para a legibilidade na tela do computor; já que elas possuem alturas-x exageradas e são maiores quando comparadas com as outras fontes com o mesmo tamanho. (Lynch & Horton, 2002)

No entanto, a legibilidade de um tipo só poderá ser julgada dentro do contexto da situação que será a forma pela qual os leitores verão as informações. Para a interface proposta, escolhemos a fonte Arial.

Nielsen (2000) recomenda evitar o uso de maiúsculas para o texto, pois os usuários levam cerca de 10% a mais de tempo para ler um texto em letras maiúsculas, pois é mais difícil para o olho reconhecer a forma das palavras e os caracteres na aparência mais uniforme e de bloco causada pelo texto em maiúsculas.

5. CONCLUSÃO

Nesse artigo, apresentamos uma proposta de interface para um módulo de atividades do Tabula Colaborativo, agregado ao Moodle. Além das preocupações relacionadas com a produção e comunicação matemáticas em ambientes on-line, baseados em páginas web, neste trabalho ressaltamos a necessidade de pensar o ambiente matemático sob a ótica da usabilidade e permitido a adequação necessária a cada objetivo de ensino por meio de processos de customização promovendo as modificações da interface para atender às necessidades específicas da aprendizagem.

Referências

BARBASTEFANO, R.G. (2002) Ferramentas síncronas de ensino de matemática a distância. Tese de doutorado, PEP-COPPE.

DOUGIAMAS, M., (1999) Developing tools to foster online educational dialogue. In K. Martin, N. Stanley and N. Davison (Eds), Teaching in the Disciplines Learning in Context, (pp. 119-123). Proceedings of the 8th Annual Teaching Learning Forum, The University of Western Australia, February. Perth UWA.

DOUGIAMAS, M., (2000) Improving the effectiveness of tools for Internet based education". In A. Herrmann and M.M. Kulski (Eds), Flexible Futures in Tertiary Teaching. Proceedings of the 9th Annual Teaching Learning Forum, 2-4. Perth: Curtin University of Technology.

FOLEY, D., Van Dam, A., Feiner, S. Hughes, J. (1996). Computer Graphics, Principles and Practice. 2 ed. New York , Addison-Wesley.

GARRETT, J. J. (2002). The Elements of User Experience: User-Centered Design for the Web.1ed. United States of America, New Riders Publishing

GUIMARAES, L.C., MORAES, T. G., MATTOS, F. R. P. (2005), ``Cooperative Distance Learning in Mathematics", *US-China Education Review*, Volume 2, No.9, p. 42-45.

LYNCH, Patrick J.; HORTON, Sarah. "Webstyleguide", 2nd edition, 2002. Disponível em: <http://www.webstyleguide.com> Acesso em: 15/1/08.

MATTOS, F. R. P. ; MORAES, T. G. ; GUIMARAES, L. C. (2005), ``Tabulæ, Um Software para Um Modelo Colaborativo de Ensino". In: Memorias del VII Simposio de Educación Matemática. Buenos Aires: EDUMAT Editora, v. único.

MEMÓRIA, F., BRANDÃO, E. (2005), Ergodesign e Avaliação de Interface | Elementos de Composição de Telas: Design de Interfaces. PUC-RIO. Material da Pós-Graduação.

MIODUSER, D., NACHMIAS, R.(2002). ``WWW in Education", in Handbook on Information Technologies for Education and Training. Adelsberger, H.H., Collis, B., Pawlowski, J.M. (Eds.), pp. 23-43, Springer-Verlag, Berlim.

MORAES, A., SANTOS, R., DRESCH, (2001).A. Usabilidade de Interfaces, Interação Humano-Computador. PUC-RIO, Workshop.

NASON, R., WOODRUFF, E., (2002) New Ways of Learning Mathematics: Are we Ready for it? Proceedings of the International Conference on Computers in Education (ICCE'02), IEEE.

NASON, R., WOODRUFF, E., (2004) Online Collaborative Learning in Mathematics:Some necessary innovations. In T.Roberts (Ed.), Online Collaborative Learning: Theory and Practice, pp.103-131, London:Infosci.

NIELSEN, J. (2000). *Projetando Websites*. Rio de Janeiro, Editora Campus.

OUTING, Steve; RUEL, Laura. The Best of Eyetrack III: What We Saw When We Looked Through Their Eyes, 2004. Disponível em <http://www.poynterextra.org/eyetrack2004/main.htm> Acesso em: 15/1/08.

PREECE, J. (1994). Human-Computer Interaction. England, Addison-Wesley.

ROSENFELD, L., MORVILLE, P. (2002). Information Architeture for the World Wide Web. 2 ed. O´reilly.

SANTOS, R. (2003). “Alguns conceitos para avaliar usabilidade”. Disponível em: http://webinsider.uol.com.br. Acesso em: 08/03.

FUNCIONAALIDADES E CARACTERÍSTICAS PARA COMPOR ROTEIROS DE COLABORAÇÃO COM O TABULÆ COLABORATIVO

Francisco Mattos [b], Luiz Carlos Guimarães [a], Rafael Barbastefano [c], Thiago Moraes [d],

[a] LIMC-IM - UFRJ, luizguima@gmail.com. [b] CAP-UERJ – francisco.mattos@gmail.com.
[c] MPECM-DEPRO-CEFET/RJ – rgb@cefet-rj.br. [d] PESC-COPPE-UFRJ – thiago@cos.ufrj.br.

Resumo: Este trabalho apresenta contribuições proporcionadas pela introdução de tecnologia aplicada em projetos baseados na Aprendizagem Colaborativa mediada por computadores ao ensino de matemática. Estes ambientes computacionais são projetados de modo a permitir que os participantes do processo de aprendizagem construam seu conhecimento através da discussão e da reflexão, produzindo elaborações a partir da geração de conflitos, comparações e avaliações de discursos. Neste contexto, os recursos tecnológicos proporcionados pela informática atuam como mediadores do processo de ensino e aprendizagem. Apresentamos algumas características e funcionalidades agregadas ao software de Geometria Dinâmica, Tabulæ Colaborativo, que viabilizam o uso de estratégias didáticas para aprendizado colaborativo de matemática.

1. INTRODUÇÃO

As características funcionais e de interface foram propostas tendo como referências aspectos pedagógicos e técnicos. O projeto foi desenvolvido em conjunto com os testes com usuários e que permitiram avaliarmos cada uma das características e funcionalidades implementadas. O nosso objetivo foi criar um ambiente favorável ao aprendizado de matemática visando diminuir dificuldades operacionais relatadas na literatura, devidas às limitações presentes nas representações matemáticas dos ambientes para Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador (CSCL). Para implementar melhorias ao ambiente de ensino e aprendizagem, propomos também a adequação do gerenciamento do conhecimento proveniente do uso da ferramenta, por meio da integração a uma plataforma para ensino à distância - Moodle.

Estudamos como as tecnologias baseadas no *Aprendizado Colaborativo Apoiado por Computador* podem contribuir no processo de *Ensino e Aprendizagem de Matemática*. De modo mais objetivo, pretendemos criar condições que possibilitam a modelagem de métodos de atuação em sala de aula, através da implementação das *estratégias colaborativas*, Rogers et al (2001) , Fenton et al (2001).

Estudamos as estratégias aplicadas no ensino presencial e relatadas por estes autores e projetamos as inovações agregadas ao software, necessárias à viabilização de ambientes de ensino/aprendizagem baseados em *Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador*. As características e funcionalidades tem por finalidade viabilizar o uso destas estratégias didáticas para aprendizado colaborativo de matemática em um ambiente computacional em que os estudantes atuam de modo remoto, por meio da Internet.

De um modo geral, as estratégias didáticas são fundamentadas em resoluções de problemas associados a mecanismos de comunicação. Estes mecanismos estão restritos à comunicação escrita e compartilhamento de construções geométricas. O que diferencia uma estratégia das outras são: as diversas formas de agrupamentos possíveis, os conteúdos dos roteiros didáticos, e as funcionalidades utilizadas em cada atividade. Este conjunto compõe o que chamamos de *Roteiro de Colaboração,* Mattos (2007).

2. CONCEITOS TEÓRICOS

2.1 Aprendizado Colaborativo

Método de ensino e aprendizagem nos quais os estudantes organizados em grupos trabalham juntos em algum objeto de ensino. Pressupõe um envolvimento ativo dos estudantes na condução do processo de aprendizagem, baseado em mecanismos de suporte a grupos de aprendizagem, estabelecendo uma rede de suporte ao grupo, Dillenbourg (1999). Em sua fundamentação encontramos a concepção construtivista, em que aprendizagem e conhecimento vêm de nossa interação com o ambiente, Vigotsky (1995).

Ao comunicarmos idéias em atividades intragrupos, estamos expondo-as a nós mesmos e justificando-as, de modo a ratificá-las e aprofundá-las. Nestes procedimentos, o estudante é conduzido a expor idéias, quando em discussões internas com seus pares em um grupo de trabalho, ou, expondo idéias e formulando dúvidas. Um ambiente para o *Aprendizado Colaborativo* é pensado para proporcionar conhecimento, a partir de procedimentos interativos, podendo existir a mediação externa. Os procedimentos internos aos grupos, ou mesmo externos, dependem de apoio e suportes específicos, de acordo com o tipo atividade desenvolvida. De um modo geral, o *Aprendizado Colaborativo* tem por princípio a mudança da referência única centralizada no professor, e considera que os estudantes, com algum apoio, podem construir conhecimento.

Esta abordagem se contrapõe aos procedimentos tradicionais de ensino baseados em aulas expositivas e centrados no professor. Na *Aprendizagem Colaborativa*, o professor assume um papel de orientador do processo de ensino, Cohen (1996), Bonk & Cunningham (1998), Dillenbourg et al (1999).

2.2 Aprendizagem Colaborativa em Matemática

Em geral, o aprendizado de matemática é caracterizado por atividades isoladas e que ocorrem de maneira individualista. A partir dos anos 90, matemáticos publicam relatos de casos em que o aprendizado cooperativo é introduzido em classes presenciais de matemática, em cursos de graduação. Em Davidson (1990) são apresentadas várias estratégias para aprendizagem cooperativa em matemática, utilizando grupos pequenos de estudantes. As estratégias apresentadas são alternativas didáticas às aulas expositivas e à aprendizagem individual.

Fenton et al. (2001), Davidson et al. (1990), relatam casos de sucesso em abordagens de aprendizado colaborativo com estudantes de cursos de graduação de universidades americanas, em disciplinas de Cálculo, Álgebra, Estatística, Matemática Discreta, dentre outras. As diferentes abordagens são baseadas em realizadas com grupos pequenos trabalhando em sala de aula, trabalhos de casa ou utilizando computadores em laboratórios.

Há na literatura estudos afirmando que nem todos os estudantes se beneficiam do *Aprendizado Colaborativo*. Na tentativa de encontrar respostas para este fato Webb & Mastergeorge (2003), Schoenfeld (1992), Goos (2002), pesquisaram aspectos metacognitivos do pensamento matemático, em processos interativos, onde os estudantes trabalham em resoluções de problemas em grupo. A linha geral das conclusões destes trabalhos aponta para a importância dos mecanismos de suporte, através da criação de condições que incentivem questionamentos, e, forneçam orientações e apoio para a colaboração entre os componentes do grupo.

2.3 Aprendizagem Colaborativa On-line em Matemática

Há na literatura, diversos estudos e pesquisas relacionadas às concepções dos projetos de desenvolvimento das ferramentas computacionais. Além dos aspectos técnicos, são discutidas: as concepções pedagógicas, metodologias de ensino aplicadas, influências nos currículos. Um aspecto importante é a adequação aos objetos de aprendizagem específicos, uma vez que nesses processos há a necessidade de comunicação de expressões algébricas, construções geométricas, dentre outros contextos específicos de matemática. (Bonk & Cunningham (1998), Scardamalia & Bereiter (2003), Nason & Woodruff (2004)).

Um problema a ser tratado pelos projetos de ferramentas CSCL para o aprendizado de matemática diz respeito aos instrumentos necessários à comunicação. A construção de ambientes colaborativos de ensino é referenciada por aspectos relacionados ao tipo de atividade desenvolvida e à representação utilizada, e no caso específico que estudamos, às ferramentas matemáticas necessárias à colaboração.

Nason & Woodruff (2004) propõem atividades com problemas matemáticos que envolvam os estudantes na produção de modelos que possam ser discutidos, criticados e melhorados. Sugerem também que as ferramentas desenvolvidas para dar suporte, permitam a representação de problemas matemáticos, e facilitem a comunicação entre os participantes. Estas proposições têm por objetivos promover e apoiar o discurso matemático em ambientes CSCL.

A maioria dos relatos sobre as dificuldades com a comunicação matemática diz respeito às limitações com a representação, em diversos aplicativos CSCL, tanto no que diz respeito à representação quanto à comunicação em aplicações *síncronas*. Isto restringe o uso para aplicações que utilizam tópicos de matemática e suas representações, devido às dificuldades para comunicar representações de Álgebra e Geometria, por exemplo. A maioria das plataformas que suportam atividades colaborativas apresenta restrições em relação ao uso de figuras no processo de comunicação. Outro aspecto que pode ser considerado um obstáculo ao uso de CSCL em Matemática são as particularidades de procedimentos do raciocínio matemático, de difícil representação.

Um aspecto a ser tratado nos ambientes de ensino *on-line* é a grande demanda de moderação, em processos de tutoria, que exige técnicas diferentes das usadas no ensino presencial. A moderação atua na organização da atividade, controla a interação do grupo, determina os objetivos, e atua na motivação dos componentes, uma vez que incentiva a discussão, corrigindo ou indicando erros. Faz parte ainda da ação moderadora a indução a conflitos cognitivos través de estímulo a questionamentos e contradições, fornecendo informações que propiciem a reorganização das idéias. O mediador estimula, através das situações propostas, a superação de dificuldades pelos estudantes por meio da elaboração de procedimentos que os levem a argumentar e justificar as idéias. Esta atuação caracteriza, em muitos casos, o que definimos como *roteiro dinâmico*, Mattos (2007).

3. DIFICULDADES E SOLUÇÕES PARA CSCL

Aplicar a *Aprendizagem Colaborativa* como método de ensino é mais que dividir os alunos em grupos, atribuindo tarefas a serem cumpridas. Há relatos na literatura sobre dificuldades para a verificação do aprendizado, em atividades realizadas em grupos, Hron & Friedrich (2003). Outros autores, como Dillenbourg (1999), defendem que os efeitos da *Aprendizagem Colaborativa* dependem da qualidade da interação desenvolvida nos grupos. Slavin (1996) e Cohen (1996), apresentam resultados positivos para o aprendizado quando ocorreram incentivos através de suporte às atividades colaborativas, devido às dificuldades dos estudantes colaborarem de modo espontâneo. Eles analisaram casos aplicados em atividades em grupo no ensino presencial. Segundo Hron & Friedrich (2003), a comunicação, usando ferramentas *CSCL*, apresenta características específicas, e o autor aponta algumas, que podem justificar as dificuldades na comunicação e no aprendizado quando usamos *CSCL*. Por outro lado, sustenta que o reconhecimento das dificuldades pode ajudar a superar as limitações.

Uma grande dificuldade diz respeito à ausência física dos participantes. A não existência de componentes gestuais, voz, identificação física indicam uma limitação, uma vez que, muitas vezes, funcionam como mecanismos didáticos importantes nas salas de aula tradicionais. Assim, consideramos que são necessários suportes instrucionais que compensem estas ausências. Estas dificuldades motivaram as novas características implementadas no software *Tabulæ Colaborativo* para representações de modelos de ensino, reescritos sob novos paradigmas, Mattos (2007).

Um aspecto a ser tratado nos ambientes de ensino *on-line* é a grande demanda exigida da moderação, em processos de tutoria, que exige técnicas diferentes das usadas no ensino presencial. A moderação atua na organização da atividade, controla a interação do grupo, determina os objetivos, e atua na motivação dos componentes, uma vez que incentiva a discussão, corrigindo ou indicando erros. Faz parte ainda da ação moderadora a indução a *conflitos cognitivos* (Giraldo et al. (2002)), através de estímulo a questionamentos e contradições, fornecendo informações que propiciem a reorganização das idéias. O mediador estimula, através das situações propostas, a superação de dificuldades pelos estudantes por meio da elaboração de procedimentos que os levem a argumentar e justificar as idéias.

3.1 Tabulæ Colaborativo

O Tabulæ Colaborativo - TC foi construído dentro da classe de aplicativos conhecidos como Geometria Dinâmica (GD) e projetado para a aprendizagem colaborativa à distância, uma vez que possibilita o compartilhamento de construções geométricas e texto por meio da Internet, ou utilizando redes locais (Guimaraes et al. (2005)). No ambiente do *Tabulæ Colaborativo*, múltiplos usuários participam de sessões eletrônicas manipulando construções geométricas e se comunicando através de texto. Todos os participantes podem trabalhar simultaneamente, no que chamamos de sessão colaborativa, o que permite a aplicação de estratégias didáticas colaborativas em cursos à distância ou em atividades realizadas em aulas em laboratório (Mattos et al. (2006)).

4. FUNCIONALIDADES AGREGADAS AO TABULÆ COLABORATIVO

Kollar et al. (2006) defendem o uso de *Roteiros de Colaboração* (collaboration scripts) com objetivo de melhorar a qualidade da interação entre os estudantes quando desempenham atividades em grupo. Utilizamos o termo *Roteiros de Colaboração* para toda a estrutura que permite e incentiva o processo colaborativo em uma atividade, Mattos (2007). A função desta estrutura é definir a seqüência das atividades, e, atribuir papéis e funções. A estrutura destes roteiros define as características da interação, criando mecanismos e artifícios para que esta ocorra efetivamente no ambiente colaborativo. Este tipo de suporte (*scaffolding*) foi concebido a partir do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal de Vigotsky (Pea (2004)).

Em relação ao aprendizado colaborativo, o suporte ocorre em duas linhas: o instrucional oferecido pelo roteiro em cada atividade; e aquele que define a estratégia de colaboração aplicada. Em relação a este último, propomos modelos para o ensino de matemática em Mattos (2007).

Novas características funcionais e de interface foram propostas tendo como referências aspectos pedagógicos e técnicos, e em experimentos com usuários. Pretendemos criar um ambiente favorável ao aprendizado de matemática visando diminuir dificuldades operacionais relatadas na literatura, devidas às limitações presentes nas representações matemáticas dos ambientes CSCL. Para implementar melhorias ao ambiente de ensino e aprendizagem, propomos também a adequação do gerenciamento do conhecimento proveniente do uso da ferramenta, por meio da integração a uma plataforma para ensino à distância – Moodle. (Mattos(2006)). A seguir faremos a descrição de algumas das funcionalidades agregadas.

4.1 Revisor Passo a Passo

Toda atividade realizada com o TC grava no Banco de Dados o contexto gerado durante o processo de construção do problema. O *Passo a Passo* acessa os contextos individuais das sessões e os reproduz por meio de um visualizador como na figura 1, que possui botões de controle, como os visualizadores de arquivos de vídeo e som. A reprodução não permite a edição e exibe as ações transcorridas durante uma sessão, relacionadas à Geometria Dinâmica e aos diálogos durante os procedimentos. Esta funcionalidade permite enriquecer o uso didático do TC, e ainda apresenta-se como uma ferramenta útil para pesquisas dos processos de resolução de problemas, uma vez que permite acompanhar todo o contexto de uma resolução. Aspectos metacognitivos da solução de problemas podem ser estudados, na medida que o *revisor passo a passo* permite uma interpretação dos processos de aprendizagem, e habilita, a quem revisa, uma ação sobre este processo. O estudante que revê uma atividade sua ou de um colega tem a possibilidade de refletir sobre o próprio conhecimento, monitorar o desempenho e em alguns casos reconhecer processos alternativos de construção de uma solução (Mattos (2006)).

4.2 Glossário

O glossário foi concebido para dar suporte aos estudantes durante as sessões colaborativas. Muitas vezes, em uma conversa sobre assuntos que não dominamos completamente, podem surgem dúvidas relacionadas ao significado de uma palavra ou outra. Nos experimentos iniciais percebemos que no discurso matemático não é diferente. Então, resolvemos agregar um glossário que reconhece termos matemáticos dentro de um texto, destacando-os por meio de um *link*, quando clicamos sobre, uma janela exibe a definição para o termo. O professor ao elaborar uma atividade, deve enriquecer o *Glossário* com definições que digam respeito ao problema proposto.

4.3 Transferência Público $\rightleftharpoons$ Privada

No projeto do TC a área pública representa o paradigma do quadro negro, para as aulas convencionais em salas presenciais. A área privada é a representação do caderno de anotações, para o qual os estudantes podem copiar as construções geométricas do quadro negro, refazer construções, anotar comentários, etc. O estudante pode selecionar todo o contexto geométrico da tela ou, se preferir, ele seleciona apenas os objetos geométricos a copiar.

4.4 Histórico da Mensagens de Chat

Quando um grupo se conecta para uma atividade, nem sempre todos os componentes estão reunidos no horário previsto. Por motivos diversos, observamos nos experimentos que é comum alguns estudantes chegarem atrasados, com a atividade já iniciada. Neste caso, é importante que este saiba o que ocorreu desde o início, antes de participar das discussões. Os estudantes que e conectam ao grupo com a sessão já em andamento geralmente procuram olhar o início do *Chat*. A cada mensagem enviada por um estudante, o texto é atualizado e a leitura das mensagens antigas é interrompida por conta da entrada da última mensagem. Isto representa um problema para quem consulta mensagens anteriores. Para diminuir este problema, criamos um botão que exibe, em uma janela especial, todos os diálogos da sessão desde o início, sem a interferência das atuais mensagens. Este *histórico* pode ser acessado a qualquer momento por um membro do grupo que sinta a necessidade de consultar os diálogos anteriores.

4.5 Mudanças na Interface

O projeto do TC procura agregar componentes à interface de modo a facilitar a colaboração, considerando aspectos visuais e funcionais. Com esta perspectiva, adicionamos a relação de componentes dos grupos com a indicação dos participantes *on-line* e a indicação de quem é expositor durante uma sessão. Esta relação é importante para que os estudantes identifiquem os colegas de grupo e saibam quantos e quais, já estão conectados à atividade. Modificações visuais têm recebido tratamento especial no projeto, como a identificação da área pública e privada.

4.6 Integração com a plataforma Moodle

Pretendemos que o gerenciamento das sessões através do *Moodle* agregue ao ambiente síncrono do TC outras funcionalidades assíncronas da plataforma, que podem ser utilizadas em conjunto com o TC, para o desenvolvimento de uma atividade colaborativa. O funcionamento integrado pode ampliar as possibilidades de aplicações de *estratégias didáticas colaborativas* no ensino de matemática.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta algumas características e funcionalidades agregadas a um software de Geometria Dinâmica, o Tabulæ Colaborativo. Estas implementações foram testadas no desenvolvimento da viabilidade da formulação de estratégias de ensino baseadas nos modelos de Aprendizagem Colaborativa, compondo *roteiros de colaboração*. As possíveis aplicações destas ferramentas podem possibilitar diversos modelos e abrem caminhos para diversas pesquisas e reflexões no campo da *Educação Matemática*.

Referências

BARBASTEFANO, R.G. (2002) Ferramentas síncronas de ensino de matemática a distância. Tese de doutorado, PEP-COPPE

BONK, C., CUNNINGHAM, D. (1998), ``Searching for constructivist, learner-centered and socio cultural components for collaborative educational learning tools". In C. Bonk, C., King, K., editors, Electronic Collaborators: Learner-Centered Technologies for Literacy, Apprenticeship, and Discourse, pages 25-50. Lawrence Erlbaum.

COHEN, E. G. (1996), *``A sociologist looks at talking and working together in the mathematics classroom"*, American Educational Research Association, New York.

DAVIDSON, N. (1990), Cooperative Learning in Mathematics. Addison-Wesley, Menlo Park.

DILLENBOURG, P. (1999), ``What do you mean by collaborative learning?" In P. Dillenbourg (Ed) Collaborative-learning: Cognitive and Computational Approaches. (pp.1-19). Oxford: Elsevier.

FENTON, W. E., REYNOLDS, B. E., DAVIDSON, N. A., et al. (2001), ``Classroom Strategies for Cooperative Learning", in *Cooperative Learning In Undergraduate Mathematics*, pp. 23-53, The Mathematical Association of America, USA.

GIRALDO, V., CARVALHO, L.M., TALL, D. O., (2002) ``Conflitos Teórico-Computacionais e a Imagem Conceitual de Derivada". In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães, IHTEM, vol. 1, pp. 153-164, Rio de Janeiro, Brasil.

GOOS, M. (2002), ``Understanding metacognitive failure", The Journal of Mathematical Behavior, Elsevier, Volume 21, Issue 3, pages 283-302.

GUIMARAES, L.C., MORAES, T. G., MATTOS, F. R. P. (2005), ``Cooperative Distance Learning in Mathematics", *US-China Education Review*, Volume 2, No.9, p. 42-45.

HRON, A., FRIEDRICH H. F. (2003), ``A review of web-based collaborative learning: factors beyond technology". Journal of Computer Assisted Learning, 19, pp 70-79.

KOLLAR, I., FISCHER, F., HESSE, F. (2006), ``Collaboration Scripts - A Conceptual Analysis", Educational Psychology Review, 18, pp 159-185.

MATTOS, F. R. P. , BARBASTEFANO, R G , GUIMARÃES, L. C. , MORAES, T. G. (2006), Aprendizagem Cooperativa à Distância em Matemática, In: III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Águas de Lindóia. v. único.

MATTOS, F. R. P. (2007), Roteiros de Colaboração para o Software Tabulæ: Estratégias Didáticas para um Modelo de Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador à Distância em Geometria. Tese de doutorado, COS-COPPE/UFRJ.

NASON, R., WOODRUFF, E. (2004) Online Collaborative Learning in Mathematics: Some necessary innovations. In T.Roberts (Ed.), Online Collaborative Learning:Theory and Practice, pp.103-131, London.

PEA, R. D. (2004), ``The Social and Technological Dimensions of Scaffolding and Related Theoretical Concepts for Learning, Education, and Human Activity". The Journal of the Learning Sciences, 13, pp 423-451, Lawrence Erlbaum Associates.

ROGERS, E. C., REYNOLDS, B. E., DAVIDSON, N.A., THOMAS, A. D. (eds), (2001) *Cooperative Learning in Undergraduate Mathematics: Issues that Matter and Strategies that Work*. MAA notes 55, The Mathematical Association of America, Washington.

SCARDAMALIA, M., BEREITER, C. (2003), ``Knowledge building environments: Extending the limits of the possible in education and knowledge work". In A. DiStefano, K.E. Rudestam, & R.Silverman (Eds.), Encyclopedia of distributed learning. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

SCHOENFELD, A. (1992), ``Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making inmathematics". Chapter 15, pp. 334-370, of the Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (D. Grouws, Ed.). New York: MacMillan.

SLAVIN, R.E. (1996), ``Research on Cooperative Learning and Achievement: What We Know, What We Need to Know", \textit{Contemporary Educational Psycology}, vol. 21, pp. 43-69.

VYGOTSKY, L.S. (1995), *Pensamento e Linguagem*, São Paulo, Martins Fontes.

WEBB, N. M., MASTERGEORGE, A. M. (2003), ``The development of students' learning in peer-directed small groups". \textit{Cognition and Instruction}, 21, pp. 361-428.

E-FÓLI0 NO AMBIENTE MOODLE

Jean Piton Gonçalves, José Antonio Salvador e Paulo A. S. Caetano.
Departamento de Matemática - Universidade Federal de São Carlos
Via Washington Luiz, km 235
13565-905 – São Carlos – SP

Resumo: *As mais variadas formas de avaliação da aprendizagem vêm sendo discutidas nos últimos tempos, principalmente com a introdução das Tecnologias da Informação e Comunicação(TIC). Para incrementar as diversas formas virtuais de avaliação formativa dos nossos estudantes nas disciplinas presenciais, semipresenciais e à distância exploramos o E-Fólio, uma versão eletrônica do portfólio, com o potencial que o gerenciamento de atividades didáticas do ambiente MOODLE (Modular Object Oriented Dynamic Learning Enviroment) fornece. A utilização do E-Fólio, como instrumento de acompanhamento da evolução do aprendizado do estudante no ambiente interativo MOODLE é uma alternativa de avaliação capaz de propiciar ao estudante a responsabilidade pelo seu processo de aprendizagem favorecendo o acompanhamento e a análise contínua de seu desempenho pelo professor orientador.*

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos o *E-Learning* vem se mostrando como uma solução para a aprendizagem virtual, tanto no contexto empresarial quanto acadêmico. Muitas instituições, organizações e comunidades têm desenvolvido ferramentas computacionais que propiciam o suporte ao *E-Learning.* Neste trabalho destacamos os *Learning Management Systems* (LMS) ou Sistemas Gerenciadores de Cursos. Um LMS é um ambiente computacional que permite ao professor orientador gerenciar um curso à distância, provendo o planejamento, implementação e gestão do aprendizado à distância, permitindo também o seu uso no ensino presencial e semipresencial.

Dentre os LMS destacamos o *Modular Object Oriented Dynamic Learning Enviroment* (MOODLE) que é um LMS regido pela GPL (*General Public License*), desenvolvido inicialmente por Martin Dougiamas em 1999. O MOODLE é um sistema desenvolvido sob a teoria construtivista social, a qual defende a construção de idéias e conhecimentos em grupos sociais de forma colaborativa, criando assim, uma cultura de compartilhamento de significados (Salvador & Piton-Gonçalves 2006).

No contexto do *E-Learning*, as nossas experiências mostram que o E-Fólio destaca-se como uma ferramenta útil no processo de ensino, aprendizagem e avaliação da aprendizagem, nas quais, propomos que a avaliação formativa seja feita por meio de um E-Fólio do estudante, utilizando as facilidades que o MOODLE oferece para o registro e o acompanhamento das atividades realizadas numa disciplina.

O PORTFÓLIO NO AMBIENTE ACADÊMICO

A pasta de apresentação de trabalhos, ou portfólio começou no campo das artes e vem se destacando no ambiente escolar como uma metodologia no processo de avaliação do aprendizado. A partir das últimas décadas do século XX, várias universidades estrangeiras, utilizam o portfólio no ambiente acadêmico para avaliação dos estudantes. O portfólio é citado como um conjunto de diferentes classes de documentos, como notas pessoais, experiências de aulas, trabalhos pontuais, controle de aprendizagem, conexões com outros temas fora da escola, representações visuais, etc. Ele é apresentado como uma possibilidade interessante para avaliar a aprendizagem formativa do estudante, uma vez que consegue sistematizar as diferentes produções e os estimulam às mais diversas formas de expressões de suas qualidades, não apenas uma pasta de trabalhos, listas de exercícios, problemas, projetos ou materiais didáticos do estudante.

É também citado como um instrumento de diálogo entre educador e educando, sendo que pedagogicamente, o mais importante não é o portfólio em si, mas o que o estudante vai aprendendo ao criá-lo; estratégia que facilita e permite a avaliação da aprendizagem. Ele é um excelente instrumento para colecionar os passos percorridos pelo estudante ao longo da trajetória da sua aprendizagem, o que permite o pensar e repensar sobre o seu conhecimento. Além dos objetivos educacionais, existe a gestão do conhecimento adquirido pelo estudante, que é representado pela coletânea de sua produção contida no seu portfólio individual, que vai construindo o perfil acadêmico do estudante e refletindo o ritmo da evolução do seu crescimento, os temas do seu maior interesse, as dificuldades encontradas ao longo do processo, suas capacidades e as características a serem desenvolvidas (Anastasiou & Alves 2006).

Um portfólio do estudante, não se resume simplesmente numa coleção de trabalhos apresentados em arquivos ordenados, mas sim, de um conjunto organizado de atividades que devem ser coerentes com a proposta do ensino planejado, nas condições criadas para o seu desenvolvimento e o aprendizado, proporcionando uma visão geral da evolução do estudante em cada etapa proposta. O objetivo principal do portfólio é contribuir para o aprendizado do estudante durante todo o processo e não produzido apenas no término do período para fins avaliativos, tendo como função o seu aprendizado.

Com ele, pode-se constatar se os objetivos pré-estabelecidos no planejamento de ensino foram alcançados e, caso não o tenham, deve-se favorecer o conhecimento do domínio para aperfeiçoar sua aprendizagem (Piton-Gonçalves, 2004). A avaliação formativa é um processo contínuo presente durante todo o ciclo de estudos conforme mostra a Figura 1.

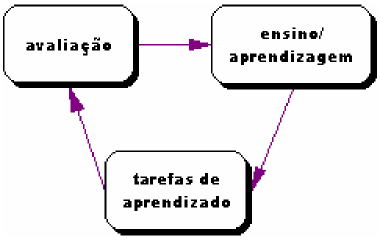


Figura 1. Ciclo da avaliação formativa.

Ressalta-se que essa avaliação não tem um caráter de finalização, sendo valorizada como um meio de melhoria da aprendizagem dos alunos (Varandas, 2000). Dessa forma, o portfólio permite que o aluno reveja seus conhecimentos no transcurso da atividade e vai indicando ao professor o *status quo* de seu conhecimento relativo ao conteúdo abordado. Questionamos como utilizar tal ferramenta de avaliação no ambiente *E-Learning* atualmente disponível nas nossas universidades.

E-FÓLIO

A elaboração de um E-Fólio é uma alternativa das concepções de ensino, aprendizagem e avaliação que vem ocorrendo ao longo dos últimos anos no contexto das Tecnologias da Informação e de Comunicação (TIC) disponíveis. Geralmente, ele é elaborado em um ambiente virtual, permitindo a montagem de um tipo de pasta eletrônica das atividades, tarefas e dos diversos trabalhos do estudante e do professor orientador num tópico, numa determinada disciplina, atividade curricular complementar ou curso. Como o E-Fólio é um ambiente virtual, existe a possibilidade enriquecedora de inclusão de hipertextos com animações, vídeos, sons e imagens. No cenário da Internet, o hipertexto permite a navegação de uma tela para outra imitando o funcionamento associativo da memória biológica e as estratégias cognitivas utilizadas para ler e retomar frases, imagens, sons e animação. Tais possibilidades contribuem para o incremento do conhecimento, para a compreensão, a simulação de problemas reais e para a análise do comportamento e da evolução do estudante. As atividades avaliativas sugeridas para o portfólio em (Anastasiou & Alves, 2006), podem ser aperfeiçoadas e ampliadas para o E-Fólio e enriquecidas com a possibilidade da apresentação de respostas on-line para o estudante e o acompanhamento do professor de modo síncrono ou assíncrono.

O E-FÓLIO NO AMBIENTE MOODLE

Sabemos que o MOODLE é um ambiente de aprendizagem à distância baseado no construcionismo social, permitindo inclusive o uso em cursos semipresenciais ou para a publicação de materiais, etc. que complementa os cursos presenciais (Salvador & Piton-Gonçalves 2006). No construcionismo social o aprendizado é efetivo quando se constrói algo a partir de outras experiências. Isto pode ser estendido a um grupo social, construindo artefatos, criando uma cultura de conhecimentos e significados mutuamente compartilhados. Assim, destacamos que o MOODLE pode ser utilizado como uma ferramenta virtual que gerencia os dados e informações de um E-Fólio, facilitando a aprendizagem e a avaliação formativa do estudante. Para isso, o MOODLE possui uma quantidade de ferramentas que possibilitam ao professor orientador gerenciar um curso/disciplina/atividade de qualquer lugar em qualquer instante.

O E-Fólio no ambiente do MOODLE propicia a construção de documentos em que as versões podem ser aperfeiçoadas continuamente, permitindo a reformulação das tarefas com a perspectiva do entendimento de cada uma das etapas do percurso como uma produção e finalizá-la quando satisfatória, e a publicação das atividades não gera custo de impressão para o estudante.

Apoiando o professor orientador nessa tarefa de montagem e gerenciamento do E-Fólio, o MOODLE[1] disponibiliza um conjunto de ferramentas computacionais que colaboram na coleta, busca, gerenciamento, inserção e arquivamento ou registro detalhado dos trabalhos dos estudantes e do professor, como: **Fórum; Tarefa; Questionário; Chat; Lição; Glossário; Pesquisa de Avaliação; Pesquisa de Opinião; Laboratório de Avaliação; Wiki; Diário; Base de Dados; Hotpot (hotpotatoes).**

Com as facilidades dos recursos mencionados, o E-Fólio no ambiente MOODLE pode evidenciar o registro do processo de construção de uma atividade, de um tópico abordado numa aula, fase, módulo, unidade, projeto de uma disciplina etc. Cabe ao estudante seguir a orientação dada pelo professor/orientador a partir dos recursos que o ambiente virtual MOODLE disponibiliza e a devida mobilização dos colegas para a realização colaborativamente de uma dada tarefa.

Em termos legais, o portfólio pode ser utilizado na nossa universidade como ferramenta para registrar as atividades didáticas, e assim começamos nossas experiências na elaboração do mesmo no ambiente computacional; o E-fólio.

Atualmente, parte significativa do currículo universitário possui atividades curriculares complementares que podem ser realizadas ao longo do curso. Elas proporcionam o enriquecimento científico e cultural, incrementam o currículo universitário do estudante, propiciam o desenvolvimento de valores e hábitos de elaboração de trabalhos individual e em equipe, além da inserção no debate contemporâneo mais amplo e que podem ser incluídas no histórico escolar. Certamente o estudante pode ir registrando tais atividades num E-fólio específico ao longo do curso, o que facilita a inclusão delas no histórico escolar no final do curso.

EXEMPLOS DE E-FÓLIOS NO AMBIENTE MOODLE

No ambiente do MOODLE podemos propiciar a cada estudante a possibilidade de gerar seu E-Fólio contendo todas as atividades desenvolvidas que ele julgar relevante e que contribuiu para a sua formação e que possa ser registrada no seu currículo.

Semana	Nome	Tipo de tarefa	Data de entrega	Enviada	Nota
	Expectativas da Disciplina	Texto online	Wednesday, 15 August 2007, 10:40	Ver 21 tarefas enviadas	-
4	Recursos audiovisuais	Envio de arquivo único	Thursday, 6 September 2007, 23:20	Ver 12 tarefas enviadas	-
6	Atividade de Mágica	Envio de arquivo único	Tuesday, 18 September 2007, 18:50	Ver 10 tarefas enviadas	-
9	Tarefa Geometrando com o LOGO	Envio de arquivo único	Thursday, 11 October 2007, 23:00	Ver 17 tarefas enviadas	-
11	Enviar as figuras sobre RS no GeoGebra, .png, .bmp ou no logo	Envio de arquivo único	Thursday, 25 October 2007, 21:40	Ver 11 tarefas enviadas	-
12	Sobre os recursos audiovisuais: Probabilidade no EM, Matemática Radical, Arte e Matemática	Envio de arquivo único	Friday, 2 November 2007, 08:00	Ver 7 tarefas enviadas	-
15	IMC com Calculadoras	Envio de arquivo único	Saturday, 17 November 2007, 20:05	Ver 7 tarefas	-

Figura 3. Atividades da disciplina Informática Aplicada ao Ensino no MOODLE

Nas disciplinas presenciais oferecidas pelo Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos (DM-UFSCar) para os cursos de Licenciatura em Matemática e para as Engenharias, bem como em atividades curriculares complementares, atividades de extensão e/ou de educação continuada, vivenciamos algumas maneiras de avaliação virtual no ambiente das TIC.

---

[1] Versão 1.7.3+ (2007)

A Figura 3 mostra uma área de tarefas da disciplina de Informática Aplicada ao Ensino, ministrada pelos autores em que são discutidos os diversos papéis da tecnologia como instrumento de comunicação e construção de conhecimento matemático, acompanhados de discussão em grupos virtuais sobre as possibilidades educacionais dos ambientes computacionais no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática.

Outras aplicações de E-Fólio como na disciplina Instrumentação para o Ensino de Matemática, os participantes foram avaliados com base na construção de um E-Fólio, a partir de um total de 44 atividades disponibilizadas no MOODLE. Citamos algumas atividades virtuais propostas, como:

Nerds, nossas histórias: Após a exibição de um filme americano sobre Nerds, em que adultos bem sucedidos considerados Nerds na infância relatam suas histórias escolares, os participantes compartilharam suas histórias na ferramenta **Fórum** do MOODLE. O relato de um estudante foi: *"... de uma professora de matemática que se chamava Madalena que nós a apelidamos gentilmente de Madalena a louca. ... ela entrava em crise na sala de aula,... nossa diversão era dar risada de suas crises... em um belo dia de aula enquanto ela estava toda empolgada explicando funções o seu dente da frente cai da boca e saiu rolando pela classe. Ela ficava com a mão na boca falando: Cadê o meu dente! Cadê... Enquanto ela procurava nos nossos pés... até a diretora foi lá... achava que estávamos escondendo o seu tão precioso dente".*

Vídeo Piaget: Nesta tarefa, após a exibição de um documentário sobre Piaget, os estudantes da disciplina publicaram no MOODLE um arquivo texto com suas considerações sobre o conteúdo do vídeo apresentado. Uma reflexão de um estudante foi: *"a principal pergunta de Piaget era como as pessoas constroem conhecimento, através de que processos. Piaget criou alguns conceitos como: assimilação, que acontece quando uma pessoa entra..."*.

Enigma: Nesta tarefa, após estudo de vários enigmas infantis publicados semanalmente na Revista Recreio da Editora Abril, os participantes da disciplina criaram seus próprios enigmas envolvendo lógica matemática em um arquivo.doc, publicando-os no MOODLE para compartilhar e discutir com a turma.

Também as atividades de avaliação semanal do nosso Programa de Educação Continuada com professores do Ensino Básico de São Carlos e região foram feitas no ambiente do MOODLE com sucesso.

De acordo com nossas experiências de que as várias formas de avaliação devem ser coerentes com os resultados de aprendizagem previamente explicitados no plano de ensino e realizadas com as condições oferecidas para o estudante, apontaremos algumas recomendações para o trabalho com o E-Fólio no ambiente do MOODLE:

A escolha da ferramenta de avaliação deve ser coerente com os objetivos educacionais. Seríamos incoerentes utilizar a ferramenta **Questionário** para a escrita de um texto colaborativo, neste caso indicaríamos a **Wiki**; Além da escolha da ferramenta, deve-se combinar as várias formas de registro, que poderão ser escritas manualmente, escaneadas e/ou digitadas, resolvidas com outro(s) software(s) e inseridas como hipertextos, fotos, vídeos e sons. A orientação sobre a formatação dos documentos vai depender do objetivo proposto no planejamento da atividade; Os relatos devem ser claramente nomeados, e o título deve expressar o sentimento mais evidente daquele momento. Os registros podem conter trabalhos científicos de pesquisa, textos individuais ou coletivos, considerados importantes, acrescidos de uma profunda reflexão sobre seu significado para a formação do estudante; Quanto à anotação do sentimento de avanço e dificuldades pessoais do estudante, recomendamos anexar um mapa conceitual (Salvador et al, 2003), que pode ser elaborado com o CMapTools (http://penta2.ufrgs.br/edutools/tutcmaps/tutindicecmap.htm).

Ao professor orientador compete ler a produção dos estudantes, apontar avanços e avaliar o que merece uma retomada para aperfeiçoamento, estabelecendo uma comunicação com o estudante que é produtiva para a aprendizagem significativa; Inserir avaliação construtiva de desempenho pessoal e do desempenho do professor orientador; No momento da avaliação, devem ser definidos e acordados os critérios do desempenho do estudante e do professor, e para isso, pode-se utilizar: escala de notas, menção, saber conectado e destacado; Deve haver organização e cientificidade da ação de professor orientador e do estudante, a clareza das idéias na produção do material, a construção e reconstrução, a objetividade na apresentação dos conceitos básicos e o envolvimento e compromisso com a aprendizagem; A geração de dados e interpretações sobre a aprendizagem dos estudantes deve ocorrer ao longo de todo o processo de ensino e não somente no final do semestre, oferecendo várias formas de avaliação, possibilidade de recuperação paralela e também no final do período.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O E-Fólio é um instrumento útil do ambiente eletrônico para a aprendizagem e avaliação do estudante. Professor e estudantes podem ir elaborando e aperfeiçoando o E-Fólio ao longo de todo o período de uma atividade e no final obter de forma organizada e crítica todo o material compreendido. As experiências que estamos realizando no processo de ensinagem com as mais variadas formas de avaliação formativa nas disciplinas presenciais com atividades virtuais indicam que o MOODLE fornece um ambiente de registro das atividades facilitador do aprendizado significativo do estudante e da análise do professor.

À medida que o estudante elabora, discute, interpreta e aprende com as atividades compartilhadas possibilita uma ampliação de seu horizonte ao reconhecer a necessidade de se fazer opções, definir critérios, julgar e tomar decisões, permitindo dúvidas, questionamentos e conflitos para que se possa tornar mais informado, consciente, seguro de si e mesmo mais tolerante em relação às hipóteses e considerações dos outros participantes, conforme (Anastasiou & Alves, 2006). As atividades que apresentamos dão uma idéia da viabilidade da avaliação e acompanhamento do aprendizado do estudante no ambiente MOODLE. Além disso, o E-Fólio neste ambiente permite a inserção de fórmulas matemáticas o que facilita a troca de informações e discussão na área de ciências exatas e, gera uma grande economia de material impresso contribuindo para o ambiente sustentável que tanto almejamos.

REFERÊNCIAS

Anastasiou, L. G. C. & Alves, L. P. (2006) *Processos de Ensinagem da Universidade*, Lea das Graças Camargo Anastasiou e Leonir Pessate Alves (Orgs.), Editora Univille, 6a. Edição.

Salvador, J. A. & Piton-Gonçalves, J., (2006) *O MOODLE como ferramenta de apoio a uma disciplina presencial de ciências exatas.* In: COBENGE - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 2006, Passo Fundo. Anais do XXXIV COBENGE.

Salvador, J. A. & al., (2003), *Mapas Conceituais/Software Numérico: Uma experiência no Estudo de Cálculo Numérico*, TEMA (2003).

Piton-Gonçalves, J. (2004) A integração de testes adaptativos informatizados e ambientes computacionais de tarefas para o aprendizado do inglês instrumental. São Carlos, SP: Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, USP (Dissertação de Mestrado).

Piton-Gonçalves, J. (2006) *Uma experiência na disciplina de informática aplicada ao ensino para a licenciatura em matemática.* In: VIII EPEM - Encontro Paulista de Educação Matemática, 2006, São Paulo. Anais do VIII EPEM.

Varandas, J. M. (2000) *Avaliação de investigações matemáticas: uma experiência.* Dissertação de mestrado, DEFCUL, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Piton-Gonçalves, J. E Caetano, P. A. S. (2007) *O Ensino de Cálculo e Geometria Analítica no Curso de Engenharia Ambiental no contexto da UFSCar (320-326)* In: Novos Paradigmas na Educação em Engenharia – ABENGE – UNICENP, Curitiba - PR.

APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES REAIS UTILIZANDO GEOMETRIA DINÂMICA

Filipe Hasche
hasche@pg.im.ufrj.br
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Neste artigo é feita uma síntese de uma experiência de ensino de Funções Reais utilizando Geometria Dinâmica. Relatam-se aqui alguns episódios dessas atividades ligados a reflexões sobre pesquisas acerca do ensino e aprendizagem de matemática. Através do acompanhamento do aprendizado dos alunos, analisam-se possibilidades e cuidados em elaborar um ambiente que possa promover aprendizagens significativas no processo de desenvolvimento intelectual e que explorem a interatividade com a matéria permitida pelo uso do software.

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, muitos estudos exploraram aplicações de tecnologias computacionais para o ensino de matemática. Em uma revisão bibliográfica sobre esse assunto, Giraldo & Carvalho (2004) comentam que muitas vezes era delegado à maquina o *sucesso* ou *fracasso* do experimento (p. 31). Estes autores, entendendo que a máquina não encerra em si nenhum atributo intrínseco à qualidade de sua utilização no ensino, também destacam uma observação sobre o trabalho de Laudares & Lachini (2000) onde vemos (p. 12):

> [...] o uso de tecnologia pode se constituir em uma importante alternativa para o modelo tradicional da aula de matemática. No entanto, [...] os autores afirmam que isso não depende do fato de se usar computadores por si só: tal perspectiva só pode ser concretizada por meio do planejamento cuidadoso de atividades de laboratório que estimulem a formação de uma postura investigativa por parte dos alunos e da preparação e motivação dos professores para conduzi-las.

Nesta mesma direção, na área de formação de professores, Belfort & Guimarães (1998) alertam para algumas falhas nas práticas docentes ao analisar professores lidando com softwares de Geometria Dinâmica (GD). Os autores apontam para o fato de que, em geral, os professores não adotam uma postura de análise crítica perante os resultados emitidos pela máquina. Diante disso, demanda-se uma necessidade na formação docente que capacite o professor a saber lidar com ferramentas computacionais no sentido de saber criar tarefas apropriadas para esta nova possibilidade de situações de ensino e que também o possibilite a assumir um papel de guia de aprendizagem dos seus alunos neste ambiente.

Neste artigo, pretende-se relatar abordagens de ensino de funções em ambiente dinâmico; relacionando o uso de novas tecnologias com teorias acerca de saberes docentes e de aprendizagem em matemática.

PREPARAÇÃO DAS ATIVIDADES

Foi colocado em prática, no terceiro bimestre do ano letivo de 2007, uma proposta de abordagem do estudo de Funções Reais com alunos de uma turma de *AtiCom*[1] do 1° ano do Ensino Médio de uma Escola da Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro. Nessa abordagem, o aluno, inicialmente, explorava o comportamento de algumas funções utilizando o software *GeoGebra,* sob um rotina de análise por mim elaborado que tinha por objetivo conduzi-los às desejadas conclusões quanto aos conceitos e definições destes conceitos ali presentes. Segundo Piaget (1978), *fazer* e *compreender* estão intimamente vinculados. Destaca que *fazer* é conhecer o processo que permite executar com sucesso determinada ação. *Compreender*, por sua vez, é de um nível intelectual de grau mais elevado. Implica dominar em pensamento a mesma situação do *fazer*, em relação ao *porquê* e ao *como* de cada ação realizada ou a ser realizada. Com base nessas reflexões, as atividades com GD eram preparadas para que o aluno tivesse a oportunidade de manipular os objetos na tela a fim de conjecturar, descobrir e formalizar as relações pertinentes ao assunto em estudo. Os alunos sentavam-se aos computadores em duplas ou trios para trabalhar com telas pré-produzidas por mim no software. Essas telas funcionavam como uma revisão interativa dos passos da construção visando a análise da função. Ao longo das atividades, era sempre pedida a averiguação das propriedades dos objetos representados por meio da experimentação.

---

[1] As ementas das *Turmas de AtiCom* (Atividade Complementar) são compostas por matérias vinculadas às disciplinas básicas servindo de nivelamento para o aprimoramento da aprendizagem dos alunos.

DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

No bimestre anterior, os alunos desta turma de AtiCom já haviam sido apresentados às idéias iniciais de função real expressa por uma sentença. As atividades na sala de informática eram baseadas na observação do comportamento dos objetos (variáveis) livres e dependentes com o arrastar do mouse na tela. A Figura 1 ilustra a primeira etapa da atividade, onde era pedido para que os alunos identificassem o significado de cada objeto na tela, bem como as relações entre eles ao movimentar o objeto livre (o ponto '**A'**):

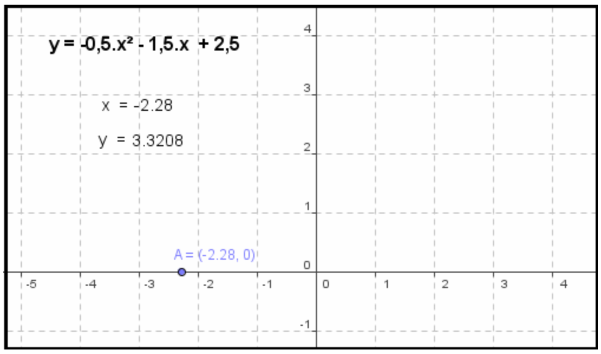


Figura 1: Janela computacional, na qual vemos a sentença que define a função a ser estudada, o valor instantâneo da variável independente "x" (que varia de acordo com o arrastar do ponto **'A'**, no eixo horizontal) e o valor calculado, em tempo real, da variável dependente "y".

A demanda de uma revisão de conceitos

Embora eu considerasse esta primeira etapa de simples compreensão dos alunos, muitas dúvidas emergiam quanto às propriedades dos números representados na reta numérica, que pareciam ser fruto de confusão sobre conceitos matemáticos. Por exemplo, havia dificuldades dos alunos em perceberem o fato de "-3" ser maior que "-5" (os alunos tendiam a fazer uma comparação indevida pelo valor absoluto); de o "1,8" ser maior que "1,23" (comparação indevida pela parte decimal); e até mesmo o simples contato com números racionais expressos com mais de 2 ou 3 casas decimais. Assim, essas atividades ganhavam um potencial onde alguns conceitos elementares do Ensino Fundamental eram naturalmente revisitados (ou até mesmo apresentados a eles pela primeira vez) com um olhar mais maduro e mais profundo. Segundo Sierpinska (1992), gerar situações onde o aluno é colocado frente a suas dificuldades é uma das formas de construir bases sólidas para o conhecimento, dada a oportunidade de superar obstáculos da matéria em vez de contorná-los com um conhecimento "algoritmizado".

Representação de imagens de um conceito

No próximo passo da atividade, a tela apresentava um novo objeto, como vemos na Figura 2:

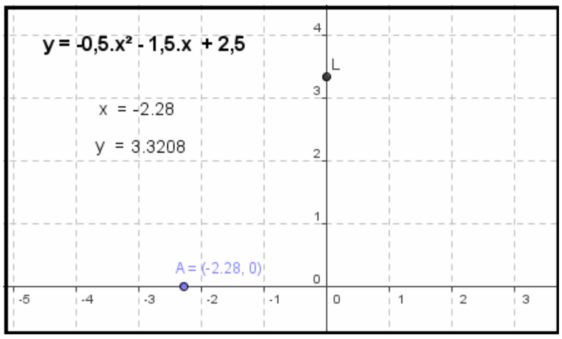


Figura 2: Tela com um ponto no eixo das ordenadas.

Ao questionar a respeito das propriedades deste novo ponto, era comum ouvir respostas ingênuas do tipo: "-Quando mexe o ponto A, ele sobe e desce."; ou: "-Quando muda o valor de "x" ele mexe também.". Parecia que eles ainda não relacionavam a posição do ponto L com o valor de "y". Após algumas intervenções minhas, questionando a respeito das coordenadas do ponto L (repare que, ao contrário do ponto A, o ponto L não exibe suas coordenadas), um aluno chegou à conclusão de que este ponto é a imagem do ponto A. Continuando a análise da função, era pedido para que os alunos identificassem algum intervalo de "x" que fazia com que o valor de "y" aumentasse. Muitos alunos falavam acerca do crescimento da função apenas onde ela era crescente e positiva, desconsiderando o fato de ela poder ser crescente quando negativa. Outros confundiam o crescimento da função com seu máximo local, com comentários do tipo: "-A função é crescente quando x vale -1,36.". E mesmo aqueles que tratavam o crescimento da função em um intervalo, alguns ainda tratavam de forma confusa, dizendo: "-Quando o "x" vai pra direita, o y cresce; mas quando volta, ele diminui.".

Construindo a idéia de *Imagem de Conceito*, Tall (1981) a define como estruturas cognitivas associadas a um certo conceito que ainda podem se distinguir da definição formal. Assim, os alunos com base nas suas próprias respostas, puderam ver a necessidade de começar a definir o conceito de crescimento e decrescimento de uma função e de máximos e mínimos locais (mesmo que de uma forma ainda intuitiva e informal) uma vez que diferentes interpretações de uma *imagem* os levavam a conclusões inconsistentes.

Saltos epistemológicos

Na etapa seguinte da construção, o novo objeto que aparecia na tela era um outro ponto tal como podemos ver na Figura 3:

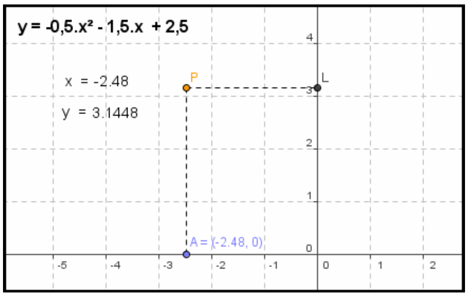


Figura 3: Tela com o ponto "P".

Frente a isso, era perguntado aos alunos a respeito da relação deste novo objeto com os objetos anteriores na construção. Ainda era esperado ouvir as mesmas respostas informais de antes, como: "-O ponto P se mexe junto com os outros", mas a resposta desejada (sobre as coordenadas de P) surgiu com mais naturalidade.

Sierpinska aponta para cuidados em lidar com a interpretação de um gráfico. Destaca que ele é uma representação estática que esconde o dinamismo das funções, uma vez que um único ponto (x,y) é o símbolo que encerra em si o argumento, o valor e a lei de correspondência da função; formando, assim, um *obstáculo epistemológico* em potencial. Para tentar "devolver" esse caráter dinâmico da construção de um gráfico, visando superar este obstáculo, foi utilizada a ferramenta *"Exibir Traço"*. Assim os alunos podiam conferir com o próprio manuseio a trajetória descrita pelo ponto P à medida que variavam o valor de 'x'.

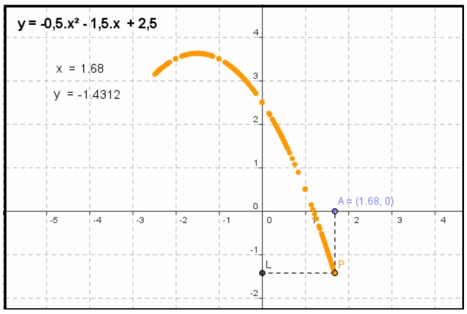


Figura 4: Trajetória descrita pelo ponto P ao arrastar o ponto A.

Durante o desenhar do gráfico, alguns alunos arregalavam os olhos e serenamente exclamavam: "-Aaahh, uma parábola...!!".

Sierpinska caracteriza *Salto Epistemológico* como uma nova forma de (re)conhecer conceitos anteriormente vistos que possibilitam mudanças qualitativas na construção e no aprimorar do saber. Assim, pelo fato de funções quadráticas já terem sido visto em aulas na lousa, podemos interpretar essa reação dos alunos como a evidência de um salto epistemológico; diante da superação do obstáculo de, na representação de um gráfico, identificar aspectos dinâmicos nele.

Após sucessivas aulas na sala de informática nas quais esses conteúdos eram refinados e apurados, um dos objetivos era fazer com que os alunos reconhecessem elementos notáveis em um gráfico e a conveniência da sua leitura para a interpretação e análise das propriedades da função. Assim, ao fim de cada uma dessas aulas, era pedido que os alunos refizessem toda a análise da função (análise do sinal, de crescimento e decrescimento e de máximos e mínimos locais) apenas olhando para o gráfico pronto, sem mexer no ponto móvel, e comparando com os dados anteriormente anotados.

Riscos de um aprendizado com ferramentas computacionais

Trabalhos como os de Giraldo (2004) e Abrahão (1998) nos despertam para o risco de os alunos atribuírem ao computador o papel de estabelecer verdades matemáticas absolutas em detrimento do seu próprio conhecimento. Temendo também o risco de que uma maior intimidade com o manuseio do software tolhesse o conhecimento da teoria que preconizava as construções, era necessária uma atividade onde uma análise meramente visual na tela do computador levaria a conclusões equivocadas. Antes dessa atividade, um dos alunos chegou a comentar que não seria mais necessário saber aquela teoria, já que bastava o arrastar do mouse para obter as respostas da análise das funções.

Para mostrar a necessidade do conhecimento teórico ao analisar uma função em ambiente dinâmico, foi proposto o estudo do sinal da função em uma janela como vemos na Figura 5:

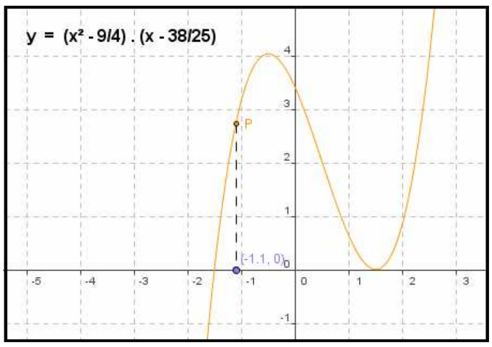


Figura 5: Gráfico a ser analisado.

Ao analisarmos apenas visualmente os pontos de interseção do gráfico com o eixo das abscissas, somos induzidos ao erro de concluir que a função se anula apenas em dois pontos. Daí surge a importância de uma análise algébrica que forneça conclusões precisas quanto ao número de raízes da função.

Feita esta análise algébrica, os alunos podiam conferir o resultado encontrado ao mudar a escala dos eixos na janela gráfica, utilizando a ferramenta "*Ampliar*", como podemos ver na Figura 6:

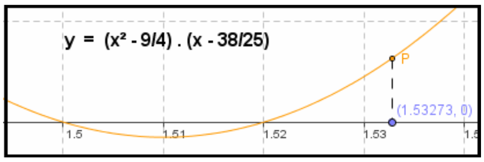


Figura 6: Janela gráfica ampliada que permite identificar a mudança de sinal da função.

Assim, o papel do professor não foi e nunca deve ser substituído pelo uso de ferramentas computacionais, pois os alunos não aprendem com o mero arrastar de objetos na tela. A elaboração de tarefas adequadas e as intervenções do professor ao conduzi-las desempenham um papel fundamental para o sucesso na utilização de tecnologias interativas (Lagrange et al. 2001).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A estratégia de utilizar Novas Tecnologias no ensino também pode ser efetiva por ter respaldo na motivação dos alunos em lidar com novas situações para a construção de seu conhecimento. Mas fazer com que os alunos manipulem entes matemáticos abstratos em uma representação à sua frente não deve ter a intenção de "poupá-los" do desenvolvimento teórico para o seu aprendizado. Ao contrário, a intenção presente deve ser gerar situações que demandem revisitar a teoria (ou criar motivação para novos desenvolvimentos teóricos) nas quais o aluno possa ser verdadeiramente confrontado com dificuldades intrínsecas da matéria. Assim, no intuito de superar suas dificuldades, podemos criar um ambiente fértil para solidificar bases na construção do seu saber.

Essas atividades tiveram por objetivo buscar um aprendizado em matemática que permitisse ao estudante desenvolver capacidades que caracterizam atos próprios do "fazer matemático" como experimentar, representar, analisar e concluir. Paralelamente a isso, devemos também superar desafios na utilização de Novas Tecnologias ensino de matemática visto que *a questão mais desafiadora não é <u>o que</u> o uso da máquina pode acrescentar nos modelos atuais de ensino, mas <u>que novos modelos</u> de ensino podem ser inaugurados pelo uso da máquina* (Giraldo, 2004, p. 1)

Referências

Abrahão, A. M. C. (1998). *O Comportamento de Professores Frente a Alguns Gráficos de Funções $f:R \rightarrow R$ Obtidos Com Novas Tecnologias.*. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1998.

Belfort, E. & Guimarães, L.C. (1998). O papel do software educativo na formação continuada de professores de matemática. In: *Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática, volume 2*, pp. 104-107. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1998.

Giraldo, V. (2004). *Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada*. 221 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.

Giraldo, V. & Carvalho, L.M. (2004). Breve bibliografia comentada sobre o uso de tecnologias computacionais no ensino de matemática avançada. In: *Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática*, pp. 1 – 17. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2001). Meta study on IC technologies in education. Towards multidimensional framework to tackle their integration into the teaching of mathematics. In : M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of international group for psychology of mathematics education*. (Vol.1, pp.111-122), Utrecht, Pays Bas: Freudenthal Institute, Utrecht University.

Laudares, J. & Lachini, J. (2000). O uso do computador no ensino de matemática na graduação. In: *23ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*, volume eletrônico, 2000.

Piaget, J. (1978). *Fazer e compreender*. São Paulo: Melhoramentos, Edusp.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In: Dubinsky, E.; Harel, G. (Org.). *The concept of function: Elements of Pedagogy and Epistemology*. New York: Notes And Reports Series Of The Mathematical Association Of America. v. 25, p. 25-58.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Software de referência

GeoGebra 3.0 - Dynamic Mathematics for Schools: Markus Hohenwarter, 2001-2007 http://www.geogebra.org

UTILIZAÇÃO DE PROGRAMA DE GEOMETRIA DINÂMICA PARA MELHORAR A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA EM NÍVEL FUNDAMENTAL

Yuriko Yamamoto Baldin –Departamento de Matemática,UFSCar, yuriko@dm.ufscar.br

Thiago Francisco Felix –EE São Paulo da Cruz, Osasco,SP, mukanga@gmail.com

Resumo: O uso de programas de geometria dinâmica permitiu inovações na metodologia de ensino de geometria em nível de ensino básico, particularmente nos últimos anos. O uso de programas de geometria 2-dimensionais como auxiliar didático nas salas de aula vem sendo popularizado por professores que possuem acesso a laboratórios de informática, de diversas maneiras que vão desde auxiliar na exposição tradicional a aulas interativas, em que os alunos estendem as possibilidades de aprendizagem com metodologias investigativas. Este artigo tem como objetivo principal apresentar algumas considerações sobre as situações que o professor enfrenta na transição para os programas dinâmicos 3-dimensionais, comparadas com os encaminhamentos possíveis dos programas 2-dimensionais. As atividades ilustrativas foram realizadas com Cabri-Géomètre II e Cabri 3-D versão 1.2.1, e com alunos das 6ª e 7ª séries de uma escola pública.

INTRODUÇÃO

As tecnologias, como auxiliar didático no ensino de Matemática, são cada vez mais adotadas por professores que têm acesso a laboratórios de informática em suas escolas, principalmente como meio de comunicação, e que também utilizam recursos computacionais para ilustrar, com vantagens, exemplos e problemas em suas exposições. Um tema importante de pesquisa sobre o uso de tecnologias no ensino de Matemática vai além de melhorar as atividades ou as apresentações com simulações/ animações, mas investiga o papel da tecnologia na aprendizagem do aluno, quando este é colocado na situação em que a presença de tecnologia faz diferença nos níveis de aquisição de conhecimento específico e desenvolvimento de competências. As pesquisas indicam que um simples contato com a tecnologia não garante uma aprendizagem satisfatória dos alunos, destacando a importância do planejamento cuidadoso das atividades e de professores bem preparados para atuar como mediadores na aprendizagem dos alunos e que sejam cientes da natureza das atividades baseadas em tecnologia (Laborde, 2003), (Lagrange, 2001). Em (Laborde, 2003, p.26) podemos ler que “executar tarefas matemáticas em ambiente informático requer dois tipos de conhecimento, o matemático e o instrumental”. Isto quer dizer que, na presença da tecnologia em situações de ensino/aprendizagem, devem-se considerar dois aspectos importantes: i) a própria configuração das atividades, que depende essencialmente da compreensão do professor sobre as características instrumentais da tecnologia escolhida, de modo que esta seja adequada para os objetivos matemáticos das atividades; ii) o papel do professor como mediador entre o conteúdo específico e o ambiente de aprendizagem, que inclui o contexto e o conhecimento do professor sobre o nível de aprendizagem de seus alunos.

O domínio do professor sobre o conteúdo específico subjacente às atividades é especialmente importante, para que ele possa configurá-las de acordo com os objetivos educacionais e com as especificidades da tecnologia utilizada. Isto quer dizer que existe uma integração do conhecimento matemático próprio da dimensão instrumental da tecnologia escolhida com o conhecimento específico da atividade objeto da aprendizagem. Por outro lado, apenas o conhecimento do conteúdo específico não é suficiente para entender a escolha correta de metodologia de ensino, quer esta inclua, ou não, o uso de tecnologia. Neste sentido, o conceito de “conhecimento pedagógico do conteúdo”, introduzido em (Schulman, 1986), vem sendo considerado como uma componente importante da formação de professores. Em (Veal-MaKinster) lê-se que “o conhecimento pedagógico do conteúdo é formado pela síntese de três bases do conhecimento: o conhecimento específico da disciplina, o conhecimento pedagógico e o conhecimento do contexto”. De acordo com (Schulman, 1986, p.9), o conhecimento pedagógico do conteúdo inclui “uma compreensão de como tópicos particulares, problemas ou ítens são organizados, apresentados e adaptados a interesses diversos e habilidades dos aprendizes, e apresentados para o ensino”. Portanto, o equilíbrio entre o conteúdo e a pedagogia precisa estar presente no planejamento das atividades e no contexto da apresentação das atividades instrucionais.

A necessidade de aprofundar conhecimentos de Matemática que vão além do conteúdo específico das atividades de sala de aula, assim como de adaptar suas próprias atitudes frente a determinados ambientes de ensino, foi percebida pelo segundo autor, que desenvolve uma pesquisa sobre os diferentes papéis dos programas de geometria dinâmica na aprendizagem da Matemática, sob orientação da primeira autora. A pesquisa está fundamentada nas considerações acima referidas.

O objetivo deste trabalho é apresentar os primeiros resultados da pesquisa dos autores baseados nos estudos do segundo autor. Os estudos iniciais foram conduzidos no sentido de melhorar a compreensão do conceito de “conhecimento pedagógico do conteúdo”, baseado na exploração do programa Cabri 3D versão 1.2.1., e comparando as diferentes estratégias de ensino quando se utilizam recursos computacionais na geometria plana e espacial.

1-DIFERENÇAS NAS ESTRATÉGIAS DE USO DE CABRI-GÉOMÈTRE II E CABRI 3D.

Os programas de geometria dinâmica 2-dimensionais são programas que realizam construções geométricas e permitem desenvolver conceitos de geometria, principalmente plana. Estes programas, que iremos denotar como SGD (Sistemas de Geometria Dinâmica), são objetos de pesquisa e de análise como instrumentos didáticos que favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico/organizado pelos alunos, assim como da habilidade de descobrir propriedades geométricas, por abstrações a partir de visualizações e interações manipulativas com objetos geométricos. Neste trabalho usamos o programa Cabri-Géomètre II.

Uma das características dos SGD é o recurso de “arrasto” que pode modificar a atitude dos professores e alunos no ensino/aprendizagem de geometria, dentro do currículo escolar. Ele introduz elementos de teste e validação nas construções geométricas, de descoberta e exploração de propriedades, de conjecturar e explorar novos conceitos, entre outros, permitindo uma aprendizagem da Matemática por meio de experiências. O recurso de “arrasto” é um elemento chave no planejamento de atividades de geometria desde as mais elementares, quando se introduzem objetos básicos como pontos, retas, ângulos, círculos, triângulos, retângulos, etc. Deste modo, o professor e o aluno podem experimentar juntos a dimensão instrumental de um SGD 2-dimensional, enquanto desenvolvem os primeiros conceitos da geometria plana, e aprendem a abstrair os modelos da vida real por meio de figuras geométricas.

Entre várias características do Cabri-Géomètre II está a possibilidade de seguir a lógica dos passos de uma construção geométrica por meio de um diálogo entre os comandos e os resultados desenhados. Como um exemplo de construção elementar com os comandos em diálogo, podemos citar a reta perpendicular a um lado de um triângulo por um ponto dado, quando os passos da construção são acompanhados da frase “Perpendicular a este lado do triângulo” seguida de “por este ponto” ao utilizar os comandos do programa. A sintaxe do programa é próxima dos textos de geometria elementar, logo se obtém uma conexão direta entre a execução das construções com os comandos e os textos que descrevem as propriedades geométricas das figuras construídas.

O uso de SGD 2-dimensional proporciona ao professor um ambiente de pesquisa para que possa compreender a seqüência de introdução de conceitos e resultados que devem ser trabalhados a partir da 5ª série do Ensino Fundamental. A utilização de programas pode ser feita como apoio na aula expositiva, mas seu maior efeito se produz quando o aluno é o protagonista ativo da sua aprendizagem, em que o aluno constrói pessoalmente os objetos de sua investigação e faz suas descobertas. A adequação das abordagens de conceitos num ambiente informatizado pode indicar a aquisição do “conhecimento pedagógico do conteúdo” do professor.

1-1 O que ocorre com SGD 3-dimensional?

Nesta seção, o SGD a que se refere é o Cabri 3D 1.2.1. Não iremos analisar os problemas de geometria analítica 3-dimensional ou de descritiva que são facilitados por SGD que apresentam configuração padrão adaptada para sistema referencial ortogonal com planos coordenados, como é o caso do programa Calques 3D. No Cabri 3D a configuração padrão é um plano horizontal de referência na tela, sem eixos.

O domínio de SGD 2-dimensional como ferramenta didática faz o professor ter a expectativa de estender abordagens similares ao ambiente de geometria espacial. Por exemplo, a similaridade procurada pode ser o uso do diálogo entre os comandos e os passos de uma construção geométrica, ou ainda a descoberta de propriedades de figuras por meio do recurso de “arrasto”.

A primeira dificuldade surge na interpretação do papel didático do SGD 3-dimensional comparado com algum SGD 2-dimensional, habituado a usar. No ambiente de geometria plana, a conexão entre os objetos geométricos construídos com material concreto (papel, palitos/ peças de madeira, geoplano, etc.) e suas representações como figuras geométricas na tela de um computador é direta, pois “o que se observa no objeto que toca com as mãos é o que se vê na tela”. Porém, isto não ocorre com os objetos espaciais, tri-dimensionais. Os objetos concretos feitos com papéis, cartolinas, arames, canudos, acrílicos, etc., são utilizados em abundância como material didático. Mas, o uso de SGD 3-dimensional supõe a habilidade de visualização de imagens 2-dimensionais projetadas na tela dos mesmos objetos. Portanto, a abordagem de ensino de geometria espacial com uso de SGD exige do professor e do aluno uma abstração mental adicional para recompor os objetos reais a partir das imagens produzidas na tela plana, por diferentes projeções. Trata-se de interpretação das imagens 2-dimensionais num contexto 3-dimensional, que difere das atividades de planificação ou de visualização de modelos reais, muito comuns nas salas de aula. O planejamento de atividades de ensino de geometria espacial que se aproveite das vantagens de um SGD exige do professor o conhecimento específico da teoria das projeções (que não faz parte do conteúdo trabalhado no Ensino Fundamental) e da metodologia adequada. A característica instrumental de SGD é um obstáculo real para que as abordagens diretas do ensino de geometria plana sejam estendidas para o ensino de geometria espacial.

2- RELATO DE EXPERIÊNCIA: ATIVIDADES DE GEOMETRIA

Nesta seção descrevemos as experiências didáticas do segundo autor junto a alunos das 6ª e 7ª séries do Ensino Fundamental da EE São Paulo da Cruz, na cidade de Osasco, SP, a partir do 2º bimestre do ano letivo de 2007, sobre o conteúdo de geometria previsto no planejamento curricular. O professor pôde observar o potencial didático do uso de tecnologias e a necessidade de elaborar estratégias distintas de abordagens do ensino de geometria, adaptando-as ao contexto das turmas e da escola.

2.1 - Perfis das turmas trabalhadas

Turma 1: 6ª série F, 40 alunos, faixa etária entre 13 e 14 anos. Turma muito indisciplinada e dispersa. Presença de alunos muito deficientes em matemática, mas de outros muito bons na aprendizagem da matemática, participativos e interessados quando cobrados.

Turma 2: 7ª série D, 41 alunos, faixa etária entre 14 e 16 anos. Turma boa para se trabalhar, com presença de ótimos alunos e daqueles cujo potencial ainda não foi explorado, e que podem render na aprendizagem da matemática. Muitos alunos apresentam deficiência em matemática e alguns desinteressados no estudo

Turma 3: 7ª série E, 39 alunos, faixa etária entre 14 e 16 anos. Turma complicada, com muitos alunos indisciplinados e agitados. Há alunos com rejeição à matemática, e muitos nunca tiveram contato com a geometria. Entretanto, nessa turma estão os melhores alunos em matemática dentre as três turmas. Há alunos com talento para matemática, mas que sofreram grande defasagem em anos anteriores.

2.2 - Atividades de Geometria plana

Nas Turmas 2 e 3 foram trabalhados conceitos de geometria plana com a metodologia régua-compasso. Os alunos não tinham familiaridade alguma com a geometria, apesar de já estarem cursando a 7ª série. As aulas tiveram três momentos distintos:

- A preparação para a introdução da metodologia da régua e do compasso: primeiros contatos com tratamento teórico da geometria euclidiana plana e uso de instrumentos de desenho.
- A metodologia da régua e do compasso: exploração de construções básicas voltadas para as figuras geométricas utilizadas em estudo de teoremas da geometria plana; preparação para uso do SGD Cabri Géomètre baseado em conceitos e procedimentos da geometria..
- O uso de computadores e do programa pelos alunos: aplicação das atividades desenvolvidas em aula convencional, com comparação entre as aulas convencionais e as aulas em laboratório, e buscando algumas possibilidades possíveis somente em computadores.

Cabe ressaltar que na 1ª etapa, houve constatação da importância de oferecer a manipulação de instrumentos de desenho para a compreensão de conceitos geométricos elementares e de construções básicas. Na oportunidade, foi constatado que muitos alunos não sabiam interpretar os marcos nas réguas para a leitura das medidas de segmentos, outros não sabiam fixar a posição da régua para desenhar segmentos. A prática e as indagações surgidas nas atividades mostraram que o contato com os instrumentos deve preceder as construções no ambiente informatizado. A introdução à geometria plana seguiu a metodologia de construções geométricas como base para verificar e entender fatos e resultados de Axiomas e Teoremas, estes últimos demonstrados quando oportunos, fazendo com que os alunos se acostumem com a idéia de que a matemática não é imposta, mas obtida. Teoremas como dos ângulos alternos internos, dos ângulos opostos pelo vértice e de Tales foram desenvolvidos.

As construções básicas tais como transporte de ângulos, da reta mediatriz e de retas paralelas permitiram uma retomada de alguns fatos que os alunos tiveram contato em algum momento anterior. O uso de instrumentos melhora a participação e o interesse. A idéia de construção era uma novidade para os alunos, que freqüentemente apenas reproduziam o que os livros e os professores pediam. Segundo depoimento de um dos alunos, "legal, é a primeira vez que eu faço matemática botando a mão na massa, não tenho que ficar só fazendo conta".

A metodologia de aula participativa e investigativa que foi adotada nas aulas subseqüentes permitiu que os próprios alunos experimentassem e deduzissem "a desigualdade triangular entre os lados de um triângulo". A atividade proposta inicialmente foi "construir um triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 10 cm" usando régua-compasso. A impossibilidade de solução neste caso foi percebida, debatida, e explorada por alunos, que testaram variações antes de formularem, eles mesmos, a propriedade da desigualdade triangular. O professor sentiu-se gratificado no final quando exercícios de aplicação, propostos como tarefa, foram resolvidos por grande maioria dos alunos.

A etapa de utilização do ambiente informatizado nas aulas de geometria foi um desafio para o professor que teve sua aprendizagem em interpretar o contexto da classe e organizar estratégias de trabalho em grupo de alunos que não se sentavam nos computadores, na mesma sala do laboratório que tem apenas 10 computadores compartilhados por 2 alunos cada vez. Tarefas de construções com régua-compasso foram apresentadas a estes grupos que se entusiasmaram com a possibilidade de poder executá-las com computador na sua vez de utilizar. A comparação entre resultados já conseguidos no caderno e as construções no computador trouxe novos significados para os alunos sobre a metodologia da régua e compasso. Algumas opiniões dos alunos a respeito: "ficou mais fácil de ter uma noção sobre geometria, é muito mais fácil de entender como se faz!"; "eu odiava matemática porque não entendia nada, mas usando computador consigo entender mais as coisas";

“na verdade eu nunca gostei de geometria... mas com essa maneira de ensino, no geral, dá pra aprender...”

A descrição da experiência acima indica a organização e a execução de um planejamento didático que evidenciam um processo de ensino/aprendizagem, em que os objetivos de aquisição de conhecimento específico (no caso, tópicos de geometria plana) foram acompanhados de uma metodologia escolhida e adaptada ao contexto dos alunos, usufruindo das vantagens do ambiente informatizado no momento adequado. As médias de aproveitamento da Turma 2 e da Turma 3 cresceram, respectivamente, de 4 e 5.3 no início do ano para 6.6 e 6.7 no final.

2.3 – Atividades de Geometria espacial

As aulas de geometria espacial foram realizadas na Turma 1, 6ª série. Foi constatada uma grave defasagem de conhecimentos de matemática dos alunos, e por isso foi proposto aos alunos um trabalho de pesquisa sobre a geometria espacial, enquanto o professor trabalhava outros conteúdos do planejamento curricular. A partir do final do 3º Bimestre trabalhou-se geometria com essa turma, cumprindo a grade curricular prevista. As aulas seguiram as etapas:

- Aulas convencionais com apresentação e desenvolvimento de conceitos da geometria espacial.
- Trabalho com modelos concretos de objetos geométricos, para que os alunos possam interpretar as representações no papel ou lousa.
- Uso estratégico da informática para auxiliar os alunos a fixarem os conteúdos aprendidos em aulas convencionais.

O tema da aula convencional foi “poliedros convexos e não convexos”, sobre o qual os alunos já haviam feito uma pesquisa anterior. O professor utilizou uma régua para desenhar na lousa figuras de alguns poliedros começando com um cubo. As dificuldades dos alunos em interpretar as figuras na lousa como vistas de objetos espaciais deram medida da necessidade de introduzir outras metodologias além da aula convencional. Era preciso preparar os alunos para as interpretações necessárias quando as atividades com modelos construídos em ambiente real fossem realizados com recursos dinâmicos do Cabri 3D. A dificuldade instrumental já citada na seção 1.1 fez com que os recursos de construção de poliedros (convexos) e suas planificações fossem destacados para auxiliar na confecção de diversos modelos em cartolina, assim como com canudos e arames. A montagem de poliedros não convexos foi possibilitada com modelos unidos convenientemente por algumas faces. A comparação entre o modelo concreto construído e sua imagem na tela do computador surtiu efeito no desenvolvimento da capacidade de interpretar as representações planas de objetos tridimensionais. Observemos que a tecnologia foi um instrumento na mão do professor e não utilizada diretamente por alunos, mas sua utilização no momento adequado, que facilitou a confecção de sólidos e suas visualizações, permitiu superar as dificuldades de abstração sentidas na aula convencional com recursos limitados. A manipulação de modelos concretos produziu resultados na construção do conceito de não-convexidade dos poliedros. O Cabri 3D foi utilizado nas aulas subseqüentes como apoio para planificar sólidos obtidos por cortes planos de poliedros, estudados pelos alunos. Também produziu impacto no interesse dos alunos pelas aulas expositivas em que o professor utilizou o programa com uma TV interligado a um computador por cabo S-video, para introduzir estudos de principais poliedros e de corpos redondos. Maior impacto foi junto a alunos com problemas de disciplina e de atenção. O aproveitamento médio da Turma 1 cresceu de 5.1 no 1º bimestre para 6.8 no final do ano.

Conclusão

A capacidade do professor em decidir o momento e a abordagem adequados na utilização da tecnologia como auxiliar no processo de ensino/aprendizagem está ligado ao seu conhecimento pedagógico do conteúdo da disciplina, que deve ser refletido, analisado e aperfeiçoado continuamente. Basear a pesquisa deste presente trabalho neste conceito permitiu ampliar a visão dos autores sobre os aspectos cruciais da formação continuada de professores, e fez crescer a esperança de resgatar o nível de aprendizagem de estudantes que têm potencial para crescer. Próximos passos da pesquisa prevêem um tratamento mais acurado da avaliação da metodologia adotada.

Referências

Laborde, C. (2003). Technology used as a Tool for Mediating Knowledge in the Teaching of Mathematics: the Case of Cabri-geometry. *Proceedings of the 8th ATCM*, Chung Hua University, Hsinchu, Taiwan, R.O.C.

Lagrange, J. -B. et al. (2001). Meta study on IC technologies in education. Towards multidimensional framework to tackle their integration into the teaching of mathematics. *Proceedings of the 25th conference of international roup for psychology of mathematics education,* Vol.1 pp.111-122, Freudenthal Institute, Utrecht University, Utrecht, Pays Bas.

Schulman, L.S. (1986). Those Who Understand Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

Veal, W.R. and MaKinster, J.G. Pedagogical Content Knowledge Taxonomies, no site //wolfweb.unr.edu/homepage/crowther/ejse/vealmak.html, consultado em Novembro, 2007.

UM ESTUDO DA APLICAÇÃO DA PLANILHA DO EXCEL NO ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Msc. Eugênio Carlos Stieler (UNEMAT – Universidade do Estado de Mato Grosso-MT)

Dr. Marcio Violante Ferreira (UNIFRA – Centro Universitário Franciscano-RS)

Apresentamos neste trabalho resultados de uma pesquisa, na qual foi aplicada a metodologia da engenharia didática, sobre a abordagem dos conceitos de capitalização simples e composta e desconto simples com o uso da planilha eletrônica do Excel. A realidade atual se apresenta como um momento singular para a utilização de novas tecnologias no ensino. As investigações sobre vantagens do uso das tecnologias no ensino e possíveis desvantagens são importantes para subsidiarem os professores no processo de preparação de novas formas de abordagem dos conteúdos. A pesquisa foi realizada em uma turma do oitavo semestre do Curso de Matemática da UNIFRA, no semestre 2006/2. Os conceitos da Matemática Financeira foram introduzidos através de situações-problema, com auxílio da planilha eletrônica do Excel. As análises a posteriori apontam para uma adequada utilização de novas tecnologias no ensino de matemática financeira.

INTRODUÇÃO

Segundo Kenski (1997), a educação atualmente passa por um processo de renovação de espaços e de valores, tendo como ponto de partida todas as mudanças ocorridas na sociedade. A escola, como instituição integrante e atuante dessa sociedade e desencadeadora do saber sistematizado, não pode ficar a margem deste dinamismo. Salienta ainda, que o padrão educativo vigente apresenta divisões, seriações, conteúdos preestabelecidos, carga horária, calendários etc., e permanece quase sempre inalterável. O tempo destinado à criação, a interpretação, a reflexão e a descoberta de novas tecnologias além de escasso, nem sempre é aproveitado de maneira racional; contudo, fora da escola, alunos e professores estão constantemente em contato com tecnologias cada vez mais avançadas.

Questões como essas nos levam a perceber a possibilidade de uma nova postura no processo de ensinar e aprender, tomando como premissa o fato de que informática e educação não podem mais ser dissociadas. A proposta desse trabalho é, portanto, apresentar resultados de uma pesquisa sobre o uso da planilha do Excel no ensino de matemática financeira, mais especificamente os conceitos de capitalização simples e composta e desconto simples.

Teceremos algumas considerações sobre o impacto das novas tecnologias na educação, com a principal preocupação de colocar o computador como elemento integrador do processo de ensino-aprendizagem e não como uma simples ferramenta que facilita ou automatiza cálculos. A seguir, traçaremos um perfil da Engenharia Didática, ferramenta metodológica que norteou esta pesquisa. Por último, apresentaremos alguns resultados obtidos na investigação, com ênfase naqueles observados durante a ação em sala de aula.

USO DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO

É imprescindível que o professor perceba e saiba a importância dos recursos computacionais para o bom desempenho e eficácia do trabalho escolar. A tecnologia, além de renovar o processo de ensino-aprendizagem, pode propiciar o desenvolvimento integral do aluno, valorizando o seu lado social, emocional, crítico e ainda deixar margens para a exploração de novas possibilidades de criação.

Portanto, os recursos tecnológicos servem para explorar novas possibilidades pedagógicas e contribuir para uma melhoria do trabalho docente em sala de aula, valorizando o aluno como sujeito do processo educativo.

Masetto (2004, p.133) argumenta: “Em educação escolar, por muito tempo – e eu diria mesmo, até hoje -, não se valorizou adequadamente o uso de tecnologia visando a tornar o processo de ensino-aprendizagem mais eficiente e mais eficaz.” Enfatiza também:

> Nos próprios cursos do ensino superior, o uso de tecnologia adequada ao processo de aprendizagem e variada para motivar o aluno não é tão comum, o que faz com que os novos professores do ensino fundamental e médio, ao ministrarem suas aulas, praticamente copiem o modo de fazê-lo e o próprio comportamento de algum de seus professores de faculdade, dando aula expositiva e, às vezes, sugerindo algum trabalho em grupo com pouca ou nenhuma orientação (2004, p. 135).

Na educação, os computadores podem ser considerados como ferramentas de apoio ao processo ensino-aprendizagem ou usados para a alfabetização em Informática. De acordo com Monteiro, (1995, sp),

> [...] é preciso ir muito além do que se faz hoje, utilizando-se o computador como estratégia de apoio aos conteúdos curriculares e como instrumento de estimulação à colaboração e a motivação do aprendiz. É preciso que trabalhemos muito para formar pessoas mais sensíveis e capazes de estabelecer novas éticas, à altura dos desafios que nos coloca a nova comunicação.

O computador pode ser utilizado como um catalisador de mudança do paradigma educacional. Nota-se sua utilização de diferentes formas como, por exemplo, somente para informatizar os métodos tradicionais, uma atitude pobre comparada à potencialidade que a informática pode propiciar no ato de aprender.

Segundo Borges Neto (1998), o papel do computador no ensino de Matemática é apresentar nova lógica de ver problemas antigos, por meio da manipulação e simulação que a máquina produz, mas o seu papel não termina aí.

O desafio que os educadores enfrentam está relacionado à aplicação prática do computador, como elemento integrador do processo de ensino-aprendizagem e não como uma simples ferramenta que facilita ou automatiza cálculos (Lévy, 1993).

Mercado (1998, sp), ao argumentar sobre a forma de produzir conhecimento utilizando-se das novas tecnologias em sala de aula, aponta que:

> O objetivo de introduzir novas tecnologias na escola é para fazer coisas novas e pedagogicamente importantes que não se pode realizar de outras maneiras. O aprendiz, utilizando metodologias adequadas, poderá utilizar estas tecnologias na integração de matérias estanques. A escola passa a ser um lugar mais interessante que prepararia o aluno para o seu futuro. A aprendizagem centra-se nas diferenças individuais e na capacitação do aluno para torná-lo um usuário independente da informação, capaz de usar vários tipos de fontes de informação e meios de comunicação eletrônica.

Outro ponto a ser analisado é que o computador manifesta os “erros” de forma menos traumática que as tradicionais (normalmente corrigidos, grifados e reescritos em vermelho). No computador o erro é um desafio, que automaticamente leva o sujeito a buscar novas descobertas.

Apesar do potencial das planilhas eletrônicas no ensino da Matemática Financeira, sua utilização ainda é restrita, tendo em vista que a maioria dos livros sequer menciona a possibilidade de sua utilização.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia Didática é composta por quatro fases que permitem a concepção de uma seqüência de ensino: a análise prévia, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*. Detalhando, pode-se dizer que:

As análises prévias para a concepção da Engenharia Didática são feitas por meio de considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre o assunto em questão, bem como sobre:

- ✓ a análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino;
- ✓ a análise do ensino atual e de efeitos;
- ✓ a análise da concepção dos alunos e das dificuldades e obstáculos oriundos do processo ensino-aprendizagem dos conteúdos em questão;

Análise a *priori*: consiste na preparação de seqüências didáticas e do esquema experimental para a ação em sala de aula, onde serão delimitadas variáveis de controle que possibilitem conhecer o que pretendemos experimentar. Na execução desta pesquisa, trata-se do processo de construção e elaboração de material e atividades; bem como predizer procedimentos possíveis durante cada situação.

A fase da experimentação é a fase da realização da Engenharia Didática com os alunos. Ela acontece no momento em que se dá o contato professor/pesquisador com os alunos, sujeitos da investigação. A experimentação supõe:

- ✓ a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa aos alunos que participarão da experimentação;
- ✓ o contrato didático;
- ✓ a aplicação dos instrumentos de pesquisa;
- ✓ o registro das observações feitas durante a experimentação.

Análise a *posteriori*: É a compreensão e a interpretação dos resultados da experimentação e seu objetivo é oferecer um *feedback* para o desenvolvimento de uma nova análise *a priori* para uma nova experimentação, concebendo o desenvolvimento das atividades como uma atualização dos processos em questão.

ALGUNS RESULTADOS DA AÇÃO EM SALA DE AULA

Como o objetivo é verificar o uso da planilha eletrônica do *Excel* na resolução de atividades envolvendo a matemática financeira, as aulas foram realizadas no laboratório de informática. Inicialmente, como os alunos não possuíam domínio sobre as ferramentas da planilha do *Excel*, foram trabalhadas algumas funções do menu do *Excel* e alguns tipos de formatação.

O conceito de juro simples foi abordado com a construção de uma tabela (Figura 1a), sendo facilmente compreendido. Com o auxílio da mesma tabela, vários conceitos a respeito de capitalização simples foram estabelecidos e as respectivas fórmulas deduzidas.

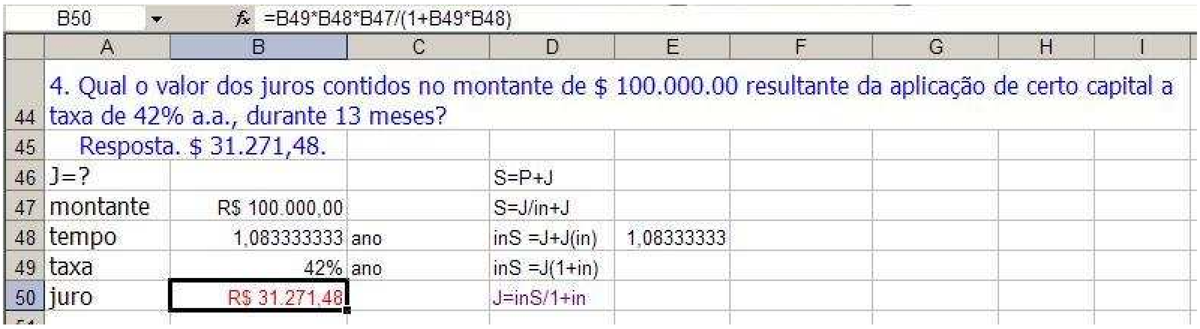
G27 fx =D$28*D$27

	A	B	C	D	E	F	G	H
25						períodos	juro do período	Capital final
26						0	R$ 0,00	R$ 1.000,00
27			Taxa	10%		1	R$ 100,00	R$ 1.100,00
28			Capital Inicial	R$ 1.000,00		2	R$ 100,00	R$ 1.200,00
29						3	R$ 100,00	R$ 1.300,00
30						4	R$ 100,00	R$ 1.400,00
31						5	R$ 100,00	R$ 1.500,00

Figura 1a

As análises foram feitas levando-se em consideração as observações do professor durante a aula, registradas no diário de campo, e as atividades desenvolvidas pelos alunos. As mesmas eram salvas em um disquete e entregues ao professor no final de cada aula.

Nas primeiras atividades sobre juros simples, os alunos ficaram um pouco receosos, mas aos poucos foram explorando os recursos da planilha. Com algumas intervenções do professor, conseguiram construir as fórmulas e chegar à resposta correta das atividades solicitadas. Foram detectadas algumas dificuldades quando o tempo de capitalização não estava na mesma unidade da taxa fornecida. Vejamos como um aluno resolveu a atividade analisando a figura abaixo:


B50 =B49*B48*B47/(1+B49*B48)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
44	4. Qual o valor dos juros contidos no montante de $ 100.000.00 resultante da aplicação de certo capital a taxa de 42% a.a., durante 13 meses?								
45	Resposta. $ 31.271,48.								
46	J=?			S=P+J					
47	montante	R$ 100.000,00		S=J/in+J					
48	tempo	1,083333333	ano	inS =J+J(in)	1,08333333				
49	taxa	42%	ano	inS =J(1+in)					
50	juro	R$ 31.271,48		J=inS/1+in					

O aluno construiu a fórmula para calcular os juros a partir do montante, período e taxa. Como a taxa foi dada em ano e o período em meses, notamos que o aluno fez a transformação dividindo 13 por 12 na própria planilha, encontrando o resultado 1,0833333. Poderia ter feito isso em outra célula e os dados ficariam mais claros.

Outro aluno resolveu conforme a figura abaixo:


E49 =E46/(1+E47*13/12)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
44	4. Qual o valor dos juros contidos no montante de $ 100.000.00 resultante da aplicação de certo capital a taxa de 42% a.a., durante 13 meses?								
45	Resposta. $ 31.271,48.								
46				Montante	R$ 100.000,00				
47				Taxa	42%	ao ano	Principal = Montante/(1+taxa x periodo)		
48				Periodo	13	meses	Juro = Montante - Juro		
49				Principal	R$ 68.728,52				
50				Juro	R$ 31.271,48				

Nota-se que primeiramente foi calculado o valor atual (Principal), depois os juros, subtraindo o principal do montante embora tenha colocado "*Juro=Montante – Juro*" na observação ao lado do exercício, de forma errada. O cálculo foi correto quando fez a fórmula do juro. Isso demonstra que os conceitos ainda não foram devidamente assimilados, compreensíveis para o momento. Percebemos que após a construção da fórmula eles faziam simulações alterando os dados, para testar a veracidade da mesma. Isso só é possível devido a interatividade da planilha do *Excel*.

Usando a planilha, construímos uma tabela simulando uma capitalização simples e uma composta. Foi feito um paralelo entre juro simples e composto, (Figura 1). Os alunos perceberam que os juros compostos são cobrados sempre em cima do capital anteriormente capitalizado, por isso a expressão "juro sobre juro" usada popularmente para definir capitalização composta. A partir da tabela construída, os alunos puderam fazer simulações alterando a taxa. Observaram que na capitalização composta os juros crescem rapidamente, (Figura 2). Utilizando outro recurso da planilha, a construção de gráficos, obtiveram um gráfico de dispersão, (Figura 3). Por meio desta construção, com simulações de taxa, os alunos puderam perceber o comportamento linear dos juros simples e exponencial dos juros compostos.

			Período em meses	juro simples	juro composto	Montante juro simples	Montante juro composto
período	10	meses	0			R$ 100,00	R$ 100,00
Capital	R$ 100,00		1	R$ 10,00	R$ 10,00	R$ 110,00	R$ 110,00
taxa	10,00%	mês	2	R$ 10,00	R$ 11,00	R$ 120,00	R$ 121,00
			3	R$ 10,00	R$ 12,10	R$ 130,00	R$ 133,10
			4	R$ 10,00	R$ 13,31	R$ 140,00	R$ 146,41
			5	R$ 10,00	R$ 14,64	R$ 150,00	R$ 161,05
			6	R$ 10,00	R$ 16,11	R$ 160,00	R$ 177,16
			7	R$ 10,00	R$ 17,72	R$ 170,00	R$ 194,87
			8	R$ 10,00	R$ 19,49	R$ 180,00	R$ 214,36
			9	R$ 10,00	R$ 21,44	R$ 190,00	R$ 235,79
			10	R$ 10,00	R$ 23,58	**R$ 200,00**	**R$ 259,37**

Figura 1

			Período em meses	juro simples	juro composto	Montante juro simples	Montante juro composto
período	10	meses	0			R$ 100,00	R$ 100,00
Capital	R$ 100,00		1	R$ 40,00	R$ 40,00	R$ 140,00	R$ 140,00
taxa	40,00%	mês	2	R$ 40,00	R$ 56,00	R$ 180,00	R$ 196,00
			3	R$ 40,00	R$ 78,40	R$ 220,00	R$ 274,40
			4	R$ 40,00	R$ 109,76	R$ 260,00	R$ 384,16
			5	R$ 40,00	R$ 153,66	R$ 300,00	R$ 537,82
			6	R$ 40,00	R$ 215,13	R$ 340,00	R$ 752,95
			7	R$ 40,00	R$ 301,18	R$ 380,00	R$ 1.054,14
			8	R$ 40,00	R$ 421,65	R$ 420,00	R$ 1.475,79
			9	R$ 40,00	R$ 590,32	R$ 460,00	R$ 2.066,10
			10	R$ 40,00	R$ 826,44	**R$ 500,00**	**R$ 2.892,55**

Figura 2

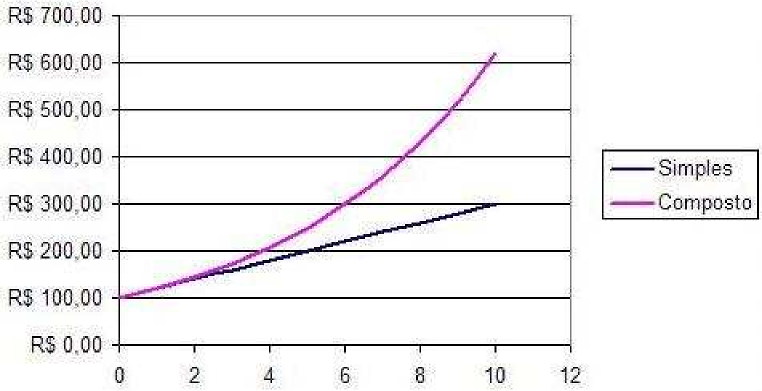


Figura 3

Com o uso da planilha, conceitualizamos o que é uma operação de desconto através de uma tabela, (Figura 4). Informamos que esse tipo de operação é amplamente praticado no mercado brasileiro, na troca de título (duplicatas) pelas instituições bancárias, daí o nome desconto comercial ou bancário. Foi feito um paralelo entre juro simples e desconto, e os alunos perceberam que no desconto a taxa incide sobre o capital final, enquanto que no juro simples a taxa incide sobre o capital inicial. Com facilidade chegamos à equação de desconto $D = Sdn$, onde *"D"* é o valor do desconto, *"S"* é o valor de face do título no seu vencimento, *"d"* é a taxa de desconto e *"n"* é o prazo a decorrer até o seu vencimento. Analisamos também que o valor atual (valor do título hoje) é calculado subtraído o valor do desconto ao valor do título.

G9 =C9*G$7*F9/30

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
5–6	0.	Uma empresa descontou em um banco, quatro duplicatas a seguir descriminadas. A taxa de desconto cobrada pelo banco é de 3,4% ao mês. Calcule o total dos descontos cobrados pelo banco e o valor liquido a ser creditado na conta do cliente.								
7						taxa	3%	mês		
8			Valor da duplicata	data de vencimento	data de pagamento	dias de antecipação	desconto	valor líquido		
9			R$ 12.987,00	3-out-06	20-ago-06	44	R$ 647,62	R$ 12.339,38		
10			R$ 3.452,00	4-out-06	20-ago-06	45	R$ 176,05	R$ 3.275,95		
11			R$ 2.345,00	7-nov-06	20-ago-06	79	R$ 209,96	R$ 2.135,04		
12			R$ 6.700,00	11-dez-06	20-ago-06	113	R$ 858,05	R$ 5.841,95		
13		Total	R$ 25.484,00				R$ 1.891,67	R$ 23.592,33		
14										

Figura 4

CONCLUSÃO

Observamos que os alunos, a princípio, ficaram apreensivos em utilizar a planilha do *Excel*, pois só conheciam o *software* superficialmente. Isso os deixou inseguros no início das atividades, mas essa preocupação foi aos poucos se desfazendo e, no final das atividades, tinham domínio das principais ferramentas da planilha. O desconhecimento do *Software* não foi um fator negativo por ser de fácil compreensão.

As atividades desenvolvidas no laboratório de informática com a planilha do *Excel* possibilitaram abordar enfoques, que em um ambiente fora da planilha não seria tão claro e de rápida resolução, como, por exemplo, a construção de tabelas e gráficos que possibilitam observação das variações sofridas por estes. Com relação à análise dos resultados da aplicação da seqüência didática, é possível inferir que nas primeiras sessões da seqüência didática os alunos, de um modo geral, sentiram-se inseguros com relação à metodologia; porém, logo compreenderam como deveriam desempenhar as atividades contando com o auxílio do professor sempre que necessitassem. A maioria dos alunos mostrou-se motivado em resolver situações-problema que envolvia o cotidiano. Essas situações propiciaram o crescimento dos alunos e a aquisição de conhecimentos sobre o conteúdo.

Essas atividades despertaram nos alunos o interesse pela matemática financeira e a assimilação do conteúdo e ainda foi possível constatar que foram atraídos pela discussão acerca da situação-problema e, quando perceberam, estavam envolvidos na resolução das atividades.

Referências

Borges Neto H. (1998) et al. *O Ensino de matemática assistido por computador nos cursos de Pedagogia*. In. Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste, 13, 1998, Natal, RN. Anais. Natal: Editora UFRN.

Kenski, V. M. (1997) *O Ensino e os recursos didáticos em uma sociedade cheia de tecnologias* in Didática: O ensino e suas relações. Ilma P. Alencastro Veiga (org.). Campinas SP. Papirus.

Lévy, P. (1993) *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro: Editora 34.

Masetto, M. T. (2004) Projetos de Aprendizagem Colaborativa num Paradigma Emergente. In Moran, J. M. Masetto, M. T.; Behrens, M. A. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*. 8ª ed. Campinas, SP: Papirus.

Mercado, L. P. L. (1998) *Formação Docente e Novas Tecnologias*. Disponível em: <http://lsm.dei.uc.pt/ribie/docfiles/txt200342414941210M.PDF>. Acesso em: 12 jan.2007 16:32:12

Monteiro, E. (1995) Escola: Exercício de comunicação, exercício de cidadania. Rio de Janeiro: *Dissertação de Mestrado*. PUC-RJ.

Stieler, E. C. (2007) Uso Da Tecnologia da Informática no Ensino Superior: um Estudo da Aplicação da Planilha Eletrônica *Excel* na Disciplina de Matemática Financeira. Santa Maria: *Dissertação de Mestrado*. UNIFRA-RS.

USANDO O SOFTWARE DYNATLAS PARA EXPLORAR A CARTOGRAFIA COMO UM TEMA INTERDISCIPLINAR NO ENSINO DA MATEMÁTICA E DA GEOGRAFIA

Humberto José Bortolossi, Rogério Vaz de Almeida Junior

Neste trabalho apresentamos DynAtlas, um software gratuito e multiplataforma orientado para o estudo da geometria do globo terrestre e das várias projeções cartográficas. Suas características dinâmicas permitem que o professor de matemática ou o professor de geografia explorem temas comuns às duas disciplinas: coordenadas geográficas (latitude e longitude), curvas especiais sobre a esfera (paralelos, meridianos, geodésicas, loxodrômicas) e deformações de área, ângulo ou comprimento em mapas cartográficos.

INTRODUÇÃO

Estudar os vários aspectos da geometria da esfera e das projeções cartográficas se põe como um item importante no aprendizado escolar. Entre as habilidades que devem ser desenvolvidas estão (1) a capacidade de entender e usar o sistema de coordenadas geográficas, (2) o entendimento das curvas especiais sobre a esfera (paralelos, meridianos e curvas loxodrômicas como lugares geométricos, arcos de grandes círculos como geodésicas) e (3) a percepção das deformações de área, ângulo ou comprimento inerentes a cada projeção cartográfica. Para estudar estes temas, vários pré-requisitos matemáticos são necessários: geometria euclidiana, geometria analítica, cálculo e geometria diferencial[1].

Neste artigo apresentamos uma contrapartida visual e computacional para este processo de ensino e aprendizagem: o software DynAtlas (Bortolossi & de Almeida Jr, 2007). Após descrever os recursos do programa, indicaremos algumas atividades que podem ser desenvolvidas nos vários níveis de escolaridade.

[1] Veja as referências (Benítez & Thome, 2002), (Feeman, 2002) e (Richardus & Adler, 1974).

RECURSOS DO PROGRAMA

DynAtlas é um applet JAVA que pode ser executado através de um navegador em qualquer sistema operacional[2]. O programa, disponível em português e em inglês, tem três áreas principais (Figura 1), que apresentaremos a seguir.

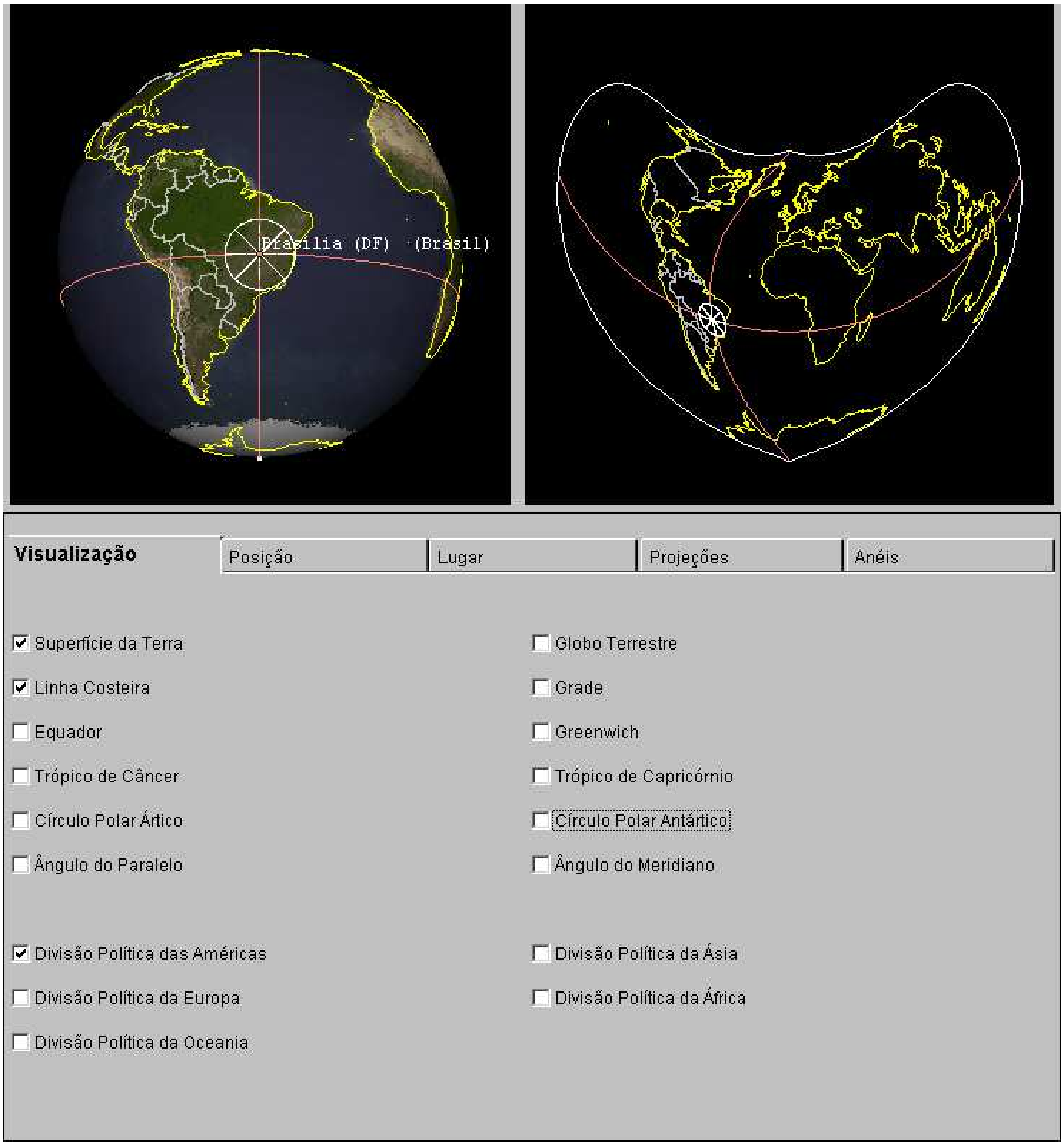


Figura 1: Interface Gráfica do Applet DynAtlas (exibindo a projeção de Bonne).

A primeira área (canto superior esquerdo da Figura 1) exibe um modelo virtual do globo terrestre, que pode ser girado, ampliado ou reduzido. Neste globo, o usuário pode visualizar

---

[2] O programa pode ser executado localmente. Contudo, os recursos de consulta à Wikipédia exigem uma conexão com a internet.

paralelos, meridianos, linhas costeiras, divisões políticas e a localização das capitais dos diversos países. O usuário também pode marcar interativamente a posição de um “anel flutuante” sobre sua superfície (as coordenadas geográficas do centro deste anel são registradas na aba “Posição” do painel de controle). Recursos avançados incluem o desenho de curvas geodésicas e curvas loxodrômicas (Figura 2).

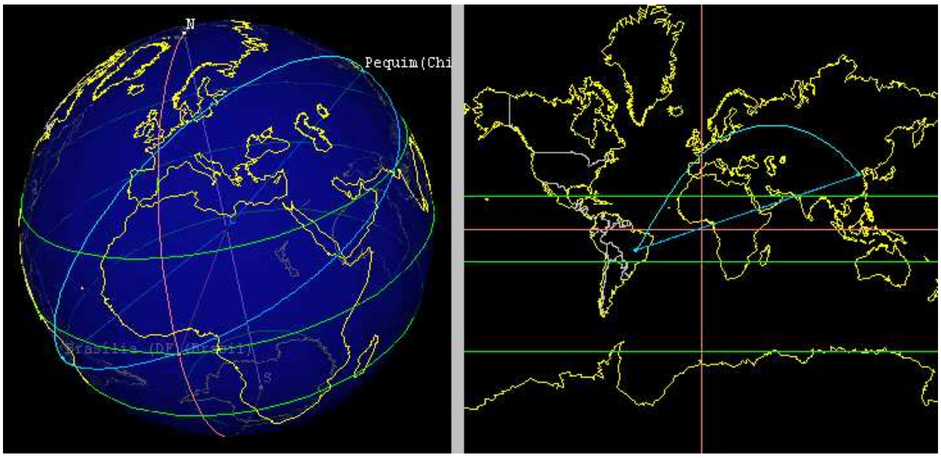


Figura 2: Geodésica e curva loxodrômica ligando Brasília e Pequim. O mapa foi construído com a projeção de Mercator.

A segunda área (canto superior direito da Figura 1) exibe um mapa construído com uma das 70 projeções cartográficas disponíveis no programa. Todos os elementos tridimensionais do globo são projetados no mapa (incluindo o “anel flutuante” cuja posição e tamanho podem ser mudados interativamente). O usuário também pode transladar, ampliar ou reduzir o mapa.

A terceira área é o painel de controle com as abas “Visualização”, “Posição”, “Lugar”, “Projeções” e “Anéis”:

- Na aba “Visualização” o usuário pode controlar quais elementos geográficos serão exibidos no globo (e no mapa). A Figura 1 exibe o conteúdo desta aba.
- Na aba “Posição”, aparecem registradas as coordenadas geográficas (latitude e longitude) do centro do “anel flutuante”. Nela, o usuário também pode calcular distâncias (medidas sobre a superfície do globo) e exibir as curvas geodésica e loxodrômica ligando duas posições (capitais).
- Na aba “Lugar”, o usuário pode escolher entre uma das 196 capitais: o applet exibirá automaticamente a bandeira da capital e indicará no globo (e no mapa) a sua localização. Existe também um botão que dá acesso a um link para a Enciclopédia Livre Wikipédia contendo todos os dados geográficos, econômicos, sociais e culturais do país em questão.

- Na aba “Projeções” o usuário pode escolher a projeção cartográfica usada para a confecção do mapa. Existe também uma opção que permite exibir a indicatriz de Tissot. Para cada projeção, o applet apresenta um pequeno resumo com suas características principais.
- Na aba “Anel”, o usuário poderá configurar o “anel flutuante”: seu tamanho e o número de raios geodésicos.

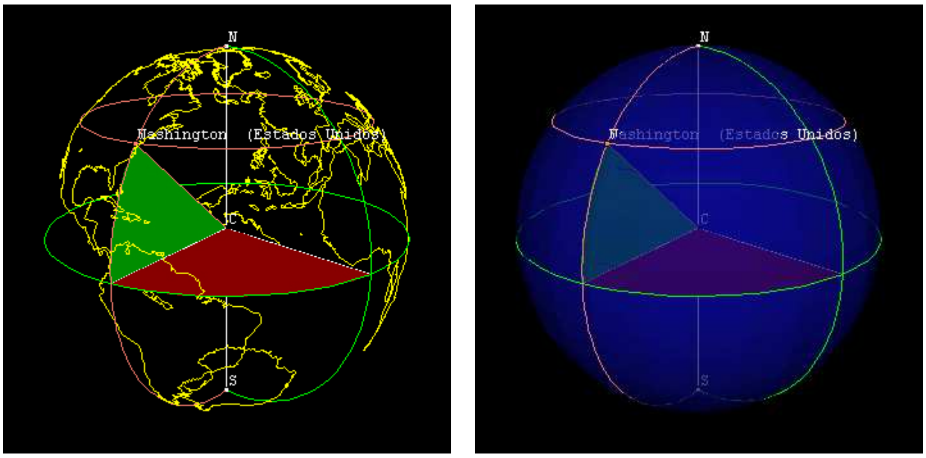
ALGUMAS SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Ensino Fundamental

Nas séries iniciais, as atividades podem ser desenvolvidas sob a orientação conjunta dos professores de matemática e geografia.

- Qual é o formato da Terra? Ao longo da história, vários modelos foram sugeridos: um plano, uma esfera, um elipsóide e, mais atualmente, o geóide. Contudo, a esfera se apresenta como um modelo simples e eficaz em muitas aplicações. O professor pode apresentar um globo terrestre (concreto) e pedir para que os alunos o manipulem, identificando países, cidades, ilhas, divisões políticas, etc. A mesma atividade pode ser realizada no laboratório de informática, agora com o software DynAtlas. Perguntas que podem ser feitas aos alunos: Quais são as vantagens e desvantagens entre o modelo concreto e o modelo virtual? Por que a linha costeira da Antártica não segue o contorno branco feito de gelo? As divisões políticas podem mudar com o tempo? Exemplos? Neste momento, é oportuno expor como Eratóstenes, usando geometria básica, calculou a circunferência da Terra (Feeman, 2002).
- Para apresentar o sistema de coordenadas geográficas, DynAtlas tem um recurso especial que permite visualizar, de forma interativa, os ângulos que definem a latitude e longitude de um ponto sobre o globo terrestre (Figura 3). Com este recurso, o aluno pode facilmente verificar que os paralelos e meridianos são, respectivamente, os lugares geométricos de latitude e longitude constantes. Perguntas que podem ser feitas aos alunos: Existe alguma localidade do Brasil que tenha longitude 90^{o} O? Qual é a latitude sobre os pontos do Equador? E do Pólo Norte? E do Pólo Sul? Qual é a longitude do Pólo Norte? O Trópico de Capricórnio cruza o Brasil? E o Trópico de Câncer? E o Círculo Polar Antártico? Você poderia citar alguns países por onde o Meridiano de Greenwich passa?
- A menor distância entre dois pontos medida sobre a superfície do globo é representada por um arco de grande círculo. Por conta desta propriedade, viagens aéreas são planejadas usando-se grandes círculos. Um grande círculo é aquele obtido pela interseção do globo com um plano passando pelo centro do globo. DynAtlas tem o recurso de desenhar o arco de grande círculo e

calcular a distância aproximada entre duas capitais (a curva em azul claro na Figura 2 é o arco de grande círculo ligando Brasília a Pequim). O aluno também perceberá que arcos de grandes círculos não são necessariamente projetados em segmentos de retas no mapa.



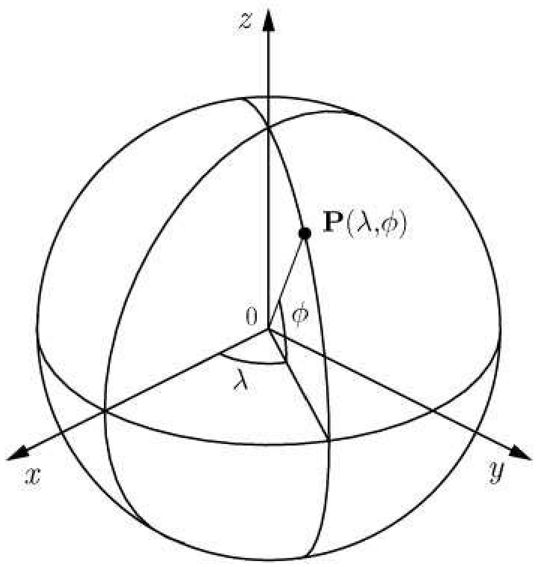
Latitude: 38° 52' N
Longitude 77° 01' O

Figura 3: Visualização dos ângulos que definem a latitude e longitude de um ponto.

Ensino Médio

A cartografia também é fonte de problemas matemáticos interessantes para o ensino médio.

- Dadas as coordenadas geográficas (latitude e longitude), como calcular as coordenadas cartesianas em R^3 deste ponto?



$$\mathbf{P}(\lambda,\phi) = \mathrm{R}\,(\cos(\lambda)\cos(\phi), \operatorname{sen}(\lambda)\cos(\phi), \operatorname{sen}(\phi))$$

Figura 4: Coordenadas cartesianas em função das coordenadas geográficas.

- Dadas as coordenadas geográficas de duas localidades sobre a esfera, como calcular a distância (medida sobre a esfera) entre estas duas localidades?
- Como calcular uma expressão algébrica para a projeção estereográfica (Figura 5) do globo terrestre?

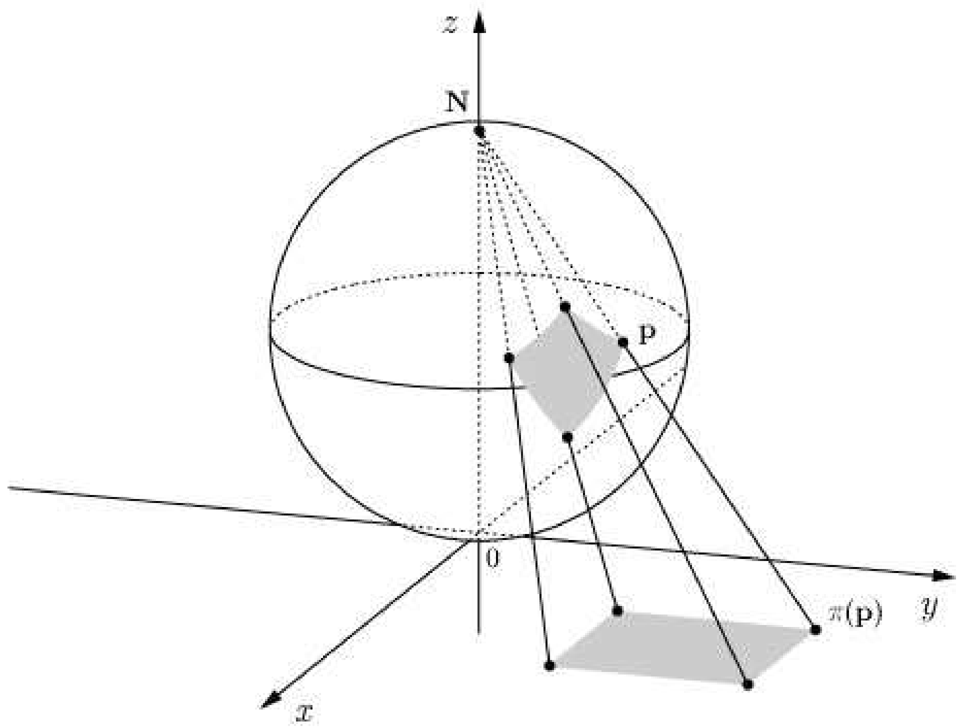


Figura 5: A projeção estereográfica.

Ensino Superior

As ferramentas do cálculo e da geometria diferencial são indispensáveis para um estudo mais detalhado da geometria do globo terrestre e das projeções cartográficas.

- Com o cálculo a uma variável, é possível demonstrar que, de fato, as geodésicas na esfera são arcos de grandes círculos (Feeman, 2002).
- Loxodrômicas são curvas que fazem um ângulo constante com os meridianos. Elas são uteis em navegações marítimas, pois correspondem a caminhos onde o compasso aponta sempre para uma mesma direção. Usando cálculo a uma variável, é possível deduzir uma fórmula para a projeção de Mercator, que é definida de forma a ter a seguinte propriedade marcante: loxodrômicas sobre o globo terrestre são sempre projetadas em segmentos de reta no mapa.
- A não existência de mapas livres de deformações é um corolário do Teorema Egrégio de Gauss (Benítez.& Thome, 2002).
- Deformações de comprimento, área e ângulo podem ser quantificadas através das formas fundamentais em geometria diferencial (Richardus & Adler, 1974).

Através da indicatriz de Tissot e da projeção de um “anel flutuante”, o software DynAtlas oferece uma contrapartida visual para o estudo das deformações inerentes a cada projeção cartográfica. A indicatriz de Tissot foi proposta pelo matemático francês Marcel Tissot em 1859. Basicamente, a técnica consiste em desenhar um certo número de círculos pequenos sobre o globo terrestre e projetá-los no mapa. Se os círculos forem “infinitesimais”, Tissot mostrou que suas projeções são elipses, cujos formatos evidenciam os efeitos da distorção (Figura 6).

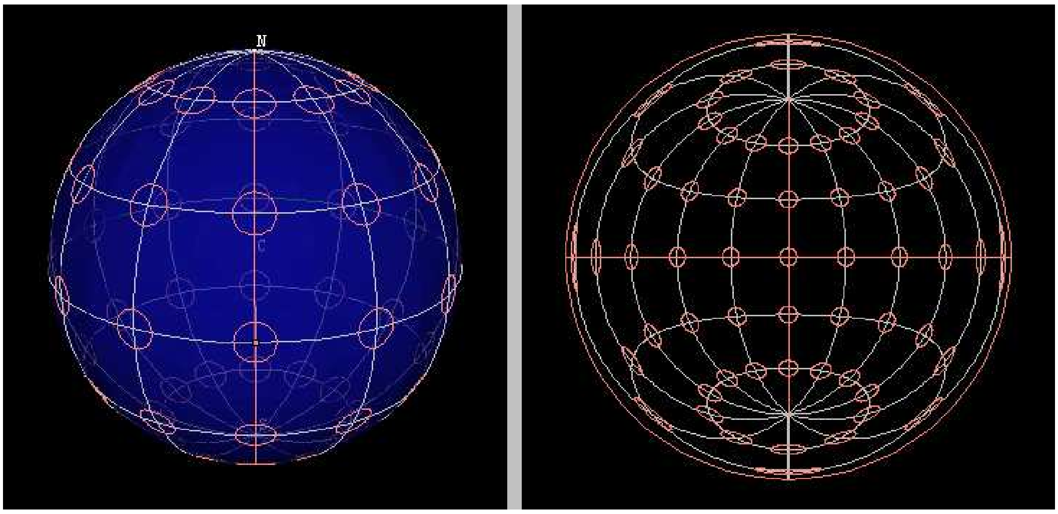


Figura 6: A indicatriz de Tissot para a projeção Azimutal Equivalente de Lambert.

A idéia de projetar um “anel flutuante”, proposta por (Brainerd & Pang, 1998), é uma extensão da indicatriz de Tissot: o usuário pode interativamente escolher a posição e o tamanho do círculo. O uso de raios geodésicos no anel favorece a análise de distorções de ângulos.

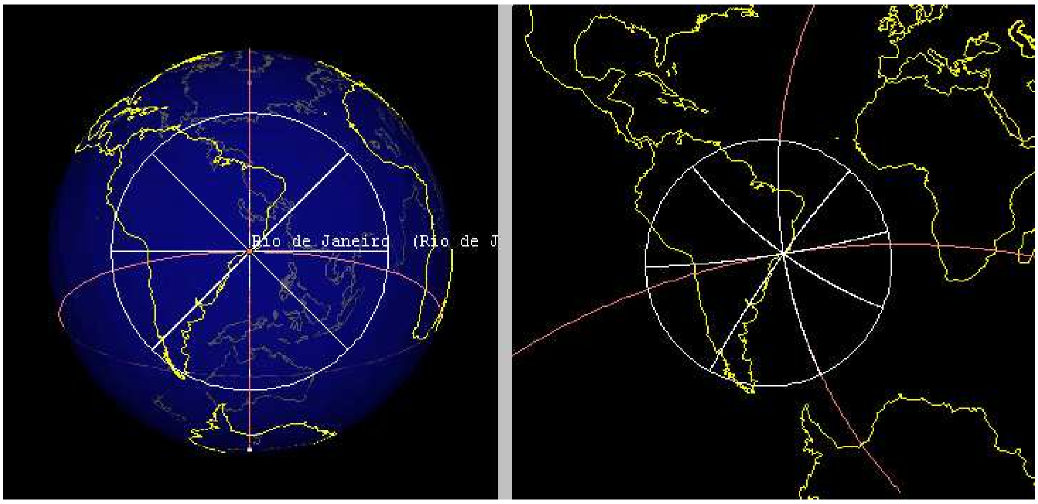


Figura 7: “Anel flutuante” com centro no Rio de Janeiro e raio geodésico de 4000 km.
O mapa foi construído com a projeção estereográfica.

Referências

Benítez, J. & Thome, N. (2002). Applications of Differential Geometry to Cartography. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 35, 29-38.

Bortolossi, H. J. & de Almeida Jr., R. V. (2007). DynAtlas: Projeções Cartográficas e A Geometria do Globo Terrestre. http://www.uff.br/mapprojections/mp_br.html.

Brainerd, J. & Pang, A. (1998). Floating Ring: A New Tool for Visualizing Distortion in Map Projections. In F.-E. Wolter & N. M. Patrikalakis (Eds.), *Proceedings Computer Graphics International '98*, IEEE Computer Society, 466-480. Hannover, Germany.

Feeman, T. G. (2002). *Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps.* Mathematical World, Volume 18, AMS.

Richardus, P. & Adler, R. K. (1974). *Map Projections for Geodesists, Cartographers and Geographers.* New York: Elsevier.

Wikipédia (2007). A Enciclopédia Livre da Internet. http://pt.wikipedia.org.

CONCEPÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE UMA APLICAÇÃO MULTIMÍDIA VISANDO À APRENDIZAGEM DE SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Maria do Carmo Barbosa Trevisan – UNIFRA - mcbtrevisan@hotmail.com
Vanilde Bisognin – UNIFRA - vanilde@unifra.com

RESUMO

Neste artigo apresentam-se os resultados do trabalho de pesquisa voltado ao desenvolvimento de uma aplicação multimídia sobre o conteúdo de Sistemas de Numeração. O objetivo da aplicação é potencializar a aprendizagem desse conteúdo e trabalhar as operações matemáticas nas diversas bases, consideradas a partir dos recursos do Sistema de Autoria TOOLBOOK, versão 7.1. Essa aplicação pode ser usada com alunos da educação básica, se a metodologia for apropriada pois, as relações entre um software educacional e a aprendizagem estão, em especial, diretamente condicionadas à metodologia de ensino utilizada pelo professor.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas de Numeração, Multimídia, Agente Pedagógico.

.

INTRODUÇÃO

As Novas Tecnologias de Comunicação e Informação aplicadas à educação, segundo Falkembach (2003), constituem-se no estado da arte da pesquisa voltada ao processo de criação de aplicações educacionais no formato digital, bem como nas estratégias pedagógicas utilizadas na elaboração dessas aplicações, na interatividade e no comportamento do aluno frente a esse novo recurso didático.

Segundo Dalabona (2005),

> *No momento em que as Tecnologias de Informação e Comunicação revolucionam o mundo e invadem as escolas, a Educação pede uma nova proposta de trabalho. As Tecnologias de Informação e Comunicação afetam a maneira de compreender o mundo, as formas de viver, de conviver e os modos de fazer e de ser.* (p 207).

A revolução tecnológica está formando a geração N (Network) de alunos que cresceram usufruindo ambientes ricos em multimídia, com expectativas e visão de mundo diferente das gerações anteriores. Com uma quantidade maior de informações, novos métodos e formas de aquisição do saber, exige-se um ensino que privilegie a aquisição de mecanismos que permitam descobrir, selecionar e utilizar os novos conhecimentos, assim como compreender e interpretar integralmente os fatos e os fenômenos. Essas mudanças caracterizam a Sociedade da Informação e do Conhecimento que exigem uma reavaliação da estrutura educacional vigente e fazem surgir um novo paradigma educacional não mais centrado no ensino, mas na aprendizagem. O modelo deve ser centrado no aluno-aprendiz, em suas necessidades, em seus objetivos e em seu ritmo de aprendizagem.

Dessa forma, a escola, como promotora de conhecimento, não pode funcionar à parte do que ocorre na sociedade, precisa em vista as inovações tecnológicas e as questões sociais vinculadas. São necessárias atitudes investigativas que ofereçam diferentes formas de ensino, com intervenções pedagógicas adequadas, criando condições para a apropriação crítica do aluno. Para esse novo paradigma, acredita-se que materiais educativos digitais podem contribuir , de forma efetiva, para o ensino e aprendizagem dos alunos.

Nesse sentido, o trabalho tem como objetiva-se apresentar uma aplicação hipermídia educacional desenvolvida para o estudo de Sistemas de Numeração e das operações matemáticas nas bases decimal, binária, octal e hexadecimal, possibilitando a visualização dos processos envolvidos. A proposta metodológica foi centralizada na metodologia para o desenvolvimento de aplicações hipermídia.

Para projetar a aplicação, considerou-se que o processo de desenvolvimento inclui tanto o funcionamento da aplicação quanto os mecanismos pedagógicos que embasam uma aplicação de ensino e aprendizagem. Para isso, foram considerados os conceitos relevantes do tema e as estratégias de ensino que facilitam o entendimento do conteúdo a ser trabalhado, tendo como referência a realidade do aluno. A implementação foi feita via Sistema de Autoria.

HIPERMÍDIA

As aplicações hipermídia educacionais constituem a mais recente tecnologia para a integração e contextualização do saber, sendo, portanto, uma ferramenta poderosa nos processos de construção da aprendizagem. Atualmente, a informação acadêmica está disponível nos meios eletrônicos, através dos ambientes de aprendizagem, facilitando ao aluno a exploração do conteúdo, de forma livre, segundo seu interesse, seu ritmo, estimulando o trabalho cooperativo, a comunicação e a aquisição do conhecimento. As aplicações hipermídia educacionais, por serem flexíveis e permitirem acesso às informações de forma não linear, dão ao aprendiz o controle sobre sua navegação.

A hipermídia é uma nova forma de gerenciar informações. Permite criar, alterar, excluir, compartilhar e consultar informações contidas em várias mídias, possibilitando o acesso às informações de forma não seqüencial, baseado no paradigma conexionista das ciências cognitivas. A hipermídia permite criar aplicações educacionais atraentes e motivadoras, agregando o fascínio da multimídia ao aprendizado. Conforme definido por Falkembach (2001), Hipermídia = Multimídia + Hipertexto. A combinação dessas mídias, transmitindo as informações de várias formas, estimula diversos sentidos ao mesmo tempo e isso auxilia no processo de ensino e aprendizagem, pois a carga informativa é significantemente maior, os apelos sensoriais são multiplicados, a atenção e o interesse do aluno são mantidos, promovendo a retenção da informação e facilitando a aprendizagem.

O hipertexto: é um recurso que vincula informações adicionais através de *links*, é uma cadeia de informações sem seqüência, ligadas de maneira criativa. Possibilita consultas indexadas de forma direta, instantânea, através de elos interativos.Para facilitar o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo, tornando mais amigável a interação aluno-aplicação foi incluído no *courseware* um agente pedagógico.

Segundo Silveira (2005), um agente pedagógico é um recurso que permite acrescentar em um sistema hipermídia mecanismos que interpretam as percepções do aluno, estabelecem inferências, resolvem problemas e determinam ações, ou seja, atuam sobre o ambiente / sistema para realizar um conjunto de tarefas para as quais foram designados / programados. Os agentes pedagógicos estão trazendo uma nova perspectiva aos ambientes de aprendizagem e às aplicações educacionais, adaptando as interações às necessidades dos alunos, ajudando-os a superarem suas dificuldades de aprendizagem. Os agentes devem exibir um comportamento coerente, respondendo às interações do aluno com a aplicação.

Segundo Reis (2000), as características inerentes às interações dos agentes pedagógicos são:

- demonstração explicativa – demonstra ao aluno como resolver problemas e executar tarefas (exemplo na aplicação: transformações de base);

- monitoramento explicativo – o aluno pode solicitar ajuda do agente ou interromper uma demonstração (exemplo na aplicação: é o agente X);
- validação – o ambiente / sistema deve permitir que o aluno questione com o objetivo de validar seu nível de compreensão com relação a uma tarefa;
- ensino oportunístico – permite ao agente aproveitar oportunidades durante a solução de um problema para apresentar novos conceitos quando necessários (exemplo na aplicação: novos conceitos);
- respostas emotivas – é uma característica do agente de representar comportamento emotivo através de expressões faciais (imagens alusivas a sentimentos), motivando e aliviando frustrações do aluno, compartilhando com seus sentimentos de vitória ou derrota.

Para projetar o comportamento de um agente, é preciso prever todos os comportamentos possíveis e suas combinações. O que caracteriza um agente são as interações que ee realiza com o ambiente / sistema e como são os processos internos que possibilitam a realização dessas interações. Interações são ações ou seqüências de ações que o agente realiza no ambiente / sistema.

O desenvolvimento de uma aplicação hipermídia sobre qualquer área, incluindo a educacional envolve as fases mostradas abaixo:

Análise e Planejamento	**Modelagem**	**Implementação**	**Avaliação e Manutenção Planejamento**	**Distribuição**

Modelo Conceitual
Modelo de Navegação
Modelo de Interface

Figura 1: Etapas do desenvolvimento de uma aplicação

1º) ANÁLISE E PLANEJAMENTO - nessa fase, foi definido o tema e feito o levantamento de aplicações similares. A partir da análise e planejamento, foi definido o objetivo da aplicação e o público alvo. Foram feitas a coleta, a análise e a organização dos conteúdos. A organização obedeceu a um roteiro adequado ao aprendiz considerando na seqüência dos conteúdos apresentando a informação de forma didática e pedagógica.

2º) MODELAGEM – Segundo Johnson-Laird, “modelagem é uma técnica que permite a construção de modelos, com o objetivo de facilitar a compreensão, a discussão e a aprovação de um sistema antes da sua construção real.” (1983,p 513).

A fase de modelagem do sistema desenvolvido incluiu a criação dos 3 modelos: conceitual, de navegação e de interface:

a) Modelo Conceitual – estabeleceu como o conteúdo da aplicação seria disponibilizado ao aluno. Esse modelo detalhou a divisão do conteúdo em unidades e em que mídias seriam exibidas.

b) Modelo de Navegação – definiu as estruturas de acesso, ou seja, como o aluno tem acesso aos conteúdos.

c) Modelo de Interface – estabeleceu o *layout* das telas em harmonia com o conteúdo. Criou a identidade visual da aplicação.

3º) IMPLEMENTAÇÃO - a implementação abrangeu a escolha das mídias e a programação da aplicação a partir do modelo conceitual.

4º) AVALIAÇÃO E MANUTENÇÃO – foi feita durante todo o processo de desenvolvimento da aplicação.

5º) DISTRIBUIÇÃO – foi criado o módulo de execução e a embalagem do CD com o roteiro de instalação para a distribuição.

CONSTRUÇÃO DO MODELO DA APLICAÇÃO COM *STORYBOARD*

O *storyboard* é uma ferramenta criada para o desenvolvimento de quadros (*frames*) que compõem uma animação. Porém, seu uso se tornou comum para representar, de maneira informal, na forma gráfica, a rede de nós de uma aplicação hipermídia.

O *storyboard* pode representar o esboço do modelo conceitual de uma aplicação e mostrar como seus elementos estarão organizados. Permite exibir o planejamento do conteúdo de cada unidade e a disposição das mídias a serem utilizadas. A disposição dos quadros no *storyboard* mostra as estruturas de acesso, ou seja, como será a navegação dentro da aplicação. O *storyboard* é um mecanismo de auxílio à implementação.

A partir da modelagem, veio a fase da implementação, na qual foi utilizada um Sistema de Autoria com recursos para integrar todas as mídias em uma estrutura interativa, que permite uma navegação lógica e intuitiva, para que o aluno não se sinta desorientado.

A implementação foi feita com os recursos do Sistema de Autoria TOOLBOOK, versão 7.1 da Instituição. O TOOLBOOK foi desenvolvido pela Asymetrix, para a plataforma Windows na década de 90. Como todo Sistema de Autoria trabalha nos modos autor e leitor, a fase de implementação começou com a determinação do tamanho das páginas e com a programação da página padrão. A página padrão contém a área de navegação com os botões e os objetos compartilhados em todas as páginas.

Foi programada a tela de Apresentação que identifica a aplicação e está em harmonia com o restante da aplicação. A tela Menu oferece as opções básicas para a navegação dentro da aplicação. A tela de Créditos exibe as informações relacionadas aos recursos utilizados na aplicação. Ao finalizar a implementação, foi gerado o código executável que permite que a aplicação seja executada em qualquer equipamento sem o Sistema de Autoria.

Dessa forma, a aplicação hipermídia sobre Sistemas de Numeração permite o ensino individual que promove a independência do aluno, o desenvolvimento da sua habilidade em trabalhar sozinho, segundo seu ritmo e respeitando suas preferências, o que deve facilitar o processo de aprendizagem.

A aplicação apresenta interfaces gráficas amigáveis, conteúdo teórico com exemplos, animações e simulações dos procedimentos para a execução das operações e a troca de bases. Dentre as telas da aplicação, tem-se: tela de apresentação relacionada às opções: Sistema de Numeração, Bases dos Sistemas de Numeração 2, 7, 8, 10 e 16; conversão entre os diferentes Sistemas de Numeração; Mudança de Base e Operações.

Figura 2: Tela de Apresentação Sistema de Numeração

Figura 3: Tela de Apresentação das bases.

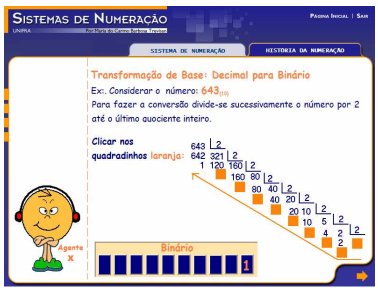


Figura 4: Tela do exemplo de Transformação de base Decimal para Binário.

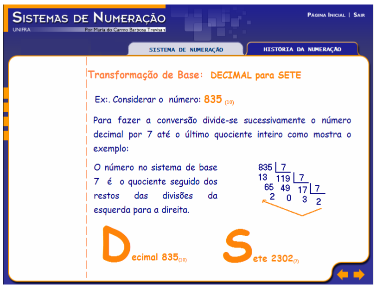


Figura 5: Tela de transformação de base Decimal para Sete.

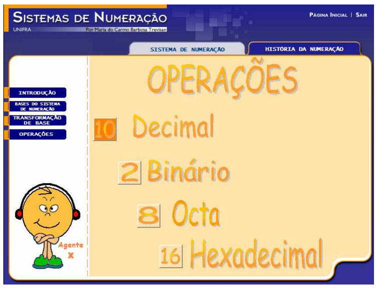


Figura 6: Tela das opções das operações na base decimal.

Figura 7: Tela com as opções de operações na base Decimal.

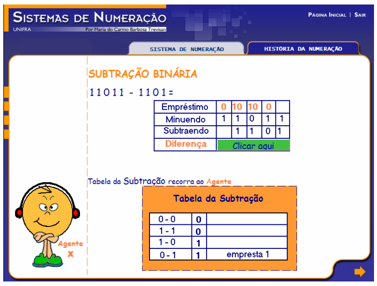


Figura 8: Tela com a operação subtração na base Binária

Figura 9: Tela com a operação subtração na base Octa

Figura 10: Tela com a operação adição na base Hexadecimal

CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi planejar e desenvolveu-se uma aplicação hipermídia sobre Sistemas de Numeração para ser utilizada como recurso didático no ensino de Sistemas de Numeração e das operações matemáticas nas bases: decimal, binária, octa e hexadecimal, possibilitando a visualização dos processos operativos envolvidos para potencializar a aprendizagem desses conteúdos.

Na navegação é usada a estratégia do roteiro guiado com o objetivo de forçar o aluno a acessar o conteúdo, obedecendo a uma ordem predeterminada. Com isso, os alunos não se sentirão desorientados, pois o conteúdo fica disponibilizado, satisfazendo os pré-requisitos necessários para a aprendizagem.

A utilização da aplicação deve permitir sistematizar uma prática que vem sendo proposta por muitos autores, ou seja, usar um *software* educacional para introduzir o tema sobre transformação de bases e operações matemáticas, exibindo por meio de mídias, o processo como um todo. Sabe-se que, quando mais de um sentido está envolvido no processo de ensino e aprendizagem, melhores serão os resultados. O homem busca, desde suas primeiras manifestações, conhecer e compreender tudo que o cerca, necessita adquirir conhecimento. A Matemática faz parte dessa caminhada. Com essa aplicação espera-se, que os alunos sejam capazes de adquirir, armazenar e utilizar a informação para gerar novos conhecimentos, o que já está se confirmando.

A validação do *courseware* sobre Sistemas de Numeração está sendo feita com os alunos de um curso de Técnico de Informática de uma escola estadual , na cidade de Santa Maria, RS .

Referências Bibliográficas

BOYER, CARL B**. História da Matemática**, Edgard Blücher, São Paulo, 1974.

DALABONA, J.S. **Uma reflexão sobre o uso de materiais digitais em atividades de Matemática**. Monografia de Especialização em Informática na Educação. Porto Alegre: CINTED-UFRGS, 2005.

FALKEMBACH, G.A.M. **Adaptive Hypermedia: an option for the development of educacional systems in order to getting more effective learning**. THE INTERNACIONAL CONFERENCE ON NEW TECNOLOGIES IN SCIENCE EDUCATION. Proceedings. Aveiro, Portugal, 2001.

______. **Uma experiência de resolução de problemas através da estratégia ascendente:** ambiente de aprendizagem adaptado para algoritmos (A4). Tese de Doutorado em Informática na Educação. Porto Alegre: UFRGS, 2003.

JUNG, C.F. **Metodologia para pesquisa e desenvolvimento aplicada a novas tecnologias, produtos e processos**. Rio de Janeiro: Axcel Books do Brasil, 2004.

JOHNSON-LAIRD, P. (1983). Mental models. Cambridge, MA: Harvard University Press.

SILVEIRA, S.R. **Formação de grupos colaborativos em um Ambiente Multiagente Interativo de Aprendizagem na Internet: um estudo de caso utilizando sistemas multiagentes e algoritmos genéticos** – tese de doutorado em Ciência da Computação – PPGC – UFRGS, 2005.

REIS, A.B. **Um modelo do aluno adaptativo para sistemas na Web** Porto Alegre: PPGC/UFRGS, 2000 – Dissertação de Mestrado

IMPLEMENTAÇÃO DO "PRÓ-LETRAMENTO EM MATEMÁTICA"

Elizabeth Belfort — I.M. – UFRJ

Mônica Cerbella Freire Mandarino — Faculdade de Educação – UNIRIO

Neste artigo discutimos a implementação de uma programa, em larga escala, de formação continuada em matemática para professores os anos iniciais. Apresentamos uma breve introdução do programa: seus conteúdos e a metodologia de trabalho que vimos utilizando em sua aplicação. A análise da metodologia e discussão de pressupostos de trabalho é feita à luz da literatura sobre atuação de professores e sobre formação continuada, em especial aquelas que consideram a formação de professores dos anos iniciais em matemática. Como resultados destacamos a rica troca de experiências proporcionada pelo modelo de formação adotado e a possibilidade dos professores enfrentarem, em grupo, muitas de suas dificuldades com a matemática e com sua didática. Outros efeitos, como o desenvolvimento novas práticas em matemática nas escolas e novas escolhas de livros didáticos, também são brevemente discutidos.

INTRODUÇÃO

Pesquisas de grande porte, nacionais e internacionais, sobre a proficiência em matemática de estudantes dos diferentes níveis de escolaridade, são cada vez mais freqüentes. No Brasil, levantamentos deste tipo (amostrais, como o SAEB, ou populacionais, como as avaliações estaduais e a Prova Brasil) mostram um resultado comum e nada satisfatório: o desempenho medíocre dos estudantes de todos os níveis, diante de situações que envolvem conceitos matemáticos, mesmo que quase todas as questões sejam voltadas para o uso de conhecimentos matemáticos básicos e necessários à vida cotidiana.

Neste sentido, sistemas de ensino brasileiros estão investindo na revisão de programas e currículos e aplicando recursos em formação continuada de seus professores. Isto nos coloca diante do desafio de propor programas mais eficazes, com efeitos mais imediatos e duradouros. Diversas pesquisas e experiências vêm mostrando, ao longo dos últimos anos, que a melhoria na aprendizagem da matemática depende da qualidade do ensino que se oferece aos alunos nas salas de aula.

Em contato com profissionais da educação atuando nos anos iniciais, é fácil perceber que a maioria deles está ciente da necessidade de mudança em sua prática didática em aulas de matemática. Muitos deles conhecem e já incorporaram os discursos pedagógicos e metodológicos mais atuais;

conhecem os documentos curriculares e uma variedade de livros. No entanto, estes profissionais não se sentem capazes de enfrentar as mudanças necessárias ao ensino da matemática em sua sala de aula. Os livros didáticos melhor avaliados pelo PNLD muitas vezes não são adotados, pois apresentam desafios para a sala de aula que estão além do que o professor se sente capacitado a enfrentar.

É na perspectiva de tentar contribuir para a melhoria da prática de sala de aula do professor que o MEC–SEB está implantando, em diversos estados brasileiros, o PRÓ–LETRAMENTO: uma ação de formação continuada (a princípio nas áreas de linguagem e matemática) voltada para professores dos anos iniciais. O programa é feito em parceria entre o MEC–SEB, secretarias Estaduais e Municipais de Educação e a Rede Nacional de Formação Continuada de Professores da Educação Básica, constituída por instituições brasileiras de Ensino Superior. Na UFRJ, o órgão responsável pela implementação do Programa é o **LIMC**[1].

Neste artigo, buscamos apresentar e discutir o PRÓ–LETRAMENTO Matemática, não como autoras de parte de seu material[2], mas sob uma perspectiva de quem vivência o programa de formação na área de Matemática coordenando sua implementação em quatro estados brasileiros: Ceará, Rio de Janeiro, Santa Catarina e Rondônia. Discutiremos nossos pressupostos, as principais estratégias de implementação que vimos utilizando e alguns resultados observados. Nos estados citados, o total de tutores formados ou em formação é de aproximadamente 400, e o número de professores em atividade em sala de aula atingidos pelo projeto supera 15.000[3].

PRESSUPOSTOS E MODELO DE APLICAÇÃO DO PROGRAMA

O saber matemático do professor precisaria torná-lo capaz de compreender a natureza dos conhecimentos a serem ensinados, sua estrutura, aplicações e generalizações. Um saber matemático mais consistente permitiria aos professores melhor compreender as recomendações curriculares para poder adaptá-las à sua realidade. Permitiria avaliar as etapas da aprendizagem de seus alunos, analisar ou propor uma seqüência didática, fazer adaptações, correções ou aprofundamentos ao que

---

[1] O **LIMC** – *Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e das Ciências* – é um órgão do Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza da UFRJ, com parcerias na UNIRIO, UFSCar e PUC-RJ. É parte integrante da Rede Nacional de Formação Continuada do MEC/SEB, na área de Ciências e Matemática.

[2] O material do Pró-Letramento está disponível para download em portal.mec.gob.br/seb (procurar em Programas da SEB, Pró-Letramento, Publicações)

[3] A evasão de tutores não ultrapassou 10% e a taxa de conclusão, com sucesso, da formação dos demais ultrapassa 95%. Quanto à dos cursistas, após a evasão ocorrida logo após o primeiro encontro, devido a inscrição ter sido feita pelo sistema e não autorizada pelo cursista e /ou ao “susto” por causa do nível de exigência do curso, ficou em menos de 15%.

é proposto num livro didático. Neste sentido, nosso desafio também reside na necessidade de que o professor supere a formação matemática superficial e deficiente que recebeu, tanto em sua escolarização básica, quanto nos cursos de formação profissional. Tais constatações nos colocam diante da necessidade de que programas de formação continuada sejam capazes de (re)construir o saber matemático do professor e mobilizar para mudanças mais efetivas e permanentes em sua prática didática. Estes são pressupostos básicos que nortearam a construção do material e da proposta de trabalho do Programa Pró–Letramento em matemática.

Os conteúdos e a discussão metodológica do curso foram subdivididos em oito fascículos que devem ser trabalhados com uma carga horária presencial de 80 horas (10 encontros de 8 horas), que são complementadas por 40 horas de estudo individual e trabalho independente, compondo um total de 120 horas de formação. Como dispomos de uma carga horária pequena, foi necessário fazer escolhas. Os fascículos abordam temas eleitos pelos autores como fundamentais para a bagagem de todo cidadão. Claramente, nesta escolha foi preciso abrir mão de alguns aspectos relevantes, aprofundamentos necessários ou outras abordagens possíveis para os temas selecionados. No entanto, buscou-se provocar a discussão e a reflexão sobre os saberes e o trabalho docente.

Os materiais didáticos utilizados do curso foram elaborados por diversos autores, trabalhando em Universidades diferentes, localizadas em diferentes estados brasileiros e com diferentes perspectivas sobre o que deve ser o foco de estudo da formação continuada em Matemática para os anos iniciais. De uma forma resumida, podemos considerar que três diferentes visões, todas relevantes, são privilegiadas pelos oito fascículos que compõem o material:

(1) Os fascículos 1 – Números Naturais, 2 – Operações com Números Naturais, 3 - Geometria e 5 – Grandezas e Medidas propõem o estudo de conteúdos e metodologias de ensino a partir da reflexão coletiva de resultados e da aplicação de propostas didáticas em sala de aula.

(2) Os fascículos 4 - Frações e 6 – Tratamento da Informação propõem ampliar os conhecimentos matemáticos do professor, sem necessariamente estabelecer relações com as aplicações destas idéias na vivência do professor em sala de aula.

(3) Os fascículos 7 – Jogos e Resolução de Problemas e 8 – Avaliação Didática enfocam estratégias pedagógicas a serem debatidas e adaptadas para a sala de aula, sem se focar especificamente em conteúdos matemáticos definidos.

Em todos os casos, os fascículos se subdividem em duas partes: a primeira para ser trabalhada presencialmente com o grupo de professores e a segunda deve ser estudada à distância e envolve a realização de tarefas, que podem ou não incluir o planejamento e aplicação de propostas didáticas pelo professor. Os registros das tarefas elaborados pelos cursistas devem ser levados para o encontro presencial consecutivo, para serem discutidos com seus pares, sob a orientação de um professor tutor. Após o debate das dúvidas relativas ao fascículo estudado, na continuação do encontro, um novo fascículo é iniciado, e assim por diante.

Conscientes de que, em muitas redes de ensino, há grande rotatividade de professores entre as escolas da rede, tem-se, pela formação de tutores locais e de turmas que congregam professores de diferentes escolas da rede, uma estratégia para fortalecer os grupos locais. Como professores de diferentes escolas participam dos encontros presenciais, com um mesmo tutor, acabam por conhecer outros colegas e propostas. Ressaltamos ainda que o fato do tutor ser um professor da própria rede de ensino permite que seus gestores possam oferecer novas "rodadas" do curso, sempre que se fizer necessário, uma vez que o material didático é disponibilizado pela Internet.

A formação de tutores

O papel dos professores ligados aos Centros que compõem a Rede Nacional de Formação Continuada do MEC é o de formador do tutor. Isto ocorre em um seminário inicial de 40 horas e mais quatro seminários de acompanhamento, de 16 horas cada um, nos quais se reúnem os tutores dos diferentes sistemas de ensino de um Estado com os formadores. Os tutores, por sua vez, retornam para seu sistema de ensino não apenas com obrigações de estudo para o próximo seminário, mas com a incumbência de implementar o programa junto aos professores de seu pólo. É importante observar ainda que, para cada fascículo, existe um encarte para o tutor que contém sugestões de aplicação e respostas para as tarefas propostas. Para contribuir com o planejamento do trabalho a ser realizado nos pólos, durante os seminários de formação de tutores, além de estudarmos os fascículos, são realizadas discussões sobre o planejamento e as possibilidades de encaminhamento do trabalho do tutor com os professores de seu pólo / município.

O QUE SIGNIFICA LETRAMENTO EM MATEMÁTICA?

No debate sobre as competências a serem desenvolvidas no âmbito do ensino de matemática, surgem, entre outros, termos como *alfabetização matemática* e *letramento* em *matemática*. Em todos eles, há preocupação com o papel social da educação matemática, e com o desenvolvimento de habilidades para leitura do mundo, que envolvem conceitos e relações, critérios, procedimentos e resultados e o uso de recursos da linguagem matemática. Lopes e Nacarato (2005, p.7), dentre outros autores, lembram que é preciso que este tipo de formação matemática seja apropriado pelos professores para que eles possam garantir a educação matemática a seus alunos.

No Pró–Letramento matemática, consideramos fundamental levar o professor a refletir sobre a insuficiência do ensinar a contar e fazer cálculos, muitas vezes desprovidos de significado. O material didático e a proposta do curso trazem à tona uma abordagem dos conteúdos da matemática escolar que não se limita ao saber fazer (Ball, 2000; Shulman, 1986), mas que busca a compreensão conceitual e a necessidade de o professor adotar uma nova postura. Como nos alerta D'Ambrósio (2004), "aprendizagem é aquisição de capacidade de explicar, de apreender e compreender, e de lidar, criticamente, com situações novas. Não é o mero domínio de técnicas, habilidades e muito menos a memorização de algumas explicações e teorias" (p.37).

A IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA PELA EQUIPE DO LIMC

A equipe de formadores tem uma certa liberdade na implementação do projeto. No nosso caso, temos usado esta liberdade para ir de encontro com alguns pressupostos que não estão, necessariamente, privilegiados em todos os fascículos. Partimos da concepção que existe uma cultura escolar estabelecida (STIGLER & HIEBERT, 1999; MANDARINO, 2006) e que, para modificá-la, devemos considerar que formação continuada não se faz de forma episódica, mas pelo trabalho permanente dentro do próprio ambiente profissional. Assim, propomos o estudo de conteúdos e metodologias de ensino a partir da reflexão coletiva de resultados da aplicação de propostas didáticas em sala de aula, não se restringindo ao discurso sobre possibilidades de melhores resultados, se esta ou aquela proposta viesse a ser implementada. Propomos que os professores, após cada encontro, planejem e realizem atividades com seus alunos e, a seguir, elaborem registros de sua prática e do acompanhamento do processo de aprendizagem. Sempre que necessário, oferecemos materiais suplementares, por nós desenvolvidos, para incluir propostas de atividades a serem realizadas com os alunos referentes aos conteúdos estudados no fascículo.

Os registros elaborados devem ser levados para o encontro consecutivo, para serem discutidos com seus pares, sob a orientação do tutor. Anotar, recolher material produzido pelos alunos e avaliar uma atividade realizada, para debater com outros professores nos encontros presenciais, tem se revelado um diferencial importante. Tais exigências, que de início causam estranheza para professores acostumados a fazer cursos teóricos que não lhes cobram mudanças na sala de aula, acabam criando um ambiente efetivo de troca de saberes e obrigando os professores a saírem do isolamento, desenvolvendo novas competências para ensinar matemática (PERRENOUD, 2000).

Uma outra característica de nossa implementação é que, além do acompanhamento do trabalho do tutor feita à distância (via e-mail, site do projeto, telefone etc.), relatórios elaborados pelos tutores são entregues regularmente para os formadores. Aos relatórios deve ser anexada uma amostra diversificada de trabalhos produzidos pelos cursistas, e em cada seminário, abre-se um espaço para troca de experiências e discussão destes materiais. A exigência do relatório, segundo depoimento dos próprios tutores, leva a uma reflexão aprofundada sobre a prática dos encontros e permitem um repensar constante do processo.

Para exemplificar, no quadro 1, apresentamos um resumo do depoimento de uma tutora, em atividade no Estado do Ceará, em seu relatório referente ao fascículo 3. Ela analisa o trabalho realizado nos encontros cumulativamente, observando uma clara mudança de postura das cursistas em relação à matemática. Nos seminários de tutores, nossas discussões nos levam a crer que, ao constatar que os demais professores têm dificuldades similares as suas, cada cursista abre mão de sentimentos (muitas vezes arraigados) de incapacidade e de isolamento para estabelecer parcerias com colegas que vivenciam os mesmos problemas e que se percebem capazes de enfrentá-los em grupo.

> *... o desenvolvimento do Pró–Letramento em minhas turmas tem superado minhas expectativas. A cada encontro, as cursistas se empolgam com as descobertas ...que vêm facilitando a sua compreensão, mediante o processo de discussão de conteúdos, das experiências vivenciadas e ...* [debatidas] *uma com as outras, as descobertas quando aplicam em sala de aula e principalmente o aprendizado de cada uma delas, que acham hoje a matemática uma disciplina interessante.*
>
> *Algumas cursistas se adiantam no estudo dos fascículos, e já vem para o encontro* [disparador] *com questionamentos e algumas atividades já feitas ... ocorreu uma grande transformação, as dificuldades .... foram transformadas em oportunidades*...[O curso] *é um momento em suas vidas para trabalhar os pontos que, até então, eram motivos de angústia ou que eram desprezados em suas aulas, devido ao total desconhecimento...*
>
> Tutora do Município de Caucaia, Estado do Ceará.

Quadro 1: Depoimento de tutora ao final da aplicação do fascículo 3

BREVE DISCUSSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Pela discussão acima, fica claro que um dos resultados positivos do curso é criar o hábito de registrar aspectos relevantes da atividade docente e de constituir grupos de estudo, voltados para a reflexão sobre o cotidiano escolar e para o aprofundamento do saber matemático dos docentes. No entanto, para que este esforço não se perca é importante que novos projetos e programas dêem continuidade e que tirem proveito da mudança de postura que o programa vem provocando. Com apoio e novos materiais, os grupos constituídos poderão continuar um verdadeiro movimento de formação permanente. Por outro lado, temos notícia de grupos (por exemplo, dois grupos no Município de Crateús, no Estado do Ceará) que continuam se reunindo, com o propósito de analisar livros didáticos de Matemática para os anos iniciais, visando a próxima escolha a ser feita junto ao PNLD. Segundo a tutora (que continua participando do trabalho) a mudança foi radical – as ex-cursistas não admitem mais trabalhar com seus “velhos” livros, que privilegiam procedimentos, e estão pesquisando os que refletem suas novas aquisições matemáticas e metodológicas.

Um outro ganho, relatado por uma ampla maioria dos tutores, são modificações na prática didática dos cursistas. Acreditamos que isso é uma conseqüência direta da proposta de diversas atividades (que podem ser aplicadas em sala de aula) nos textos dos fascículos e nos materiais suplementares. Se, por um lado, sabemos que todo profissional precisa de exemplos que tenham sido testados e avaliados, que lhe dêem segurança para aplicá-los, por outro, verifica-se que o professor estabelece um contato diferenciado com as sugestões apresentadas nos fascículos, adaptando-as à sua realidade, com uma criatividade que não cessa de nos surpreender.

Gostaríamos ainda de enfatizar que, desde os fascículos iniciais, uma das ênfases do curso é a necessidade de mudanças no processo de avaliação. Em matemática, a avaliação da produção dos alunos costuma se limitar à mera conferência de resultados e é preciso mudar esta postura, provocando uma outra forma de olhar para o que os alunos fazem, registram e falam. A análise dos conhecimentos que os alunos expressam, mesmo quando erram, possibilita diferentes etapas da aprendizagem e a elaboração de estratégias didáticas que contribuam para superação de obstáculos. Nesse sentido, nos primeiros fascículos, são apresentadas cópias de atividades desenvolvidas por alunos dos anos iniciais, para que os professores discutam e reflitam sobre a produção de crianças com outros profissionais, contribuindo para uma mudança efetiva da postura de avaliação.

Esta estratégia, associada a uma gama de atividades passíveis de adaptação para a sala de aula, parece estar funcionado muito bem. Estimulados pelo debate das produções propostas nos fascículos e tendo que relatar sua aplicação, uma nova forma de avaliar a participação dos alunos e seu aprendizado foi sendo criada, e isto é notável em seus depoimentos. Ao final do curso, durante o trabalho com o fascículo de avaliação didática, o debate sobre essa nova postura fez com que os cursistas percebessem o quanto suas práticas didáticas já havia sido transformadas.

Para concluir, no quadro 2, apresentamos fragmentos de um “cordel” escrito por uma das cursistas (primeira “rodada” do curso) ao final do curso no Estado do Ceará. Acreditamos que nada pode demonstrar melhor o impacto positivo deste trabalho na vida profissional desses cursistas.

III	Pra área de Matemática O estudo foi voltado E confesso com certeza Que teve bom resultado Pois olho ao redor e vejo Cursista entusiasmado	VII	Trabalho trezentas horas E vivo muito cansada Cheguei às vezes a ficar Com as tarefas atrasadas Mas tive ajuda das colegas Que são muito camaradas	XI	Sei que cada um de nós Sai com a convicção Que um curso desse porte Ajuda em nossa missão De levar ao nosso aluno Uma boa educação.	XIII	Agradeço a Jaqueline Por sua dedicação É tutora competente Não há quem duvide não Hoje estamos terminando Cumprindo nossa missão
V	Quando tinha atividade Na sala para aplicar Era aluno empolgado Querendo participar E no fim aprendizagem Podia-se verificar.	X	Muita união no grupo Podia-se perceber Cursistas todos empolgados Querendo mais aprender Todos ficam unidos Na construção do saber.	XII	E nos anos que virão Da pasta vamos tirar Os fascículos que guardamos E outras vezes vamos usar E as atividades propostas Na nossa sala aplicar.	XVIII	Desculpe se há algum erro Não pesquisei na gramática Escrevi de improviso Estudando Matemática Valeu muito estar aqui Não troco isso por nada.

Quadro 2: Fragmentos de um cordel composto por uma cursista do município de Apuiarés, CE.

Referências

BALL, D. L. Bridging Practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of teacher education,* 2000, v. 51, n. 3, mai/jun, p. 241-247.

BRASIL, Ministério da Educação/SEB. *Pró-Letramento: Programa de formação continuada de professores dos anos/séries iniciais do Ensino Fundamental: Matemática*. – edição revista e ampliada incluindo SAEB / Prova Brasil matriz de referência / Secretaria de Educação Básica- Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2007.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. A relevância do projeto indicador nacional de alfabetismo funcional – INAF como critério de avaliação da qualidade do ensino de Matemática. In: FONSECA, M.C.F.R. (org.). *Letramento no Brasil: habilidades Matemáticas: reflexões a partir do INAF 2002.* São Paulo: Global/ Ação Educativa Assessoria, Pesquisa e Informação/ Instituto Montenegro, 2004.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin; NACARATO, Adair Mendes (orgs.). *Escritas e leituras na educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MANDARINO, Mônica Cerbella Freire. *Concepções de ensino da matemática elementar que emergem da prática docente.* Tese de doutorado. Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Educação, 2006.

PERRENOUD, Philippe. *10 Novas Competências para Ensinar.* Porto Alegre, Artmed editora, 2000.

SHULMAN, L. Those who understand: knowledge growth in teaching. In: *Educational Researcher*, 1986, v. 15, n. 2, p. 4 – 14.

STIGLER, J. W. & HIEBERT, J. *The Teaching Gap: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York: The Free Press, 1999.

INTEGRAÇÃO DA TECNOLOGIA NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA[1]

Marilena Bittar, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Sheila Denize Guimarães, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Mônica Vasconcellos, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Resumo

Nesse artigo apresentamos resultados parciais de uma pesquisa-ação em andamento cujo objetivo é investigar a integração da tecnologia na prática pedagógica de professores que ensinam Matemática na Educação Básica. Para tanto, esse trabalho tem sido desenvolvido em algumas fases: 1ª) constituição e consolidação do grupo; 2ª) estudo coletivo do tema Softwares Educacionais e suas possibilidades para a aprendizagem matemática; 3ª) estudo e análise de um software que pode contribuir com a aprendizagem da Matemática; 4ª) leitura e discussão de textos que abordassem questões ligadas a essa temática; 5ª) elaboração de seqüências didáticas. Os resultados indicam que: 1) o sentimento de fazer parte de um grupo começou a ser construído logo nos primeiros encontros, quando os professores expuseram os problemas que vivenciavam nas escolas; 2) ao longo dos encontros percebemos alguns momentos de colaboração, em especial naqueles destinados a exploração do LOGO.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática – Formação de professores – Integração – Pesquisa-ação

INTRODUÇÃO

A formação de professores, tanto inicial quanto continuada, é um grande desafio para todas as sociedades. Diversas investigações têm sido realizadas em torno dessa temática, visando tratar questões ligadas à prática dos professores. Pesquisas nos mais diferentes campos do conhecimento escolar evidenciam que a tecnologia pode constituir um instrumento capaz de contribuir de modo importante com a aquisição do conhecimento pelos alunos. Fagundes (1996) afirma que o uso do computador foi um instrumento determinante no trabalho sobre alfabetização escrita e numérica, com alunos da primeira série do Ensino Fundamental com longo histórico de fracasso escolar.

[1] Pesquisa financiada pelo CNPq

Para ilustrar os aportes da tecnologia para a aprendizagem da Matemática, vamos considerar a Geometria, disciplina que tem sido relegada a segundo plano no ensino de Matemática (PAVANELLO, 1993). Um *software* como o Cabri-Géomètre (BELLEMAIN, 2003), poderia ser utilizado de forma a levar os próprios alunos a classificarem os quadriláteros em paralelogramos, retângulos, losangos, quadrados e trapézios, por meio da observação de certas propriedades que são invariantes em cada tipo de quadrilátero.

Se por um lado, há comprovação de resultados importantes alcançados com o uso de um *software* de Matemática, por outro, pesquisas indicam que os professores dos diversos níveis de escolaridade não têm efetivamente integrado a tecnologia em suas aulas, o que acontece inclusive nos cursos de formação de professores tanto inicial quanto continuada (BITTAR, 2000 e BRANDÃO, 2005).

Acreditamos que a verdadeira integração da tecnologia somente acontecerá quando o professor vivenciar o processo e quando a tecnologia representar um meio importante para a aprendizagem. Falamos em integração para distinguir de inserção. Essa última para nós significa o que tem sido feito na maioria das escolas: coloca-se o computador nas escolas, os professores usam, mas sem que isso provoque uma aprendizagem diferente do que se fazia antes e, mais do que isso, o computador fica sendo um instrumento estranho à prática pedagógica usado em situações incomuns, extra classes, que não serão avaliadas. Defendemos que o computador deve ser usado e avaliado como um instrumento como qualquer outro, seja o giz, um material concreto ou outro. E esse uso deve fazer parte das atividades "normais" de aula. No próximo parágrafo levantamos algumas questões que consideramos importantes a serem discutidas sobre a integração da informática na prática pedagógica.

PROBLEMA/QUESTÕES

Um professor, do Ensino Fundamental ou Médio, resolve fazer uso da tecnologia com seus alunos. Onde ele procurará ajuda, caso necessite? Que tipo de material ele tem disponível sobre o uso das novas tecnologias em sala de aula? Como ele poderá escolher o produto tecnológico a ser usado? Quando e como utilizar a informática com seus alunos? Ou seja, em que momento da aprendizagem e que tipo de atividade propor aos alunos de modo a contribuir com essa aprendizagem?

Essas são algumas questões que permeiam as pesquisas que temos desenvolvido nos últimos anos sobre a integração da tecnologia nas aulas de Matemática e que nos levaram a propor um projeto de pesquisa no Edital Universal CNPq 02/2006. Esse projeto foi aprovado, desenvolvido durante todo o ano de 2007 e continua sendo desenvolvido nesse ano de 2008.

OBJETIVO E METODOLOGIA DA PESQUISA

Acreditamos que é importante que a formação continuada do professor seja feita de modo que esse vivencie, no curso de formação, suas dificuldades e problemas do dia a dia e durante um período de tempo que seja suficiente para o amadurecimento das discussões acerca das situações vivenciadas. Assim, com o objetivo de **investigar a integração da tecnologia na prática pedagógica do professor que ensina Matemática na Educação Básica**, constituímos um grupo formado por pesquisadores e professores que atuam nesse segmento e trabalhamos com a **metodologia da pesquisa-ação** (THIOLLENT, 2007) por acreditar que ela atende aos preceitos acima defendidos. Não se trata, portanto, de propor uma pesquisa de observação e análise da prática pedagógica de professores usando a informática, mas sim de uma pesquisa em que pesquisadores e professores estão implicados discutindo, analisando, pensando questões ligadas ao uso da tecnologia nas aulas de Matemática como um instrumento capaz de provocar a aprendizagem.

Com base nesse objetivo e na metodologia da pesquisa-ação nossa investigação tem sido desenvolvida em algumas fases cuja duração varia em função dos interesses e das necessidades dos envolvidos. Relatamos aqui somente as fases já desenvolvidas no ano de 2007.

1ª) constituição e consolidação do grupo constituído de professores que atuam na Educação Básica, tendo como único critério o fato de ensinarem Matemática nesse segmento. Consideramos essa, como sendo uma fase importante dentro da perspectiva da metodologia de pesquisa-ação, pois se trata da real constituição do grupo de estudo. Essa fase é composta de uma discussão inicial geral sobre questões ligadas à tecnologia e à prática pedagógica. O objetivo dessa fase foi de, dentre os problemas vivenciados, identificados e discutidos pelos professores, no grupo, escolher um tema para ser estudado com mais detalhes.

2ª) estudo coletivo do tema definido na fase anterior – Softwares Educacionais e suas possibilidades para a aprendizagem matemática – por meio de leitura de textos e apresentação de slides. A partir desse estudo passamos à fase seguinte.

3ª) estudo e análise de um software que pode contribuir com a aprendizagem da Matemática, no caso o software escolhido foi o LOGO. Essa fase foi desenvolvida em um laboratório de computação.

4ª) considerando que o LOGO pode se constituir em um instrumento de auxílio ao processo de ensino e aprendizagem da Geometria, o grupo decidiu ler e discutir textos que abordassem questões ligadas a essa temática e o bloco Espaço e Forma, contido nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997) e, em seguida, analisar o conteúdo de Geometria apresentado nos livros didáticos de Matemática destinados aos anos iniciais do Ensino Fundamental. Essa foi a fase denominada por nós de fase 4.

5ª) por fim, a última fase desenvolvida no ano de 2007 foi a elaboração de seqüências didáticas (BROUSSEAU, 1986) envolvendo o uso de softwares educacionais ou a calculadora. Nessa fase houve a subdivisão por subgrupos, segundo o interesse dos participantes.

Essas fases revelam o movimento característico da pesquisa-ação e em cada uma delas há uma riqueza de dados que merecem análise. Para esse artigo, optamos por relatar alguns resultados obtidos nas 4 primeiras fases e isso sem separar em itens por fases, pois essas aconteciam umas imbricadas às outras. É importante salientar também que outros acontecimentos não previstos ocorreram paralelamente aos previstos e os consideramos tão importantes quanto esses, pois nasceram, de alguma forma, a partir do trabalho do grupo e, uma vez compartilhados com todos contribuíram com o trabalho do grupo.

ALGUNS RESULTADOS

Na primeira fase convidamos alguns professores a ingressarem no grupo, tendo como único critério o fato de ensinarem Matemática na Educação Básica. Para tanto, entramos em contato com professores que conhecíamos e que já haviam manifestado interesse em participar de um grupo de estudo ligado à Educação Matemática e ao uso de tecnologias educacionais. Alguns desses professores, por sua vez, convidaram outros docentes que tinham o mesmo interesse e, assim, agendamos um primeiro encontro para março de 2007. Nesse encontro, foi apresentada aos presentes a proposta de pesquisa e sua relação com a formação continuada e explicitado que não se tratava de oferecer um curso para professores, mas sim estudar a integração da tecnologia na prática pedagógica de professores que ensinam Matemática. Explicamos que esse trabalho seria pautado pela metodologia da pesquisa-ação, entendida como uma pesquisa de base empírica

> [...] concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes [...] estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo (THIOLLENT, 2007, p. 16).

Considerando essa definição, esclarecemos aos participantes que o andamento do trabalho ocorreria em consonância com as decisões do grupo e para tanto, seria necessário que nossas angústias/dúvidas/dificuldades, em relação à integração da tecnologia na prática pedagógica, fossem explicitadas. Aparentemente[2], o grupo demonstrou satisfação em relação à proposta e nesse primeiro encontro tomou algumas decisões: os encontros seriam realizados quinzenalmente na UFMS no campus de Campo Grande; a explanação dos problemas vivenciados nas escolas, no que se refere à integração da tecnologia, ocorreria no encontro seguinte. Nele, dentre os problemas vivenciados, identificados, trazidos e discutidos pelos professores, juntamente com os pesquisadores, um foi eleito para ser estudado com mais afinco: Softwares Educacionais e suas possibilidades para a aprendizagem matemática. Para esse estudo o grupo optou por realizar, inicialmente, uma discussão coletiva de uma apresentação de slides sobre o tema e a leitura de um texto cujo foco é o uso de softwares educacionais e a prática pedagógica (BITTAR, 2007). Essa discussão gerou a necessidade, no grupo, de estudar um software e, a partir dele, tentar observar algumas questões que haviam sido levantadas ao longo do debate. As reuniões passariam a ser realizadas em um laboratório de informática e foi definida a seguinte questão como norteadora para essa fase do estudo:

---

[2] Essa afirmação se deve ao fato de que o número de professores da Educação Básica participantes do projeto ficou estabilizado somente por volta da 5ª reunião. Alguns professores alegaram falta de tempo, outros disseram a colegas que não era exatamente isso o que procuravam. Interpretamos que, pelas argumentações indiretas desses professores, o que esperavam era, uma vez mais, um curso sobre um software e como usar esse software com seus alunos, o que não era nossa proposta. Assim, de um total de 19 professores da Educação Básica, o grupo passou a contar com 12, o que perfaz um total de 20 membros, pois contamos com 8 participantes no grupo de proponentes. Vale ressaltar que no grupo de proponentes, 3 professores atuam na Educação Básica.

Quais critérios devem nortear a escolha de um *software* para que ele contribua com a aprendizagem da Matemática?

Nesse momento, foi perguntado se o grupo iria se dividir em subgrupos por nível de ensino, como estava previsto inicialmente no projeto, para escolher e estudar um software. Cabe ressaltar que participam do projeto, desde professores que trabalham com a Educação Infantil até professores que trabalham com o Ensino Médio. Mas, contrariamente ao previsto, uma professora da Educação Infantil se posicionou dizendo que não gostaria que o grupo se dividisse; ela disse que sabia ter dificuldades com conteúdos de Matemática, mas se não entendesse algo, contaria com os colegas para que lhe explicassem. Sua proposta foi aceita por todos. Essa ação da professora e a reação do grupo mostram que os trabalhos até então desenvolvidos estavam conseguindo colocar o grupo em situação de colaboração mútua, onde parecia não haver constrangimento em se expor. O caminho estava aberto, tínhamos que continuar a trilhá-lo.

A opção do grupo foi pelo estudo do LOGO, por considerar que esse *software* é um instrumento que pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem da Matemática em qualquer nível de ensino da Educação Básica. O estudo do LOGO começou por uma exploração livre e espontânea de suas ferramentas, ou seja, sem direcionamentos por parte de qualquer membro do grupo. Ao contrário, à medida que algum participante fazia algum questionamento para outro membro acerca das possibilidades de uso do *software* ou a respeito de alguma descoberta, boa parte dos envolvidos sentia-se instigado a descobrir essas e novas possibilidades, a explorar as ferramentas e a confrontar essa experiência ao trabalho que poderiam realizar com seus alunos em suas respectivas escolas, tendo em vista o ensino e a aprendizagem da Geometria.

Ao longo das reuniões no laboratório foram surgindo várias idéias sobre atividades a serem desenvolvidas com o software. Uma professora, logo após os primeiros contatos com o LOGO, deu uma aula para seus alunos do 5º ano sobre o quadrado, usando esse software. As discussões ocorridas nessa fase são alvo de outro artigo em andamento.

Como o LOGO dá margem para a realização de atividades relacionadas à Geometria Matemática, o grupo decidiu ler e discutir textos que abordassem questões ligadas a tal temática considerando que alguns pontos precisavam ser melhor compreendidos: a formação do professor para o ensino da Geometria (NACARATO, 2007), possibilidades de integração de *softwares* educacionais para o ensino e a aprendizagem da Geometria, evidenciando características técnicas e didáticas de alguns materiais e discussão de possibilidades de uso de cada um deles.

Durante a leitura, as idéias propostas pelos autores dos textos foram confrontadas aos problemas vivenciados pelos professores nas escolas em que trabalham. Na seqüência, optamos por ler e discutir o bloco Espaço e Forma, contido nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997). Nesse período as orientações contidas nesse bloco foram esmiuçadas, confrontadas com as leituras e as atividades desenvolvidas até aquele momento e com a prática docente dos envolvidos.

Finalmente, com base nas leituras dos textos selecionados e dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997), em um de nossos encontros alguns participantes mencionaram que julgavam importante analisar o conteúdo de Geometria apresentado nos livros didáticos de Matemática destinados aos anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal proposta foi aceita por todos e com tal intuito, nos organizamos em pequenos grupos, formados por quatro ou cinco membros que se uniram sem a preocupação de estabelecer uma distinção entre os níveis em que lecionam. Durante dois encontros cada subgrupo analisou o conteúdo de Geometria presente em uma coleção de livros didáticos. Todas as coleções foram trazidas por um dos participantes que possui um considerável acervo e assim, cada pequeno grupo escolheu uma dentre todas as coleções expostas. Após essa análise, os subgrupos socializaram as informações obtidas. É importante ressaltar que essa fase foi considerada fundamental para a compreensão do que é Geometria para as séries iniciais do Ensino Fundamental, e isso tanto para os professores dessas séries quanto para os professores que não atuam nessas séries, que, apesar de serem licenciados em Matemática, desconhecem, em sua maioria, a Matemática das séries iniciais. Lembramos a fala de um professor do Ensino Médio que disse desconhecer o que é feito nas séries iniciais, mas que pensando bem ele deveria saber, pois isso podia ser importante para ele poder "*compreender as dificuldades e concepções de seus alunos*".

Após essa fase, o grupo decidiu que era hora de tentar aplicar, de forma mais sistemática[3], um pouco do havia sido discutido nas reuniões nas escolas em que cada um dos professores da Educação Básica trabalha. Assim os participantes decidiram elaborar seqüências didáticas relacionadas ao ensino de Geometria por meio de um *software*, com finalidade de aplicá-las no primeiro semestre de 2008. Contudo, isso demandou uma reorganização dos integrantes em virtude do nível de ensino que atuam ou do interesse e/ou possibilidade de uso de material. Dessa forma, foram formados três subgrupos. O primeiro tem como foco os anos iniciais do Ensino Fundamental e para tanto, decidiu utilizar o LOGO como ferramenta; o segundo, voltado para o Ensino Médio, escolheu o Cabri-Géomètre e o terceiro, constituído de professores das séries iniciais e uma professora do Ensino Médio, decidiu pelo uso da calculadora[4]. No final de 2007 os grupos estavam elaborando as seqüências, que eram sempre compartilhadas e discutidas com todo o grupo e que variam em número de aulas. Essas seqüências deverão ser realizadas durante o primeiro semestre de 2008 para que possamos analisar a realização delas refletindo sobre o que foi feito, pensando novas alternativas, elaborando e aplicando novas sessões e assim por diante, de forma coerente com a metodologia da pesquisa-ação.

ALGUMAS CONCLUSÕES

Nossa concepção sobre a integração da tecnologia na prática pedagógica dos professores, quaisquer que sejam eles, não coaduna com a idéia de se obter resultados consistentes ao término de um ano. Acreditamos, como dissemos anteriormente, que esse é um trabalho de crescimento conjunto, de idas e vindas, mas que, se

---

[3] Dizemos de forma sistemática por que alguns professores haviam ao longo do ano de 2007 realizado algumas sessões com softwares em suas salas de aula e depois compartilhado essas experiências com o Grupo, porém, a elaboração dessas sessões não havia sido discutida coletivamente.

[4] A professora do Ensino Médio decidiu ficar nesse grupo porque sua escola, do interior do Estado de Mato Grosso do Sul, não tem laboratório de informática.

realizado com verdadeiro significado, construído conjuntamente, os resultados passarão a fazer, de fato, parte dos conhecimentos do professor, ou seja, o professor terá incorporado mais uma disponível para a realização de sua tarefa pedagógica. Assim sendo, não temos, ao final de um ano de trabalho, resultados definitivos, porém, a análise de todo o trabalho desenvolvido mostra que vários avanços aconteceram, tanto no sentido da prática de um trabalho colaborativo dentro do grupo quanto no sentido de desvendar algumas questões sobre a informática aplicada à Educação Matemática. A seguir, apresentamos, uma síntese dos principais resultados obtidos.

Espírito de grupo / Desejo de manter o grupo unido

O sentimento de fazer parte de um grupo começou a ser construído logo nos primeiros encontros, quando os professores expuseram os problemas que vivenciavam nas escolas, no que se refere à integração da tecnologia e decidiram discutir esses problemas com todos os participantes. Isso porque os problemas evidenciados, de modo geral, não se restringiam a um nível de ensino específico. Entretanto, no caso de problemas específicos a um determinado nível houve a manifestação de que talvez a discussão desses problemas possibilitasse à aprendizagem daqueles que atuam em outro nível.

Momentos de colaboração / Indícios de integração

Ao longo dos encontros percebemos alguns momentos de colaboração, em especial naqueles destinados a exploração do LOGO. Foi dada uma rápida explicação sobre o software e, a partir de então o grupo começou a trabalhar de forma livre; não se tratava de um curso sobre o uso do software. Cada vez que um participante tinha uma dúvida ou se sentia bloqueado diante de uma dificuldade, ele procurava outra pessoa para discutir. Além disso, à medida que algum participante fazia um questionamento acerca das possibilidades de uso desse *software* ou a respeito de alguma descoberta, boa parte dos envolvidos sentia-se instigado a descobrir essas e novas possibilidades, a explorar as ferramentas e à confrontar essa experiência ao trabalho que poderiam realizar com seus alunos em suas respectivas escolas, tendo em vista o ensino e a aprendizagem da Geometria. Além disso, duas professoras tomaram a iniciativa de desenvolver, com seus alunos, uma aula fazendo o uso do LOGO. Para tanto, preparam algumas atividades e expuseram ao grupo o que haviam planejado e o que haviam realizado. O grupo fez alguns questionamentos e deu novas sugestões para ampliar o trabalho. As reflexões realizadas ao longo de todo o trabalho desenvolvido durante o ano de 2007 indicam que foi despertada em todos a vontade de explorar de forma crítica a tecnologia para que, de fato, ela possa constituir um instrumento a mais a ser incorporado na prática pedagógica do professor. Na avaliação feita ao final do ano, todos manifestaram contentamento com o que foi desenvolvido e também interesse no prosseguimento da pesquisa. Parece-nos que uma primeira parte, fundamental para o trabalho proposto, foi cumprida: a constituição de um grupo de pesquisa-ação, que trabalha em colaboração e que chegou a certo entendimento sobre o significado e interesse sobre o uso da tecnologia na educação. Agora temos uma outra parte, que consideramos crucial para atingir o objetivo pretendido: a realização das idas e vindas entre as reflexões do grupo e as ações a serem desenvolvidas em sala de aula. A essa parte nos dedicaremos nesse ano de 2008.

Referências

BELLEMAIN, F. (2003) O paradigma do micromundo. In: Luiz Mariano Carvalho; Luiz Carlos Guimarães. (Org.). *História e Tecnologia no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro.

BITTAR, M. (2007) A escolha do software educacional e a proposta pedagógica do professor: estudo de alguns exemplos de Matemática (texto no prelo).

BITTAR, M. (2000) Informática na Educação e formação de Professores no Brasil. *Revista Série-Estudos:* Periódico do Mestrado em Educação da UCDB, Campo Grande.

BRANDÃO, P. C. R. (2005) *O uso de software educacional na formação inicial do professor de Matemática: uma análise dos cursos de licenciatura em Matemática do Estado de Mato Grosso do Sul.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mestrado em Educação, Campo Grande.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. (1997) *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília: MEC/SEF, 8 v.

BROUSSEAU, G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.7, n.2, p.33-115,

FAGUNDES, L. (1996) Problemas de desenvolvimento cognitivo e a interação com a tecnologia. In: *Informática em Psicopedagogia.* Org. Oliveira, Vera Barros. Editora Senac, São Paulo.

NACARATO, A. M. O ensino de Geometria nas séries iniciais. In: IX *Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2007, Belo Horizonte. Diálogos entre a pesquisa e a prática educativa. Belo Horizonte : SBEM e SBEM/MG, 2007. v. 1. p. 1-18.

PAVANELLO, R. M.. (1993) O abandono do ensino da Geometria no Brasil: Causas e conseqüências. *Zetetiké*, Campinas, Ano 1, n. 1, p. 7-17. CEMPEM-FE/UNICAMP.

THIOLLENT, M. (2007). *Metodologia da pesquisa-ação.* São Paulo: Cortez.

EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA: SOLUÇÃO PARA O NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO SUPERIOR

June Lessa Freire – CETIQT/SENAI - jfreire@cetiqt.senai.br

Lilian Nasser – IM/UFRJ e CETIQT/SENAI - lnasser@cetiqt.senai.br

Débora Mendonça Cardador - CETIQT/SENAI - dcardador@cetiqt.senai.br

Resumo

Várias estratégias têm sido utilizadas para tentar preencher as lacunas de aprendizagem em matemática básica de alunos ingressantes no curso superior, sem muito sucesso.

Este trabalho relata o uso da tecnologia no desenvolvimento de um curso de nivelamento à distância para os calouros nos cursos superiores da Faculdade SENAI/CETIQT, concebido numa perspectiva de Sistema Inteligente. Utilizando a metodologia dos desafios, os alunos participam ativamente da construção do conhecimento necessário para preencher as lacunas e acompanhar com bom desempenho as disciplinas do seu curso.

Palavras-chave: educação à distância, sistema inteligente, metodologia dos desafios.

INTRODUÇÃO

O número de alunos ingressantes do ensino superior que trazem lacunas de aprendizagem em diversas áreas do conhecimento em sua formação básica vem aumentando ano a ano. (Palis, 2005 ; Nasser, 2006). Pesquisas apontam a matemática como uma das áreas de maior defasagem de formação. Esse tema tem sido alvo de debates e investigações do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior (Nasser, 2003), da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

A existência dessas lacunas desafia a comunidade educacional a identificar estratégias para assegurar que todos os estudantes superem suas dificuldades e alcancem altos níveis acadêmicos. Nesse sentido, várias iniciativas para suprir as deficiências dos alunos ingressantes nos cursos de graduação têm sido testadas, como cursos de pré-cálculo obrigatórios ou optativos, aulas de apoio e disciplinas eletivas presenciais paralelas às disciplinas da grade curricular.

Este trabalho relata o uso da tecnologia no desenvolvimento de um curso de nivelamento à distância para os alunos ingressantes nos cursos superiores da Faculdade SENAI/CETIQT. Os alunos vêm de várias partes do país, recomendados por empresas têxteis, para os cursos de graduação em Engenharia Industrial Têxtil, Design de Moda, Produção de Vestuário, Artes – habilitação em Figurino e Indumentária e Administração; e para os cursos técnicos.

Ao longo do tempo, o estudo da Educação vem sofrendo muitas mudanças. Uma nova visão, desenvolvida nos últimos 15-20 anos, é fortemente influenciada pelas ciências sociais e cognitivas. O desenvolvimento das teorias de aprendizagem desse período vem provocando mudanças no estudo da natureza da aprendizagem e na percepção que se tem dos aprendizes.

O sistema educacional evoluiu do foco no ensino (professor) para o foco no conteúdo, e atualmente está focado na aprendizagem (aluno). O conhecimento é construído socialmente, por meio da ação, comunicação e reflexão, envolvendo os aprendizes. Além disso, a visão clássica do ensino como "repasse" ou "transmissão" dos conteúdos se transformou na modelagem de experiências práticas, na promoção de conversas interativas e na negociação de significados, que promovem mudanças nas estratégias e crenças dos aprendizes, aprimorando habilidades e competências. Os professores estão aos poucos se tornando orientadores, tutores e facilitadores da aprendizagem em vez de provedores de informação.

Teorias modernas e o uso de novas tecnologias podem ajudar na criação de uma abordagem inovadora para os cursos de nivelamento, que redefina o papel central do conteúdo, e dê mais ênfase no desenvolvimento de habilidades e atitudes investigativas.

Esta pesquisa pretende conceber mecanismos alternativos de nivelamento em matemática na educação superior: o curso de nivelamento em matemática é fruto de pesquisa aplicada, utilizando uma metodologia de aprendizagem não tradicional na estrutura e desenvolvimento de cursos à distância.

EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA

A problemática das dificuldades apresentadas por alunos que ingressam no ensino superior tem sido amplamente discutida nos cursos tradicionais, sem se encontrar uma solução satisfatória. Isto ocorre, principalmente, porque esses cursos não atendem às principais questões do nivelamento:

- o nivelamento não deve ser considerado apenas uma revisão de conteúdos;
- há uma grande variação das lacunas de conhecimento, tanto em conteúdo quanto em aprofundamento;
- é possível aliar as atitudes e experiências pré-existentes dos alunos com o conhecimento do conteúdo do curso;

- nem todos os estudantes aprendem no mesmo ritmo – seu progresso depende do conhecimento prévio e das lacunas individuais;
- a seleção de conteúdos deve ser baseada nas lacunas dos estudantes;
- não é necessário que todos os alunos estudem o conteúdo na sua integridade.

A educação à distância pode ser uma abordagem promissora para o problema do nivelamento do conhecimento no ensino superior, pois permite uma aprendizagem mais flexível e personalizada. Um Ambiente Virtual de Aprendizagem pode ser usado para apoiar a interação e um amplo leque de contextos de aprendizagem. Pode também promover a aprendizagem formal e informal, por meio de estudo dirigido individual. O Curso de nivelamento de Matemática é um exemplo de aprendizagem mediada pela tecnologia, na qual a metodologia da Educação à Distância cria um ambiente de aprendizagem significativo e estimulante, que permite aos estudantes aprender de diversas maneiras.

APRENDIZAGEM PELA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS (ARP)

Na metodologia pela resolução de problemas, o aluno constrói o conhecimento enquanto busca as ferramentas necessárias para resolve-los. Ou seja, em vez de ser apresentado a um conteúdo da forma tradicional, o aprendiz é desafiado a resolver um problema que requer esse novo conhecimento na sua resolução.

O ensino-aprendizagem pela resolução de problemas tem diversas vantagens:

- desenvolvimento de habilidades para resolver problemas, a partir de estratégias variadas;
- a exposição contínua a problemas aplicados da vida real leva os alunos a adquirir autonomia para tomar decisões apropriadas;
- a resolução de problemas permite o acesso, a retenção e a aplicação do conhecimento;
- a prática de resolução de problemas colabora para elevar a auto-estima dos aluno.

A aprendizagem baseada na resolução de problemas pode diminuir as lacunas entre a teoria e a prática que, em muitas circunstâncias, são abordadas separadamente no currículo convencional. Além disso, a ARP promove o desenvolvimento de habilidades de aprendizagem autônoma. Bruner (1976) sugere que, quando os alunos trabalham na resolução de problemas significativos para eles, mostram interesse em questões referentes aos problemas que vão além do mero estudo para a aprovação num exame.

A ARP pode e deve ser utilizada nos cursos à distância, com o objetivo de promover a contextualização e, conseqüentemente, a retenção da aprendizagem.

METODOLOGIA DOS DESAFIOS

A Metodologia dos Desafios é baseada na solução de problemas, que aplica os princípios de *learning to think* e *learning by doing*. A Pedagogia dos Desafios estimula os estudantes a desenvolver uma postura investigativa: os desafios podem ser apresentados em diferentes formatos, tais como jogos, enigmas, simulações ou estudos de caso. Também valoriza as experiências e conhecimentos prévios dos alunos, em consonância com a Ciência Cognitiva.

Em um ambiente de aprendizagem, há metas específicas a serem alcançadas – o aluno tem uma missão a ser cumprida. Essas metas não são apenas um estímulo para a aprendizagem, mas também um fator primário para determinar a organização e a natureza do que está sendo aprendido. Segundo Piaget, há uma necessidade de acomodação quando a experiência não pode ser prontamente assimilada pelos esquemas pré-existentes (Piaget, 1977). O desenvolvimento de um estágio cognitivo para o seguinte é provocado pela necessidade de compreender o ambiente e assimilá-lo; a não assimilação provoca um desequilíbrio cognitivo que força as estruturas cognitivas a se reorganizarem e se acomodarem a fim de permitir a assimilação do objeto de conhecimento. Na Pedagogia dos Desafios, o desequilíbrio cognitivo é o principal fator para estimular a aprendizagem.

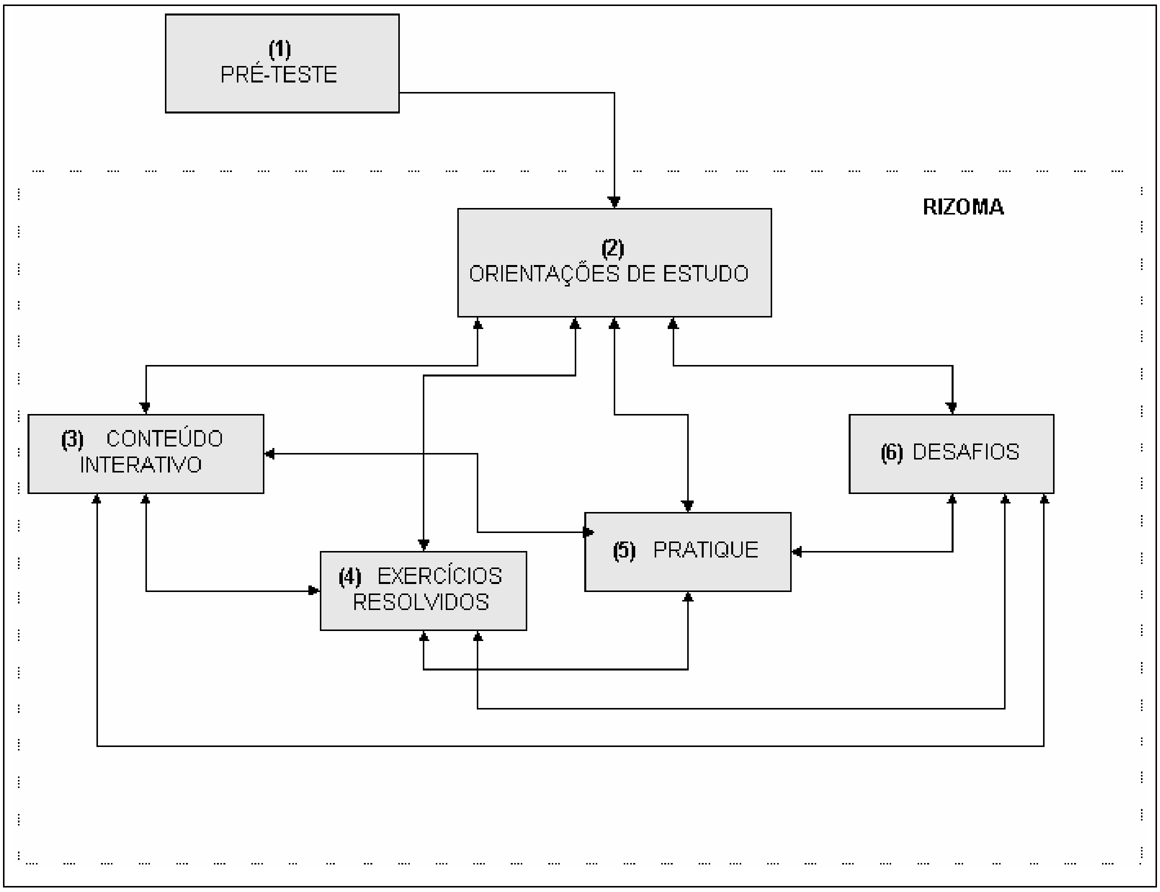
Em contraste com a educação tradicional, que valoriza a replicação de conteúdo e o controle, a Metodologia dos Desafios aponta para o desenvolvimento de um ambiente construtivista de aprendizagem, para o qual é fundamental a adoção de alguns princípios de desenho instrucional (Cunningham, 1993):

- Criar um ambiente realista e relevante – importância;
- O participante pode decidir a ordem de estudo do conteúdo a ser explorado, assim como o método de estudo e as estratégias para solução de problemas – aprendizagem não-linear;
- O papel do professor é o de um mediador de aprendizagem assessorando os estudantes na organização dos objetivos e caminhos para a aprendizagem – *coach;*
- Promover atividades interativas entre professores-alunos e alunos-alunos (Vygotsky, 1991) – colaboração;
- Estimular a reflexão sobre as estratégias de aprendizagem adotadas – metacognição.

METODOLOGIA DO CURSO

O Curso de Nivelamento em Matemática da Faculdade SENAI/CETIQT está sendo desenvolvido dentro de uma perspectiva de Sistema Inteligente. Pode-se definir Sistema Inteligente como aquele que é capaz de “aprender” durante o seu funcionamento, dentre outras características.

O referido curso está organizado segundo o seguinte esquema.



(1) Pré-teste – teste com correção automática, que efetua uma classificação inicial das áreas e graus de deficiência do aluno nos tópicos do curso; tem como resultado as orientações para estudo e as informações sobre a situação inicial do aluno **(1)**.

(2) Orientações para estudo – resultantes do pré-teste, as orientações de estudo contêm informações resumidas para o aluno sobre o resultado do teste, indicações de conteúdo **(3)** e exercícios para seu estudo **(4** e **5)**; as orientações são individualizadas e têm por objetivo direcionar o aluno em seu estudo, permitindo a priorização dos tópicos em que apresenta maior deficiência.

(3) Conteúdo Interativo – apresentação do conteúdo explicativo relativo aos tópicos selecionados, de forma lúdica e interativa; a cada tópico está associado um conjunto de exercícios resolvidos **(4)** e outro de exercícios para praticar **(5)**.

(4) Exercícios Resolvidos – complementando o conteúdo relativo aos tópicos **(3)**, serão disponibilizados exercícios com a resolução, para consulta do aluno.

(5) Problemas para prática e fixação – o aluno irá resolver problemas selecionados de acordo com as áreas e graus de deficiência identificados pelo pré-teste **(1)**.

(6) Desafios – situações-problema que o aluno deverá solucionar com o apoio do conteúdo interativo **(3)** e dos exercícios resolvidos **(4)**.

Após o pré-teste, o aluno recebe como feedback um prognóstico ressaltando os tópicos onde obteve bons resultados e indicando os que precisa estudar e em que nível. É apresentado ao aluno um roteiro de estudo para cada tópico a ser estudado.

O aluno pode navegar pelos componentes do ambiente de aprendizagem não-linearmente, ou seja, estando em qualquer um dos itens, poderá acessar imediatamente qualquer um dos demais.

A avaliação de cada tópico é feita em função da resolução dos desafios apresentados.

ESTRUTURA DO CURSO

Neste curso, não só abordaremos conteúdos específicos da Matemática, mas também serão desenvolvidas as competências relacionadas. Os tópicos de Matemática abordados foram selecionados de acordo com as lacunas de aprendizagem identificadas tanto em testes, como em experiências prévias dos professores em cursos de nivelamento presenciais. Para um primeiro módulo do Curso de Nivelamento em Matemática foram selecionados os seguintes tópicos:

- Números inteiros e decimais;
- Proporcionalidade;
- Frações;
- Porcentagem;
- Sistema de medidas.

Além destes tópicos, são indicados para a elaboração de futuros módulos do curso os tópicos de Álgebra Básica e Funções.

Em cada tópico, as habilidades que os alunos devem alcançar foram relacionadas e classificadas em função da complexidade. Esta estratégia foi adotada visando garantir o atendimento de todas as habilidades em todos os tipos de atividade – pré-teste, conteúdo interativo, exercícios resolvidos, exercícios de fixação e desafios.

O aluno usa o material didático e links complementares como fonte de informação. O material didático não foi desenvolvido para ensinar, mas para dar suporte ao desempenho e dúvidas dos alunos. É utilizado de acordo com a necessidade – a consulta ao material didático não é exigida, embora seja estimulada.

Com o objetivo de criar uma estrutura não-linear e interconectada, foi aplicado o modelo rizomático (Guattari, 1990) para mapear e representar o conhecimento de modo não-hierárquico. O rizoma resultante foi então implementado em um modelo de hypertexto, com conteúdos e links.

Usando o hypertexto, o aluno pode acessar os conteúdos e demais componentes da estrutura do curso, por tópico, nível ou associação de idéias.

MEDIAÇÃO

Os Exercícios Resolvidos constantes no curso são estruturados de forma a fornecer ao aluno a mediação entre os enunciados dos problemas e as estratégias de raciocínio matemático para a sua solução. Os Exercícios Resolvidos têm como principal função preparar o aluno para a resolução dos Desafios. Por exemplo:

Uma escola com 500 alunos funciona em 3 turnos. Sabendo que 40% dos alunos estudam no turno da manhã e 35% estudam no turno da tarde, determine a porcentagem de alunos que estudam no 3º turno.

Resolução:

Qual a porcentagem corresponde ao total de alunos? 100%

Qual porcentagem corresponde aos alunos que estudam no turno da manhã e da tarde? 75%

Então, para calcularmos a porcentagem de alunos que estudam no turno da noite, fazemos:

100% - (40% + 35%) = !00% - 75% = 25%

O processo de ensino-aprendizagem, dentro de um enfoque sócio-cultural (Vygotsky, 1991) é um evento social compartilhado que pode surgir, despertar e colocar em movimento uma variedade de processos internos de desenvolvimento que são possíveis apenas na esfera da interação social. A mediação é a chave principal para promover uma aprendizagem significativa e reflexiva. Ela conduz o estudante à Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), definida como o conjunto de conhecimentos que o aluno tem a habilidade de aprender, mas não compreende ainda (Vygotsky, op.cit.). De acordo com a teoria de ZDP, a capacidade de aprender de uma pessoa não tem limite superior e o que uma pessoa aprende e consegue fazer hoje com a ajuda de outros poderá ser feito individualmente amanhã. A ZDP tem sido vista também como a área na qual os alunos são desafiados a aprender, mas a aprendizagem não é tão difícil, nem tão fácil.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos o Método dos Desafios como um modelo instrucional que é extremamente condizente com os princípios do construtivismo. No ambiente de desafios os alunos são ativamente engajados no trabalho em tarefas e atividades adequadas. O foco é no aprendiz como construtor do seu próprio conhecimento, num contexto similar àquele em que deve aplicar esse conhecimento. Os alunos são encorajados a pensar tanto crítica, quanto criativamente e a monitorar suas próprias compreensões, lançando mão da metacognição.

O uso do método dos desafios num ambiente virtual de aprendizagem pode ser um caminho alternativo para promover uma aprendizagem mais significativa. No caso particular dos cursos de nivelamento em Matemática, é possível atingir o objetivo de preencher as lacunas de aprendizagem por meio de um curso à distância, em que o aluno estuda individualmente aquilo de que necessita, no seu ritmo, de modo a conseguir acompanhar as disciplinas do seu curso superior, alcançando, assim, a individualização do próprio ensino.

Referências

BRUNER, J. **Uma nova teoria da aprendizagem**. Rio de Janeiro: Bloch, 1976.

CUNNINGHAM, D.J. at al. **The textbook of the Future**. In C. Mcknight, A. Dillon & J. Richardson (eds.) Hypertext: a Psychological Perspective. New York: Ellis Horwood, 1993.

GUATTARI, F. **As três ecologias.** Campinas: Papirus, 1990.

NASSER, L. **Educação Matemática no Ensino Superior: uma área de pesquisa em ascensão.** Atas do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (em CD). SBEM, 2003.

NASSER, L. **Aprimorando o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos.** Atas do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Disponível em www.desenho.ufpr.br/IIISIPEM/GT4, SBEM, 2006.

PALIS, G. de L. R. **Educação Matemática: entrelaçando pesquisa e ensino, compreensão e mudança. Educação on-line, N.1.** Disponível em: www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br/cgi-bin/db2www/PRG_1357.D2W/INPUT, PUC-Rio, 2005.

PIAGET, J. **Psicologia da Inteligência**. Rio de Janeiro: Zahar, 1977.

VYGOTSKY, L.S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

DESCOBRINDO O TEOREMA DE PITÁGORAS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Renata Urruth Rosa, PUCRS e Helena Noronha Cury, PUCRS

Neste trabalho, é apresentado um relato de parte de uma investigação sobre a aprendizagem de conceitos geométricos por alunos de Ensino Fundamental, a partir de suas produções em ambiente de Geometria Dinâmica, com uso do software Cabri-GéomètreII. A atividade proposta envolveu o teorema de Pitágoras e os estudantes realizaram todos os passos da construção de quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo. Por meio dos questionamentos feitos pelas pesquisadoras, foi possível acompanhar as conclusões dos estudantes, que chegaram, no final, à fórmula que traduz o teorema. Consideramos que a apresentação de roteiros, em que os alunos não apenas utilizem uma seqüência de comandos do programa, mas que se envolvam na construção e consigam deduzir as conclusões, é uma maneira de levá-los a compreender o teorema e, posteriormente, empregá-lo em problemas de Geometria ou de outras áreas.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA

O ensino de Geometria, no Brasil, vem sendo criticado há muitos anos, argumentando-se que os conteúdos são apresentados somente no final do ano letivo, que são indicadas apenas fórmulas para cálculos de perímetros e áreas, que os teoremas são simplesmente utilizados como ferramentas para solução de problemas. Pavanello (1993), ao abordar o abandono do ensino de Geometria no Brasil, faz um levantamento detalhado das suas condições no século XX e refere-se à reforma Francisco Campos, na década de 30, que estabeleceu programas para as diversas disciplinas e procurou-se unificar as matemáticas, de forma a ter um único professor responsável. Para o ensino de Geometria, havia a recomendação de que fosse iniciado com idéias intuitivas e só depois se fizesse a formalização

No II Congresso Nacional de Ensino de Matemática, realizado em 1957, o professor Ubiratan D´Ambrósio criticava os programas de Matemática então vigentes, propondo uma redistribuição de conteúdos de forma que a Geometria não fosse trabalhada de forma isolada e que fossem feitos apelos à história da Matemática. (D´Ambrósio, 1959).

Com a introdução da Matemática Moderna, os professores, tomados de surpresa e despreparados para as mudanças, não conseguiam trabalhar a Geometria sob o enfoque das transformações. Assim, aos poucos essa área da Matemática foi sendo abandonada ou apenas ensinada no antigo curso secundário.

Neste panorama, diluída a influência da Matemática Moderna, novas diretrizes foram apresentadas aos professores, novamente sem que houvesse uma preparação para a implantação das mudanças, a saber, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), para o Ensino Fundamental e Médio. Nos PCNs do Ensino Fundamental (Ministério da Educação, 1998), encontramos os conteúdos organizados em blocos e, naqueles relacionados com espaço e forma e com grandezas e medidas, são apontadas a importância de fazer construções com régua e compasso, de localizar figuras e deslocamentos no plano, de estudar sistemas de coordenadas, de trabalhar as transformações geométricas e de explorar as noções de grandezas e medidas que auxiliem a compreensão dos conceitos relativos ao espaço e às formas. Ao apresentar as orientações didáticas para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, nos PCNs é considerada indispensável a capacidade de pensar geometricamente, mas há um alerta: “No entanto, a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo [...]”. (p. 122).

As experiências das autoras, uma como professora da Educação Básica e a outra, como professora de cursos de formação inicial e continuada, têm mostrado que muitos professores procuram, efetivamente, deixar o ensino de Geometria para o final do ano letivo, como se tal conteúdo fosse menos importante, ou como se a falta de tempo para esse trabalho não viesse a ser um grande problema.

Segundo Câmara dos Santos (2001), o ensino da Geometria apresenta dificuldades particulares, especialmente pelo fato de que se localiza na fronteira entre o sensível e o inteligível. A separação entre o que é abstrato e o que é concreto muitas vezes traz sutilezas que, por muitos motivos, o aluno não consegue perceber, como por exemplo, a falta de maturidade para trabalhar no campo das abstrações; o fato de que há conceitos básicos de Geometria ainda não compreendidos; dificuldade para destacar, nos desenhos, elementos importantes para a resolução de um determinado exercício, entre outros. Nesses momentos, o professor coloca-se como um elo de ligação na fronteira entre o sensível e o inteligível, auxiliando os educandos a compreenderem o mundo em que vivem. Para isso, pode dispor de recursos que enriqueçam esse processo de construção de conhecimentos e de compreensão desses mundos, como por exemplo, o uso de tecnologia computacional.

Ao trabalharmos com Geometria em um ambiente computacional, podemos empregar softwares de Geometria Dinâmica, tais como *Cinderella, Tabulae, Geometer's Sketchpad, Régua e Compasso, Cabri-Géométre II.* Programas desse tipo permitem a construção de objetos a partir das propriedades geométricas que os definem: “Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõem o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação.” (Gravina, 1996, p. 6). Uma das contribuições desses softwares é que “Eles podem oferecer novas representações de objetos geométricos que, de alguma forma, ‘concretizam’ a figura formal.” (Guimarães, Belfort e Bellemain, 2003, p. 6). Isso permite ao aluno explorar e validar as propriedades geométricas de uma figura, a partir uma multiplicidade de representações.

RELATO DE UMA PESQUISA COM ALUNOS DE 8ª SÉRIE

Com o objetivo de avaliar a aprendizagem de conceitos geométricos de alunos das séries finais do Ensino Fundamental, a partir de suas produções, em atividades desenvolvidas em ambiente de Geometria Dinâmica, foi desenvolvida uma pesquisa que envolveu estudantes de 7ª e 8ª séries de uma escola particular da cidade de Porto Alegre, RS. Foram propostas atividades a serem desenvolvidas no laboratório de informática e os estudantes, ao seguir o roteiro, deviam responder a uma seqüência de questionamentos. Suas produções, salvas em arquivos, e as folhas de respostas aos questionamentos foram os elementos que permitiram identificar as estratégias utilizadas. Além disso, ainda foram entrevistadas as professoras das turmas, para investigar sua opinião sobre a contribuição do trabalho em ambientes de geometria dinâmica na aprendizagem de conceitos de geometria.

Neste trabalho, apresentamos apenas um recorte da investigação, relatando uma das atividades propostas para 63 alunos da 8ª série, intitulada “Descobrindo o teorema de Pitágoras”. O roteiro da tarefa constava de uma introdução e 22 itens, alguns sendo apenas orientações para as construções e outros, questionamentos que os estudantes deviam responder por escrito. Os alunos, que já haviam realizado várias atividades com o Cabri, foram solicitados a abrir um arquivo em branco, traçar uma reta **r**, marcar sobre ela um ponto **O,** em seguida um ponto A, que não estivesse sobre os outros já existentes.

A seguir, deviam construir uma circunferência com centro em **O**, passando pelo ponto **A**. Após, deviam chamar de B o ponto de intersecção da circunferência com a reta **r**. Realizada a primeira parte da tarefa, os alunos deviam criar um arco sobre a circunferência, para isso selecionando a opção **arco** e marcando, sobre a circunferência, o ponto **C** um pouco acima do ponto **B**. Em seguida, deviam marcar o ponto **D**, também sobre a circunferência, em qualquer lugar entre os pontos **A** e **B** e, por fim, o ponto **E**, sobre a circunferência, um pouco acima do ponto **A**.

Muitos alunos encontraram dificuldade para construir os arcos, porque insistiam em marcar apenas dois pontos, inicial e final, para determinar o objeto, esquecendo-se do ponto que deveria ser marcado entre os outros dois citados.

Vários estudantes, após marcarem o ponto C, disseram que não estavam conseguindo construir o arco e recomeçaram repetidas vezes o procedimento. Isso ocorreu porque, ao criarem o ponto inicial do arco sobre a circunferência e arrastarem o mouse para construírem o ponto D, a linha que definia o arco não se mantinha sobre a circunferência. Quando os alunos solicitavam auxílio para resolver o problema, eram orientados a marcar o ponto D, mesmo que o arco não se mantivesse sobre a circunferência e, em seguida, determinar o ponto E, observando o que ocorria. Logo eles percebiam que, ao marcarem o ponto D e em seguida o E, automaticamente, o arco se ajustava sobre a circunferência.

A seguir, os alunos foram solicitados a marcar o vértice **F,** que seria um ponto sobre o arco em qualquer lugar entre os pontos **B** e **A** desde que não fosse sobre algum dos pontos marcados anteriormente, criando então o triângulo **BFA**.

Neste momento da construção, alguns alunos, em vez de marcarem o vértice **F** sobre o arco, conforme solicitado, marcaram-no sobre a circunferência, mas este fato não os impediu de encontrar, ao final, os valores que confirmavam a fórmula do teorema de Pitágoras.

Explicávamos, então, no roteiro, que um triângulo inscrito em uma semi-circunferência é retângulo e nomeávamos os seus lados, apresentando a figura a seguir:

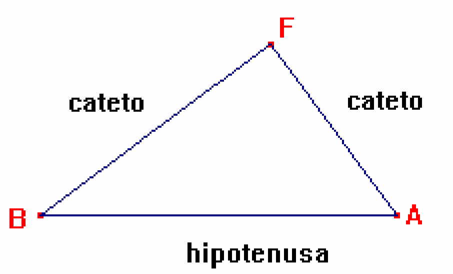


Figura 1 – Triângulo retângulo

Em seguida, solicitávamos aos alunos que construíssem um quadrado sobre cada um dos três lados do triângulo retângulo **BFA**, escondendo objetos que não precisávamos para a construção e explicando, detalhadamente, os passos para obter os quadrados.

Após, deviam construir duas retas perpendiculares ao cateto **BF**, uma passando por **B** (reta **s**) e outra passando por **F** (reta **t**).

Escolhendo o botão **distância e comprimento** e clicando sobre os vértices **B** e **F**, os alunos descobriam a distância entre eles e, conseqüentemente, a medida do lado do quadrado, podendo transferi-la, a partir de **B** até atingir um ponto **P**.

O próximo passo indicava a construção de uma circunferência com centro em **B**, passando por **P**. Em seguida, os alunos deviam marcar o ponto **H** na intersecção da circunferência com a reta **s,** construir uma reta **u** perpendicular à reta **s**, passando pelo ponto **H** e marcar o ponto **J** na intersecção das retas **u** e **t**. Ao observar o quadrado **BHJF** já determinado na tela, os estudantes deveriam esconder alguns objetos e finalizar a construção do quadrado, selecionando a opção **polígono** e clicando sobre os pontos **B**, **H**, **J**, **F** e **B** nessa ordem.

Repetindo os procedimentos, os alunos deviam obter novos quadrados, **FLMA**, sobre o cateto **FA** e **BANQ**, sobre a hipotenusa **BA.**

O próximo passo solicitava a movimentação dos vértices **F** e **A** e a conclusão sobre o que viam. As soluções apresentadas pelos alunos participantes foram agrupadas em categorias, por semelhança. Onze estudantes escreveram sobre o movimento sofrido pela construção de uma maneira geral, ou seja, não especificaram, conforme solicitado, o que acontecia com os objetos ao se movimentar os vértices A e F. As respostas ressaltam o fato de os quadrados aumentarem ou diminuírem de tamanho conforme a movimentação imposta à construção.

Cinco participantes escreveram sobre as modificações ocorridas com a construção em função da movimentação do vértice A ou do vértice F, como, por exemplo: "Movimentando o ponto A a estrutura diminui/aumenta".

Outros dez alunos citaram as modificações ocorridas com a construção durante a movimentação de ambos os vértices, como, por exemplo, "Quando mexe o F os quadrados JHBF e FLMA se movimentam e quando movimenta a vértice A os quadrados e o triângulo aumentam ou diminuem de tamanho".

Dezessete estudantes não especificaram o tipo de movimento sofrido pela construção quando movimentavam um ou outro vértice, mas enfatizaram o fato de os quadrados não perderem suas características geométricas durante o movimento. Um exemplo de resposta para esse caso é: "Quando movimentamos, os quadrados continuam iguais, apenas modificam os tamanhos e não se deformam".

Um dos participantes escreveu que a construção sofria modificações, mudando a forma original dos quadrados. Por fim, temos 19 estudantes que não responderam as questões do roteiro por não concluírem a construção no tempo previsto para realização da atividade.

No próximo passo, era solicitada a determinação da área de cada quadrado e, em seguida, a seleção da opção **calculadora**, de modo que os alunos pudessem somar os valores encontrados para as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos e comparar a soma com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

As respostas dadas para este item também foram agrupadas por semelhança. Na primeira categoria, estão as respostas de quatro alunos que, além de apresentarem o valor obtido, disseram que ele representava a soma das áreas dos quadrados FLMA e BHJF. De certa forma, essas respostas foram redundantes, visto que o procedimento solicitado foi justamente o de somar as áreas dos dois quadrados dos catetos.

Já na segunda categoria estão 28 respostas expressando que o valor obtido com a soma das áreas dos quadrados FLMA e BHJF representava a medida da área do quadrado BANQ, como por exemplo: “41,00 cm^2. A soma da área dos dois quadrados dá a área do quadrado da hipotenusa (que está ligada a hipotenusa)”.

Dois estudantes argumentaram incorretamente, ao explicar o que representava a soma das áreas dos quadrados, como por exemplo: “Obtive 14,92 cm^2 que é a medida do triângulo maior” e “69,00 cm^2 representa a área total de todos os quadrados”.

Quatro alunos não responderam, além daqueles que não concluíram a atividade por falta de tempo.

A seguir, solicitávamos que o aluno movimentasse o vértice **F** para outra posição da tela, limpasse a calculadora e repetisse os cálculos e a comparação. Neste item, 32 estudantes afirmaram que o resultado se mantinha, ou seja, que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos continuava resultando na medida da área do quadrado BANQ.

As respostas de nove estudantes não expressaram o que aconteceu ao somarem novamente as áreas dos quadrados FLMA e BHJF, após a movimentação do vértice F, como por exemplo: “48,05. Um quadrado aumenta enquanto o outro diminui proporcionalmente”. Três alunos não responderam ao item.

No próximo passo, solicitávamos a movimentação do vértice **A** e a repetição das medidas e cálculos, questionando o aluno sobre o que acontecia. Em uma primeira categoria, foram agrupadas as 23 respostas que expressavam que o triângulo **ABF** e os três quadrados tiveram suas medidas alteradas após a movimentação do vértice A, causando modificações nos valores das áreas das respectivas figuras. Como exemplo, temos: “Desta vez os quadrados não iam para o lado eles apenas aumentavam e diminuíam”.

Já 15 estudantes expressaram que, apesar de os valores das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos sofrerem modificações, aumentando ou diminuindo, a soma permanece representando a área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

Um dos 63 participantes restringiu-se a comentar sobre o movimento sofrido pela construção, sem fazer referência quanto aos valores das áreas dos quadrados: “Os quadrados apenas modificaram de lugar”.

Propusemos, então o seguinte questionamento: “Após realizares sucessivos movimentos e repetir os procedimentos para somar os valores das áreas dos quadrados que estão sobre os catetos do triângulo retângulo **BFA**, o que tu pudeste concluir?”

Neste momento da atividade, os alunos já demonstravam terem compreendido as idéias subjacentes ao teorema de Pitágoras. Mesmo aqueles que não conseguiram escrever, por falta de tempo, expressaram verbalmente a conclusão. Continuando ainda no mesmo item, concluíamos o texto, chamando de “a” a medida da hipotenusa do triângulo retângulo e perguntando qual era a área do quadrado construído sobre ela. Finalmente, chamando de “b” e “c” as medidas dos catetos, perguntávamos quais eram as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Trinta e dois estudantes escreveram “a^2” e “b^2 e c^2”, respectivamente, como respostas. Sendo a atividade bastante longa, alguns alunos não conseguiram concluir a parte escrita, mas a observação das telas dos computadores nos quais eles trabalhavam, a análise dos arquivos salvos e as respostas orais mostraram que a maior parte da turma conseguiu compreender o teorema de Pitágoras. Além disso, as respostas dadas posteriormente, em sala de aula, aos exercícios de aplicação, evidenciaram que os alunos tinham, efetivamente, chegado à fórmula que caracteriza, algebricamente, o teorema.

CONCLUSÕES

Ao trabalhar no laboratório de informática com os alunos de 8ª série participantes desta pesquisa, constatamos algumas das vantagens do uso de softwares de Geometria Dinâmica, se compararmos com as aulas tradicionais. Além da descoberta do teorema, os estudantes puderam revisar vários conceitos geométricos, tais como paralelismo, perpendicularismo e ponto de intersecção, na medida em que necessitavam desses elementos para as suas construções. Também puderam modificar, tantas vezes quanto necessário, o tamanho das figuras e comprovaram, imediatamente, que o teorema de Pitágoras continuava válido.

Buquet et al. (1997) comentam o fato de que o trabalho com Geometria em salas de aula tradicionais exige muito mais tempo para que os alunos consigam chegar aos mesmos resultados que são obtidos em uma hora no laboratório de informática, com o software Cabri.

Bastian e Ag Almouloud (2003) também aplicaram seqüências de atividades a alunos de 8ª série, com uso de materiais manipulativos, para descobrir o teorema de Pitágoras. Mesmo não empregando recursos computacionais, os autores concluíram que os alunos conseguiram entender o teorema, não apenas “como uma simples fórmula a memorizar, mas sim como ferramenta utilizável na resolução de inúmeros problemas de Geometria.” (p. 45).

Assim, acreditamos que é necessário buscar novas maneiras de dar significado à Geometria, haja vista sua importância para a aprendizagem de Matemática, em qualquer nível de ensino. Concordamos com Borba e Penteado (2002), que consideram ser o uso de recursos tecnológicos “um caminho novo para a grande maioria dos professores e, como outras inovações educacionais, requer mudanças [...]” (p. 247).

Já mencionamos as sugestões dos PCNs para o ensino de Geometria e julgamos que atividades como a relatada neste texto podem auxiliar os professores a retomar a Geometria como um dos pilares fundamentais do ensino de Matemática.

Referências

Bastian, I. V., Ag Almouloud, S. (2003). O teorema de Pitágoras: uma abordagem enfatizando o caráter necessário/suficiente. *Educação Matemática em Revista*, 14 (10), 45-53.

Borba, M. C., Penteado, M. G. (2002). Pesquisas em informática e educação matemática. *Educação em Revista*, 36, 239-253.

Buquet, A. et al. (1997). The Cabri-Geometre in different levels. In: M. C. Borba et al., *The role of technology in the mathematics classroom*, 61-65. Rio Claro, UNESP.

Câmara dos Santos, M. (2001). O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: *Anais do 7º Encontro Nacional de Educação Matemática*. Rio de Janeiro, SBEM.

D´Ambrósio, U. (1959). Considerações sobre o ensino atual da Matemática. In: *Anais do 2º Congresso Nacional de Ensino da Matemática*, 373-378. Porto Alegre, UFRGS.

Gravina, M. A. (1996). Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: *Anais do 7º Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*. Belo Horizonte, SBC.

Guimarães, L. C., Belfort, E., & Bellemain, F. (2003). Geometria: Uma volta ao futuro via tecnologia? In: *Anais do 2º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. São Paulo, SBEM.

Ministério da Educação (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília, MEC.

Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino da geometria no Brasil: causa e conseqüências. *Zetetiké*, 1 (1), 7-17.

O TEXTO DE DEMONSTRAÇÃO E A PRESENÇA DE QUESTÕES A RESOLVER EM LIVROS DO TIPO *ELEMENTOS DE GEOMETRIA*

Regina de Cássia Manso de Almeida, PUC-Rio/UFF[1]

Este artigo relata parte dos meus estudos de doutorado sobre o tema demonstração em livros-texto usados no ensino brasileiro. As ferramentas para se trabalhar com a base documental foram elaboradas a partir de estudos históricos em que a idéia de releitura dos *Elementos* de Euclides tem um lugar chave. Com isso, o modelo de redação euclidiano e um dos teoremas dos *Elementos*, o teorema de Pitágoras, serviram como parâmetro inicial que me permitiu exibir desdobramentos do tema, e o que se expõe neste artigo é um entre outros casos que relato em minha Tese.

Introdução

Ao abrimos os *Elementos* de Euclides, obra que nos remete aos anos 300 a. C. e a um percurso de mais de dois mil anos, as proposições da geometria são apresentadas numa série de teoremas e problemas seguidos das respectivas demonstrações e se organizam em treze capítulos ou Livros. Os *Elementos* de Euclides é um tipo de livro marcado também pela presença de um conjunto de definições, postulados, axiomas ou noções comuns que estruturam a geometria dedutiva ali exposta.

Quando se observa o texto de uma demonstração euclidiana, nota-se que há referências a proposições já conhecidas, porque elas fazem parte do desenvolvimento dedutivo da prova e, com isso, a indexação torna-se uma característica do texto demonstrativo e do livro inteiro. O livro tipo *elementos de geometria*, livros-texto direcionados ao ensino da geometria dedutiva, seguindo esse padrão, apresentam também o texto indexado. Só que esses índices aumentam em quantidade e variedade quando se analisa um conjunto de livros.

[1] Tese de Doutorado sob orientação do Prof. João Bosco Pitombeira, PUC-Rio e Prof. Gert Schubring, Universidade de Bielefeld.

A presença de novos itens nos *elementos de geometria*

Ao reunir algumas obras que cobrem um certo período de tempo, mesmo que sejam do tipo *elementos de geometria* que se caracterizam por trazer o estudo dedutivo da geometria elementar e que você tenha selecionado um teorema específico, não importa, o assunto se torna complexo.

No meu caso, eu constatei que o teorema de Pitágoras, uma instância local de análise, exigiu uma ordem de análise mais global que considerasse o texto da demonstração em correlação com o livro como um todo. Essa exigência se apresentou porque a proposição, conhecida como teorema de Pitágoras, foi traduzida algebricamente e adquiriu um caráter de ferramenta adequada à resolução das questões propostas pelo livro. Essa rede me levou a uma indexação dos tipos de questões propostas que constavam dos *elementos de geometria*. Tratando-se, na verdade, de uma estrutura que se identifica no livro e que os diferencia uns dos outros e daqueles que não apresentam questões a resolver.

Tipos de questões a resolver presentes nos *elementos de geometria*

Elegi a designação *questões a resolver* ou *questões propostas* para englobar termos como exercício, problema, problema numérico, entre outros que aparecem nos livros da base documental. Este artigo, inclui dados relativos aos seguintes livros do tipo *elementos de geometria* com que trabalhei e que cobrem o período século XIX – anos 30 do século XX:

Elementos de Geometria pelo Marquês de Paranaguá, Francisco Vilela Barbosa, Rio de Janeiro, Typographia Austral, 1838.

Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilinea compilados por C. B. Ottoni, 9ª edição da Editora Francisco Alves, Rio de Janeiro, sem data (1ª. ed. 1853);

Curso de Geometria por Timotheo Pereira, 11ª edição da Livraria Francisco Alves, Rio de Janeiro 1927;

Elementos de Geometria por André Perez y Marin e Carlos F. de Paula, 3ª. edição da Companhia Melhoramentos, São Paulo, sem data (1ª. ed. 1912).

Elementos de geometria, livro da série de publicações F.I.C. editado em Paris no ano de 1933; versão para o português de Eugenio de Barros Raja Gabaglia.

A presença das questões a resolver indica que o livro escolar de geometria dedutiva se modifica e também mostra como as proposições dos teoremas, dadas em sua forma discursiva, passam a ter aplicações em cálculos numéricos.

Os dois primeiros livros da lista acima, os *elementos de geometria* de Paranaguá e Ottoni, não apresentam questões a resolver ao contrário dos restantes. Em relação às outras obras, Timotheo Pereira se particulariza por apresentar listas com *Exercícios numéricos*, intercaladas com as partes expositivas. O próprio nome sugere o tipo de questão em foco: “Pede-se a área de um triangulo regular cujo lado é 30 ^{m}” (p. 221).

Em Perez y Marin e Paula, o desdobramento do modelo teorema-problema dos *elementos de geometri*a já é variado e especialmente significativo porque preserva a palavra *problema* referindo as construções geométricas com régua sem escala e compasso, respeitando o padrão euclidiano que diferencia problema de teorema. O livro tem a característica de apresentar cada capítulo com subtítulos que indicam exposição do assunto seguida das listas de exercícios. As questões propostas, sob a denominação geral, *Exercícios*, se subdividem em até três tipos, *Theoremas a demonstrar*, *Problemas a resolver, Problemas numéricos*. Em *Resolver os seguintes problemas* o termo *problemas* refere questões como “Calcular os lados de um rectangulo em função da diagonal e do perímetro” (p. 98). E a expressão *Problemas numéricos* refere questões do tipo, “Qual o lado de um losango, cujas diagonaes medem 6 m. e 9 m?” (p.99).

Nos *Elementos de Geometria* F.I.C, as questões propostas se diversificam um pouco mais. Os *Problemas numéricos* constam como parte final da obra, apresentando uma lista que se subdivide de modo a indicar o assunto relativo a um grupo de questões, que têm a seguinte forma “Qual é o lado d´um quadrado, se a diagonal e o lado têm em somma 5^{m},80?” (p. 421).

No entanto, há questões inseridas após cada *Livro* ou capítulo e, nesse caso, o título por assunto mostra fatos novos. Observando a lista de questões que encerra o Livro VI, o termo *Theoremas* engloba os subtítulos *Área das figuras, Relações deduzidas da consideração das áreas*. A isso, segue-se o termo *Problemas* que reúne os subtítulos *Construcção das figuras*, *Divisão das figuras, Máxima e mínima*, *Figuras inscriptas ou circumscriptas*, *Procura das fórmulas*. Logo em seguida, o livro informa, “Os dados dos problemas numéricos estão reunidos e expostos no fim d´este livro” (p. 181).

Foi importante explorar a categoria problema, aqui. *Problema* refere construção geométrica, dentro do padrão tradicional dos *elementos de geometria* e também refere trabalhar com o teórico de um modo específico, ou seja, reunir as proposições escritas algebricamente dentro de uma categoria, a *fórmula*, cuja função é possível apreender investigando o que o livro diz a respeito.

Nos *Elementos de Geometria F.I.C.*, a lista nomeada como *Procura das fórmulas* apresenta questões como, “Exprimir o lado e a superfície do triângulo equilateral em funcção da altura” (p. 180). Cruzando essa informação com as orientações do livro sobre como resolver os *Problemas* *numéricos*, há indícios de como esse processo de algebrização e aritmetização da geometria se estabelece nos *elementos de geometria*.

A seção *Problemas numéricos*, na geometria F.I.C. que consta do *Apêndice*, ensina como resolver os problemas, procedimento que não consta dos outros livros da base documental. Sobre o assunto a explicação é a seguinte,

> Em geometria, os problemas numéricos não são mais do que simples applicações do calculo arithmetico á formulas conhecidas.
>
> É importante ter em conta as seguintes observações:
>
> 1º Dispôr os calculos com muita ordem;
>
> 2º Empregar os lagarithmos logo que as multiplicações e as divisões se tornam muito numerosas, e sobretudo quando se tem de extrahir raizes;
>
> 3º Transformar as fórmulas, afim de obter a expressão do valor da incógnita em funcção dos dados, em logar de fazer depender um serie de calculos de um calculo approximado feito no começo.

Em seguida, consta de um exemplo o desenvolvimento da resolução do problema numérico e, se observamos no texto, há um caráter justificativo, além da ênfase em como operar de modo mais simples com os cálculos numéricos.

> Exemplo. Qual é o lado do triangulo equilatero inscripto num circulo que tenha de área 20 centimetros quadrados?
>
> O lado c do triangulo eqüilátero inscripto é dado pela fórmula:
>
> $c = r\sqrt{3}$ (n. 277) (1)
>
> Além d´isso $\pi r^2 = 20$ donde $r = \sqrt{\dfrac{20}{\pi}}$ (2)
>
> Mas em logar de calcular r extrahindo a raiz quadrada do quociente de 20 por π, é melhor substituir r na fórmula (1) pelo valor obtido (2).
>
> $$c = \sqrt{3}\sqrt{\frac{20}{\pi}} = \sqrt{\frac{20 \text{ x } 3}{\pi}}$$
>
> $$c = \sqrt{\frac{60}{\pi}} \ \ ou \ \ \sqrt{60 \text{ x } \frac{1}{\pi}} = \sqrt{60 \text{ x } 0,31831}$$
>
> $$c = \sqrt{19,0986} = 4,37$$
>
> (p. 419)

Explorando como se estabelece a cadeia de justificações da resolução do problema numérico em foco, o índice (n. 277) remete à proposição,

> "Expressão do lado triangulo eqüilátero inscripto, em funcção do raio. O triangulo BAE, rectangulo em A (nº 148, 2º), dá
>
> AE = BE – AB = (2r) – r = 4r – r = 3r

$AE = r\sqrt{3=1,73205...)}$ (p. 118)

Já a referência (nº 148, 2º), acima, afirma "Todo ângulo inscripto n´um semi-circulo é recto; porque tem por medida a metade de uma semi-circunferencia, ou um quadrante" (p. 51). Isso quer dizer que o texto indica as proposições que estão na base das fórmulas que o problema numérico envolve. Por outro lado, considerando a explicação do livro e retomando a afirmativa "os problemas numéricos não são mais do que simples applicações do calculo arithmetico á formulas conhecidas", existe uma ordem padrão caracterizando o funcionamento dos *Problemas numéricos*, a saber, *fórmula – cálculo aritmético*.

Isso mostra uma hierarquização que leva das definições e proposições teóricas aos problemas numéricos. O estatuto do teórico, aqui, adquire um caráter instrumental, de ferramenta com que se resolvem contas da aritmética elementar ligadas às atividades práticas. O próprio livro revela essa última extensão que acabei de mencionar. Ainda no *Apêndice* da geometria F.I.C., consta da página introdutória no item *Problemas numéricos*, o seguinte registro, que é quase um reclame,

> Os nossos *Elementos de Geometria*, tão abundantes em *questões theoricas*, não podem propôr senão um numero mui pequeno de *problemas praticos*; mas o nosso *Curso superior de Geometria*, para o Ensino primário, contém mais de mil *problemas numéricos*; além d´isso, elle termina por uma taboa muito útil que dá as cordas de 10 em 10 minutos. Assim estas duas obras, feitas pra corresponder a diversos usos, completam-se uma com a outra. (p. 420)

Em síntese, o trabalho com o conjunto de livros do tipo *elementos de geometria* mostrou que houve um tempo em que o estudo da geometria dedutiva incluiu questões para o estudante resolver e que as questões a resolver surgem, nos livros, associadas com uma função específica atribuída ao estudo dedutivo em geometria, a dedução de fórmulas. Mostra ainda ser preciso ter atenção com os termos que designam as questões a resolver porque, por exemplo, nos *elementos de geometria* a palavra problema adquire significados distintos. Em um âmbito mais geral, é necessário o processo de contextualização do conteúdo escolar para que se possa entendê-lo em seu desenvolvimento histórico. Finalizando, no início dos anos 30, quando a disciplina matemática foi instituída na escola brasileira com o objetivo de englobar as áreas da geometria, álgebra e aritmética, os *elementos de* geometria, livros destinados ao ensino da geometria dedutiva e estruturados segundo a tradição euclidiana teorema-problema, já tinham incorporado características que revelam a presença de articulações entre as três áreas de conhecimento – um prenúncio da nova disciplina, a matemática escolar e do novo recurso didático, o *livro de matemática*.

Referências

Arnauld A. *Les Nouveaux Elemens de Geometrie*. 2ª Ed. La Haye: Henry Van Bulderen, 1690.

Arsac, G. L'origine de la démonstration: Essai d'épistémologie didactique. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, v. 8, nº 3, p. 267-312. 1987.

Balacheff, N. Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, v. 18, nº 2, p. 147-176. 1987.

Barbin, E. Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie. In__*La démonstration mathématique dans l'Histoire*. Besançon: Ed. IREM, 1989. p. 57-98.

Beltrame, J. *Os programas de ensino de matemática do Colégio Pedro II: 1837* - 1932. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2000. Dissertação de Mestrado.

Caveing, M. Introduction générale. In__VITRAC, B. *Euclide D´Alexandrie: Les Éléments. Traduits du texte de Heiberg*. Paris: Presses Universitaires de France, 1990. p. 12-148. v. 1.

Costa, G. M. L. *Os livros didáticos no Brasil do século XIX*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001. Dissertação de Mestrado.

Dassie, B. A. *A Matemática do Curso Secundário na Reforma Capanema*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001. Dissertação de Mestrado.

Fauvel. J; GRAY, J. *The history of mathematics: a reader.* London: The Open University, 1987.

Goldstein, J. A. A matter of great magnitude: The conflict over arithmetization in 16th, 17th, and 18th century english editions of Euclid's Elements Book I trough Book VI (1561-1795). *História Mahtematica,* nº 27, p. 36-57. 2000

Heath, T. L. *The thirteen books of Euclid's Elements*. Nova York: Dover Publications, 1956.

Legendre. A. M. *Éléments de Géométrie, avec des notes*. Paris: Firmin Didot, 1794.

_____ . *Elementos de Geometria*. Trad. Manoel Ferreira de Araújo Guimarães. R io de Janeiro: Impressão Regia, 1809.

_____. *Éléments de Géométrie, avec des notes*. 12ª ed. Paris: Firmin Didot, 1823.

Lehmann, D.; Bkouche, R. *Initiation à la géométrie*. Paris: PUF, 1982. p. 439-487.

Mahoney, M.S. *The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century*. Disponível em: www princeton.edu/~mike/ articles/beginnings/beginnings.htm. Acesso em: 15 de junho. 2007.

Manso de Almeida, R. C. *Abordagens do conceito de proporcionalidade em livros didáticos de matemática no Brasil do século XX*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2004. Dissertação de Mestrado.

Murdoch, J. E. Transmission of the Elements. In__ GILLISPIE, C. C. (Ed.). *Dictionary of scientific* *biography*. New York: Scribner, 1956. p. 437-459. v. 3.

Rocha, J. L. *A matemática do Curso Secundário na Reforma Francisco Campos.* Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001. Dissertação de Mestrado.

Schubring, G. *Conflits between generalization, rigor, and intuition*: *number concepts underlying the development of analysis in 17-19th century France and Germany*. New York: Springer, 2005.

________. *Análise histórica de livros de matemática: notas de aula*. Campinas: Editora Autores Associados, 2003.

Valente, W. R. *Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930).* São Paulo: Annablume Editora, FAPESP, 1999.

O USO DO AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA TABULAE COMO FERRAMENTA PARA EVIDENCIAR A NECESSIDADE DE DEMONSTRAR

Ulisses Dias da Silva – UFRJ

Luiz Carlos Guimarães – UFRJ

Fábio Lennon Marchon dos Santos – UFRJ

O aprendizado de Geometria é baseado na construção e interpretação das propriedades dos objetos geométricos. A solução da maior parte dos problemas em geometria depende de observar e compreender as relações entre os objetos em estudo, sugerir uma construção para ele e, a partir dela, criar uma demonstração formal da validade do resultado. Neste trabalho, pretendemos mostrar que, se bem utilizados, os ambientes computadorizados dinâmicos podem transformar a maneira como os estudantes aprendem, evidenciando e auxiliando-os na escolha das propriedades que são ou não válidas e do que é imprescindível se demonstrar. Para isso, utilizamos o programa Tabulae *(Guimarães et al, 2001) num curso de aperfeiçoamento de professores, como uma ferramenta para evidenciar propriedades invariantes nas homotetias.*

CONTEXTUALIZAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Segundo Arcavi & Hadas (2000), ambientes computadorizados dinâmicos são laboratórios virtuais onde os alunos podem trabalhar, investigar e aprender matemática. Nestes ambientes, o aluno pode modificar características dos objetos, observando as inter-relações entre eles. A análise destes autores mostra que o desempenho dos alunos no uso de tecnologias para a demonstração depende do planejamento e da execução das atividades propostas.

Para Giraldo & Carvalho (EM PREPARAÇÃO, pg 33),

> *As especificidades da máquina podem ser utilizadas para tornar objetos matemáticos mais concretos, tangíveis, passíveis de manipulação mais direta. (...) Tal concretude pode servir*

> *para revelar as complexidades epistemológicas dos conceitos matemáticos, expondo seu estatuto de objetos abstratos de uma maneira de outra forma improvável.*

Com isso, é preciso planejar atividades que evidenciem características importantes do objeto geométrico em estudo, mas que permanecem escondidas pelas limitações das tecnologias educacionais em uso.

Seguindo esta linha de raciocínio, Yerushalmy (1993) afirma que “em certas situações, figuras estáticas em papel têm capacidade relativamente limitada para prover habilidades matemáticas, pois a estrutura matemática da situação não está suficientemente aparente nestas – no máximo mostram um estágio particular do processo”. Os ambientes dinâmicos têm como vantagem a sua flexibilidade e a possibilidade de modificar as telas mantendo a construção inalterada. Com isso, os alunos podem observar invariantes, conjecturar, abandonar hipóteses e generalizar resultados.

A escolha do meio para a introdução/aprofundamento do conteúdo direciona seu uso didático. Não é uma questão de abandonar os meios existentes, nem de repetir as atividades didáticas já utilizadas no ensino convencional nos ambientes computadorizados dinâmicos, mas de planejar novas atividades para aproveitar da melhor forma possível as novas ferramentas.

Tendo isto em vista, o que podemos propor para o uso da Geometria Dinâmica no ensino de Geometria? A Geometria é, provavelmente, a primeira matéria na qual os alunos têm a oportunidade de exercitar seu capacidade de argumentar matematicamente. Isso vem do fato de que é possível chegar a resultados profundos em Geometria a partir de propriedades auto-evidentes.

Porém, no Brasil, as poucas demonstrações que são expostas na educação básica carecem de alguma ligação com o que o aluno está aprendendo, são limitadas e apresentadas erraticamente. Os alunos não se sentem participantes da construção das demonstrações e os professores apresentam os resultados prontos, decorados, com uma seqüência lógica já dada, deixando de lado o trabalho realizado por ele para chegar à solução. Conseqüentemente, os alunos não sabem reconhecer o que é uma demonstração, nem compreendem seu encadeamento lógico, tendo conseqüencias para a qualidade do ensino.

Esta problemática parece ser mundial. Hadas et al (2000, pg 128), afirmam que:

> *“Only 30% of the students in full year geometry courses that teach proofs (in the U.S.A.) reached 75% mastery in proving. In addition, even those students that succeeded to function in the proving ritual were not always aware of its meaning. They rarely saw the point of proving, and/or the need to prove, especially when the statement to be proved was given as a ready-made fact without any discovery by the learners.”*

Os alunos não sabem reconhecer uma demonstração, nem buscam estratégias demonstrativas para atacar os problemas. Além disso, os alunos não sabem o quê, nem porquê demonstrar. Muitos deles não conhecem a estrutura de uma demonstração formal e, freqüentemente, repetem o enunciado da proposição dada com outras palavras achando que estão demonstrando o resultado. Defendemos que se use a Geometria como ferramenta para aprofundar o raciocínio lógico-dedutivo, dando aos alunos a oportunidade de criar e refutar suas hipóteses.

Além disso, várias pesquisas revelam que dificuldades em demonstração não são exclusividade dos alunos. De fato, ao expor os resultados de suas práticas em cursos de aperfeiçoamento de professores, Belfort et al (1999), afirmam que “mesmo aqueles professores que demonstram um bom conhecimento dos conteúdos ligados à sua prática de sala de aula, em geral não conseguem apresentar justificativas matemáticas para os 'fatos' que utilizam”. Existe uma cultura de valorização do raciocínio dedutivo e, simultaneamente, faltam exemplos acerca da idéia envolvida nas demonstrações.

O intuito não é tornar a Matemática mais fácil ou difícil ao incluir as demonstrações. O importante é desenvolver a competências relacionadas à habilidade de demonstrar dos alunos, fazendo com que eles consigam compreender demonstrações existentes, aprofundar os conteúdos ensinados e estabelecer seus próprios resultados, suas próprias explicações das “verdades” matemáticas. Para isso, é necessário que o aluno se confronte com sua intuição, seja desafiado a afirmar e negar e possa usar a argumentação para convencer-se e convencer sua comunidade próxima.

Propomos uma transformação didática no ensino de Matemática. Em vez de abordagem e organização verticais, aulas expositivas com exemplos descontextualizados, defendemos uma nova roupagem, investigativa, histórica, dialética. Acreditamos que, com isso, a participação dos alunos se transforma, saindo de um estado de passividade para um papel participativo, questionador, interativo e dinâmico. Se este processo for bem empreendido, a contextualização ocorre naturalmente e a discussão sobre os objetos matemáticos sai de sua aplicação com o real, o mundo concreto, e passa a um outro nível, onde vigora a interação dos objetos matemáticos entre si, o mundo abstrato.

O desafio é planejar as atividades em GD de forma que os conceitos estudados aproximem os alunos dos argumentos utilizados na demonstração do resultado, convença-os da necessidade de aprofundar suas conclusões e estabelecer o resultado como verdadeiro através da validação lógica dos argumentos. Como conseqüência, os alunos chegam a um nível mais profundo de abstração.

A mudança agora é em como se observa o conteúdo, como as especificidades dos ambientes dinâmicos podem ser usadas para enriquecer a aprendizagem. Estamos preparados para trabalhar com esta nova realidade? Onde existem oportunidades concretas para se trabalhar as demonstrações levando os alunos a um novo nível de abstração?

Hadas et al (2000, pg 127), afirmam que *"The goal for the teaching of proof is to establish the students' norms of mathematical knowledge: experimenting, visualizing, measuring, inductive reasoning and checking examples are not considered as normative means for this purpose*". Ver a Matemática por trás do conceito implica em re-observar o objeto matemático por outro prisma, conhecendo suas especificidades, tendo uma idéia do encadeamento lógico que levou à necessidade da definição/apresentação deste objeto e a inserção deste no contexto da teoria matemática em estudo.

Os ambientes de GD podem tanto facilitar quanto dificultar este processo. Laborde (2000, p 151) afirma que *"it has often been claimed that the opportunity offered by such environments to 'see' mathematical properties so easily might reduce or even kill any need for proof and thus any learning of how to develop a proof*".

É preciso estar atento aos maus-usos dos ambientes de GD. De fato, a viabilidade ou não de uma ferramenta pedagógica depende muito mais do uso que se faz dela do que de suas características intrínsecas. A confrontação dos alunos com contra-exemplos, limitações dos programas e elementos de surpresa e incerteza são maneiras eficazes de potencializar o uso pedagógico destas ferramentas.

ESTUDO DE CASO

Como exemplo de aplicação do estudo, citaremos uma experiência realizada durante o curso de aperfeiçoamento de professores da prefeitura do município de Rio das Ostras-RJ, em parceria com o Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências da UFRJ – LIMC/ UFRJ – de setembro a novembro de 2007.

O curso consistiu de uma série de atividades que aprofundavam os conteúdos matemáticos básicos utilizados pelos professores, como, por exemplo: área, frações e transformações no plano. Os cursistas eram professores de escolas municipais de ensino fundamental. Os encontros consistiram de momentos de jogos e atividades lúdicas, discussão sobre os objetos matemáticos em estudo na aula e momentos no laboratório de informática, onde os alunos acessavam o programa Tabulæ, modificando telas previamente criadas pelos professores do curso. Tabulæ é um programa de Geometria Dinâmica, desenvolvido na UFRJ, com várias funcionalidades geométricas e vetoriais, além de calculadora.

Na atividade que exporemos, os alunos trabalharam o conceito de ***homotetia***. Eles estavam num grupo de oito e tinham acesso individual ao programa. O professor projetava a atividade com o auxílio de um *data show*, havendo monitores para auxiliar os alunos na construção e tirando dúvidas de caráter geral. Os alunos podiam discutir os resultados entre si, fazendo conjecturas e experimentando modificar a construção na tela.

A atividade consistiu de utilizar as ferramentas do Tabulae para comparar medidas de segmentos e áreas, chegando a conclusões sobre a relação entre estes elementos.

Em primeiro lugar, os alunos construíram uma reta AB e, sobre ela um ponto C. Depois disso, o professor pediu aos alunos que utilizassem a função calculadora para calcular a razão x (em vermelho, na figura 1) entre os comprimentos dos segmentos AC e AB. Esta razão podia ser modificada, bastando movimentar os pontos sobre a reta AB.

O próximo passo foi a construção do triângulo PQR e do ponto O, para ser o centro de homotetia. Por fim, utilizaram a função homotetia para construir o triângulo P´Q´R´, na razão x. Alterando o triângulo, PQR, a razão x e os pontos da reta, o triângulo P´Q´R´ se alterava. Com isso, os alunos ficaram livres para experimentar e observar propriedades invariantes entre os elementos da construção.

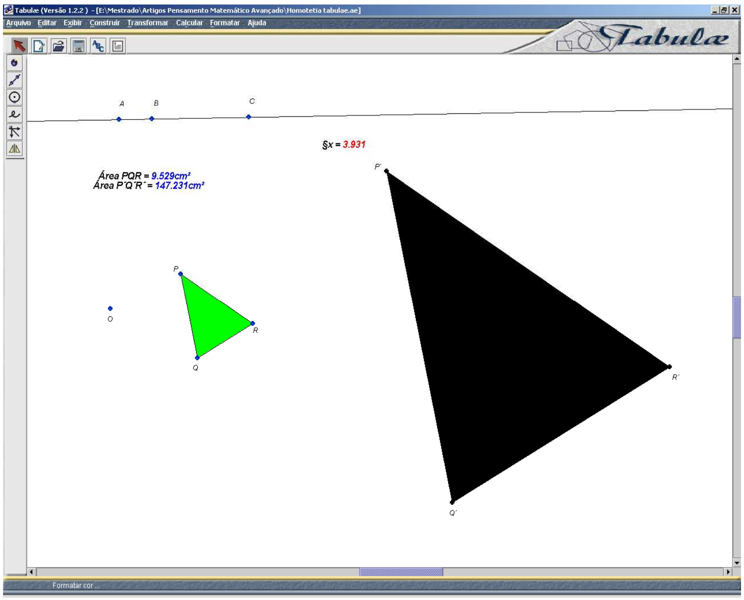


Figura 1

Eles perceberam que a razão entre os segmentos PR e P´R´, era constante e igual a x. Outra observação importante aconteceu quando calcularam a razão entre as áreas dos triângulos. A maior parte deles supunha que a razão seria novamente constante e igual a x. Porém, foram surpreendidos ao ver que isto não acontecia. Com isso se sentiram forçados a refletir sobre isto, ou seja, buscar uma explicação sobre o motivo para que isso acontecesse[1].

Alguns alunos sugeriram que a razão deveria ser o quadrado de x, pois a área é medida em centímetros quadrados. Eles já sabiam, de outras atividades com materiais concretos, que ao dobrar os lados de um quadrado, a área será quadruplicada. Usando a função calculadora para calcular o quadrado de x, eles viram que a conjectura se mostrava verdadeira. A maior parte dos alunos acreditou que a resposta do computador era suficiente, mais dois deles se empenharam na busca por soluções para generalizar o resultado que eles encontraram com materiais concretos.

Na parte final da atividade, o professor pediu aos alunos que construíssem as retas passando por O e pelos vértices de PQR. Os alunos se surpreenderam novamente, pois as retas passavam pelos vértices correspondentes de P´Q´R´. Após uma discussão sobre o assunto, os alunos chegaram à conclusão de que a semelhança de triângulos era um bom caminho para encontrar a solução do problema.

CONCLUSÕES

A atividade realizada evidencia que uma abordagem investigativa do trabalho em sala de aula pode fazer a diferença quando se insere no contexto do ambiente escolar a necessidade de se demonstrar. Não estivemos interessados se os alunos chegaram a explicações válidas e definitivas no contexto da Matemática formal. É papel do professor aprofundar a discussão destes temas e corrigir eventuais erros dos alunos.

Notamos também que a concretude do programa de geometria dinâmica utilizado permite que os alunos experienciem os objetos geométricos de uma maneira de outra forma impossível, mostrando-se uma ferramenta eficiente para nossos propósitos.

A emergência destas novas ferramentas induz uma transformação nas práticas didáticas existentes, justamente para aproveitar estas novas especificidades. É importante propor maneiras eficazes de utilizar os sistemas interativos dinâmicos no contexto da sala de aula como sistematização de atividades e de metodologias específicas para os ambientes e experimentação de novos modelos pedagógicos.

Notas

[1] Pode-se encontrar mais atividades para justificar o uso de elementos de incerteza e surpresa para justificar o uso de demontrações em Arcavi&Hadas (2000).

Referências

ARCAVI, A. & HADAS, N.: (2000). Computer mediated learning: An example of an aproach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5: 25-45.*

BELFORT, E.; GUIMARÃES, L. C.; BARBASTEFANO, R.: (1999). Geometria Dinâmica e Demonstrações na Formação Continuada de Professores. In: Cabri World 99*, 1999, São Paulo. Anais do Cabri World 99. São Paulo : PUC* **-** *SP,. v. eletro.*

BOTANA, F., VALCARCE, J.: (2002). A dynamic–symbolic interface for geometric theorem discovery, Computers & Education *38, 21–35.*

*BOTTINO, R. M, FURINGHETTI, F. (1996): The Emerging of Teachers' Conceptions of New Subjects Inserted in Mathematics Programs: The Case of Informatics***,** *Educational Studies in Mathematics***,** *Vol. 30, No. 2 (Mar., 1996), 109-134*.

De VILLIERS, M.: (1990), The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras 24, 17–24.*

De VILLIERS, M.: (1997), The role of proof in investigative, computer-based geometry: some personal reflections*, in J. King and D. Schattschneider (eds.), Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 15–24.*

De VILLIERS, M.: (1999), 'The role and function of proof'*, in M. De Villiers (ed.), Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad, Key Curriculum Press, 3–10.*

GEOMETRY INVENTOR (1994). Logal Educational Software Ltd., Cambridge, Mass.

GIRALDO, V. A., CARVALHO, L. M. Uma Breve Revisão Bibliográfica sobre o Uso de Teconologia Computacional no Ensino de Matemática Avançada *(EM PREPARAÇÃO).*

GUIMARÃES, L.C., BARBASTEFANO, R.G., CARVALHO, D.: (2001) Tabulæ*, Registro INPI n.0039192.*

HADAS, N., HERSHKOWITZ, R. (1998). Proof in geometry as an explanatory and convincing tool. *In A. Olivier and K. Newstead (Eds), Proc. 22nd PME Conference, 3. Stellenbosch, South Africa, 25-32.*

HADAS, N., HERSHKOWITZ, R. (1999). The role of uncertainty in constructing and proving in computerized environments. *In O. Zaslavsky (Ed.), Proc. 23rd PME Conference, 3. Haifa, Israel, 57-64.*

HADAS, N, HERSHKOWITZ, R. SCHWARZ, B. (2000):, The role of uncertainty in constructing and proving in computerized environments. Educational Studies in Mathematics*, 44***,** *127–150.*

LABORDE, C. (2000). Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Contexts for the Complex Activity of Proving, Educational Studies in Mathematics*, 44, 151–161.*

MATTOS, F. R. P.: (2007), Roteiros de Colaboração para o Software Tabulae: Estraégias Didáticas para um Modelo de Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador à Distância em Geometria, *Tese D.Sc., Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 219 p.*

MATTOS, F. R. P., GUIMARAES, L. C., GUIMARAES, T.: (2005). Cooperative Distance Learning In Mathematics. In: 4th International Conference on Technology in Teaching and Learning in Higher Education, Beijing - China. Proceedings in 4th International Conference on Technology in Teaching and Learning in Higher Education. Chicago - USA : CAS- Conference, v. 1., 42 - 45.

NOSS, R., HOYLES, C. (1996). Windows on Mathematical Meanings. *Learning Cultures and Computers. Dordrecht: Kluwer.*

TALL, D.O. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics, *12, 151-169.*

TALL, D. (1995). Cognitive development, representations and proof. *In Proceedings of the conference Justifying and Proving in School Mathematics, Institute of Education, London, 27–38.*

TALL, D. (2002) Differing modes of proof and belief in mathematics, in Lin, F.-L. (ed.), Proceedings of the International Conference on Mathematics: Understanding proving and proving to understand, *Taipei, Taiwan, National Taiwan Normal University, 91-107.*

YERUSHALMY, M. H., SHTERNBERG, B.: (2002) The Function Web-book*. University of Haifa,.* *http://www.cet.ac.il/math/function/english (consultado em 20/11/2007).*

YERUSHALMY, M. (1993). Generalization in geometry. In J. L. Schwartz, M. Yerushalmy and B. Wilson (Eds), The Geometric Supposer, What is it a Case of? *Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 57-84.*

A FUNÇÃO LOGARÍTMICA E A QUADRATURA DA HIPÉRBOLE

Eduardo Sebastiani Ferreira

IMECC - UNICAMP

ABSTRACT:

One fact that always deeply puzzled me is the link between the logarithmic function and the quadrature of the hyperbole, on account of the analysis of historical books and documents that I have been doing for some time. This fact, although known since the 17th century, was not clear for the mathematicians. I quote Bourbaki:

> *"Quoi qu´il en soit, J. Gregory, en 1667, donne, sans citer qui que ce soit,..., une règle pour calculer les aires des segments hyperboliques au moyen des logarithmes (décimaux): ce qui implique à la fois la connaissance théorique du lien entre la quadrature de l´hyperbole et les logarithmes, et la connaissance numérique du lien entre logarithmes "naturels" et "décimaux''. Et c´est à ce dernier point seulement que s´applique la révendication de Huygens, qui conteste aussitôt la nouveauté du résultat de Gergory? Ça n´est pas plus clair pour nous que pour les contemporains; ceux-ci en tout cas ont eu l´impression nette que l´existence d´un lien entre logarithmes et quadrature de l´hyperbole était chose connue depuis longtemps, sans qu´ils puissent là-dessus se référer qu´à des allusions épistolaires ou bien au livre de Grégoire de Saint-Vincent"(Bourbaki, J. – p.214).*

I started my research with De Beaune's letter to Roberval dated 16 October 1638 (De Beaune, apud Waard, p.139-150), where he states and tries to find the curve, which was named after him, under conditions on the tangent at any of its points. It is one of the first inverse tangent problems. Descartes' reply, correcting his proof, comes in a letter to Roberval dated 15 November 1638 (Scriba, p.118-122). Eventually, Leibniz in a letter to Oldenburg of August 1676 shows (Scriba, p.122), using his differential calculus and his notation that:

$$\int \frac{dy}{y} = -\frac{x}{c},$$

from which it follows that $x = -c\log\frac{y}{c}$.

The elucidation came to me when L'Hôspital wrote in the Journal des Sçavans about this curve and cast a challenge for the calculation of its length, which was solved by Varignon 11 years later in the same journal, (L´Hôpital, 1692, p. 401-403), (Varignon. 1703).

L´HÔPITAL'S CHALLENGE TO GEOMETERS FOR THE RECTIFICATION OF DE BEAUNE'S CURVE.

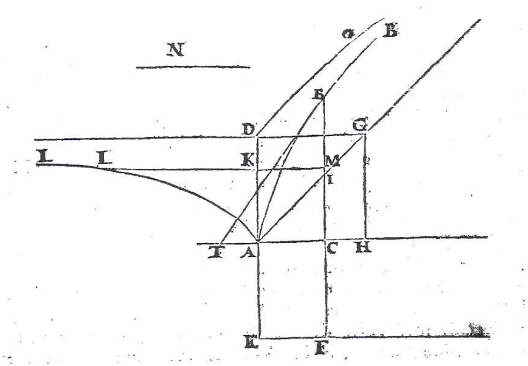
I present L´Hôpital's appeal for the rectification of the curve, suggesting that he already knew it, due to the four properties he attributed to it. The interesting fact is that he does not make use of the logarithmic function despite, I believe, being aware of Leibniz's result. (Journal des Sçavans – 1691 – I – p.401):

*"SOLUTION DU PROBLÈME QUE M. DE BEAUNE proposa autre fois à M. Descartes, & que l´on trouve dans la 79ème de ses lettres, tome 3. Par Mr. G***.*

PROBLEME

Une ligne droite quelconque N estant donnée, & ayant mené deux autres lignes indéfinies AC, AI, en sorte que l´angle CAI soit de 45 degres; on demande la manière de decrier la courbe ABB qui soit de telle nature que si l´on mène d´un de ses points quelconques B, l´ordonnée BC & la touchante BT, la raison de BC à CT soit toujours la mesme que celle de la droite N à BI.

SOLUTION



Ayant formé le quarté AG qui a pour côté la droite AH égale à la ligne donnée N, l´on décrira entre les Asymptotes GD, GH par le point A l´hiperbole ALL, & ayant prolongé DA en E, en sorte que AE soit egale à AH, l´on prendra le rectangle EC egal à l´espace hiperbolique AKL, l´on prolongera en un point M, & l´on prendra enfin IB egal à CM, je dis que le point B sera à la courbe qu´il fallout decrier."

I hereby present an analysis of L´Hôpital's appeal which, I believe, made me understand the relation between the logarithmic function and the quadrature of the hyperbole.

INTRODUÇÃO

Um dos fatos históricos que mais me intrigava era a ligação entre a função logarítmica e a quadratura de hipérbole. Pelas análises que fiz em livros históricos e documentos que consegui arregimentar durante algum tempo, esse fato, apesar de ser conhecido desde o século XVII, não era claro para os matemáticos. Para confirmar esse fato cito Bourbaki:

> *Para tomar um exemplo mais instrutivo, qual é o autor do teorema* $\log x = \int \frac{dx}{x}$, *e qual é sua data? A fórmula, tal como acabamos de escrever é de Leibniz, pois ambos os membros são escritos na sua notação. Leibniz ele mesmo, e Wallis, atribuem o resultado a Grégoire de Sant-Vincent. Esse último, no seu Opus Geometricum (aparecido em 1647, mas redigido, diz ele, muito tempo antes) demonstra somente a equivalência do que se segue: se* $f(a,b)$ *designa a área de um segmento hiperbólico* $a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq A/x$, *a relação* $\frac{b'}{a'} = (\frac{b}{a})^n$ *leva a* $f(a',b') = n.f(a,b)$, *ao qual seu aluno e comentador Sarasa acrescenta, então, quase em seguida, a observação de que as áreas* $f(a,b)$ *podem, então, "tomar lugar dos logaritmos". Se ele não disse mais, e se Grégoire, ele mesmo, não tenha dito nada, não é que, para a maioria dos matemáticos dessa época, os logaritmos eram "ajudas ao cálculo", sem direito a lugar na matemática? É verdade que Torricelli, em uma carta de 1644 (Torriceli apud Loria – p.75-89) fala dessas pesquisas sobre a curva que nós representaríamos por* $y = ae^{-cx}, x \geq 0$, *e acrescenta que, onde Neper (que por sinal cobre de elogios) "possuía somente a prática da arimética", ele mesmo " tira uma especulação de geometria."; e ele deixou sobre essa curva um manuscrito evidentemente preparado para publicação, mas que ficou inédito até 1900 (E. Torricelli, p. 335-347). Descartes, por seu lado, tinha encontrado a mesma curva desde 1639 a propósito de um "problema de De Beaune" e tinha escrito sem falar de logaritmos (Descartes, p. 514 – 517). De qualquer maneira, J. Gregory, em 1667, dá, sem citar quem quer que seja (Gregory, apud Hugeni, p. 407 - 462), uma regra para calcular as áreas dos segmentos*

hiperbólicos por meio dos logaritmos (decimais): isso implica o conhecimento teórico da ligação entre a quadratura da hipérbole e os logaritmos, e o conhecimento numérico da ligação entre logaritmos "naturais" e "decimais". É sobre esse último ponto somente que se aplica a reivindicação de Huygens, que contesta logo a novidade do resultado de Gregory (Huygens, p. 228-230)? Isso ficou mais claro para nós do que para os contemporâneos; em todo caso, tivemos a impressão clara de que a existência de uma ligação entre logaritmos e a quadratura de hipérbole era coisa conhecida há muito tempo, sem que eles pudessem se referir a isso a não ser com alusões epistolares, ou bem ao livro de Gregorii de Saint-Vincent (Gregorii, p. 213).(Bourbaki, N. p. 213)

Iniciei minha pesquisa com a carta de De Beaune à Roberval de 16 de Outubro de 1638 (De Beaune, apud Waard, p.139-150), na qual ele enuncia e tenta achar a curva que recebeu seu nome, a partir de condições sobre a tangente em qualquer de seus pontos. É um dos "primeiros problemas inversos da tangente". A resposta de Descartes, corrigindo sua demonstração, veio numa carta, também para Roberval de 15 de Novembro de 1638. (Scriba, p.118-122). Finalmente é Leibniz, que numa carta a Oldenburg de Agosto de 1676, mostra (Scriba, p.122), usando seu cálculo diferencial que

$$\int \frac{dy}{y} = -\frac{x}{c}\text{, que dá } x = -c \log \frac{y}{c}.$$

A compreensão me veio devido a um desafio de L'Hôspital, (L´Hôpital, 1692, p. 401-403), respondido por Varignon, depois de onze anos, no mesmo jornal, mostrando a construção da retificação de curva de De Beaune e sua ligação com a quadratura da hipérbole. (Varignon. 1703)

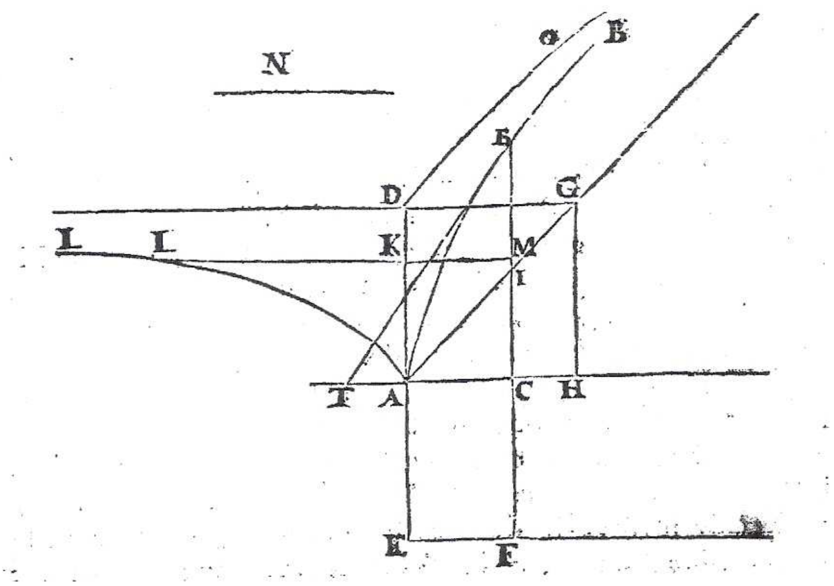
DESAFIO DE L´HÔPITAL AOS GEÔMETRAS PARA A RETIFICAÇÃO DA CURVA DE DE BEAUNE

Apresento minha tradução do apelo de L´Hôpital para a retificação da curva, dando a entender que ele já a conhecia, pelas quatro propriedades que atribui à curva. O interessante é que ele não usa a função logarítmica, mesmo, crendo eu, já conhecendo o resultado de Leibniz.

Journal des Sçavans – 1691 – I – p.401

*"Solução do problema de M. De Beaune proposto já algum tempo à M. Descartes e que encontramos nas suas cartas, N° 79, tomo 3; por Mr. G***" (Marques de L'Hôspital)*

Uma linha reta qualquer N será dada, e tendo traçado duas outras retas indefinidas AC e AI, de maneira que o ângulo CAI seja de 45°; pergunta-se o modo de descrever a curva ABB, cuja natureza seja de que se traçarmos de um de seus pontos, por exemplo B, a ordenada BC, e a tangente BT, a razão de BC e CT será sempre a mesma que da reta dada N e BI.($\frac{BC}{CT} = \frac{N}{BI}$*)*



Formando o quadrado AG, cujo lado AH seja igual ao N dado, descrevemos as assíntotas GD e GH, pelo ponto A da hipérbôle ALL. Prolongando DA em E, de maneira que AE seja igual a AH = N, tomamos o retângulo EC cuja área é igual ao espaço hiperbôlico AKL. Prolongando, também, as retas LK e FC até que elas se encontrem no ponto M. Tomamos, enfim, IB igual a CM. Eu digo que o ponto B está na curva que queremos determinar.

É evidente que a natureza dessa curva ABB depende da quadratura da hipérbole e, também, que ela é mecânica no sentido de Descartes.(observação a baixo)

Vejamos agora algumas de suas propriedades:

1) *Ela tem por assíntota a reta DO, paralela a AI.*
2) *Se chamarmos* $AC = x$ *e* $BC = y$ *o espaço ABC, compreendido pelas retas AC, CB e pela porção AB da curva* $= xy - \frac{1}{2}y^2 + nx$,

3) A distância do centro de gravidade do espaço ABC da reta $AC = n + \frac{3xy^2 - 2y^3}{6xy - 3y^2 + 6nx}$ *e de* $AK = \frac{1}{2}n + \frac{3x^2y - y^3}{6xy - 3y^2 + 6nx}$*, e temos por conseguência os sólidos, meio sólidos etc. formados pelas revoluções desse espaço ao redor, tanto de AC, de AK ou de BC.*

4) É facil determinar os centros de gravidades dos meios sólidos, mas, com precisamos de um endereço particular para retificar a curva, supondo a quadratura da hipérbole, eu proponho esse problema aos Geômetras, lhes assegurando que ele merece ser pesquisado.

Eu não coloco aqui a demonstração pois aqueles que entendem essa matéria a encontrarão facilmente e é preciso muita discussão para fazer os outros a compreenderem.

Obs: (L'Encyclopédie de Diderot e d'Alembert)

"Descartes foi o primeiro a pensar em exprimir as linhas curvas pelas equações. Essa idéia, sobre a qual se fundamenta a aplicação da Álgebra à Geometria, é muito feliz e fecunda.

As curvas se dividem em algébricas, que chamamos segundo Descartes de curvas geométricas, e as transcedentes, que para ele são as mecânicas. As algébricas, ou geométricas, são aquelas nas quais a relação entre abscissa e ordenada pode ser expressa por uma equação algébrica, por exemplo: $a^2 - x^2 = y^2$*. As equações de uma curva mecânica só podem ser expressas por equações entre* dx *e* dy*. Existem dois tipos desse gênero de curvas. Podemos colocar:*

1) As curvas exponenciais, nas quais uma das incôgnitas ou todas duas entram em expoentes, como as curvas de equações: $y = a^x$*, ou* $y^x = a^y$ *, etc.*

2) Ou, as curvas intertranscendentes nas quais as equações são expressas segundo radicais, por exemplo: $x = y^{\sqrt{2}}$ *.*

Intertranscendente é o termo que Leibniz usou para designar as funções de potências y^a quando a é irracional. Essas curvas não são nem geométricas, nem mecâncias pois suas equações são finitas sem ser algébricas.

ANALISANDO A PROPOSTA DE L´HOPITAL

Tomando *AC* como eixo dos *x* e *BC* dos *y*, a razão que define a curva de De Beaune pode ser escrita como $\frac{BC}{CT} = \frac{N}{BI}$. Chamando o comprimento do segmento N de a e, usando a semelhança de triângulos retângulos $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{CT}$, a sub-tangente, pode ser escrita em coordenadas $CT = y\frac{dx}{dy}$. Como ACI é um triângulo retângulo isósceles, temos que $BI = CI = x$. Assim, a razão se escreve como $\frac{y}{y\frac{dx}{dy}} = \frac{a}{y-x}$, ou ainda, $(y-x)dy = adx$ (1). Fazendo uma substituição de coordenadas, chamando $z = a-(y-x)$ e $y = y$ e derivando temos: $\frac{dz}{dy} = -1+\frac{dx}{dy}$, isso é $\frac{dz}{dy} = -1+\frac{y-x}{a} = \frac{-a+y-x}{a} = -\frac{z}{a}$. Integrando, obtemos $\int \frac{1}{z}dz = -\int \frac{dy}{a}$ e, pelo conhecimento atual, $\ln|z| = -\frac{y}{a}+C$, ou então, $\ln K + \ln z = -\frac{y}{a}$, pois $z > 0$. Dessa igualdade podemos escrever que $Kz = e^{-\frac{y}{a}}$, ou ainda, $z = \frac{1}{K}e^{-\frac{y}{a}}$. Como nossa curva passa pelo ponto (0,0), isto é, $y = 0 \rightarrow z = a$, $z = ae^{-\frac{y}{a}}$. Voltando às coordenadas antigas, $x = y - a + ae^{-\frac{y}{a}}$, ou ainda, $y - x = a - ae^{-\frac{y}{a}}$ (2). Isso mostra, então, que a curva de De Beaune é logarítmica, ou então, exponencial.

Consideremos, agora, a hipérbole $(a-x)(a-y) = a^2$. Ela passa pela origem e tem as retas: $x = a$ e $y = a$ como assíntotas. Sua equação, também, pode ser escrita como $x = a - \frac{a^2}{a-y}$.

Para calcular a área da região *ALK* temos que calcular a integral entre zero e um ponto *K* do eixo *y*, digamos de coordenadas $(0, y_K)$ .Como estamos calculando uma área para valores de *x* negativos a integral vai ser negativa:

$$-\int_0^{y_K} xdy = -ay_K - a^2\int_0^{y_K}\frac{dy}{a-y} = -ay_K - a^2\ln|y_K - a| + a^2\ln a = -ay_K - a^2\ln\frac{a-y_K}{a}$$, pois $a > y_K$.

L´Hôpital impõe que esse valor deve ser igual a ax, a área do retângulo *ACEF*, para um x dado, ou então: $ax = -ay_K - a^2 \ln\frac{a - y_K}{a}$, ou ainda, $\frac{-y_K - x}{a} = \ln\frac{a - y_K}{a}$, isso é, $a - y_K = ae^{\frac{-y_K - x}{a}}$.

Logo: $y_K = a - ae^{\frac{-y_K - x}{a}}$ (3).

Comparando as equações (2) e (3) temos que $-\frac{y}{a} = \frac{-y_K - x}{a}$. Podemos concluir que $y_K = y - x$, que é a afirmaçao de L´Hôpital, *IB=CM*.

Creio que com isso mostro a ligação da função logarítmica com a quadratura de hipérbole, por meio da curva de De Beaune.

Vejamos agora as propriedades dessa curva apresentadas por L´Hôpital. Ela tem por assíntota a reta *DO*, paralela à *AI*: De fato, como a equação da curva é $x = y - a + ae^{-\frac{y}{a}}$, a diferença entre ela e a reta de equação $x = y - a$ é $ae^{\frac{-y}{a}}$, que tende a zero quando y cresce.

2 – *Se denominarmos AC de x e BC de y o espaço ABC compreendido pelas retas AC e CB, e pela porção AB da curva é igual a* $xy - \frac{1}{2}y^2 + ax$.

Para mostrar essa afirmação temos que o espaço *ABC* pode ser calculado como $\int_0^x ydx$, ou ainda, como o retângulo de lados *AC* e *BC*, menos a área entre a curva e o eixo y.Logo, $\int_0^x ydx = xy - \int_0^y xdy$. Da igualdade (1) podemos escrever que: $\int_0^y ydy - \int_0^y xdy = \int_0^x adx$,ou $\frac{y^2}{2} - \int_0^y xdy = ax$. Substituindo na igualdade acima: $\int_0^x ydx = xy - \int_0^y xdy = xy - \frac{y^2}{2} + ax$, que é a igualdade dada por L´Hôpital.

3 – *A distância do centro de gravidade do espaço ABC à reta AC é* $= a + \frac{3xy^2 - 2y^3}{6xy - 3y^2 + 6ax}$ *e de AK é* $= \frac{1}{2}a + \frac{3x^2y - 2y^3}{6xy - 3y^2 + ax}$. *Então, podemos considerar os sólidos, meia folhas, etc., formados pela revolução desse espaço, tanto ao redor de AC, de AK e de BC.*

Vamos calcular o centro de gravidade da região solicitada, isto é, as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ desse ponto. Temos que:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^x x dA}{\int_0^x dA}, \text{ e } \bar{y} = \frac{\int_0^x y dA}{\int_0^x dA},$$

em que dA é o elemento de área da região, ou seja, $dA = ydx$.

Logo, $\bar{x} = \dfrac{\int_0^x xydx}{\int_0^x ydx}$ e $\bar{y} = \dfrac{\int_0^x y^2 dx}{\int_0^x ydx}$. Calculemos, então, $\bar{x}$. O denominador é a área da região, que já foi determinada no itém 2, $\int_0^x ydx = xy - \int_0^y xdy = xy - \dfrac{y^2}{2} + ax$. Falta achar o numerador $\int_0^x xydx$. Vamos calcular essa integral pelo processo de 'integração por partes': chamando $u = y$ e $xdx = dv$, temos que: $\int_0^x xydx = y\dfrac{x^2}{2} - \int_0^y \dfrac{x^2}{2}dy$. Voltemos a equação de definição da curva (1) $ydy - xdy = adx$, que multiplicada por y: $y^2dy - yxdy = aydx$ (4), e por x: $xydy - x^2dy = axdx$ (5). Somando essa duas equações (4)+(5) e integrando no intervalo solicitado tem-se: $\dfrac{y^3}{3} - \int_0^y x^2dy = a(xy - \dfrac{y^2}{2} + ax) + a\dfrac{x^2}{2}$. Logo $-\dfrac{1}{2}\int_0^y x^2dy = -\dfrac{y^3}{6} + \dfrac{a}{2}(xy - \dfrac{y^2}{2} + ax) + \dfrac{a}{2}\dfrac{x^2}{2}$.

Podemos, então, escrever que: $\bar{x} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{\dfrac{yx^2}{2} - \dfrac{y^3}{6} + a\dfrac{x^2}{4}}{xy - \dfrac{y^2}{2} + ax} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{3yx^2 - y^3}{6xy - 3y^2 + as} + \dfrac{ax^2}{4xy - 2y^2 + 4ax}$,

que difere do encontrado por L´Hôpital pelo último termo da soma. Essa é a abcissa do centro em relação a reta *AK*.

Vejamos agora $\bar{y}$, $\bar{y}=\frac{\int_0^x y^2dx}{\int_0^x ydx}$, o denominador já é conhecido, é a área da região, isto é, $\int_0^x ydx = xy-\int_0^y xdy = xy-\frac{y^2}{2}+ax$. Temos que calcular o numerador $\int_0^x y^2dx$. Usando, mais uma vez, a integração por partes: $u=y^2$ e $dv=dx$, temos que $\int_0^x y^2dx = y^2x-\int_0^y x2ydy = y^2x-2\int_0^y xydy$. Subtraindo (4)-(5) e integrando nos intervalos dados, temos: $\frac{y^3}{3}-2\int_0^y xydy+\int_0^y x^2dy = a\int_0^x ydx - a\frac{x^2}{2}$. Por outro lado, já calculamos $\int_0^y x^2dy = \frac{y^3}{3}-a(xy-\frac{y^2}{2}+ax)-a\frac{x^2}{2}$. Então: $\int_0^x y^2dx = y^2x-\frac{y^3}{3}-\frac{y^3}{3}+a(xy-\frac{y^2}{2}+ax)+a\frac{x^2}{2}+a(xy-\frac{y^2}{2}+ax)-a\frac{x^2}{2}$ e assim

$$\bar{y}=\frac{\int_0^x y^2dx}{\int_0^x ydx}=2a+\frac{-2\frac{y^3}{3}+y^2x}{xy-\frac{y^2}{2}+ax}=2a+\frac{-2y^3+3y^2x}{3xy-\frac{3}{2}y^2+3ax}=2(a+\frac{3y^2x-2y^3}{6xy-3y^2+6ax}),$$

..

que difere duas vezes do valor dado por L´Hôpital. Nesse resultado, $\bar{y}$ é a ordenada do centro em relação à reta *AC*.

Para os sólidos de revolução devemos simplesmente fazer a substituição das coordenadas correspondente. Assim o sólido de revolução da superfície *ABC* em torno do eixo terá equação:

$$x=\sqrt{y^2+z^2}-a+ae^{-\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{a}}.$$

4 – *É fácil determinar os centros de gravidade dessas meia-folhas. Mas como precisamos de uma equação particular que retifique a curva, supondo a quadratura da hipérbole, eu proponho esse problema aos Geômetras, lhes assegurando que ele merece sua pesquisa.*

Eu não a demonstrarei aqui, pois aqueles que entendem dessa matéria, a encontrarão facilmente, e que será necessário muito "discurso" para que os outros a compreendam.

Foi esse desafio que levou, onze anos depois, Varignon a escrever seu artigo no *Journal des Sçavans*, ou seja a retificão da curva de De Beaune (Le Journal des Sçavans,1703, p.117 - 121). Varignon faz uso da quadratura da hipérbole para efetuar algumas integrações, como, por exemplo, $\int \frac{2a^2 dz}{a - z\sqrt{a^2 + z^2}}$ (p.119).

CONCLUSÃO

O uso da quadratura da hipérbole era muito usado nessa época em integrações. Entretanto, quando De Beaune apresentou sua curva, como um problema inverso da tangente, tenta resolvê-lo usando o método de Descartes. Mais tarde, Descartes faz correções a seu processo usando uma série, que já tinha sido usada por Nepier para introduzir o logarítmo, mas nenhum dos dois autores se refere à função logarítmica. A discussão dos errros cometidos por De Beaune e a solução de Descartes são muito bem estudadas na publicação do IREM de Basse-Normadie, *Aux Origines du Calcul Infinitésimal* (1999).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Bourbaki, N. – *Éléments d'Histoire des Mathématiques* – Hermann – Paris – 1974.

Descartes, R.- *Oeuvres*, ed. Adam et P. Tannery, 13 vol. Paris (L. Cerf) 1897 -t. II p. 514 – 517- 1897-1913.

Gregorii, J. A Sancto Vicentio, - *Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni*,...- 2 vol,- Antverpiae -1647.

Gregory, J. - Vera Circuli et Hyperbolae Quadraturae... Pataviae – 1667-, reproduzido em [Chirstiani Hugenii, Zulichemii Philosophi vere magni, Dum viveret Zelemii Toparchae, *Opera*... 4 tomes em 1 vol., Lugd. Batav. 1751].

Hugenii, C.- Zulichemii Philosophi vere magni, Dum viveret Zelemii Toparchae, -*Opera*... 4- tomes em 1 vol.-, Lugd. Batav.- 1751.

Huygens, C. - *Ouvres completes,* - 22 vol. – t. VI - La Haya (M. Nijhoff), 1888-1950.

IREM de Basse Normandie – *Aux originies du calcul infinitésimal*. Paris :Ellipses, 1999.

L´Hôpital, G. – Solution du problème que M. De Beaune proposa autrefois à M. Descartes, et que l´on trouve dans la 79 de ses lettres, tome 3 – *Le Journal des Sçavants* (p. 401-403) – Chez Jean Cusson- Paris – 1692.

Loria, G. -Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curve logarítmica.- *Bibl. Math*. (3) t.1,- p. 75-89 – 1900.

Sarasa - P.Alfonso Antonio de - *Solutio problematis*....,- Antverpiae, - 1649.

Scriba, C. – *The Inverse Method of Tangents: A Dialogue between Leibniz and Newton* (1675-1677).

Torricelli, E - *Opere*, 4 vol. t. I- Ed. G. Loria et G. Vassura,- Faenza (Montanari), -1919.

Varignon, P. – Solution du probleme que M. le Marquis de L´Hôpital a proposé aux Géomètres dans le Journal des Sçavans de 1692, p.59- *Le Journal des Sçavants*- (p.117 - 121) – Chez Jean Cusson- Paris – 1703.

Waard, C. – *Correspondance du P. Marin Mersenne* – v. VIII – Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique – Paris – 1963.

UMA VERSÃO INTERATIVA DA ENCICLOPÉDIA DOS CENTROS DO TRIÂNGULO

Humberto José Bortolossi, Lis Ingrid Roque Lopes Custódio, Suely Machado Meireles Dias

Na escola aprendemos que as três medianas de um triângulo sempre se encontram em um mesmo ponto: o baricentro do triângulo. Outros pontos conhecidos desde a Grécia Antiga são o ortocentro, o circuncentro e o incentro. Com o passar do tempo, uma série de propriedades, lugares geométricos e centros do triângulo foram descobertos. Nas últimas décadas, usando coordenadas baricêntricas, o pesquisador Clark Kimberling criou uma enciclopédia com mais de 3000 destes pontos especiais, listando suas propriedades algébricas, mas sem figuras. Neste trabalho apresentamos uma versão visual e interativa desta enciclopédia, construída com o auxílio do software de geometria dinâmica gratuito Régua e Compasso.

OS CENTROS DO TRIÂNGULO

Apesar de ser o mais simples dos polígonos, o triângulo guarda propriedades surpreendentes. Por exemplo, as três medianas de um triângulo *sempre* se encontram em um mesmo ponto: o baricentro do triângulo (o ponto G na Figura 1). Também são concorrentes as três alturas (o ponto de concorrência é o ortocentro do triângulo, o ponto H na Figura 1) e as três mediatrizes (no circuncentro do triângulo, o ponto O na Figura 1).

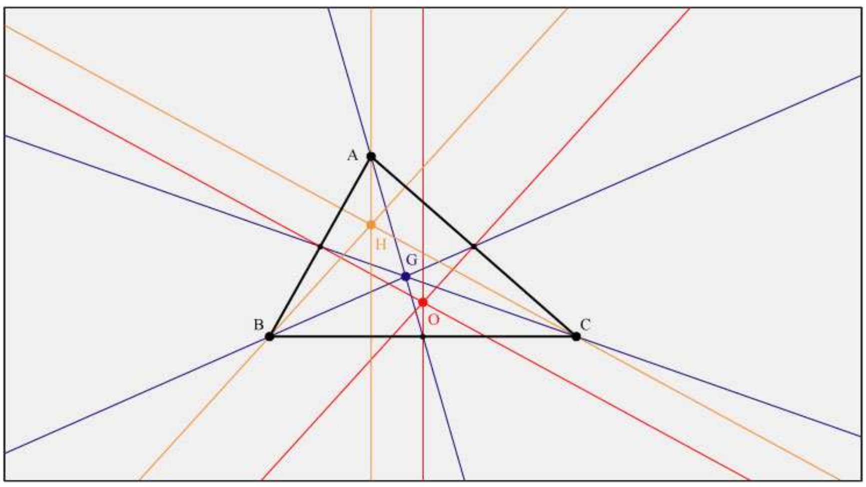


Figura 1: Três centros clássicos do triângulo: o baricentro G, o ortocentro H e o circuncentro O.

Com o passar do tempo, mais propriedades, lugares geométricos e centros foram descobertos e, nas últimas décadas, o professor norte-americano Clark Kimberling vem catalogando estes pontos (Kimberling, 1994, 1998) e disponibilizando uma lista das suas propriedades algébricas na internet (Kimberling, 2008). A Figura 2, gerada pelo nosso sistema (Bortolossi, Custódio & Dias, 2008), exibe 2000 destes pontos especiais.

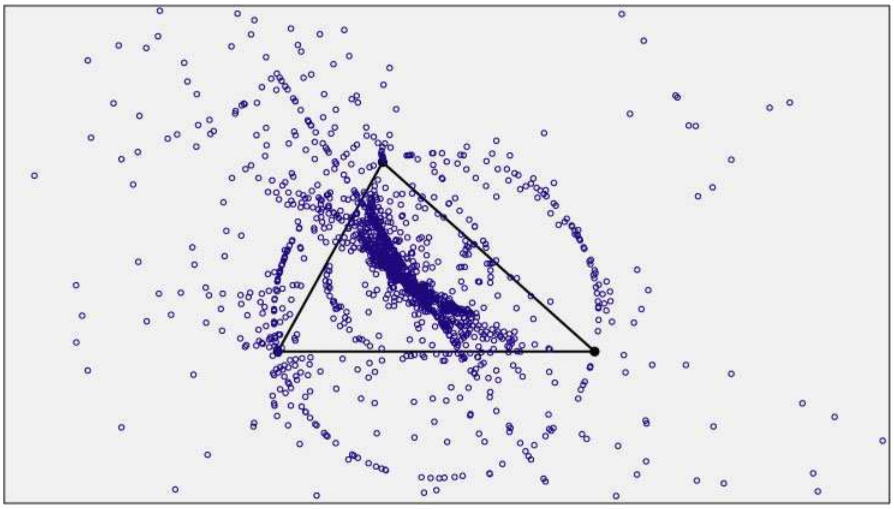


Figura 2: 2000 centros do triângulo.

Atualmente, a comunidade de geometria está estudando de que maneira estes pontos estão distribuídos ou se eles estão relacionados de algum modo. Por exemplo, as Figuras 3 e 4 (também geradas pelo nosso sistema) exibem, respectivamente, os 111 centros sobre a reta de Euler e os 256 centros sobre o circuncírculo do triângulo.

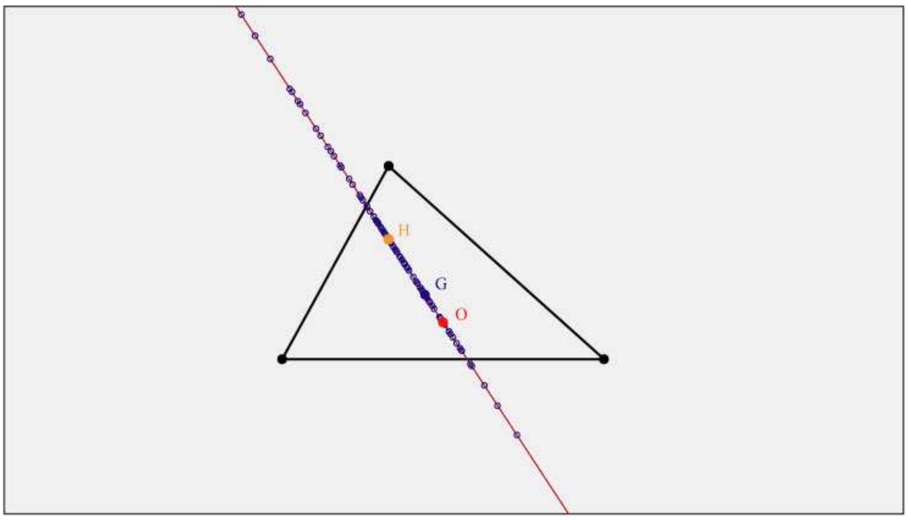


Figura 3: Os 111 centros sobre a reta de Euler.

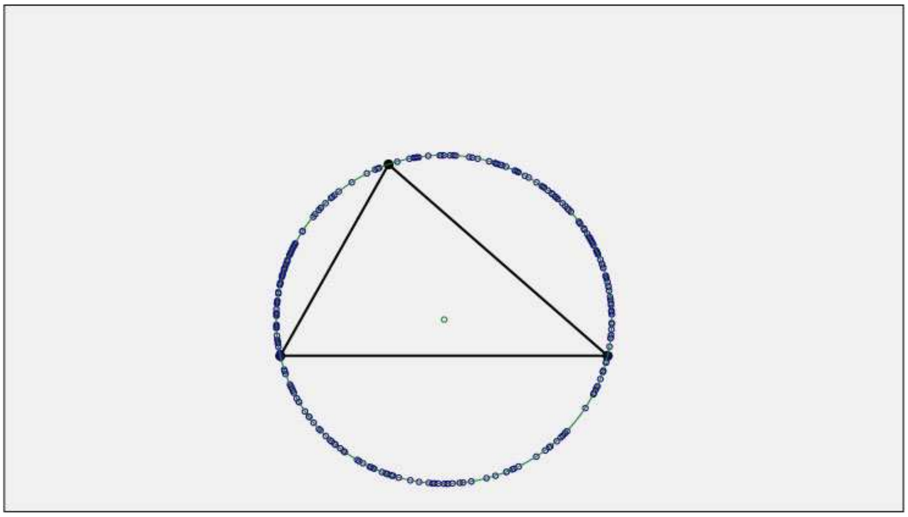


Figura 4: Os 256 centros sobre o circuncírculo.

COORDENADAS BARICÊNTRICAS

Todos os centros são catalogados através de suas coordenadas baricêntricas. Basicamente, as coordenadas baricêntricas de um ponto P especificam pesos x, y e z que devem ser atribuídos a cada vértice de forma que a média com estes pesos resulte justamente no ponto P:

$$P = \frac{x \cdot A + y \cdot B + z \cdot C}{x + y + z}.$$

Por exemplo, atribuindo-se peso 1 ao vértice A e peso 0 aos outros vértices, obtemos o próprio vértice A. Atribuindo-se peso 1 aos vértices A e B e peso 0 ao vértice C, obtemos o ponto médio do lado AB. As coordenadas do baricentro G são obtidas dando-se peso 1 aos três vértices. Os pesos

$$x = (b^2 - c^2)^2 - a^4, \quad y = (c^2 - a^2)^2 - b^4 \quad \text{e} \quad z = (a^2 - b^2)^2 - c^4$$

produzem o ortocentro do triângulo, enquanto que

$$x = a^2\,(a^2 - b^2 - c^2)^2, \quad y = b^2\,(b^2 - c^2 - a^2)^2 \quad \text{e} \quad z = c^2\,(c^2 - a^2 - b^2)^2$$

definem seu circuncentro (Yiu, 2000). Aqui, a, b e c representam as medidas dos lados BC, AC e AB do triângulo, respectivamente. É possível mostrar que as coordenadas baricêntricas de um ponto P podem ser calculadas através das áreas com sinal dos triângulos ΔPBC, ΔPCA e ΔPAB (Figura 5). Mais precisamente, se $P = (x_P, y_P)$, $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ são, respectivamente, as coordenadas cartesianas dos pontos P, A, B e C, então

$$x = \frac{1}{2} \cdot \det\begin{pmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \frac{1}{2} \cdot \det\begin{pmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z = \frac{1}{2} \cdot \det\begin{pmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{pmatrix}.$$

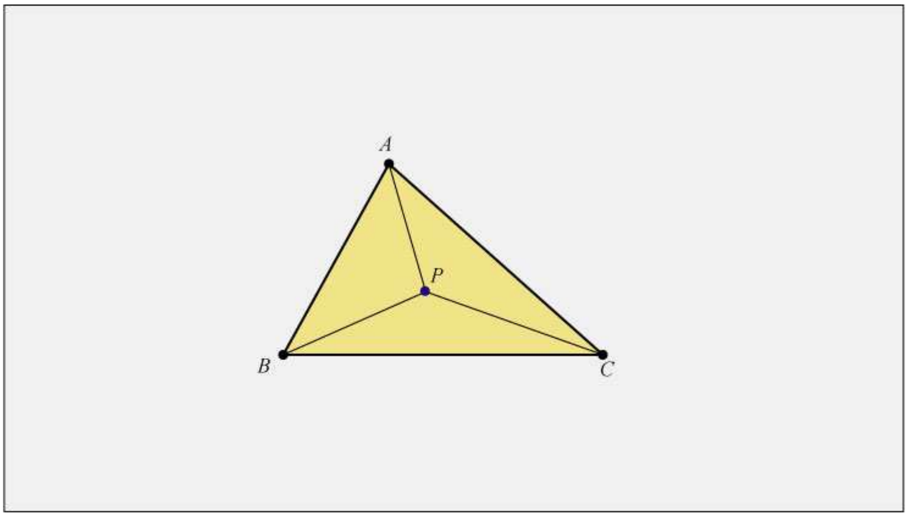


Figura 5: As coordenadas baricêntricas x, y e z do ponto P são proporcionais às áreas com sinal dos triângulos ΔPBC, ΔPCA e ΔPAB.

UMA VERSÃO INTERATIVA DA ENCICLOPÉDIA DOS CENTROS DO TRIÂNGULO

Como a enciclopédia original (Kimberling, 2008) não apresenta figuras, existia uma demanda dos geômetras por um sistema que permitisse ver e manipular o triângulo e seus centros. Em nosso trabalho, construímos uma versão dinâmica e interativa da enciclopédia original tendo como alicerce o programa C.a.R. (Figura 6).

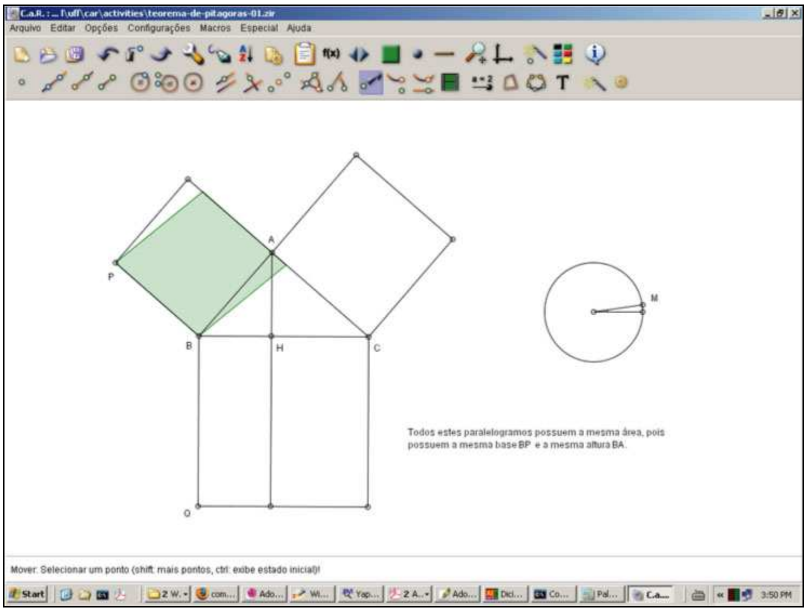


Figura 6: Tela do software de geometria dinâmica gratuito C.a.R (http:www.z-u-l.de).

O aplicativo C.a.R. (Régua e Compasso), desenvolvido pelo professor René Grothmann da Universidade Católica de Berlim na Alemanha, é um software de geometria dinâmica plana gratuito (você pode usá-lo e distribuí-lo sem pagar nada por isto). Ele está escrito na linguagem Java, tem código aberto e roda em qualquer plataforma (Microsoft Windows©, Linux, Macintosh©, etc).

Diferentemente do que ocorre com a régua e o compasso tradicionais, as construções feitas com o C.a.R. são *dinâmicas* e *interativas*, o que faz do programa um excelente *laboratório* de ensino e aprendizagem da geometria. O usuário pode testar suas conjecturas através de exemplos e contra-exemplos que ele pode facilmente gerar. Uma vez feita a construção, pontos, retas e círculos podem ser deslocados na tela mantendo-se as relações geométricas previamente estabelecidas (pertinência, paralelismo, etc.), permitindo assim que o usuário, ao invés de gastar o seu tempo com detalhes repetitivos de construção, se concentre na associação existente entre os objetos.

Em nosso sistema, não implementamos os mais 3000 pontos um a um manualmente (o que seria uma tarefa extremamente árdua e demorada). O que fizemos foi usar um recurso do C.a.R. que permite ler construções na forma textual usando uma codificação XML. Por exemplo, a Figura 7 exibe o código XML necessário para se definir um ponto na forma textual. Detalhes sobre a sintaxe XML do C.a.R. podem ser encontrados em (Grothmann, 2008).

```
<Point name="A" n="0" type="thick"
  showname="true"
  xcoffset="-0.04771371773518829"
  ycoffset="1.4473161033785282"
  keepclose="true"
  x="-1.1610337972166997"
  y="2.234592445328032"
  shape="circle">
  Ponto em (-1.1610337972, 2.2345924453)
</Point>
```

Figura 7: Código XML que define textualmente um ponto no C.a.R..

Cada elemento geométrico do C.a.R. pode ser criado tanto da forma interativa quanto da forma textual. Desta maneira, escrevemos um script na linguagem Perl (Wall, 2008) que processou o arquivo HTML da enciclopédia original, extraiu os dados algébricos de cada centro e gerou arquivos textuais para o C.a.R.. Em nossa versão interativa (Bortolossi, Custódio & Dias, 2008), cada um dos mais de 3000 centros possui um arquivo HTML com os seguintes recursos:

(1) Um applet interativo feito com o C.a.R., onde o usuário pode ver e manipular o triângulo com o respectivo centro. O usuário pode também construir novos objetos, fazer medidas e, através do recurso “macro”, incluir outros centros relacionados.

(2) As informações algébricas da enciclopédia original (com a autorização do autor), mas agora com recursos de hipertexto: o usuário pode facilmente navegar de um centro a outro com um clique do mouse.

Gostaríamos de observar que, através da nossa versão interativa da enciclopédia dos centros do triângulo, conseguimos identificar um erro na enciclopédia original (que afirmava que um determinado centro estava sobre a reta de Euler e ele não estava), um erro no programa C.a.R. (que não conseguia representar adequadamente o centro de Euler infinito X_{30}) e um erro no verbete *Isogonal Conjugate* da renomada enciclopédia de matemática *MathWorld*.

Como trabalho futuro, pretendemos expandir a funcionalidade da enciclopédia interativa, criando um pequeno dicionário interativo dos termos e construções geométricas relacionadas com a geometria moderna do triângulo.

Referências

Bortolossi, H. J., Custódio, L. I. R. L. & Dias, S. M. M. (2008). Triangle Centers with C.a.R.. http://www.uff.br/trianglecenters/.

Grothmann, R (2008). Compass and Ruler: Dynamic Geometry Software. http://z-u-l.de.

Kimberling, C. (1994). Central Points and Central Lines in the Plane of a Triangle. *Mathematics Magazine*, 67, 163-187.

Kimberling, C. (1998). *Triangle Centers and Central Triangles*. Congressus Numerantium, 129, Winnipeg: Utilitas Mathematica Publishing, Inc.

Kimberling, C. (2008). *Encyclopedia of Triangle Centers (ETC).* http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/.

Wall, L. (2008). The Practical Extraction and Report Language (Perl). http://www.perl.org.

Weinstein, E. W. (2008). MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com.

Yiu, P. (2000). The Uses of Homogeneous Barycentric Coordinates in Plane Euclidean Geometry. *International Journal Math Education Science Technology*, 31, 569-578.

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM PAPEL E LÁPIS OU UTILIZANDO SOFTWARE GRÁFICO:QUE MUDANÇAS OCORREM QUANDO SE OPTA POR UMA DESSAS MÍDIAS?

Iolanda Andrade Campos Almeida, Universidade Federal de Pernambuco

Maria Helena Wyllie Lacerda Rodrigues, Universidade Federal do Rio de Janeiro

Franck Bellemain, Universidade Federal de Pernambuco

Este trabalho se propõe a levantar questões sobre o uso de recursos computacionais no ensino e na aprendizagem da geometria gráfica, procurando evidenciar as transformações ocorridas com a substituição do uso de papel e lápis para traçados com recursos computacionais. A partir dos resultados apresentados pretende-se colaborar na ampliação da discussão da informática na educação, principalmente no que se refere às construções geométricas.

Introdução

Preocupados com a falta de conhecimento em geometria, em sua vertente analítica ou gráfica, professores/pesquisadores têm procurado caminhos que façam o aluno se interessar e se envolver no estudo desta matéria.

Dentre as opções que estão sendo trabalhadas para estimular e facilitar o ensino e a aprendizagem da geometria vem tendo especial destaque o uso da computação gráfica; ou seja, a construção de traçados utilizando-se diferentes programas gráficos dependendo do objetivo final e da especificidade da área de conhecimento.

Os programas que têm como característica os princípios da geometria dinâmica, por possibilitarem a interação do aluno com os objetos de conhecimento representados através da manipulação direta e da modelização, têm se mostrado de significativa importância quando se trata do desenvolvimento de ambientes para aprendizagem.

Em função dos objetivos distintos dos programas voltados para o ensino e daqueles que têm por objetivo auxiliar os profissionais da área gráfica na concepção e execução de seus projetos, e pelo fato de o próprio recurso computacional implicar numa forma diferente de articular conceitos é mister que se tenha clareza sobre as implicações das transformações advindas com essa nova mídia. Assim, tira-se proveito de suas potencialidades para contribuir no desenvolvimento do pensamento geométrico e evitar que sejam ampliados os obstáculos e as dificuldades nesta área de conhecimento por limitar os indivíduos a reproduzir situações já disponibilizadas no programa.

Com isso, pretende-se verificar a interferência do recurso computacional no processo de resolução do problema. As regularidades e caracterização serão identificadas com auxílio das categorias formuladas com base no desenvolvimento do pensamento geométrico proposto por Duval (1995, 1998, 2001, 2003). Para fazer esse estudo, optou-se por considerar os aspectos envolvidos no traçado de um objeto tridimensional por este envolver construções que empregam o raciocínio bi e tridimensional.

O objeto escolhido para se examinar a estratégia de seu traçado foi o octaedro regular. No sentido de fornecer um maior número de parâmetros que orientassem na observação dos resultados, a construção do poliedro ficou subordinada a um enunciado que delimita as condições em que ele deve ser representado. Com este procedimento pretende-se evidenciar as vantagens e desvantagens advindas com o uso de cada uma das mídias.

Os programas gráficos escolhidos para se proceder à análise comparativa com o traçado feito com papel e lápis foram o Cabri na versão em 2D e 3D e o AutoCAD. O primeiro, por ser um programa específico para o ensino da geometria implementado com os princípios da geometria dinâmica e ter uma aceitação bastante favorável por docentes e discentes. A opção pelo AutoCAD se deve à sua aceitação também por profissionais das áreas técnicas e por ser um dos mais utilizados como ferramenta para traçados gráficos de um modo geral.

Resolução de problemas de construção geométrica

A Geometria é sistematizada de modo a ter como premissa um conjunto de noções primitivas não definidas e um conjunto de axiomas ou postulados, que são propriedades aceitas como verdadeiras. A partir dessas propriedades, todas as outras são geradas e demonstradas (WAGNER, 1993; GREENBERG, 1980).

Com base nisso, entende-se que fazer uma construção geométrica consiste em utilizar as premissas iniciais e as propriedades geradas a partir delas para poder representar um determinado objeto geométrico. Pinheiro (1974, p. 69) define 'lugar geométrico' – (LG) como sendo *"todo conjunto l de pontos Pi (i=1,2,3...) para os quais vale bicondicionalmente uma relação R"*.

.

Assim, quando um problema é formulado, a sua resolução consiste, portanto, em acionar um esquema, cujos pressupostos são os conhecimentos que se entendem como pertinentes para a situação em tela. É fato que as estratégias podem variar de conformidade com a cadeia de relações de que o esquema é constituído. No entanto, as escolhas, geralmente, recaem sobre procedimentos

que levam em consideração relações mais diretas e/ou mais empregadas.
Associada a essas relações está a mídia que se utiliza; isto porque o recurso utiliza certas ferramentas ou métodos que facilitam mais a aplicação de uma certa estratégia.
Partindo desse pressuposto, ou seja, de que as ferramentas disponíveis, geralmente, induzem ou influenciam nas estratégias, e conseqüentemente nos esquemas acionados, a análise comparativa neste trabalho versará sobre observações em torno da cadeia de conceitos envolvidos no processo de resolução de um problema, resultante de uma construção geométrica.

Diretrizes adotadas para a análise comparativa

O objetivo neste trabalho, ao comparar o traçado com papel e lápis e recursos computacionais, não é o de mostrar, por parte destes, um melhor desempenho nos resultados dos objetos representados ou maior rapidez na obtenção de traçados. O interesse é o de identificar as vantagens em termos cognitivos, ou seja, que processos cognitivos são envolvidos ou implicam com a escolha do uso de uma determinada mídia.
Nesta ótica, um aporte teórico que pode embasar a análise sob essa premissa é o de Duval (1995, 1998, 2001, 2003). Este pesquisador defende, em sua teoria, que a forma de pensar e visualizar em matemática está diretamente associada ao uso de representações semióticas. Isso significa que, em relação à atividade cognitiva requerida, é fundamental se levar em consideração os sistemas de representação dos objetos matemáticos em face de estes não poderem ser diretamente observáveis.
Por isso, Duval (2003, p. 24) postula que a pesquisa do processo de aprendizagem em matemática exige necessariamente um olhar na “mobilização de vários registros de representação semiótica e à conversão dessa representação”, por entender que um objeto matemático é passível de múltiplas representações e por terem uma natureza abstrata. Este autor justifica essa assertiva ao levantar a questão: *“como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?”* (ibid, p. 21).
Segundo Duval (Apud ALMOULOUD, 2003, p. 125), *“Um registro de representação é um sistema semiótico que tem as funções fundamentais em nível do funcionamento consciente”*. Ocorre que ao se transformar uma representação em outra o sistema pode permanecer o mesmo ou se transformar em outro (DUVAL, 2001, 2003).
Pode-se exemplificar essa mudança por duas representações distintas de um octaedro (Fig. 1). O desenho à esquerda, além de ser insuficiente para se deduzir a possibilidade de o objeto poder ser um octaedro, não traduz uma correspondência semântica direta, pois se prende a uma situação particular e que esconde características marcantes do objeto, como a sua natureza tridimensional. O desenho à direita, exatamente ao contrário do anterior, evidencia a natureza tridimensional do

objeto, o que facilita sua identificação, mas não é suficiente para individualizar o sólido.

Fig. 1: Representações de um octaedro regular. O desenho à esquerda corresponde a uma vista obtida por uma projeção ortogonal segundo seu eixo na simetria quaternária e o desenho à direita ilustra uma vista obtida por uma projeção ortogonal com os eixos de simetria do objeto oblíquo ao plano em que este foi projetado.

A análise comparativa entre as mídias descritas e apresentadas neste trabalho será orientada na observação das três classes de processos cognitivos apontados por Duval (1998): o de visualização, o de construção e o raciocínio empregado. Esses processos, segundo afirma Duval, podem ser realizados separadamente, mas devem estar conectados pois são necessários para o desenvolvimento de competências em geometria, as análises comparativas, objetivo deste trabalho, vão levar em consideração a conexão existente nessas classes de processos cognitivos, nos traçados feitos em cada uma das mídias.

Em virtude do interesse em se levantar, neste trabalho, questões referentes ao aspecto bidimensional e tridimensional, o problema focaliza um objeto geométrico tridimensional. Seu enunciado é proposto em duas versões: uma que solicita a construção de uma épura do octaedro regular com uma face paralela ao plano horizontal no sistema mongeano e outra, que impõe as mesmas condições, mas pede que o poliedro seja representado em perspectiva isométrica. Condiciona-se ainda que o octaedro tenha três centímetros para medida de aresta.

Resultados observados

A resolução de um problema, de modo geral, se faz por meio de uma análise entre os dados fornecidos e o resultado que se pretende. A partir de uma análise desses dois pólos elabora-se uma estratégia que é construída a partir dos esquemas acionados no processo de análise.

As implicações de uma determinada mídia nesse procedimento de análise não é simples de precisar, pois de um modo geral a tendência, segundo as teorias existentes sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico, independentemente do recurso utilizado, os problemas ao serem analisados pelos sujeitos articulam processos cognitivos distintos.

Uma outra componente a interferir versa sobre a maneira pela qual as estratégias são organizadas na resolução de um problema. Geralmente, segundo Rodrigues e Rodrigues (2001), um método que se adota é o de examinar a relação entre os dados fornecidos com um desenho de análise que representa a possível solução do problema e em seguida formula-se uma estratégia para encontrar a figura que se quer.

Ocorre que, no momento em que se tem a simulação da situação, a escolha de uma situação específica pode vir a encobrir relações que venham a facilitar a definição da estratégia. O traçado dessa simulação, por sua vez, pela sua própria natureza é uma representação que tem como característica ser esquemática, e como tal, prescinde de uma precisão.

O traçado à mão livre facilita a obtenção dessa aproximação, em alguns softwares de traçados gráficos, isso nem sempre é trivial. Pois as ferramentas de traçado livre não apresentam facilidade de destreza para os usuários.

No entanto, em face dos softwares adotados nesta investigação terem o recurso que viabiliza a opção de trabalhar nos espaços bidimensionais ou tridimensionais simultaneamente, vem facilitar a observação das estratégias que estão sendo adotadas, em função de que as transformações empregadas são mais facilmente percebidas por se aproximarem da forma como o sujeito visualiza a realidade.

Em relação aos softwares focalizados, podem-se observar algumas vantagens de um em relação ao outro, como também em relação aos tradicionais instrumentos de desenho. Com o software Cabri outras formas de pensar são exploradas enquanto que com o AutoCAd e com os instrumentos de desenho a tendência é de se ficar preso a uma situação estática dos dados fornecidos. Os esquemas acionados têm de se amoldar ou evocar às propriedade que se adapta a tal situação. A formulação de conjecturas fica mais complicada.

Por outro lado, a apresentação dos elementos geométricos no AutoCad propicia um diagrama mais preciso em termos de legibilidade e os recursos de layer e de zoom vêm a facilitar significativamente na organização do traçado, quando comparado ao Cabri.

O aspecto mais positivo que se levantou sobre o uso dos instrumentos de desenho em relação aos softwares diz respeito à questão da espontaneidade proveniente dos traçados à mão livre. Espontaneidade essa, não no sentido de viabilizar a apresentação de situações distintas para os mesmos dados, pois com o Cabri isso faz parte da própria implementação deste por ser construída com base na geometria dinâmica.

A espontaneidade que se está focalizando é numa representação de idéias que auxiliam na organização das estratégias. O fato de se fazer um esboço da situação auxilia, muitas vezes, na identificação das regularidades ou das relações entre os dados fornecidos.

Conclusão

Pelo exposto, entendemos que as mídias analisadas apresentam aspectos positivos e negativos. Sendo que, as vantagens advindas com os recursos computacionais podem ser um forte aliado para o ensino e aprendizagem da geometria. O que se pode fazer é tentar compatibilizar essas mídias em função dos objetivos a serem atingidos, de modo a extrair de cada uma delas o que estas proporcionam de melhor.

Referências

Almouloud, Saddo Ag (2003) Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos. In: ALCÂNTARA, Sílvia Dias (org.) – Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Campinas, Papirus Editora, pp. 11-33.

Bellemain, F. (2001) Geometria Dinâmica: Diferentes Implementações, Papel da manipulação Direta e Usos na Aprendizagem. In: Anais do GRAPHICA 2001 – IV International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design / 15o Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico. São Paulo: EPUSP.

Duval, R. (1995) Sémiosis et pensée humaine. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In: MAMMANA, C. and VILLANI, V. (eds) – Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer, p. 37-52.

Duval, R. (2001). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. In: Paper presented at the Semiotics Discussion Group of the 25th PME International Conference, Freudenthal Institute, The Netherlands, July.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: ALCÂNTARA, Sílvia Dias (org.) – Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Campinas, Papirus Editora, pp. 11-33.

GREENBERG, Marvin Jay (1980) Euclidean and non-Euclidean Geometries. San Francisco: W. H. Freeman.

PETERSEN, Julius (1963) Construções Geométricas. São Paulo: Nobel.

PINHEIRO, Virgilio Athayde (1974) Geometrografia 1. Rio de Janeiro: Gráfica Editora Bahiense.

RODRIGUES, Maria Helena W. L. (2003) Sob o olhar da Geometria Dinâmica. In: Boletim da Aproged, vol. 22 – dez. de 2003, p.19-26.

RODRIGUES, Maria Helena W. L. e RODRIGUES, Daniel W. L. (2001). Entre a Geometria dos Esquadros e Compasso e a Geometria Dinâmica. In: Educação Gráfica, UNESP - Campus de Bauru, v. 5, p. 27-37.

WAGNER, E. (1993) Construções geométricas. Rio de Janeiro: IMPA / VITAE.

UM JOGO SOBRE MEDIDAS DE ÁREA E PERÍMETRO PARA TV DIGITAL

Uaiana Prates – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Diogo Pedrosa – Centro de Estudos e Sistemas Avançados do Recife (CESAR)

Paula Moreira Baltar Bellemain – Centro de Educação - Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Franck Bellemain – Centro de Artes e Comunicação - Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Esse texto aborda a criação de um jogo educativo para a TV digital, no qual são trabalhadas noções de área e perímetro. A construção do cenário do jogo apóia-se em pesquisas sobre o ensino-aprendizagem dos conceitos em foco, as quais propõem uma abordagem da área enquanto grandeza. Um dos caminhos para dar sentido à área como grandeza é o uso de superfícies unitárias diversas para medição da área de figuras. No jogo "Construindo Loucuras", o jogador assume a identidade de um arquiteto que deverá encomendar cerâmicas de formas pouco usuais (poliminós, peças de Tangram, etc.) para ladrilhar os cômodos das mansões de um louco e estimar o perímetro desses cômodos para encomendar os rodapés.

INTRODUÇÃO

Estimular os alunos para estudar matemática, na escola ou em casa, e criar condições favoráveis a uma aprendizagem significativa dessa disciplina, tem sido um desafio diário para os educadores do ensino fundamental. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs – Brasil (1998), para o ensino fundamental, são citadas algumas possibilidades de trabalho:

> *"Dentre elas, destacam-se a História da Matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos como recursos que podem fornecer os contextos dos problemas, como também os instrumentos para a construção das estratégias de resolução."* Brasil, 1998. *(p.42).*

Estamos conscientes de que esses recursos não podem sozinhos provocar as transformações necessárias na educação matemática. Ao mesmo tempo, acreditamos que a criação e o uso de jogos e tecnologias, bem fundamentados, com objetivos claros e nos quais o aspecto lúdico é preservado, podem trazer uma excelente contribuição para a motivação e a aprendizagem de crianças e jovens. Iniciamos então um projeto de desenvolver jogos tratando de conteúdos específicos da matemática escolar, a partir do uso de uma das tecnologias mais discutidas atualmente no Brasil e no mundo: a TV Digital.

Analisamos brevemente alguns jogos disponíveis na NET Digital, que é uma das TVs por assinatura existente no mercado atual brasileiro que fornece interatividade para seus clientes. Encontramos jogos bem elaborados, com um excelente design e que podem levar os usuários a elaborar estratégias interessantes, mas não observamos uma intenção de aprendizagem de conteúdos específicos.

Pretendemos disponibilizar para estudantes, pais e escolas uma opção de brincadeira na qual as crianças e jovens possam construir e/ou ampliar seus conhecimentos matemáticos. O jogo que é objeto deste texto trata das grandezas geométricas comprimento e área no nível de ensino fundamental. As pesquisas sobre o ensino-aprendizagem desses conteúdos (Douady e Perrin-Glorian, 1989; Bellemain e Lima, 2002) indicam dificuldades e erros persistentes nos alunos. Na perspectiva aqui adotada (Brousseau, 1976 apud Pinto, 2000), os erros cometidos pelos alunos são freqüentemente indícios de um conhecimento, mesmo que incompleto ou inadaptado à situação. A reflexão sobre os erros é um importante instrumento para uma aprendizagem significativa dos conteúdos trabalhados pela escola (PINTO, 2000; SOUZA, 2004). É preciso que o ambiente (da sala de aula ou virtual) permita que os sujeitos ajam segundo suas convicções, trazendo à tona os conhecimentos prévios que funcionarão como suporte para as aprendizagens novas, mas que serão também postos à prova, para serem confirmados, ampliados ou revistos.

Inicialmente discutimos o potencial da TV Digital interativa. Em seguida, apresentamos os resultados de pesquisas sobre o ensino-aprendizagem de área e perímetro sobre os quais nos apoiamos na elaboração do jogo. Na terceira seção, descrevemos e justificamos algumas escolhas feitas na elaboração do jogo. Finalmente fazemos algumas considerações finais.

TV DIGITAL

A televisão digital é um meio de comunicação que permite transmissão e recepção de imagens, sons e outros dados utilizando sinais digitais (WIKIPEDIA, 2007). Os impactos causados pela digitalização são enormes. O Sistema Brasileiro de Televisão Digital (SBTVD) traz quatro grandes novidades: a alta definição, a multiprogramação, a interatividade e a mobilidade. Esses benefícios surgem graças à possibilidade de compressão do sinal digital, permitindo que uma mesma faixa de freqüência seja usada para transmitir uma quantidade muito maior de informação.

No tocante a este trabalho, o benefício que trará maior impacto é sem dúvida a interatividade. A interatividade na televisão aqui referenciada não é do tipo que estamos acostumados a ver hoje na TV aberta brasileira, que se dá através da internet, do telefone ou de mensagens SMS, e sim uma interatividade que se dá através de softwares que são enviados juntos com o áudio e o vídeo. Esses softwares são comumente chamados de aplicações e são executados nos decodificadores, que são os equipamentos que permitem a recepção do sinal digital. As aplicações permitem que o telespectador interaja com a televisão de forma análoga à interação de alguém com seu computador pessoal (Becker, 2006).

A implantação da TV digital no Brasil se dará de forma gradual, obedecendo ao cronograma definido pela Portaria do Ministério das Comunicações nº. 652 de 10 de outubro de 2006 (forumsbtvd, 2008). São Paulo foi a primeira cidade a ter transmissões digitais, que já ocorrem desde o dia 2 de dezembro de 2007. Até janeiro de 2011 as geradoras de todas as capitais brasileiras já devem estar transmitindo no formato digital. E junho de 2013 é a data limite para que todas as geradoras e retransmissoras do Brasil passem a transmitir também no novo padrão. Porém, esse cronograma não especifica quando a interatividade começará a ser disponibilizada para os telespectadores. Os equipamentos disponíveis no mercado ainda não possuem a capacidade de executar aplicações. Estima-se que os primeiros decodificadores capazes de permitir a interação chegarão ao mercado por volta do meio de 2008. Além disso, esses equipamentos provavelmente não estarão preparados para permitir o uso do canal de interatividade – o meio de comunicação que permite que informações sejam transmitidas no sentido inverso ao da transmissão da tv, ou seja, do telespectador para as emissoras ou fornecedores de conteúdo. Utilizando-se do canal de interatividade, ou canal de retorno como é costumeiramente chamado, será possível desenvolver aplicações muito mais interessantes, pois a interação deixará de estar limitada entre o usuário e o decodificador passando, por exemplo, a permitir interatividade entre os diversos usuários da aplicação.

A utilização de uma aplicação de TV digital como uma ferramenta de auxílio ao ensino, casa bem com um dos objetivos do governo ao instituir o SBTVD: "promover a inclusão social, a diversidade cultural do País e a língua pátria por meio do acesso à tecnologia digital, visando à democratização da informação" (Brasil, 2003). De acordo com a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios 2005-2006 (PNAD), 93% dos domicílios particulares permanentes do Brasil possuíam televisão em 2006, enquanto apenas 22,1% possuíam computador (IBGE, 2007). Esses números mostram bem o potencial que a TV digital possui de chegar às casas das populações de baixa renda, para as quais o acesso a uma melhor qualidade de ensino é especialmente urgente e necessário.

Como se sabe, a televisão é amplamente utilizada como forma de entretenimento. Os telespectadores estão acostumados a sentar no sofá para relaxar na frente da tv. Estudos de uma empresa de consultoria mostram que jogos são, com 61%, o serviço mais procurado entre as pessoas acima de 16 anos que declararam usar a interatividade da TV digital no Reino Unido no ano 2001 (Forrester, 2001). Por isso, nossa expectativa é de que a médio prazo, os jogos da TV digital interativa despertem a atenção das crianças e jovens. O jogo que apresentamos nesse trabalho pretende trabalhar conteúdos matemáticos – área e perímetro - de forma lúdica e instigante.

O ENSINO-APRENDIZAGEM DE ÁREA E PERÍMETRO

Pesquisas anteriores, tais como Douady e Perrin-Glorian (1989), Bellemain e Lima (2002) e Bellemain (2004) identificam e analisam erros e dificuldades freqüentes na aprendizagem dos conceitos de área e perímetro. Pode-se destacar os erros relacionados à confusão entre a área e o perímetro de figuras planas e a dificuldade em lidar com mudanças de unidade.

Os alunos parecem desenvolver dois tipos de concepção de área: as concepções geométricas e as concepções numéricas. Tais concepções são modelos de conhecimentos (incompletos e inadaptados), que funcionam como quadro interpretativo dos erros cometidos pelos alunos.

De acordo com as concepções geométricas, a área é amalgamada à própria figura. O sujeito que mobiliza essa concepção pode pensar, por exemplo, que só é possível medir a área de uma figura em centímetros quadrados se for possível ladrilhar efetivamente a figura com uma quantidade finita de quadradinhos com lados de comprimento um centímetro (Douady e Perrin-Glorian, 1989). Ou ainda, pensar que qualquer alteração da figura (como, por exemplo a decomposição e recomposição, sem perda nem sobreposição) conduz a uma mudança em todas as propriedades da figura. Do ponto de vista do sujeito que mobiliza uma concepção geométrica da área, área e perímetro teriam que variar sempre juntos.

As concepções numéricas, por sua vez, são caracterizadas pela supremacia dos aspectos numéricos. A mobilização desse tipo de concepção explica erros como o uso de fórmulas fabricadas, a comparação de grandezas de naturezas distintas (comparar a área com o perímetro de uma mesma figura), ou o uso inadequado de unidades de área.

Esses erros e dificuldades são diagnosticados em diferentes contextos, diferentes ambientes escolares e com diferentes tipos de figuras - como triângulos, retângulos, paralelogramos ou figuras quaisquer (Bellemain e Lima, 2002).

Como caminho para invalidar as concepções geométricas e numéricas, Douady e Perrin-Glorian (1989) propõem uma abordagem da área enquanto grandeza, a qual consiste em distinguir e articular três campos - o geométrico, o numérico e o das grandezas propriamente ditas. De acordo com essa proposta, é preciso distinguir a figura e sua área (uma vez que figuras distintas podem ter mesma área). Da mesma maneira, quando há mudança de unidade, a medida varia e portanto é preciso também distinguir a área de uma figura e as diferentes medidas que podem ser obtidas. A medida de área é um número real positivo, e qualquer par (número, unidade) é visto como uma forma de designar a grandeza. O uso de superfícies unitárias diversas para medição da área de figuras contribui para dar sentido à idéia de área como uma grandeza. Franchi et alli (1992) propõem atividades de ladrilhamento de figuras com superfícies unitárias de formas diversas.

A partir dos resultados de pesquisas aqui discutidos, concebemos um jogo que permite trabalhar os conceitos de área e perímetro, de uma maneira divertida e desafiadora. Procuramos trazer à tona as concepções geométricas e numéricas, afim de colocá-las em xeque e contribuir para dar sentido à idéia de área como uma grandeza.

O JOGO "CONSTRUINDO LOUCURAS"

Nos PCN's do ensino fundamental (Brasil, 1998) encontramos que:

> *"Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes - enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório – necessárias para aprendizagem da matemática." (p.47)*

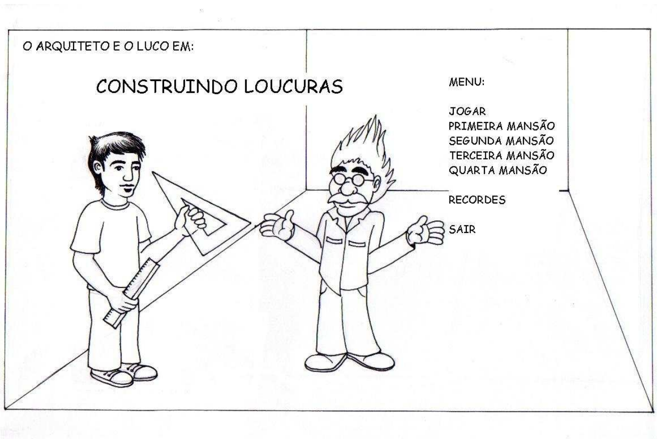
No jogo que chamamos *Construindo Loucuras*, o jogador é colocado na posição de um arquiteto que precisa reformar as mansões de um louco. O objetivo do arquiteto é fazer uma estimativa da área dos cômodos das mansões, e comprar um conjunto de peças de cerâmica suficiente para cobrir o chão de cada cômodo. O problema é que o armazém indicado pelo louco para a compra das cerâmicas, vende apenas peças em formatos nada convencionais: poliminós, peças formadas por triângulos idênticos justapostos, paralelogramos e as peças do TANGRAM. Isso torna um desafio a escolha das peças a serem compradas e a montagem do piso do cômodo. O louco também quer que o arquiteto indique, em unidade de comprimento, quando tem o rodapé de cada cômodo que ele acabou de montar. Para cada fase do jogo, ou seja, para cada cômodo, o louco dá uma quantia em dinheiro para o arquiteto. Quanto menos peças o arquiteto comprar, mais ele economizará. Porém, não comprar a quantidade de peças suficientes exige do arquiteto uma nova visita ao armazém. O arquiteto precisa gastar parte do dinheiro que recebe do louco para conseguir ir até o armazém e transportar as peças compradas até a mansão do louco. Portanto, ele deve se esforçar para fazer uma boa estimativa da área para não desperdiçar peças nem realizar novas idas ao armazém. O jogo termina quando o arquiteto conseguir cobrir o piso de todos os cômodos de todas as mansões ou quando seu dinheiro tiver acabado devido aos erros nas estimativas. Os recordes do jogo são baseados na quantidade de cômodos que o arquiteto conseguir terminar e no tempo total gasto para cobrir esses cômodos. Logo, é preciso além de tudo ser ágil na montagem dos pisos!

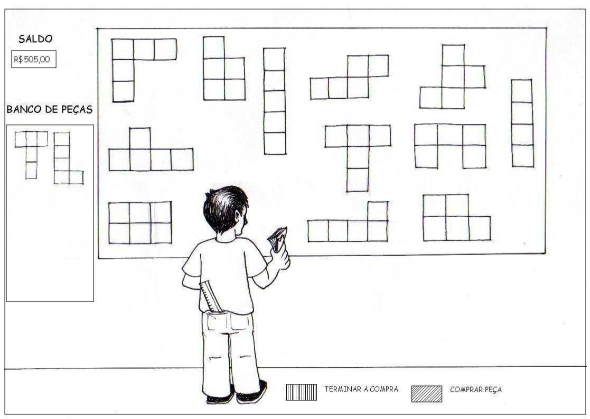
Para cada cômodo que o arquiteto conseguir concluir, o louco perguntará a área do cômodo e o comprimento do rodapé (perímetro). Os cômodos serão pensados de tal maneira que haja cômodos de mesma área com perímetros distintos e vice-versa, trabalhando a distinção entre área e perímetro.

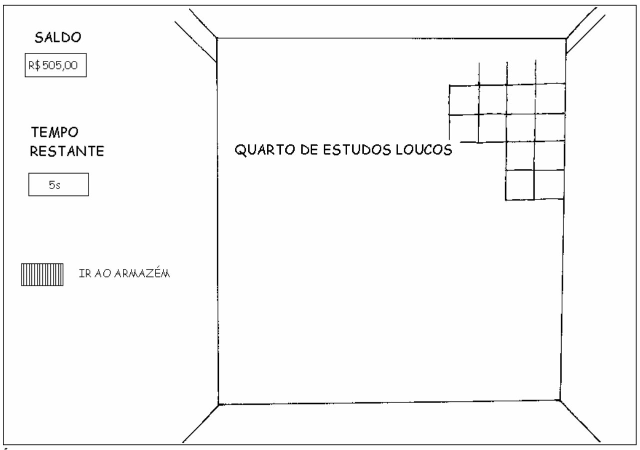
As mudanças nas peças oferecidas pelo armazém indicado pelo louco exigem o uso de superfícies unitárias de diferentes formatos, o que contribui para quebrar a idéia que a superfície unitária tem que ser um quadrado.

Um outro aspecto importante do jogo é o uso de dinheiro. As situações de consumo intervêm diretamente no cotidiano das crianças. A busca por estratégias para um resultado satisfatório no jogo, as ajuda a adquirir habilidades para enfrentar situações do dia a dia. Interligando aí com as idéias descritas nos PCN's, que sugerem realizar "*... possíveis conexões entre os blocos de conteúdos, entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento e suas relações com o cotidiano e com os Temas Transversais.*" (p.16). Logo, essa abordagem possibilita a descoberta das relações de compra e venda e o bom uso do instrumento dinheiro.

O jogo encontra-se no momento na fase de levantamento de requisitos. Os elementos que comporão a interface estão sendo definidos e uma validação do modelo navegacional está sendo realizada. Embora no momento ainda não haja uma preocupação quanto ao design gráfico, os dois principais personagens já foram esboçados, como pode ser visto nas telas abaixo.







CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não há respostas simples para os grandes desafios da educação matemática. É preciso investigar estratégias e caminhos diversos, ampliar o leque de possibilidades de trabalho com os conteúdos matemáticos na escola e fora dela. A importância dessa pluralidade é reforçada pela diversidade de alunos e contextos sócios econômicos que encontramos em escolas e salas de aula do Brasil. Um jogo, além de poder ser um utensílio criativo, explorador e desafiador, tem uma boa aceitação pelas crianças e jovens, de uma forma geral.

Embasamos as escolhas do jogo numa análise dos erros, dificuldades e entraves no ensino-aprendizagem das grandezas geométricas área e comprimento, identificados em pesquisas anteriores sobre o tema. Apoiamos também as nossas escolhas numa perspectiva construtivista da aprendizagem. O sujeito deve ter a possibilidade de agir segundo suas convicções e receber do ambiente retroações que provocam conflito e reflexão, que levam à ampliação ou invalidam suas concepções iniciais.

O suporte tecnológico do jogo é a TV Digital e a interatividade nela disponível. Como a televisão tem um enorme peso na cultura brasileira, podemos esperar que a TV Digital vá lentamente se tornando parte do dia-a-dia dos brasileiros. Pretendemos contribuir para fazer um uso da TV Digital que seja ao mesmo tempo lúdico, interativo e favoreça a aprendizagem de conteúdos específicos. O jogo Construindo Loucuras é nosso primeiro passo nesse sentido.

REFERÊNCIAS

Becker, V. *Concepção e desenvolvimento de aplicações interativas para televisão digital.* Dissertação de mestrado em Engenharia e Gestão do Conhecimento – Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, Brasil, 2006.

Bellemain, P. M. B.; Lima, P. *Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental*. Natal: SBHMat, 2002.

Bellemain, P. M. B. Um candidato a obstáculo à aprendizagem dos conceitos de comprimento e área como grandezas. In: II HTEM - COLÓQUIO HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 2004, Rio de Janeiro. Anais do segundo colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática. Rio de Janeiro: IME-UERJ, 2004. p. 183-189.

Brasil. Decreto-lei n. 4.901, de 26 de novembro de 2003. Institui o Sistema Brasileiro de Televisão Digital - SBTVD, e dá outras providências. Diário Oficial da República Federativa do Brasil, Brasília, 27 de nov. 2003. Seção 1, Pág. 7. 2003

Brasil. Secretaria de educação fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

Douady R.; Perrin-Glorian M.-J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. In: *Educational Studies in Mathematics*. vol.20, n. 4, p. 387-424, 1989.

Forrester. The Forrester Report, DECEMBER 2001, Big Banks Dominate iDTV, By Benjamin Ensor With Dr. Therese Torris, Laetitia Grammatico e Allan Drost, 2001. http://www.forrester.com/ER/Research/Report/Summary/0,1338,11725,00.html

Forumsbtvd. http://www.forumsbtvd.org.br/cronograma.php, Acessado em 20/01/2008.

Franchi, A., Moura, A. R. L., Leite, A. M. et al. *Geometria do 1º grau: da composição e da decomposição de figuras às fórmulas de área.* Coleção ensinando-aprendendo, aprendendo-ensinando; 7. São Paulo: CLR Brasileiro, 1992.

IBGE. Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios 2005-2006. 2007.

Pinto, N. B. *O Erro como estratégia didática*. São Paulo: Editora Papirus, 2000.

Souza, J. C. A. A*nálise de estratégias de resolução de problemas de grandezas geométricas em avaliações institucionais em larga escala de redes públicas do estado de Pernambuco*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2004.

WIKIPEDIA (2007). Digital Television. *http://en.wikipedia.org/wiki/Digital_television*. Acessado em 08/12/2007.

O JOGO COMPUTACIONAL TANGRAM: UM OBJETO DE APRENDIZAGEM SOBRE GEOMETRIA

Irlaine da Paixão Gomes Porto – Universidade Severino Sombra - rlapaixao@gmail.com

Carlos Vitor de Alencar Carvalho – Universidade Severino Sombra e UEZO – Centro Universitário Estadual da Zona Oeste – Rio de Janeiro – cvitorc@gmail.com

Rosana de Oliveira – Universidade Severino Sombra - rosanaol40@terra.com.br

Este trabalho mostra o desenvolvimento e experimentação com alunos, de um jogo computacional, conhecido muito pelo seu uso didático, chamado ***TANGRAM****, para apoio ao ensino da geometria plana. O sistema tem como principal objetivo estimular os educandos a identificar, descrever e comparar figuras geométricas, desenvolver o raciocínio lógico, a criatividade, a capacidade de análise e síntese. Com o manuseio do software também espera-se que os educandos possam adquirir habilidades de visualização, percepção e composição e decomposição de figuras.*

1. INTRODUÇÃO

A utilização da informática como apoio ao processo ensino-aprendizagem é sem dúvida um grande desafio. O surgimento do computador, por si só criou uma nova filosofia de vida, com implicações e desdobramentos nos mais diversos segmentos profissionais (Roque, 2000). Na Educação esta perspectiva não pode mais ser ignorada, uma vez que tais tecnologias, para o professor, são instrumentos que possuem um grande potencial pedagógico e trazem muitos benefícios como aumentar a capacidade cognitiva e principalmente aproximar a informação dos alunos. Trazem ainda a possibilidade de desenvolver o estudo dos assuntos ministrados em horários e locais diferentes da sala de aula, bastando para isto ter acesso a um computador.

Essas tecnologias podem contribuir para uma educação mais adequada à nossa sociedade colaborando para a aprendizagem de diversos conteúdos; possibilitando a criação de espaços de interação e comunicação; permitindo novas formas de expressão criativa, de realização de projeto e de reflexão crítica. (Valente, 1999).

Assim, o objetivo geral desse trabalho é mostrar o desenvolvimento e sua experimentação em sala de aula de um sistema computacional educacional para o apoio ao ensino de geometria plana. Projetado para alunos de Ensino Fundamental, ele permite aos educandos identificar, descrever e comparar figuras geométricas, desenvolver o raciocínio lógico, a criatividade, a capacidade de análise e síntese. O manuseio do *software* permite ainda, adquirir habilidades de visualização, percepção e composição e decomposição de figuras.

2. JOGOS COMPUTACIONAIS APLICADOS À EDUCAÇÃO E AO ENSINO DA MATEMÁTICA

O uso de jogos na aprendizagem é muito defendido por inúmeros pesquisadores, entre eles, Piaget (2002) que salienta a importância desta atividade lúdica no desenvolvimento da percepção, inteligência, tendências à experimentação e sentimentos sociais da criança. O jogo é uma ferramenta pedagógica que favorece a concentração e atenção, desenvolve o raciocínio, possibilita a criação de estratégias e regras, trabalha com a emoção, desenvolve a capacidade indutiva, espacial, auditiva e visual, tudo de forma lúdica e prazerosa.

Muitos jogos possibilitam o desenvolvimento de habilidades como cooperação, competição, perseverança, envolvimento, organização e autonomia. Através de *softwares* educacionais, temos a oportunidade de criar novos jogos e reinventar jogos utilizados em madeira, papel, etc. A possibilidade de divertidas animações, a integração de várias mídias como a escrita, a imagem, o vídeo e o som que o computador oferece enriquecem os jogos.

O jogo não deve ser apenas interessante e atrativo é necessário que seja criado de forma que favoreça a interatividade, explore os conceitos pretendidos e que seja mediado pelo professor sem, entretanto, ser utilizado como pretexto para o estudo de determinado conteúdo.

2.1 O JOGO TANGRAM

Trazido da China para o Ocidente por volta da metade do século XIX, o Tangram é um jogo chinês de origem milenar, formado por apenas sete peças, com as quais é possível montar variadas figuras de animais, plantas, pessoas, objetos e outros.

A origem e significado da palavra Tangram possui muitas versões. Uma delas diz que a parte final da palavra "gram" significa algo desenhado ou escrito como um diagrama. A origem da primeira parte "Tan" é sinônimo de chinês. Assim, segundo essa versão, Tangram significa “quebra-cabeça chinês” (Souza, 1995).

Resumidamente a origem é assim: “A partir de uma figura (Figura 1) cuja base é um quadrado de porcelana, espelho ou outro tipo de material, ao cair, partiu-se em sete partes e na tentativa de juntá-las, trocou-se as posições das mesmas, dando origem a novas figuras, surgindo assim, os sete pedaços de formas geométricas conhecidas como Tangram”.

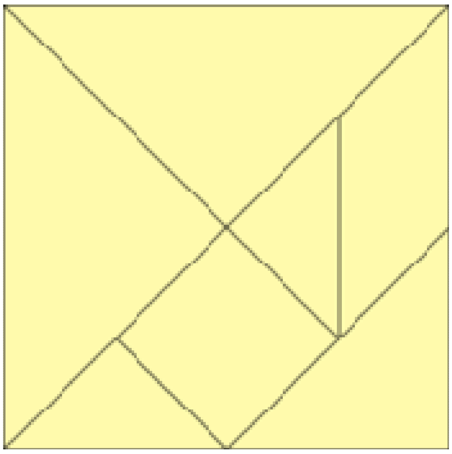


Figura 1: Ilustração utilizada na origem do Tangram.

Essas peças são figuras geométricas, ou seja, polígonos: cinco triângulos retângulos isósceles, um quadrado e um paralelogramo.

Os Tangrams podem ser confeccionados em diferentes tipos de materiais. Um jogo com capacidade de representar uma variedade de figuras e objetos, que apresenta aos não familiarizados uma dificuldade maior em resolvê-los. Ainda hoje o Tangram é muito utilizado, especialmente por professores no ensino de geometria. Como dito anteriormente, a base para construção do Tangram Tradicional é um quadrado, cuja medida do lado pode assumir diferentes valores. Porém, a relação entre as peças é proporcional. As relações entre as medidas dos lados das figuras planas podem ser vistas em Porto, 2007.

3. O SOFTWARE EDUCACIONAL TAGRAM

O Software educacional **TANGRAM** foi projetado e desenvolvido com uma interface de fácil utilização, interativa, onde o usuário possa ter uma participação ativa, podendo, visualizar, verificar, validar mudanças e alterações ocorridas, levando o aluno a construir o conhecimento. Seu desenvolvimento foi feito utilizando o *software Director* versão 8.5 (Bizzoto, 2002),

O *Director* é um programa de animação bidimensional de primeira qualidade, multi-plataforma (o sistema gerado pode ser usado eu várias plataformas: Windows 95 ou Macintosh, por exemplo), e também é um dos programas de desenvolvimento em multimídia mais forte que existe (Bizzoto, 1998). Ele utiliza a metáfora de um desenvolvimento de um filme, tornando fácil à manipulação e transformação de um conjunto de imagens e de seqüências de animações. O resultado final gerado pelo *Director* pode ser gravado em um CD-ROM ou disponibilizado pela Internet.

3.1 MODELAGEM COMPUTACIONAL

Modelar um sistema é criar modelos gráficos que simbolizam os objetos do sistema e os seus relacionamentos. Como existem vários tipos de sistemas multimídia ou hipermídia existem também várias técnicas para desenvolver a modelagem de um sistema (Conklin, 1987). Neste trabalho utilizou-se a técnica de Modelagem Hipermídia (HMT – *Hipermedia Modeling Technique*). Esta técnica auxilia o projetista a responder três questões fundamentais (Nemetz, 1995): Como dividir o domínio de informações em nós; Como os nós resultantes são conectados; Como o usuário interage com a aplicação. Estas perguntas são respondidas através de quatro modelos: de Objetos, de Hiperobjetos, de Navegação e de Interface. A Figura 2 mostra graficamente a posição de cada modelo durante o processo de passagem do Domínio da Aplicação para a Representação da Solução. A letra A mostra onde aplicar o modelo de Objetos e a letra B mostra onde estão os modelos de Hiperobjetos, de Navegação e Interface.

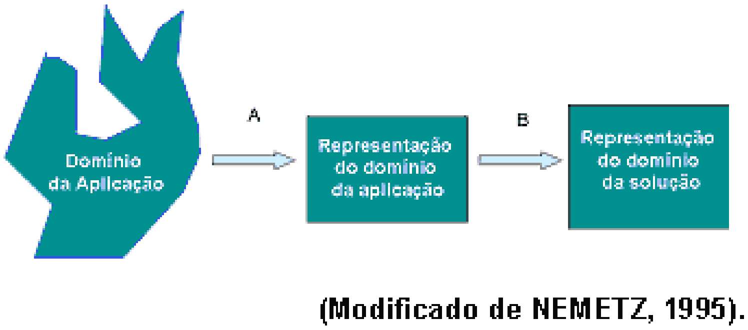


Figura 2: Passagem do Domínio da Aplicação para a Representação do domínio da Solução.

As Figuras 3, 4, 5 e 6 mostram exemplos da Interface do sistema desenvolvido neste trabalho. A Figura 3 mostra a interface inicial do **TANGRAM**. A Figura 4 mostra o seu menu inicial. Nele aluno pode ver a animação inicial novamente, escolher em ver as peças do Tangram, ir para o menu do jogo ou sair do sistema.

Figura 3 – Interface inicial do Objeto de Aprendizagem Tangram.

Figura 4 – Interface do Menu inicial do Objeto de Aprendizagem Tangram.

A Figura 5 mostra as peças do jogo Tangram utilizada no sistema. A Figura 6 mostra a interface do menu do jogo. Nela o aluno deve escolher em jogar o Tangram com a figura que será o alvo em miniatura ou ampliada. Se ele escolher o modelo mini a interface que aparecerá é a mostrada na Figura 7, caso contrário será a interface mostrada na Figura 8. Ainda existe um botão de ajuda para indicar como as peças devem ser manipuladas: translação e rotação.

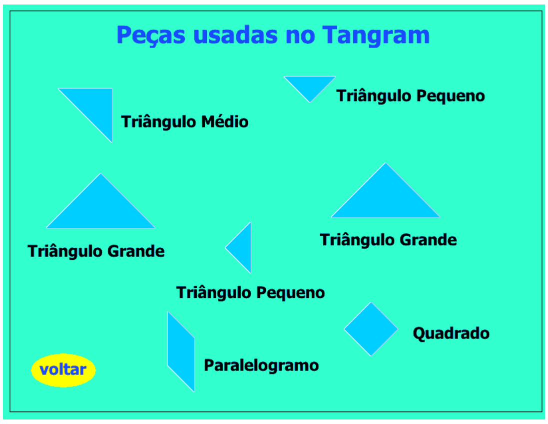


Figura 5 – Interface do mostrando as principais peças do Tangram tradicional.

Figura 6 – Interface do mostrando o menu onde o aluno escolhe como irá trabalhar com o Tangram: modelo mini ou modelo ampliado.

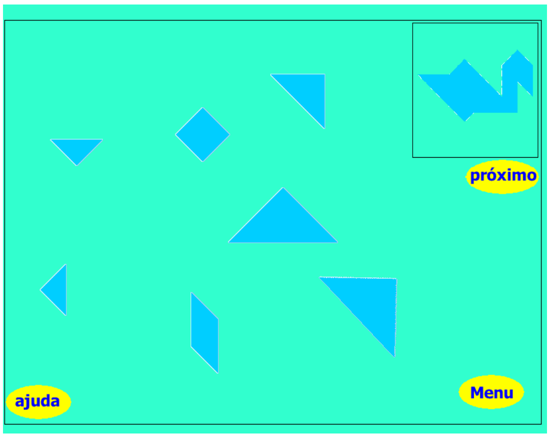
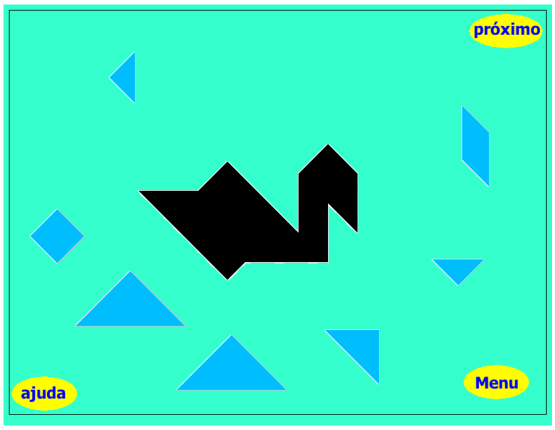
	

Figura 7 – Interface de trabalho do modelo mini.	Figura 8 – Interface de trabalho do modelo ampliado.

4 ATIVIDADE PRÁTICA PEDAGÓGICA

O sistema foi utilizado com alunos do Ensino Fundamental (sexto ano) de um colégio público localizado no Município de Vassouras. Os alunos foram informados previamente sobre o tema do projeto e a proposta do trabalho a ser realizado na turma. Em um contato anterior com a direção do Colégio, foi solicitada a instalação do *software* **TANGRAM** nos computadores do laboratório de informática da escola.

No dia previsto para a atividade, os alunos foram levados ao laboratório de informática da escola, onde os mesmos foram distribuídos de forma que ficassem dois alunos por computador. Como o laboratório estava com algumas máquinas em manutenção foram utilizados apenas três computadores.

Durante a atividade foi observado o comportamento e as atitudes dos alunos diretamente com o *software*, permitindo, verificar que, antes de conhecer técnicas de solução de determinados problemas, o aluno pode visualizá-los e resolvê-los.

Foi feita uma abordagem sobre o programa, sua utilização e algumas demonstrações de atividades no programa e em seguida, proposta as atividades para serem realizadas. Foi muito interessante observar que eles demonstraram desenvoltura em relação ao uso do computador, como uma “ferramenta que facilita e oferece meios muito importantes no ensino-aprendizagem além de desenvolver a percepção visual, a habilidade e diferentes ângulos de observação”.

Em um primeiro instante, movimentar as sete peças que compõe o Tangram Tradicional parecia ser fácil, pois era só arrastar as peças com o auxílio do mouse e para rotacionar a peça bastava utilizar a tecla “shift”. No início estava correndo tudo muito bem, quando surgiram as figuras em miniatura as crianças começaram a se empolgar, dizendo **“isso é muito fácil, vou montar rapidinho”**, o processo parecia fácil, mas montar as figuras com apenas sete peças não era tão fácil como se imaginava, pois as figuras pareciam precisar de mais peças para serem montadas.

O tempo foi passando e eles ficando cada vez mais instigados em juntar as peças do Tangram e montar à tão desejada figura, mas infelizmente foi difícil, pois nenhum grupo conseguiu concluir a atividade 1, ou seja, o “jogo mini”, pois eles não conseguiam visualizar e distinguir bem uma peça da outra. Roda daqui gira dali e sempre sobrava um espaço ou faltava um pedaço para completar a “figura”. Algumas tentativas foram feitas, porém todas sem sucesso.

Então um outro momento, foi lançado um desafio, ou seja, a atividade 2, que é o jogo ampliado. Foi unanimidade que está atividade seria mais fácil. Todos disseram: **“Poxa! Esse é muito fácil. Agora vai ser rápido!”**, pois este jogo consiste em sobrepor as peças na figura ampliada.

Pega peça daqui, arrastam dali, e uma tentativa, outra tentativa, mais algumas tentativas e finalmente foram surgindo às figuras no monitor, onde vários conseguiram concluir a atividade 2. As Figuras 9 e 10 mostram algumas dessas figuras concluídas.

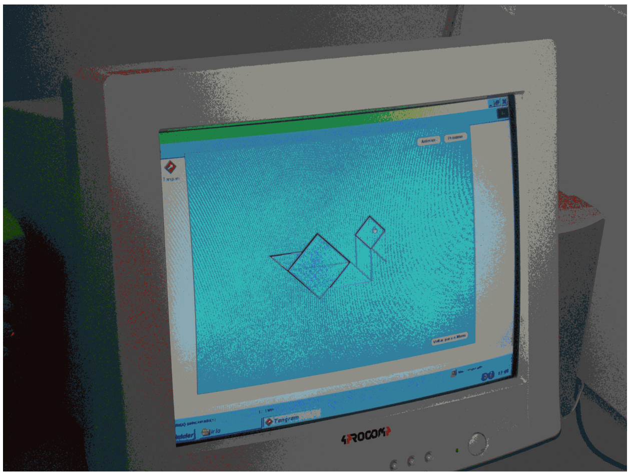


Figura 9 – Figura do Pato concluída no modelo ampliado.

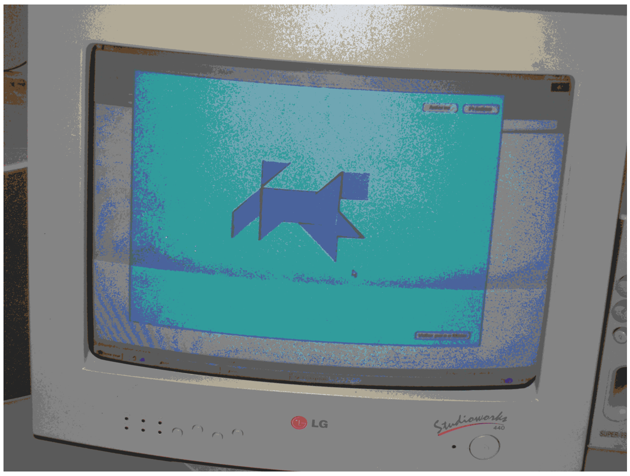


Figura 10 – Figura do cachorro concluída no modelo ampliado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O software do Tangram é muito simples, basicamente uma tela por onde se arrasta as figuras utilizando as sete peças sem que haja sobreposições, montando outras figuras como aves, objetos e etc, indicado para o ensino de geometria.

Como as maiorias dos alunos com os quais o programa foi testado nunca haviam utilizado o computador, além dos objetivos iniciais da atividade – trabalhar a composição de figuras, selecionar e arrastar objetos, os alunos demonstraram boa adaptabilidade ao *software e* muito interesse pelas atividades.

Ajudam-se uns aos outros, aqueles que já tem algum conhecimento sobre o computador ensinam os que não tem e quando sentam lado a lado procuram fazer o mesmo desenho ou utilizar o mesmo jogo.

O trabalho avaliou qualitativamente o comportamento dos estudantes frente à utilização do *software* nas aulas, constatando que o fato de trabalhar com computador em aula desenvolveram nos alunos maior interesse. Com o uso desta ferramenta no processo ensino-aprendizagem e no desenho geométrico, o dinamismo com o qual os problemas foram tratados, associado à rápida verificação de construções e propriedades contribui positivamente na construção do conhecimento pelo aluno.

7 Referências

Bizzoto, C. E. N. (2002) Director 8.5: multimídia e internet. Florianópolis: Visual Books.

Brousseau, U, G. (1996) Os diferentes papéis do professor. In: SAIZ, C.P.I. et alii – Didática da Matemática. Porto Alegre: Artes Médicas.

Conklin, J. (1987) *Hypertext: An Introduction and Survey*. IEEE Computer, New York, v.20, n.9, p.17-41, Sept. 1987.

Nemetz, F. (1995) HMT: Modelagem e Projeto de Aplicações Hipermídia. Dissertação de Mestrado - CPGCC: UFRGS, Porto Alegre.

Piaget, J. *Aprendizagem e Conhecimento*, em Piaget, P. & Gréco, P., Aprendizagem e Conhecimento, Freitas Bastos, Rio de Janeiro, 1974.

Porto, I. da P. G. (2007) *Tangram: Um Objeto de Aprendizagem sobre Geometria Plana*. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática). Vassouras. Universidade Severino Sombra; 45 p.

Roque, W. L. (2007) Novas tecnologias computacionais e o ensino de Matemática. Educação Matemática Pesquisa – Revista do programa de estudos pós-graduados em educação Matemática – Puc-SP. São Paulo, V 2 número 1 pp 101 – 114.

Valente, J. A. (1999) Análise dos diferentes tipos de softwares usados na Educação. Em J.A. Valente (Org.), O Computador na Sociedade do Conhecimento (pp. 71-84). Campinas, SP: Gráfica da UNICAMP.

SÍNTESE X ANÁLISE: A TRANDFORMAÇÃO DA MATEMÁTICA

Bruna Moustapha Corrêa (SEE-RJ, Cecierj, UFRJ - mestranda)

Tatiana Roque (UFRJ - orientadora)

François Viète viveu no século XVI e desenvolveu um trabalho que marcou a História da Matemática. Com o objetivo de resolver problemas geométricos, propôs um novo método que deu origem à Análise Matemática. Neste trabalho, apresentaremos uma breve contextualização da obra de Viète e destacaremos a diferença entre o método sintético, que era hegemônico até este momento, e o método analítico. Para isto, estudaremos a solução de um problema geométrico pelo método analítico.

Introdução

François Viète (1540 - 1603) é considerado por muitos como o pai da Álgebra, mas foi na tentativa de resolver problemas geométricos que ele foi levado a propor uma nova maneira de se fazer matemática. O presente trabalho apresentará as proposta feitas por Viète no livro *In Artem Analyticem Isagoge* (Introdução à Arte Analítica). Neste compêndio, o autor sugere o uso de procedimentos algébricos na resolução de problemas, introduzindo o uso de letras para representar tanto grandezas geométricas quanto grandezas aritméticas, tanto quantidades conhecidas quanto quantidades desconhecidas. Apresentaremos uma contextualização histórica desta obra, descrevendo algumas questões matemáticas relevantes na época. Em seguida, faremos uma distinção entre os métodos sintético e analítico, mostrando alguns procedimentos utilizados por Viète em sua *Introdução à Arte Analítica*. Finalmente, analisaremos um problema resolvido por Marinus Ghetaldi (1566 - 1626) de acordo com as leis da arte analítica.

Contextualização

Para um bom entendimento do trabalho de Viète é importante conhecer o contexto no qual ele foi realizado. O período histórico no qual estes trabalhos estão inseridos é o compreendido entre o

Renascimento e o Iluminismo, durante os séculos XVI e XVIII, especificamente entre os anos 1550 e 1750. No entanto, enfatizamos nesta contextualização o meio no qual a sua produção matemática está inserida, deixando de lado aspectos históricos mais gerais.

Matemáticos e historiadores da Matemática vêm questionando o que significa a "exatidão matemática". Porém, para entender o que é considerado "exato", é preciso saber de qual matemática está se falando, ou seja, a noção de "exatidão" em vigor em uma certa época está ligada à produção matemática realizada neste momento. Por exemplo, quando a matemática era essencialmente geométrica, questionava-se o que significava uma entidade matemática ser "conhecida" ou "dada", e o que poderia ser considerado um problema "resolvido" e sua solução ser "encontrada". Neste contexto, uma solução era "exata" quando podia ser construída, de preferência pelos instrumentos euclidianos.

Gostaríamos de investigar aqui a nova noção de exatidão que rege a Matemática a partir dos trabalhos de Viète. Para isto, devemos começar pelo que estava sendo produzido na época em que Viète elaborou seus trabalhos.

Em 1588, com a nova publicação da *Coleção* de Pappus, a matemática clássica grega voltou à tona. Sendo assim, neste período, a interpretação da exatidão ainda estava relacionada à construção geométrica, uma vez que este livro estuda as questões geométricas de acordo com o padrão grego, ou seja, resolvendo problemas através de construções com régua e compasso.

Mas entre a data em que a obra de Pappus foi escrita e a data desta nova publicação houve o trabalho dos árabes, que desenvolveram uma matemática que já podemos chamar de "algébrica", ainda que muito relacionada a situações do cotidiano. Sendo assim, podemos dizer que, no século XVI, de alguma maneira a álgebra já tinha sido introduzida na Matemática. No entanto, a geometria ainda era absolutamente soberana e a álgebra era utilizada apenas como ferramenta analítica para a solução de problemas geométricos.

Mesmo que a ferramenta algébrica não estivesse dentro dos padrões gregos de exatidão, pois as soluções obtidas por esta via não podiam ser consideradas "exatas", uma vez que não eram construídas, não se podia mais ignorar a sua importância. A álgebra tornar-se-á cada vez mais uma ferramenta poderosa, que pode ajudar na solução de problemas cada vez mais numerosos, além de propor também novas questões.

Sendo assim, foi preciso rever os padrões de exatidão em vigor. O novo padrão de exatidão deveria estabelecer quais seriam os procedimentos aceitáveis dentro da prática de resolução de problemas geométricos. É importante observar que, mesmo que outros procedimentos passassem a ser aceitos pela comunidade matemática, os problemas para os quais eles iriam servir ainda eram geométricos.

Portanto, fica evidente que o método analítico e os procedimentos algébricos foram fundados para servir à geometria.
Mas a todo o momento os matemáticos se perguntavam sobre a legitimidade dos procedimentos propostos. Sendo assim, ao se apresentar um novo método, era essencial a apresentação de uma boa justificativa, pois, caso contrário, o procedimento seria ignorado.
É justamente neste ponto que se introduz a grande inovação de Viète. A maneira que ele encontrou para legitimar seus procedimentos foi aceitar a exatidão como estando ainda associada à construção. A diferença estava no fato de considerar o seu método como um postulado, propondo com isso novas ferramentas de construção. Uma vez que estes novos postulados levavam-no a resolver mais problemas geométricos, eles deveriam ser admitidos como princípios da Matemática.
Ficou claro mais tarde que a importância de seu trabalho não estava relacionada ao mérito deste postulado, mas sim ao interesse e à produtividade das ferramentas resultantes. Queremos dizer, para resumir, que Viète fundou um novo ramo da Matemática, a Análise, na busca de novos procedimentos para servir à Geometria, que até este momento era predominantemente sintética.

Análise X Síntese

Na primeira página de sua *Introdução à Arte Analítica*, Viète afirma:

> "Encontra-se na Matemática uma certa maneira de procurar a verdade, que diz-se ter sido primeiramente inventada por Platão, que Theon chamou 'Análise' e que, para ele, define a suposição daquilo que procuramos com se estivesse concedido para chegar a uma verdade procurada, por meio de conseqüências; ao contrário, a 'Síntese' é a suposição de uma coisa concedida para chegar ao conhecimento daquilo que procuramos pelo meio de conseqüências."

Sendo assim, pode-se considerar a análise como raciocínio ao inverso, uma decomposição da verdade em termos mais simples; e a síntese, como um raciocínio direto, a recomposição de termos simples para se chegar à verdade. Um bom exemplo de raciocínio sintético é o da Geometria Euclidiana, na qual construímos uma solução; e de raciocínio analítico é o da Álgebra, que parte das soluções consideradas conhecidas (incógnitas) e opera com elas como se fossem conhecidas até chegar a um resultado que determina a solução.
Com já dissemos, Viète foi um dos primeiros a introduzir métodos analíticos na resolução de problemas geométricos, mas, como a tradição grega ainda permanecia presente, ele devia se preocupar em apresentar uma justificativa geométrica (nos moldes do modelo sintético) para cada

problema que ele resolvia. Na verdade, ele utilizava o método analítico para descobrir a solução e, no caso de problemas geométricos, sempre apresentava a construção que levava à solução.

Viète propôs assim um método analítico dividido em três partes: *zetetique*, *poristique* e *retique* ou *exegetique*. A zetetique pode ser considerada como a arte de traduzir o problema, transformando-o em uma ou mais equações; nesta tradução o problema era suposto resolvido e uma propriedade característica dele era encontrada (tal propriedade era chamada de *porisma).* A poristique era o estudo da legitimidade da síntese como procedimento inverso da análise, nas palavras de Viète "é aquela pela qual examinamos a verdade de um Teorema já conhecido por meio da igualdade ou proporção". Já *exegetique* era a arte de reconhecer soluções aritméticas ou geométricas das equações fornecidas pela *zetetique* e transformadas pela *poristique*; ela pode ser considerada como a resolução efetiva do problema e, no caso de problemas geométricos, ela é a própria descrição da construção.

Ao analisar bem o significado destas três partes do método analítico de Viète, pode-se perceber que a *zetetique* e a *poristique* de fato têm uma característica analítica, enquanto a *exegetique* tem uma característica sintética, o que mostra a preocupação de Viète em se adequar ao padrão grego. Para Viète, a *zetetique* devia ser praticada com o uso da lógica, uma lógica que "não exerce mais o seu raciocínio pelos números". Ele funda, assim, a sua *Logística Speciosa*, na qual introduz o uso de letras para determinar tanto as grandezas conhecidas como as desconhecidas e opera com estas grandezas sem se importar com a sua condição de existência, o que propiciou um avanço no sentido analítico.

No segundo capítulo de sua *Introdução à Arte Analítica*, Viète faz uma lista com dezesseis postulados. Na verdade, o seu objetivo é mostrar como o seu método analítico iria considerar os símbolos das equações e proporções. Estes postulados visam explicar o que Viète está considerando para ser usado no seu novo sistema, a *Logística Speciosa*. O primeiro postulado, por exemplo, é "Que o todo é igual a suas partes", o sexto, "Que se divide coisas iguais por coisas iguais, então os quocientes são iguais" e o último "Se existem três ou quatro grandezas e que se tem a mesma razão da primeira para segunda e da segunda para a terceira, ou da terceira para a quarta, aquilo que se contém nos extremos será igual aquilo que se contém nos meios".

Nos capítulos seguintes ele detalha toda a sua arte analítica, explicando com minúcia tudo que é possível ser efetuado. Ao fundar as leis para operar com as grandezas, Viète acabou se guiando pela geometria, mostrando mais uma vez a sua preocupação com o padrão grego. A *lei dos homogêneos* dizia que "Os homogêneos se comparam aos homogêneos", por exemplo, para uma grandeza ser somada com outra grandeza elas precisam ser homogêneas. Viète utiliza o termo "homogêneo" para indicar que as grandezas têm a mesma natureza, ou seja, grandezas que representam cubos são homogêneas entre si, mas são heterogêneas às que representam um quadrado.

No último item do último capítulo Viète afirma seu objetivo maior “a Arte Analítica (...) resolve o problema o mais relevante de todos os problemas que é RESOLVER TODOS OS PROBLEMAS”.

Um problema a e a sua solução

Para entendermos o método de Viète, é interessante analisar um problema sob a perspectiva da arte analítica. Utilizaremos aqui um exemplo apresentado por Ghetaldi, discípulo de Viète, em um livro publicado cerca de trinta anos após a sua morte (BARBIN e BOYÉ, 2005). Esta apresentação é interessante, pois Ghetaldi se preocupou em apresentar a solução divida nas três fases do método analítico, mostrando a influência do método e do padrão de exatidão proposto por Viète em sua época.

O problema consiste em determinar um triângulo retângulo a partir da hipotenusa e da diferença entre os catetos. Para resolvê-lo, Ghetaldi associa, em primeiro lugar, consoantes às grandezas conhecidas e vogais, às desconhecidas, obtendo assim duas equações. É importante observar que Ghetaldi não trabalhava com as equações como nós fazemos atualmente, na verdade ele obteve duas relações que, na linguagem atual, são equivalentes a equações. Assim como Viète, ele evitava o uso de símbolos, ou seja, o que hoje é escrito de maneira simplificada com o uso dos símbolos naquela época era escrito com palavras (Por exemplo, a expressão *aequabitur* designava o símbolo “=”). Repare que, de acordo com a notação introduzida por Viète, esta associação de letras às grandezas nada mais é que a *exegetique*.

Após algumas manipulações, Ghetaldi determina o *porisma*. As manipulações são descritas por palavras e representam a segunda fase do método analítico de Viète: *poristique*. Antes de apresentar a construção, Ghetaldi enfatiza que o *porisma* caracteriza o problema e que com ele é possível resolvê-lo. Sendo assim, para resolver o problema é preciso determinar geometricamente (através de construção com régua e compasso) a solução encontrada. Na terceira parte da resolução, além de construir a solução, Ghetaldi demonstra a legitimidade da construção apresentada, o que evidencia a sua preocupação em se enquadrar nos padrões gregos.

Um novo status para a álgebra

No movimento de releitura das obras gregas clássicas, Viète se afastou da visão mercantil da álgebra centrando sua atenção na maneira de encontrar uma solução geral para problemas geométricos. Como já dissemos, para encontrar tal solução, Viète fez uso da arte analítica, cujo objetivo era resolver qualquer problema através da análise que, por sua vez, tinha a álgebra como ferramenta fundamental. Vale lembrar que Viète não via a álgebra como uma técnica envolvendo números, mas sim como um método de cálculo simbólico envolvendo grandezas abstratas.

Sendo assim, a *Logística Speciosa* era uma entidade matemática independente, cujos axiomas reproduziam o comportamento tanto das grandezas geométricas quanto das grandezas numéricas. A abordagem de Viète era, portanto, independente da aritmética e da geometria. Mesmo rejeitando o uso de símbolos, a preocupação de Viète em criar leis gerais acabou dando origem à álgebra simbólica. Dessa forma, a álgebra adquiriu um poder demonstrativo que nunca tivera antes, tornando-se uma ferramenta nobre. A álgebra ganhava, assim, um novo status.

Referências

Barbin, Évelyne & Boyé, Anne (2005). *François Viète: um mathématicien sous la Renaissance*: Paris: Vuibert, pp. 53-73.

Bos, H.J.M. (2001). *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York: Springer-Verlag, pp 4-22, 146-158

Roque, T. (2006). *A Matemática através da história*. Notas de aula do curso de História da Matemática. UFRJ.

Vasser, A. (1630). L'Algèbre nouvelle de Mr Viète. Gallica, 2007.

Witmer, T. R.(1983). *The Analytic Art by François Viète*. Ohio. Kent State University Press.

LA IMPORTANCIA DE GALILEO EN LA CONSTRUCCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA

Jhony Alexánder Villa Ochoa

Yadira Marcela Mesa

Universidad de Antioquia – Colombia

RESUMEN

Éste es un proyecto de investigación en el que se pretende diseñar y validar una propuesta didáctica mediante la cual se pueda construir el concepto de función cuadrática vía la modelización de fenómenos de variación, para lograrlo se realiza reflexiones sobre el concepto objeto de estudio a la luz de los momentos históricos y el reconocimiento de Galileo en este proceso evidenciando sus conocimientos y procedimientos previos con base en la indagación de la matemática construida hasta su época, con los que en su obra se muestra que utilizó permitiendo analizar algunas implicaciones didácticas de su construcción.

INTRODUCCIÓN

Numerosas investigaciones han mostrado como el concepto de función es de gran relevancia en el estudio del álgebra y fundamental en el aprendizaje del cálculo, pero también han destacado el papel de la historia de las matemáticas como una herramienta para la reflexión docente a la hora de abordar o diseñar situaciones didácticas, ya que ella permite identificar obstáculos y procedimientos en la construcción de conceptos, por ello como resultado de una indagación documental es relevante la figura de Galileo Galilei (1564-1642) en esta construcción y se tratará por mostrar su pensamiento matemático en el momento de iniciar sus estudios del entorno, en particular del movimiento como tal.

A partir del estudio en general sobre el concepto de función se ha tomado como objeto de estudio en particular el concepto de **Función Cuadrática** y su construcción a partir de la modelación como herramienta didáctica. Con base en lo anterior se hace necesaria una indagación histórica que permita evidenciar obstáculos, oportunidades y situaciones que revelen concepciones cuadráticas.

CONOCIMIENTOS PREVIOS DE GALILEO

Éstos suponen un acumulado de saberes construidos hasta su tiempo que pondrá a su disposición para elaborar nuevo conocimiento que en este caso tiene que ver con modelización de fenómenos de variación, particularmente de la cinemática. Por ende es posible afirmar que a partir del mismo conocimiento que poseía Galileo es posible realizar un estudio del movimiento, y como se verá en este documento, de la función cuadrática aunque ésta no sea nombrada explícitamente por él su pensamiento de tipo funcional cuadrático[1] sugería su acepción.

Cabe entonces preguntarse ¿qué sabía Galileo?, para responder a esta pregunta un vistazo a la historia de las matemáticas nos dará su respuesta, por ello es posible afirmar que sus saberes correspondía a elementos tales como:

1. Un pensamiento deductivo
2. Geometría Euclidiana
3. Progresiones y sucesiones aritméticas
4. Las secciones Cónicas
5. Algebra geométrica
6. Aproximaciones gráficas del Movimiento de Oresme.

Este conjunto de procedimientos para el caso de la función cuadrática son los que se han presentado hasta el tiempo de Galileo y que por lo tanto se evidencia en su obra, unas con mayor énfasis que otras y que sin embargo todas ellas se hacen necesarias, a continuación se verá porqué.

1. PENSAMIENTO DEDUCTIVO

El papel de la filosofía con la creación de la lógica posibilita la creación de sistemas, es así como se somete el conocimiento a la validez y se consolida como verdad. Los Elementos de Euclides se convierten en el ejemplo o modelo de razonamiento que matemáticos y culturas posteriores adoptarán. Adicionalmente en un primer momento fue de gran relevancia para la sistematización de un razonamiento evidenciado de manera retórica ya que su escritura es la trascripción permanente de lo hablado, por ende las operaciones se describen y solo las letras son utilizadas para representar puntos. Aunque esto no quiere decir que con la aparición del simbolismo algebraico no haya este tipo de razonamiento.

---

[1] Palabra usada por los autores para relacionar la manera de pensar las situaciones que de manera retrospectiva invulocraban la Función cuadrática,

2. GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Es claro su carácter deductivo pero en relación con las nociones cuadráticas se evidencia una definición ofrecida en los Elementos que se concibe como "…Concepto: En los Elementos el término "cuadrado" acepta definiciones como: "de entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular"… también Puerta[2] (1996, p84) comenta que: "para dibujar un cuadrado [Euclides] a partir de un lado la expresión dada es anagrápsai apó…que indica la acción de dibujar repetidamente a partir de una recta dada (un lado) las demás rectas (lados) que cierran un cuadrado". Lo anterior permite mostrar la idea de cuadrado como la acción de repetir (multiplicar) ese mismo lado, obviamente de manera equiangular, es decir, una cantidad multiplicada por sí misma sería la interpretación a la luz del álgebra geométrica y el hecho que para la época un segmento no correspondía necesariamente a una medida en particular sino por el contrario a un valor en general y la referencia a ser figura demandaba una interpretación desde las áreas. Es el inicio de los esquemas generales de representación de la cantidad.

3. PROGRESIONES Y SUCESIONES ARITMÉTICAS

La disposición pitagórica de los números en formas visuales permite categorizar los números figurados, entre ellos los cuadrados, permitiendo establecer leyes generales que se construyen a partir de las variaciones entre una cantidad con sus anteriores y como consecuencia de ella la identificación del patrón constante. Así como cita Puerta (1996, p 90) "*los pitagóricos y matemáticos griegos posteriores hablan de distintas clases de números según las distintas figuras geométricas que formen (números triangulares, cuadrados, planos, sólidos, etc)*. Así es posible a partir de la toma de datos la descripción del comportamiento variacional del movimiento.

4. ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

Manejo de un álgebra sincopada, desde la generalidad que se vale de la geometría. Los historiadores y matemáticos han notado una estrecha relación entre su álgebra propuesta por Al-Kuarismi con el Libro II de los Elementos, así como lo menciona Escohotado (1982, p. 39) en el prólogo de la obra Principia[3]:

---

[2] Puerta 1996, Prólogo comentado de la publicación de la Obra de Euclides. Editorial Planeta.

[3] Principios Matemáticos de la filosofía natural. Traducción. Madrid: Editora Nacional

> “[en los árabes] su alta capacidad y su interés por la geometría y la aritmética-que culmina con la formulación sistemática del álgebra por el famoso Al-Quaritmi-no les conduce tampoco a hacer física matemática teórica. Es como si de alguna manera Grecia hubiese dado ya el marco genérico, y a los árabes solo les interesase perfeccionar el cuadro con exactitud y sutileza”.

Bien es sabido que los trabajos griegos fueron traducidos al árabe, de lo que es posible deducir que fueron estudiados por ellos y el hecho de observar como en una época posterior al trabajo de las magnitudes desde una perspectiva geométrica sea un trabajo construido a partir de la reflexión sobre las elaboraciones de los griegos.

5. CÓNICAS

Aunque desde Platón se evidencia el interés por el estudio de los cuerpos en movimiento Kline (1972: p 77) es Galileo quien unifica lo construido por Apolonio con fenómenos naturales, con el fin de obtener una mayor comprensión del mundo que les rodea en la medida en se elabora una matematización de ese fenómeno. Con Galileo se inaugura un gran momento para la consolidación de concepto de función cuadrática estableciendo la ruptura en la concepción de parábola como figura (concebida en la obra de Apolonio) a ser considerada como el resultado del comportamiento de algunas variables. Las cónicas y en particular la parábola se consideran en la actualidad como referentes importantes de relaciones cuadráticas, sin embargo se observa que históricamente surgieron de forma independiente a las nociones de variación y cambio relativas al concepto de función y que por supuesto vale la pena generar las reflexiones pertinentes sobre las implicaciones que tendría en el aula de clase continuar replicando esta parte de la historia abordando dichos conceptos de manera independiente o por el contrario evaluar las implicaciones que tendría para la comprensión de ambos concepto es de manera conjunta.

Al identificar esta ruptura se afirma entonces que la actividad pedagógica y didáctica debe considerarla de manera que se permita la reflexión del docente acerca de su concepción de parábola y las implicaciones que éstas tienen en el aprendizaje y construcción de este concepto por parte de los estudiantes. Es un llamado a unificar conceptos y permitirle construirse a partir de su consideración epistemológica.

6. ORESME

Su objetivo era representar mediante una figura geométrica las intensidades de una cualidad de magnitud continua que depende de otra magnitud análoga, estas intensidades estaban representadas por segmentos. Todo esto lo explica en su tratado De configurationibus qualitatum et motuun, en donde llega a afirmar: "Toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua". De donde se puede inferir que Oresme interpretaba la noción de número como algo diferente a las magnitudes. (Ruiz, 1998, p 113).

Según Ruiz (1998, 114) Oresme, siguiendo la praxis habitual, representó la extensio (magnitud "independiente", extensión) por una línea horizontal e hizo la altura de las perpendiculares proporcionales a las intensio (magnitud "dependiente", intensidad). Su propósito era representar la cantidad de una cualidad por medio de una figura geométrica. Afirmó que las propiedades de la figura podrían representar propiedades intrínsecas a la misma cualidad.

Lo anterior puede entenderse como el constructo de conocimientos de los que dispuso Galileo para emprender su explicación de acerca de los fenómenos de movimiento presentando una ruptura en la forma de concebir y representar el mundo, por ello esto demanda un nuevo conocimiento y ese fue su gran aporte, el vínculo de la física con las matemáticas y partir de allí la modelización matemática.

APORTES DE GALILEO

En Galileo se observa la forma en que recurre a sistemas de representación a partir de gráficas rectangulares, es una demanda además de la comprensión geométrica del gnómon, como dirían los griegos clásicos, o el concepto de perpendicular y ángulo recto, como distancia, altura, etc. Ésta a su vez relaciona este segmento con la media proporcional o la raíz cuadrada, por lo que le da un valor agregado a las consideraciones de Oresme respecto a la perpendicular.

Una fase en el proceso de modelización radica en la toma de datos y para ello se describe el proceso de modelización de Galileo:

- Dado un cuerpo
- Se toma un plano inclinado, este supone dos rectas una sobre la que se desliza un cuerpo y la otra servirá para calcular el tiempo transcurrido.

- Registro de datos relacionando las dos variables involucradas en el fenómeno: La distancia y el tiempo.
- Análisis de los datos recolectados
- Concluye con una tercera variable resultado de la razón entre las otras dos, y dada la relación constante entre estas magnitudes permite generalizarlas.
- Formulación de problemas en los que se plantean ecuaciones de carácter funcional como "…hallar la distancia en el instante t", lo que suponía para cualquier tiempo corresponde una distancia.

Realizando una transposición didáctica de lo anterior podría sugerirse como:

- Experimentación y toma de datos
- Disponer de los conocimientos previos con el fin de relacionarlos.
- Indagar por otros conocimientos, en este caso aritméticos para establecer relaciones numéricas que permitan validarse.
- Identificación de la variación
- Crear un modelo matemático que dé cuenta del fenómeno.

Lo anterior al interior del aula[4] no significa repetir las situaciones de Galileo, si no de vincularlas con los procesos analíticos para la construcción del concepto.

Obra de Galileo

En la siguiente situación se observarán tres aspectos:
Primero: Confirmar los saberes previos de Galileo, éstos dados por la historia. Segundo: los aportes de su obra, también dadas por la historia en tanto no se hallaron registros anteriores con tales aportes y por las implicaciones que éstas trajeron. Y por último las implicaciones para el desarrollo de las matemáticas posteriores o más bien la obra de Galileo como causa para nuevas formulaciones teóricas, tanto matemáticas y física, aunque este último no será tratado en profundidad por este artículo.

> "De aquí se deduce con toda evidencia que: si en tiempos iguales tomados sucesivamente desde el primer instante o comienzo del movimiento, tales como AD, DE, EF, FG, se recorrieren los espacios HL,LM,MN,NI, estos espacios estarán entre sí como los números impares a partir de la unidad; es decir, como 1,3,5,7; porque ésta es la razón de los excesos

[4] Entiéndase por aula no como el espacio físico si no como donde se dan las relaciones de enseñanza – aprendizaje.

> de los cuadrados de las líneas que van excediendo una de otras, y cuyo exceso es igual a la menor de ellas; vale decir, es la razón de los excesos de los cuadrados consecutivos a partir de la unidad. Por consiguiente, mientras la velocidad se acrece, durante tiempos iguales, según la sucesión simple de los números, los espacios recorridos, durante estos tiempos, reciben incrementos según la sucesión de los números impares, a contar de la unidad". Galileo (1638, p) Corolario del teorema II Libro IV.

Se observa en su demostración un carácter deductivo heredado de los Elementos, el trabajo con las cantidades continuas aunque se encuentra como en el procedimiento para la toma de datos se realiza un proceso de discretización y su razonamiento con el que argumenta el concepto de cuadrado deja ver un componente aritmético como esta afirmación galileana de que la parábola es un punto en movimiento. Al respecto deja de ver las cónicas como objetos matemáticos y estáticos en relación con el movimiento permite identificarlas como el producto de la trayectoria de un cuerpo que se mueve de acuerdo a una ley, patrón o causas, por ello surgen lo modelos que pretenden explicar los fenómenos presentados.

Esta afirmación acerca de la parábola deja ver la transposición semiótica del movimiento en una fase del proceso de modelización matemática del fenómeno, quedando claro que la gráfica se construye de acuerdo con la relación de la variación entre las cantidades por ejemplo una gráfica de caída libre no puede comprenderse como la vertical respecto a la horizontal, si no que ésta debe considerar las variables en juego en una relación de dependencia que las determina siendo para este caso importante en la medida en que da cuenta de la variación (o razón de cambio) de la variación, lo que actualmente podría decirse que de acuerdo con la descripción de los incrementos de la parábola $y = x^2$ iniciando en la unidad son respectivamente 3, 4, 5, 7 etc. es decir de la forma $2n+1$ que equivale a una función lineal y a su vez la razón de cambio de esta última es 2, una función constante. Lo anterior tiene que ver con la primera y segunda derivada de la función cuadrática, en consecuencia ella es posible comprenderse y construirse a partir del concepto de función lineal y de la identificación de la razón de cambio, ésta le da sentido a los incrementos y permiten comprenderla en un contexto variacional.

Para concluir Galileo propicia un espacio de investigación en el que sin hacerlo explícito motivó el posterior y no lejano desarrollo matemático, representado en la creación o descubrimiento de la geometría analítica y el cálculo infinitesimal con los trabajos de Descartes, Newton, etc. También el provoca la investigación sobre un conjunto numérico continuo, ya que con el fin de que el concepto de función cuadrática pudiese ser considerado como tal, era necesario que realmente para cualquier punto en movimiento a éste le correspondiese un espacio, un tiempo y una velocidad determinado, estableciendo así una correspondencia biunívoca y con esto ya se haría evidente que estas situaciones tendrían: Variables, relación de dependencia, correspondencia biunívoca y adicionalmente están presentes constantemente en el entorno para provocar su estudio en un proceso de modelización matemática para el estudiante y en modelación matemática para el docente que puede encontrar el entrono como motivo de aprendizaje y construcción matemática particularmente del concepto de función cuadrática.

Referencias

Hein N., Biembengut, M (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. En M. Murillo (presidente), Memorias del V festival internacional de matemática. Puntarenas: Colegio universitario de Puntarenas.

Del Rio Sánchez, J. (1996) Lugares Geométricas: Las Cónicas. Madrid: Síntesis.

Galileo, G .(1638) Diálogos acerca de dos nuevas ciencias. Traducción. Buenos Aires: Editorial

Kline, M. (1992) El pensamiento Matemático en la antigüedad a nuestros dias. I y II. Madrid: Alianza editorial.

Ruiz, L. (1998). La noción de función: análisis epistemológico y didáctico, Jaén: Universidad de Jaén.

Newton, I.(1687) Principios Matemáticos de la filosofía natural. Traducción. Madrid: Editora Nacional

VILLA, POSADA. El concepto de función lineal desde una perspectiva variacional. Tesis Maestría en educación matemática. Universidad de Antioquia. 2006

ATIVIDADES NO GEOGEBRA SOBRE DEMONSTRAÇÕES DE ARQUIMEDES E BARROW

Luiz Antônio Jacyntho (UNEMAT e mestrando da UNICAMP)

Luiz Mariano Carvalho (UERJ)

Através de um programa de Geometria Dinâmica, Geogebra, é possível obter visualizações e, conseqüentemente, uma melhor compreensão de uma demonstração elaborada por Arquimedes para provar que a área de qualquer círculo é equivalente a de um determinado triângulo retângulo. Também é possível entender casos particulares do Teorema Fundamental do Cálculo, explorados por Barrow.

INTRODUÇÃO

Na primeira parte deste trabalho serão apresentadas as demonstrações de Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C, Grécia) para a área do círculo e de Isaac Barrow (1630-1677, Inglaterra) para casos particulares do Teorema Fundamental do Cálculo. Seguir-se-ão roteiros de atividades para a utilização de um programa de geometria dinâmica, Geogebra, que permitem uma melhor compreensão do que Arquimedes e Barrow realizaram especificamente nestes casos e como tais demonstrações contêm conceitos de infinito e de convergência de seqüências que só mais tarde foram formalizados. O principal objetivo dessas atividades é servir de apoio a aulas de Cálculo Diferencial e Integral.

PROPOSIÇÃO DE ARQUIMEDES

"A área de qualquer círculo é igual à área de um triângulo reto, no qual um dos lados sobre o ângulo reto é igual ao raio, e o outro à circunferência, do círculo." (em "A medida de um círculo", Heath, 2002)

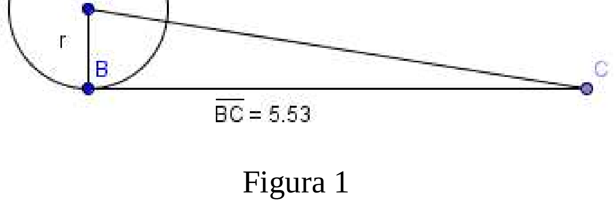


Figura 1

Demonstração:

Sejam o círculo ABCD de área igual a C e o triângulo K de área igual a T, descritos na proposição, então, se C não for igual a T, ela deve ser maior ou menor do que T. Suponha que C é maior do que T. Assim, inscreva em ABCD um quadrado com os vértices em ABCD, conforme a Figura 2.

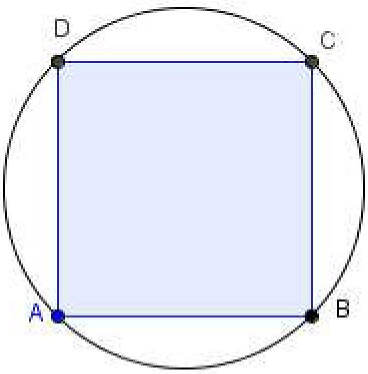


Figura 2

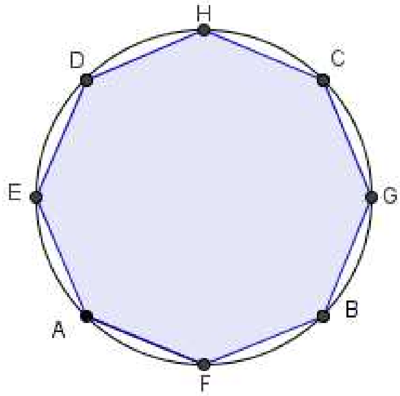


Figura 3

Dividindo ao meio os arcos AB, AC, CD, DA, marcando os pontos médios na circunferência e unindo os pontos adjacentes tem-se agora um novo polígono regular, mas agora com oito lados, (ver Figura 3). Então divida as metades novamente, conforme foi feito anteriormente e assim por diante, até encontrar um polígono regular inscrito tal que a diferença de C com a sua área seja menor que a diferença de C com T. Então a área deste polígono é maior que T (aqui é usado o Método da Exaustão[1], proposição 1 do livro X dos Elementos de Euclides, Heath, 1956).

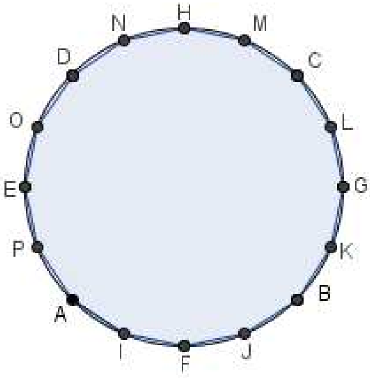


Figura 4

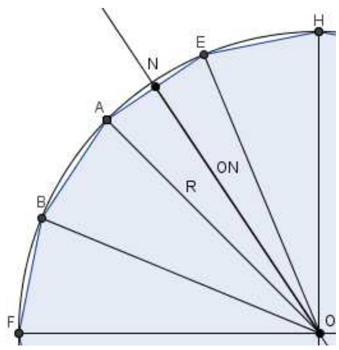


Figura 5

---

[1] "Sejam duas grandezas diferentes, se da maior é subtraída uma grandeza maior que sua metade, e do que sobrar, uma grandeza maior que sua metade, e se este processo for repetido continuamente, então sobrará uma grandeza menor do que a menor das grandezas dadas. E o teorema pode ser provado de forma semelhante mesmo se as partes subtraídas forem iguais às metades." (tradução dos autores)

Daí, seja AE qualquer lado do polígono e ON a perpendicular sobre AE, onde O é o centro de ABCD, conforme Figura 5. Então ON é menor que o raio de ABCD e, portanto, menor que um dos lados de K. O perímetro do polígono também é menor que a circunferência do círculo e conseqüentemente menor que outro lado de K, ambos os lados que formam o ângulo reto de K. Portanto a área do polígono é menor que T; o que contraria a hipótese inicial, logo C é menor ou igual a T.

De forma análoga Arquimedes desenvolveu a demonstração para um círculo inscrito em um quadrado chegando à conclusão da necessidade das áreas do círculo e do triângulo retângulo proposto serem iguais.

PROPOSIÇÃO DE BARROW

Nessa proposição, ao contrário do que estamos acostumados atualmente, apenas o eixo vertical não é utilizado, sendo assim os valores abaixo do eixo horizontal (que contém o segmento AD) não são considerados negativos.

"Seja ZGE qualquer curva na qual o eixo é AD; e seja as ordenadas aplicadas a este eixo, AZ, PG, DE, crescendo continuamente em relação à ordenada inicial AZ; também seja AIF uma curva tal que, se qualquer segmento de reta EDF é traçado perpendicular a AD, cortando as curvas nos pontos E, F, e AD em D, o retângulo contido por DF e um dado comprimento R é igual ao espaço interceptado ADEZ ; seja também DE/DF = R/DT, e una DT. Então TF é tangente à curva AIF no ponto F." (Conferencia 10, proposição 11, pág. 116, Child, 1916).

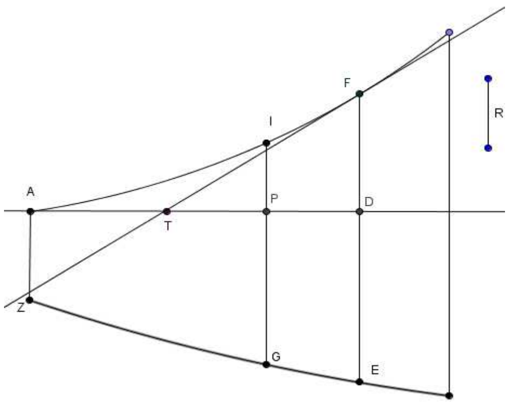


Figura 6

Demonstração:

Seja qualquer ponto I é tomado na curva AIF (primeiro entre de F e A), e através dele, IG é traçado paralelo a AZ, e KL é paralelo a AD, cortando as retas dadas como é mostrado na Figura 7;

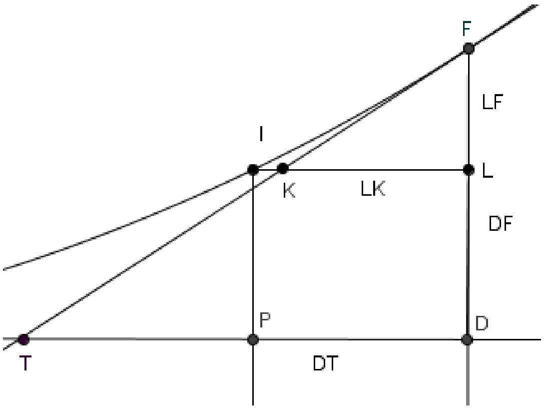


Figura 7

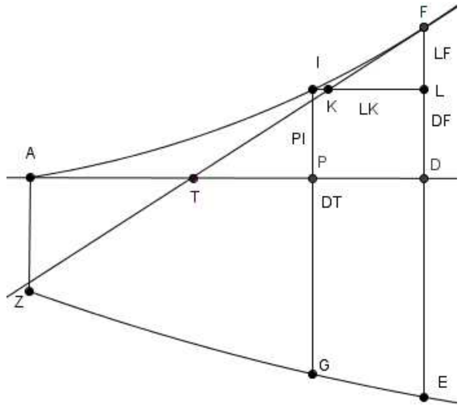


Figura 8

então por semelhança de triângulos conclui-se que LF/ LK = DF/ DT (1). Como por hipótese DE/ R = R/DT, daí vem que DF/DT = DE/R (2). Agora de (1) e de (2), temos que LF/LK = DE/R ou que LF.R = LK.DE. (3). Novamente da hipótese temos que DF.R = área ADEZ e que PI.R = área APGZ (4). Como LF = DF – DL, IL foi traçado paralelo a VD e PI paralelo a DL então DL = PI e também LF = DF – PI (5), isso pode ser visto na Figura 8. Daí por (3), (4) e (5), temos que: <u>DE.LK</u> = LF.R = (DF – PI).R = área ADEZ – área APGZ = <u>área PDEG</u> (na Figura 9 pode-se conferir esta igualdade).:

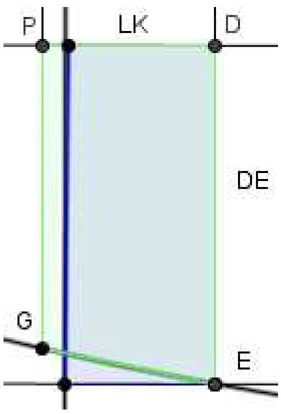


Figura 9

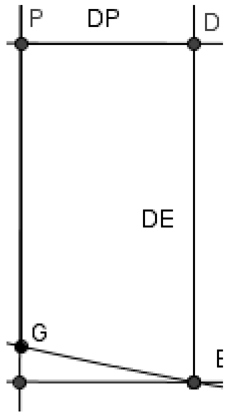


Figura10

Como a área PDEG < DP.DE, (ver figura 10) pois novamente usando a hipótese temos que as ordenadas são continuamente crescentes, então DE.LK<DP.DE e conseqüentemente LK <DP . Assim como DP = LI (ver figura 7), conclui-se que K não pode ser um ponto da curva AIF; logo a

reta em questão é tangente no ponto F. De forma análoga, se o ponto I é tomado depois de F, e a mesma construção é feita como antes, podendo ser mostrado que LK> DP. Assim ficou demonstrado que a reta TF tangencia a curva AIF no ponto F.

GRÁFICOS DINÂMICOS NO PROGRAMA GEOGEBRA

Estamos desenvolvendo um conjunto de atividades para apoio a aulas de Cálculo Diferencial e Integral, em particular, para o ensino do conceito de Integral e do Teorema Fundamental do Cálculo. Nessas duas atividades propomos passos que levem o estudante a experimentar conflitos (Giraldo, 2004) entre os conceitos que ele terá aprendido nas aulas teóricas e as respostas do computador aos comandos do Geogebra. Essas atividades ainda não foram testadas em sala de aula, mas pretendemos fazer experimentos em breve.

Atividade sobre a proposição de Arquimedes

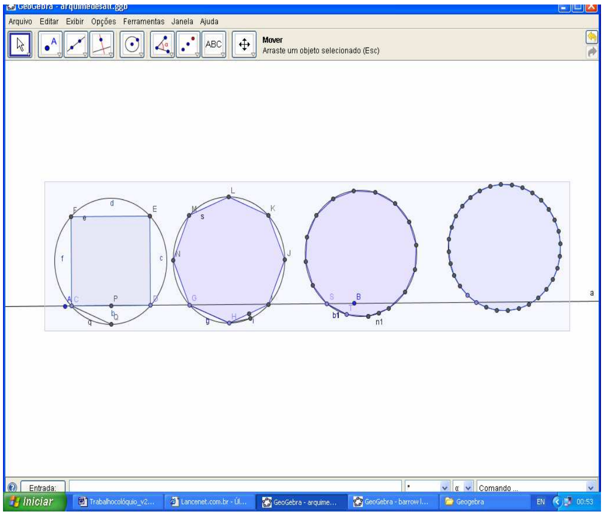


Figura 11

1. Calcule a área do circulo e depois a área do polígono regular inscrito contendo 64 lados. Depois diminua ambas as áreas na posição mover e observe o que acontece.
2. Vá em **opções** e aumente para 5 o número de casas decimais e observe o resultado
3. Use a função **zoom** e aumente em cima de um lado do polígono até que a figura fique do tamanho de sua tela.
4. Aumente o número de lados do polígono, será que para qualquer polígono vai existir diferença entre sua área e a área da circunferência?
5. Se existir diferença o que deve acontecer para que ela não apareça?
6. Qual é a sua conclusão após realizar as etapas acima?

Objetivo da atividade

Nesse caso o estudante deverá experimentar uma contradição entre a informação dada pelo computador de que as áreas do círculo e do polígono são iguais, por um lado, e a demonstração de que elas são diferentes. Através de atividades de magnificação e de variação do número das casas decimais, queremos colocar o estudante diante do fato de que a informação do computador é limitada à precisão utilizada e de que a justificativa de a área do círculo ser maior pode se dar através do conceito de limite de uma seqüência infinita de números reais (áreas dos polígonos).

Atividade sobre a proposição de Barrow

Uma limitação importante da demonstração de Barrow é que ela só é válida para funções estritamente crescentes ou decrescentes, apesar desse ponto não será enfocado nesse momento, ele será visto em outras atividades.

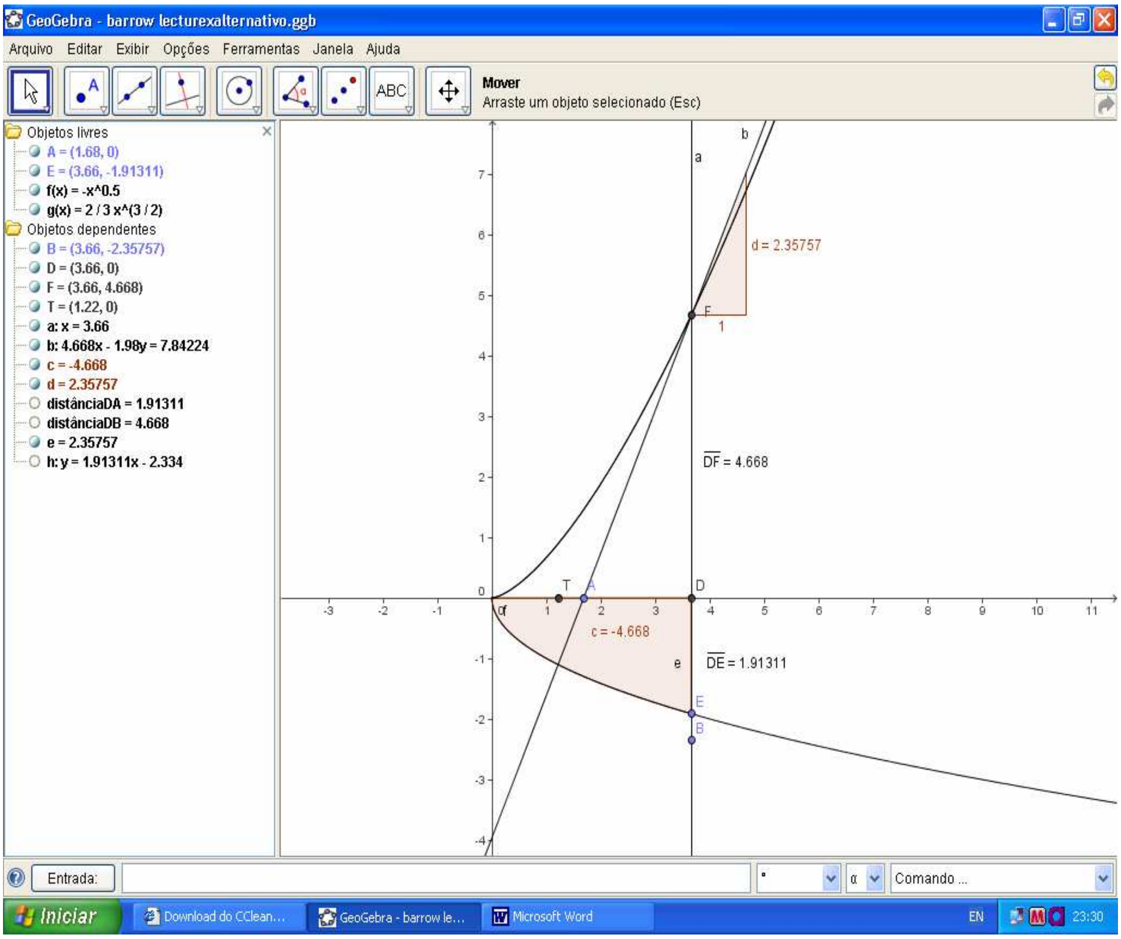


Figura 12

1. Coloque o ponto F de tal forma que à distância DF seja um número entre 7 e 8.
2. Clique em cima do ponto A e mexa a reta que passa pelos pontos A e F e observe o que acontece com a distância DH
3. Qual é o valor da inclinação da reta quando o ponto H se localiza em cima do ponto E?
4. Quando o ponto H fica sobre o ponto E, sobre que ponto vai ficar o ponto A
5. Vá em **opções** e aumente o número de casas decimais para 5 e observe o que acontece
6. Qual é o valor da divisão de DF por DE?
7. Escolha a função **ampliar** e selecione o ponto F, amplie e relate o que aconteceu.
8. Coloque agora o ponto F de tal forma que à distância DF seja um número entre 1 e 2 e faça os procedimentos de 1 até 7 novamente.

Objetivo da atividade

Essa atividade faz parte de um conjunto de outras que já terão trabalhado vários aspectos da demonstração geométrica de Barrow para o Teorema Fundamental do Cálculo. A idéia central é desenvolver a relação entre a inclinação da reta tangente ao gráfico da função integral (na parte superior do gráfico) e a ordenada da função para a qual se está calculando a integral (na parte inferior). Através de processos de magnificação e mudança da quantidade de casas decimais, o objetivo é que o estudante possa refletir sobre a relação entre o conceito de derivada (inclinação da reta tangente) e integral (nesse caso igual, a menos de sinal, à área definida por uma curva, um eixo e retas perpendiculares ao eixo). Com a utilização de diferentes pontos na curva pretendemos mostrar que o comportamento do programa pode variar muito, pois em um dos casos a reta tangente e a curva serão indistinguíveis e em outro elas sempre serão diferentes. Novamente nesse caso, a limitação da precisão utilizada, poderá levar aos estudantes a refletirem sobre os conceitos envolvidos. O objetivo central dessa atividade é fortalecer a idéia de que a reta tangente é a única que atende à condição de corresponder à ordenada da função que se está calculando a integral. Ao mesmo tempo será vivenciada a limitação do programa em confirmar essa informação por causa da limitação na precisão da representação dos números reais.

OBSERVAÇÕES FINAIS

Apresentamos um extrato de atividades que temos desenvolvido para apoio a aulas de Cálculo Diferencial e Integral. Ao nos apoiarmos em textos históricos e utilizarmos a Geometria Dinâmica, visamos aumentar o interesse dos alunos pelo desenvolvimento da matemática, acentuando diferenças, similaridades, limitações entre várias épocas do desenvolvimento do pensamento matemático e reforçamos a necessidade da construção de conceitos sólidos para fundamentação do Cálculo Diferencial e Integral.

Referências

Child, J. M. (1916). *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*. The Open Court Publishing Company.

Giraldo, V. (2004). *Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada*, Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ.

Heath, T. L. (1956) *Euclid, The Thirteen Books of The Elements*, Dover.

Heath, T. L. (2002) *The Works of Archimedes.* Dover.

GALILEU E AS NOVAS TECNOLOGIAS NO ESTUDO DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO BÁSICO

Wanderley Moura Rezende – IMUFF

***Resumo**: Este artigo pretende discutir a possibilidade de articular as idéias e ferramentas intelectuais que antecedem o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, o espírito científico de Galileu e o uso de novas tecnologias, tendo como meta uma intervenção didática na educação básica no que se refere ao estudo do comportamento variacional das funções polinomiais.*

UM BREVE HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

A origem do conceito de função está relacionada ao estudo das variações quantitativas presentes nos fenômenos naturais. Nesse sentido, pode-se afirmar que a contribuição dos filósofos escolásticos no estudo e tipificação dos movimentos dos corpos foi, sem dúvida, um dos grandes pilares na construção deste conceito.

Nicolau de Oresme (1323–1382), por exemplo, ao estudar o movimento uniformemente acelerado, representou num gráfico a velocidade variando com o tempo da seguinte maneira: marcou instantes de tempo ao longo de uma linha horizontal que ele chamou de longitudes e representou as velocidades em cada tempo por linhas verticais, perpendiculares às longitudes, que ele denominou latitudes.

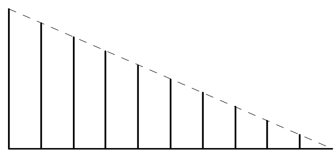


Figura 1- representação gráfica de Nicolau de Oresme

Esta representação é duplamente significativa: por um lado mostra duas grandezas relacionadas entre si, variando ao mesmo tempo, e por outro lado ilustra esta variação através de um gráfico. O conceito de função se estabelece, implicitamente, por meio da curva (uma reta) que ilustra que a taxa com que uma grandeza varia em relação a outra é constante. Faltavam ainda alguns ingredientes essenciais para se explicitar o conceito de função, é verdade. Mas tal fato se sucederia nos quatro séculos seguintes.

O rompimento definitivo com a maneira aristotélica de explicar os fenômenos naturais veio através de Galileu Galilei (1564-1642), que questionou publicamente dois grandes pilares da filosofia cristã: o homem como centro do universo e a física de Aristóteles como modelo para a ciência. Contrariando Aristóteles, o pensador italiano demonstrou que o peso de um corpo não exerce influência na velocidade da queda livre e, de quebra, enunciou a lei da queda dos corpos no vácuo: o espaço percorrido por um corpo em queda livre é diretamente proporcional ao quadrado do tempo levado para percorrer este espaço. Interessante é observar que Galileu chegou a este resultado sem dispor dos atuais conceitos de derivada e integral (o Cálculo ainda estava para ser "inventado"). Estabeleceu a relação funcional entre as grandezas observando apenas que a seqüência de dados obtidos para as medidas do espaço percorrido pelo corpo em queda livre gerava uma progressão aritmética de segunda ordem – veja, por exemplo, (Boyer, 1949).

No século XVI a Álgebra teve um significativo avanço. François Viète (1540-1603) fez uso, em seus trabalhos de "*uma vogal, para representar uma quantidade suposta desconhecida ou indeterminada e uma consoante para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados*" (Boyer, 1991). Surge então o conceito de variável que Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665), e depois Newton e Leibniz, iriam utilizar no estudo de curvas.

É verdade, no entanto, que o conceito de função "evoluiu" no processo histórico de construção do conhecimento matemático: sai, gradativamente, do âmbito do Cálculo, enquanto relação entre quantidades variáveis, para o âmbito da Teoria dos Conjuntos. Tal definição apareceu tão somente no início do século XX e, historicamente, pouco contribuiu para o desenvolvimento do conhecimento matemático em sentido amplo.

O CAMPO PEDAGÓGICO

Pesquisas na área de ensino de Cálculo têm sustentado que o conceito de função tem sido uma das principais fontes de obstáculos epistemológicos para a aprendizagem dos conceitos básicos desta disciplina. Sierpinska (1987), Cabral (1998) e Rezende (2003a) são alguns exemplos dessas pesquisas. Tal fato é um forte indicador de que o ensino de funções na educação básica não vem cumprindo bem a sua missão.

De fato, uma forte evidência disso são as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos estudantes na resolução de problemas de taxas relacionadas e problemas de otimização. Cabral (1998), analisando, por exemplo, o universo de respostas dadas pelos estudantes a alguns desses tipos de problemas, identifica quatro níveis de significação: o *aritmético*, o *algébrico*, o *funcional* e o *diferencial*, identificando entre eles uma hierarquia de natureza epistemológica. Segundo a pesquisadora, em situações problema dessa natureza, os dois primeiros níveis de significação são os mais comuns. Os alunos não conseguem definitivamente "*enxergar*" as quantidades variáveis envolvidas no problema nem tampouco a relação funcional entre elas: "*O difícil mesmo é encontrar* *a função*” – respondem os estudantes. Identificar o que varia, e em função de que varia é, sem dúvida, o primeiro passo para a resolução desse tipo de questão.

Em outro contexto, Botelho (2005) e Souza Sá (2005), ao realizarem um mapeamento de como o ensino de funções polinomiais de primeiro e de segundo graus e de funções exponenciais e logarítmicas é desenvolvido em alguns livros didáticos do ensino básico de matemática, constataram a predominância de uma abordagem algébrica e estática do conceito de função. Fala-se, por exemplo, em injetividade ou sobrejetividade, mas não em crescimento ou decrescimento da função, ou melhor, em *quanto* e *como* cresce/decresce o valor de uma função em relação à sua variável independente. Discutem-se (caso existam) os zeros da função, mas não os seus pontos críticos, que são, em verdade, os seus pontos ótimos. A noção de função é, desse modo, estabelecida não no contexto da “variabilidade”, mas, em termos de uma correspondência estática entre os valores das variáveis “x” e “y”. O gráfico da função é, em geral, “plotado” através de uma tabela de valores “notáveis”. A curvatura das curvas que compõem o gráfico da função é, em geral, induzida pelo acréscimo de mais pontos. Assim, pode-se dizer, com base nos resultados de Botelho (2005) e Souza Sá (2005), que é desse modo, em termos da correspondência (x,f(x)), que se estabelece a noção de função em alguns dos principais livros didáticos do ensino básico nacional.

Esta idéia não está errada conceitualmente, ao contrário, ela representa a forma como Dirichlet (1837) conceituou a noção de função: *“Uma função y(x) é dada se temos qualquer regra que associe um valor definido y a cada x em um certo conjunto de pontos”* – (*apud* Rüthing, 1984). No entanto, tal interpretação do conceito de função, caracterizada pelo seu formato algébrico, se encontra na contra-mão da história do Cálculo e da sua própria evolução histórica.

Segundo Caraça (1948), o conceito de função se estabelece como uma ferramenta da matemática que ajuda o homem a entender os processos de *fluência* e de *interdependência* que são intrínsecos às coisas e aos seres do nosso Universo. Portanto saber que a variação de uma grandeza depende da variação da outra é um aspecto importante no estudo do conceito de função, mas que se torna incompleto do ponto de vista epistemológico, se não conseguimos dar qualidade e quantificar este processo de variação. Assim, para o bem do ensino de funções reais na educação básica, precisamos restabelecer a sua origem histórica. Precisamos recuperar os “escolásticos”, que ao “matematizarem” o conceito de função, viam nele um instrumento que permitia estabelecer uma *tipificação* da variação de uma grandeza em relação a outra(s) variável(veis). Nesse sentido, o estudo da variabilidade das funções reais torna-se imprescindível. Mas, surge então a questão atual de nossa pesquisa (Rezende, 2003b): como tornar isto possível no ensino básico sem a presença do conceito de derivada, usualmente apresentada em uma disciplina inicial de Cálculo do ensino superior?

O ESTUDO DA VARIABILIDADE DA FUNÇÃO POLINOMIAL

Ao que parece a resposta para a nossa questão está em Galileu. O cientista italiano também não dispunha do conceito de derivada e nem por isso deixou de reconhecer a relação funcional existente entre a posição de um objeto em queda livre e o tempo decorrido para a sua realização. Tudo que o grande mestre possuía como *ferramenta matemática* para resolver o problema, o nosso aluno do ensino médio, em geral, também dispõe. É só uma questão de organização e uma re-articulação dos conteúdos já ensinados, procurando dar evidência ao estudo do comportamento variacional das funções reais. Cabe destacar ainda que o nosso aluno dispõe hoje de uma ferramenta poderosíssima para a interpretação e análise de dados: o computador. Vejamos então uma ilustração dessa possibilidade.

Um exemplo: o corpo em queda livre

Suponha que a tabela [1] a seguir nos forneça as medidas da posição de um objeto em queda livre de uma experiência já realizada em um laboratório (Galileu, por exemplo, nos forneceu esses dados, cabe a nós, matemáticos, interpretar esses dados!). Mais precisamente, a tabela apresenta, uma vez escolhido o intervalo de tempo dt (variável livre), a medida da posição s (em metros) no instante inicial t=0, no instante 0+dt, até o instante 0+10dt (em segundos) e, por acréscimo, nos fornece os cálculos do deslocamento ou **variação da posição** (Δs) definida por $\Delta s_{[t,t+dt]} = s(t + dt) - s(t)$ (quarta linha da tabela), da variação do deslocamento ou **variação segunda da posição** (Δ^2s) definida por $\Delta^2 s_{[t,t+dt]} = \Delta s(t + dt) - \Delta s(t)$ (quinta linha da tabela), da **variação terceira da posição** (Δ^3s) definida por $\Delta^3 s_{[t,t+dt]} = \Delta^2 s(t + dt) - \Delta^2 s(t)$ (sexta linha da tabela), em cada intervalo [t,t+dt].

dt	1										
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5	176,4	240,1	313,6	396,9	490
Δs		4,9	14,7	24,5	34,3	44,1	53,9	63,7	73,5	83,3	93,1
Δ^2s			9,8	9,8	9,8	9,8	9,8	9,8	9,8	9,8	9,8
Δ^3s				0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 1: tabela que fornece os valores de s, Δs, Δ^2s e Δ^3s, para dt = 1 segundo

Por simples observação, pode-se verificar que a seqüência de valores de Δs é uma progressão aritmética de razão 9,8. As terceira e quarta linhas da tabela formam seqüências constantes: Δ^2s = 9,8 e Δ^3s = 0.

Note que se escolhêssemos dt = 0,5, o nosso Galileu (a planilha eletrônica pré-programada), que também é versátil e eficiente, realizaria quase que instantaneamente uma simulação da experiência e nos forneceria as medidas e os cálculos para os novos intervalos de tempo.

dt	0,5										
t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
s	0,000	1,225	4,900	11,025	19,600	30,625	44,100	60,025	78,400	99,225	122,500
Δs		1,225	3,675	6,125	8,575	11,025	13,475	15,925	18,375	20,825	23,275
Δ^2s			2,45	2,45	2,45	2,45	2,45	2,45	2,45	2,45	2,45
Δ^3s				0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 2: tabela que fornece os valores de s, Δs, Δ^2s e Δ^3s, para dt = 0,5 segundo

Novamente a tabela manteria alguns padrões. Com efeito, Δs, neste caso, é uma progressão aritmética de razão 2,45 (Δ^2s = 2,45).

Poderíamos repetir a experiência, quantas vezes fossem necessário, para outros valores de dt, até que… Heureca! A relação funcional entre as variáveis s e t é de tal modo que Δs é uma progressão aritmética. Um boa escolha para modelarmos este problema seria a função quadrática $s(t) = c + bt + at^2$. De fato, a expressão do deslocamento $\Delta s_{[t,t+dt]}$ para esta função real tem a forma de um polinômio de grau um em t:

$$\Delta s_{[t,t+dt]} = s(t + dt) – s(t) = b(dt) + a(dt)^2 +2a(dt)t$$

Como dt está fixado, $k = b(dt) + a(dt)^2$ e $\lambda = 2a(dt)$ são constantes.

Re-escrevendo $\Delta s_{[t,t+dt]}$, obtemos $\Delta s = k + \lambda t$, o que implica que Δs é uma progressão aritmética de razão igual a $\Delta^2 s_{[t,t+dt]} = \Delta s(t + dt) – \Delta s(t) = k + \lambda(t+dt) – k – \lambda t = \lambda dt$.

Assim, para determinarmos os parâmetros *a, b* e *c* da função bastaria observarmos que:

- Para dt = 1, λdt = 9,8 = 2adt ⇒ a = (9,8) / 2
- 0 = s(0) = c
- 4,9 = s(1) = b + 4,9 ⇒ b = 0.

Logo a função procurada é $s(t) = \frac{9,8}{2}t^2$.

Generalizando a idéia

Note que o estudo que fizemos pode ser generalizado para qualquer função polinomial. Considere uma função polinomial de grau n, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 ... + a_nx^n$, e $x_1, x_2, ..., x_i,...$ uma progressão aritmética de razão não nula. É fácil demonstrar, por meio de cálculos algébricos elementares, que:

[1] A tabela foi construída em uma planilha eletrônica.

- para uma função polinomial de grau 1 (n = 1), a seqüência $p(x_1)$, $p(x_2)$, ..., $p(x_i)$,... é uma progressão aritmética de razão $\Delta p_{[x_1,x_2]} = p(x_2) - p(x_1)$ não nula;
- para uma função polinomial de grau 2 (n = 2, como no nosso exemplo), a seqüência $\Delta p_{[x_1,x_2]}$, $\Delta p_{[x_2,x_3]}$, ..., $\Delta p_{[x_{i-1},x_i]}$,... é uma progressão aritmética de razão $\Delta^2 p_{[x_2,x_3]} = \Delta p_{[x_2,x_3]} - \Delta p_{[x_1,x_2]}$ não nula;
- e de modo geral, para uma função polinomial de grau k (n = k), $\Delta^{k-1} p_{[x_{k-1},x_k]}$, $\Delta^{k-1} p_{[x_k,x_{k+1}]}$, ..., $\Delta^{k-1} p_{[x_{i-1},x_i]}$,... é uma progressão aritmética de razão $\Delta^k p_{[x_k,x_{k+1}]} = \Delta^{k-1} p_{[x_k,x_{k+1}]} - \Delta^{k-1} p_{[x_{k-1},x_k]}$ não nula.

Em verdade, na resolução do exemplo anterior utilizamos tacitamente o seguinte resultado: *se* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é contínua, de tal modo que a seqüência* $\Delta f_{[x_1,x_2]}$, $\Delta f_{[x_2,x_3]}$, ..., *forma uma progressão aritmética de razão* $\Delta^2 f_{[x_2,x_3]} = \Delta f_{[x_2,x_3]} - \Delta f_{[x_1,x_2]}$ *não nula para qualquer progressão aritmética* x_1, x_2, ..., x_i *,... de razão não nula, então f é uma função quadrática*. Uma demonstração para esta proposição pode ser encontrada em (Lima *et alii*, 2001).

Esta caracterização pode ser estendida para as funções polinomiais de grau *n*, isto é, podemos caracterizar uma função polinomial de grau *n* como sendo a função contínua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que transforma toda progressão aritmética não-constante $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ em uma progressão artimética de *ordem n* não degenerada $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ..., $y_n = f(x_n)$, ...

Foge ao escopo deste artigo, fazer esta demonstração. Cabe ressaltar aqui que também não é objetivo deste artigo incentivar que o professor realize tal procedimento em sala de aula com seus alunos. Acreditamos que certos fatos podem e devem ser ignorados em determinados níveis de ensino. O rigor é uma função da maturidade matemática e cognitiva do aluno. A noção intuitiva de continuidade pode estar associada, por exemplo, à alegoria de Euler, isto é, “uma função é contínua se podemos desenhar o seu gráfico sem tirar o lápis do papel”. Essa noção intuitiva, apesar de imprecisa, é legítima do ponto de vista histórico e faz parte, sem dúvida, do discurso docente de um curso inicial de Cálculo. Outra observação que deve ser feita é que este artigo destina-se ao docente do ensino básico e não ao seu aluno. Caberá uma reflexão sobre conteúdo discutido neste artigo para que se possam implementar efetivamente as idéias aqui sugeridas.

Procedimento análogo ao apresentado aqui para as funções polinomiais pode ser adotado para as funções exponenciais e logarítmicas. Santos (2008) vem estudando, em sua monografia de especialização, uma proposta para o estudo do comportamento variacional desta família de funções. No caso da função exponencial, por exemplo, a regularidade se apresenta na razão entre a variação da função no intervalo e o seu valor no início do intervalo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta sugerida neste artigo tem como referência as funções polinomiais e funções exponenciais e logarítmicas. O cerne da proposta consiste em fazer uso do conhecimento adquirido dos estudantes, as progressões aritméticas e progressões geométricas, como ferramenta diagnóstico do comportamento variacionais das funções em destaque. As noções de continuidade e diferenciabilidade são introduzidas de forma intuitiva e alegórica ("alegoria de Euler" para a continuidade e a "alegoria da suavidade" para o conceito de diferenciabilidade) e a passagem do nível discreto para o nível contínuo faz-se por meio de ferramenta computacional (planilhas eletrônicas).

É verdade que o campo real continua escondido no ambiente computacional das planilhas eletrônicas. Mas também era assim na época de Galileu (antes da "invenção" do Cálculo) ou mesmo de Euler (depois da "invenção" do Cálculo) – os números irracionais eram tratados como números *nebulosos*, e, mesmo assim, a invenção do Cálculo sobreviveu a este obstáculo epistemológico. Acredita-se que por meio do controle arbitrário das variáveis livres das tabelas (dx, ou mesmo os coeficientes das funções em questão), previamente programadas, o estudante possa inferir e verificar padrões numéricos das funções citadas, tantas vezes quantas forem necessárias. Uma vez observada as regularidades, o estudante precisa ser estimulado a enunciar proposições e demonstrá-las, por meio de cálculos algébricos, e com o auxílio do professor (como, por exemplo, aqueles que foram feitos no exemplo do corpo em queda livre). Fazer o exercício da generalização é um importante exercício do próprio pensamento matemático. E ao fazer os cálculos algébricos para um dx arbitrário (racional ou irracional), o aluno estará exercitando não só o modo de pensar matemático com estará realizando a passagem do nível discreto para o nível contínuo de suas observações.

Esta proposta pode ser estendida para o estudo de outras famílias de funções reais. Estudar o comportamento variacional das funções faz-se urgente e necessário. Precisamos, conforme já afirmamos neste artigo, resgatar o conceito de função no ensino médio do universo algébrico para o âmbito do Cálculo. Não basta sabermos que determinada função é crescente ou decrescente em um intervalo, mas precisamos, sobretudo, quantificar essa variação para que possamos dar qualidade ao seu estudo. Os problemas do cotidiano ou das ciências que podem ser resolvidos matematicamente em geral não trazem fórmulas em seus enunciados. Trazem sim "quantidades variáveis" como tempo, lucro, temperatura, peso, população, demanda, preço ou qualquer outra grandeza. Não existem grandes vantagens em saber apenas que "o preço da gasolina vai subir" ou que "as taxas de juros no varejo caíram". O exercício da cidadania, cada vez mais complexo nos dias de hoje, envolve também o conhecimento sobre como e o quanto variam as grandezas presentes em problemas que nos são apresentados em nossa vida cotidiana. Que o espírito crítico de Galileu esteja presente! Que a capacidade de simulação e de cálculo das novas tecnologias (computadores, softwares computacionais, sensores, etc) estejam presentes! Resgatar o estudo da variabilidade das funções reais no ensino básico é, sobretudo, um compromisso com o verdadeiro sentido do conceito de função.

Referências

Botelho, L. M. L. (2005) *Funções Polinomiais na Educação Básica: Uma Proposta*. Monografia de Pós-gradução. Niterói: UFF.

Boyer, C. B. *História da Matemática*. (1991) 2ª edição. Tradução de Elza Gomide de título original. S. Paulo: Edgard Blucher.

Boyer, C. B. (1949) *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover Publications Inc.

Cabral, T. C. B. (1998) *Contribuições da Psicanálise à Educação Matemática: A Lógica da Intervenção nos Processos de Aprendizagem*. Tese de Doutorado. São Paulo: USP.

Caraça, B. de J. (1948) *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 9ª edição. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora.

Lima, E.L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. & Morgado, A. C. (2001) *A Matemática do Ensino Médio.* Coleção do Professor de Matemática. v. 1. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Rezende, W. M. (2003a) *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. Tese de Doutorado. São Paulo: USP.

Rezende, W. M. (2003b) *Uma Proposta Didática de Emersão das Idéias Fundamentais do Cálculo no Ensino Básico*. Projeto de Pesquisa. Niterói: UFF.

Rüthing, D. (1984) Some Definitions of The Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki. *The Mathematical Intelligencer*, v. 6, (4), pp. 72-77.

Santos, F. L. M. (2008) *Uma Proposta Alternativa para o Ensino de Funções Exponenciais e Logarítmicas na Educação Básica*. Monografia de Pós-gradução. Niterói: UFF.

Sierpinska, A. (1987) Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18. pp. 371-397.

Souza Sá, S. L. de (2005) *Um Mapeamento do Ensino de Funções Exponenciais e Logarítmicas no Ensino Básico*. Monografia de Pós-gradução. Niterói: UFF.

LA DIMENSIÓN EPISTEMOLÓGICA DE LA INTEGRAL IMPROPIA EN EL DISEÑO DE SECUENCIAS DE ENSEÑANZA

Alejandro S. González-Martín (Université de Montréal – Canadá)

Carlos Correia de Sá (Universidade do Porto – Portugal)

Mostramos las fundamentos del diseño de una secuencia de enseñanza del concepto de integral impropia, que trata de mejorar su comprensión en los estudiantes universitarios. Esta secuencia se basa en análisis de tres dimensiones del concepto: didáctica, cognitiva y epistemológica. Mostramos los resultados principales del análisis epistemológico (con énfasis en el uso del registro gráfico) y cómo éstos proporcionaron una base para crear nuestra secuencia de enseñanza.

1.- INTRODUCCIÓN

Para definir la integral de Riemann de una cierta función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, se necesita que el intervalo de integración sea cerrado y acotado y que la función esté acotada dentro del intervalo. Cuando una de estas dos condiciones no se cumple, se define la integral impropia como una generalización de la integral de Riemann. Este concepto, de múltiples aplicaciones (probabilidades, normas funcionales, transformadas de Fourier, …), ofrece una gran resistencia a los estudiantes universitarios, que lo aprenden sin darle significado y restringiéndose a cálculos algebraicos y a la aplicación de criterios de convergencia (González-Martín, 2002). Para hacer frente a esta situación, decidimos crear una secuencia de enseñanza para ayudar a los estudiantes a aprender este concepto coordinando los registros gráfico y algebraico, dándole así más significado.

Nuestra secuencia de enseñanza juega a la vez el rol de instrumento de investigación; por ello, se decidió utilizar una *ingeniería didáctica* (Artigue, 1992). Esta metodología desarrolla análisis, previos a la construcción de la secuencia de enseñanza, de tres dimensiones clásicamente consideradas: epistemológica, didáctica y cognitiva. Nuestra revisión de bibliografía (ver González-Martín, 2006) nos mostró que el aprendizaje de la integral impropia no ha sido directamente abordado por la investigación internacional, por lo que el estudio de la dimensión cognitiva (ver sección 4) resultó de gran utilidad para identificar algunas dificultades y obstáculos. Este artículo da algunos breves detalles de los análisis cognitivo y didáctico y se centra más en el análisis epistemológico, dando algunos detalles de procedimientos utilizados históricamente por los matemáticos para calcular áreas infinitas. Los resultados de estos tres análisis serán utilizados para describir los fundamentos principales de la secuencia de enseñanza que construimos para mejorar la comprensión de las integrales impropias en nuestros estudiantes.

2.- MARCO TEÓRICO

El diseño de nuestra ingeniería didáctica se basa en la teoría de las situaciones didácticas de Brouseau (1988) y en la importancia dada a las variaciones del contrato didáctico usual.

En cuanto a la parte cognitiva, una de nuestras principales elecciones fue el uso del registro gráfico para mejorar la comprensión de nuestros estudiantes, motivada por los resultados encontrados en la historia. Sin embargo, varios resultados de investigación han señalado la reticencia (que parece ser mayor en el nivel universitario) que tienen los estudiantes de matemáticas para utilizar el registro gráfico cuando tienen que resolver problemas. Mundy (1987) ha señalado que los estudiantes normalmente sólo tienen una comprensión mecánica de los conceptos básicos del Análisis porque no han alcanzado una comprensión visual de las nociones básicas subyacentes. Nuestros resultados (González-Martín & Camacho, 2004) muestran también que las preguntas no algorítmicas planteadas en el registro gráfico plantean grandes dificultades para los estudiantes; incluso muchos no reconocen el registro gráfico como un registro para el trabajo matemático.

Por estas cuestiones, nuestro trabajo considera también la teoría de Duval (1995) de los registros de representación semiótica y la importancia de la coordinación de al menos dos registros (en nuestro caso, algebraico y gráfico) para lograr una buena comprensión de los objetos matemáticos.

3.- DIMENSIÓN DIDÁCTICA DE LA INTEGRAL IMPROPIA

Nuestro análisis de ciertos manuales (González-Martín, 2006) nos permitió ver que las integrales impropias son normalmente presentadas de forma algorítmica, poniendo énfasis en el aprendizaje y la aplicación de criterios de convergencia y utilizando sólo el registro algebraico.

En países como España, los primeros programas de Matemáticas de muchas universidades fueron inspirados por la Reforma de las Matemáticas Modernas, cuyo paradigma (aún vigente en muchos casos) era enseñar los conceptos matemáticos de forma algebraica y algorítmica. Este paradigma, lejos de las ideas intuitivas y geométricas, oculta los métodos históricos utilizados para calcular áreas infinitas. La siguiente sección resume algunas consecuencias de este tipo de enseñanza.

4.- DIMENSIÓN COGNITIVA DE LA INTEGRAL IMPROPIA

González-Martín (2002) muestra los resultados de nuestra investigación sobre la dimensión cognitiva de la integral impropia, además de identificar algunas dificultades, obstáculos y errores que aparecen durante su aprendizaje. Algunos resultados de esta investigación fueron:

1. Muchos estudiantes no coordinan los registros gráfico y algebraico; algunos no aceptan el registro gráfico como un registro matemático válido (González-Martín & Camacho, 2004).
2. Muchas dificultades para comprender el concepto de integral impropia provienen de dificultades con los conceptos de límite, convergencia e integral de Riemann.
3. Muchos estudiantes usan sólo modelos estáticos para concebir los procesos límite, lo que puede producir dificultades para comprender $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t).dt$.

También identificamos el obstáculo siguiente, inherente a la integral impropia:

- *Ligación a la compacidad*: tendencia a creer que una figura encerrará un área (o volumen) finita si y sólo si la figura es cerrada y acotada.

Algunas de estas dificultades y obstáculos parecían profundamente ligados al concepto de integral impropia, por lo que un análisis de la dimensión histórico-epistemológica de la integral impropia se hizo necesario. También queríamos observar qué registros habían sido favorecidos por los matemáticos, en particular antes del establecimiento de una teoría.

5.- DIMENSIÓN EPISTEMOLÓGICA DE LA INTEGRAL IMPROPIA

5.1.- Las configuraciones no acotadas de Oresme

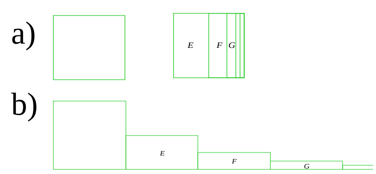


Figura 1

Uno de los textos más antiguos en donde se muestran porciones no acotadas del plano con un área finita proviene de Nicolás de Oresme (1325-1382). Si, por ejemplo, tomamos dos cuadrados de lado 1m, tendremos un área total de $2m^2$. Dividiendo uno de los cuadrados en dos partes iguales, luego una de las mitades en dos partes iguales, y así indefinidamente, se tiene una división del cuadrado como la de la figura 1-a.

Oresme reordena las partes, lo que obviamente no altera el área total, como se ve en la figura 1-b. Así, se obtiene una figura infinitamente larga, pero cuya área total de $2m^2$ queda inalterada.

Este ejemplo, visual y fácil de comprender, puede facilitar el camino para la aceptación del estudiante de la pertinencia de estudiar integrales impropias y de la existencia de figuras infinitas con un área finita. En este caso, el área finita se conoce *a priori*, antes de crear la figura infinita, lo que puede ayudar a superar el obstáculo de *ligación a la compacidad*.

5.2.- El sólido infinitamente largo de Torricelli

El primer ejemplo tridimensional de lo que llamaríamos actualmente una integral impropia convergente data de alrededor de 1643 y es a menudo llamado *la trompeta de Gabriel*, descubierto por Evangelista Torricelli (1608-1647). Haciendo rotar un segmento (sea la rama $y \geq 1$) de la hipérbola equilátera $x.y = constante$ alrededor de su asíntota OY, obtenemos un sólido de revolución infinitamente largo que, a pesar de no estar acotado, encierra un volumen finito (figura 2).

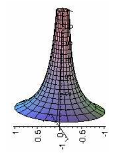


Figura 2

Dado su carácter paradójico, este sólido tuvo un gran impacto en la comunidad científica del siglo XVII (ver Mancosu, 1996, p. 129). En Inglaterra, el matemático John Wallis (1616-1703) y el filósofo Thomas Hobbes (1588-1679) estuvieron envueltos en una discusión sobre varios temas matemáticos, siendo uno de ellos este sólido. Hobbes no podía aceptar un sólido como éste, con área superficial infinita y un volumen finito; figuras de este tipo eran aceptadas sin problemas por Wallis. Mancosu (1996) da detalles de esta polémica y muestra fragmentos de la correspondencia entre ambos, en donde Hobbes afirma que para entender este tipo de figuras "*un hombre no debe ser un geómetra o un lógico, sino que debe estar loco*" (p. 146-147).

Este tipo de controversias históricas nos muestran la dificultad existente para comprender y aceptar este tipo de figuras geométricas, por lo que no debería sorprendernos que los estudiantes también experimenten problemas para concebir y aceptar estas figuras (especialmente, si tenemos en cuenta el obstáculo de *ligación a la compacidad*).

5.3.- La cuadratura de Fermat de hipérbolas y parábolas de orden superior

Pierre Fermat (1601-1665) probó que el área bajo la curva $y = x^n$ entre $x = a$ y $x = b$ es igual a $\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$ para cualquier número racional n distinto de -1, basándose en propiedades de las progresiones geométricas y en que, dada una progresión geométrica decreciente $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ de suma S, entonces se da la igualdad $\frac{a_1 - a_2}{a_2} = \frac{a_1}{S - a_1}$. Mediante el uso de construcciones geométricas y de propiedades de las progresiones, Fermat realiza la cuadratura de hipérbolas de orden superior, como $x^2.y = constante$. De este modo, Fermat concluyó que el área bajo esta curva era igual al área de un rectángulo dado.

Su procedimiento, en notación moderna, para calcular el área de la región no limitada de la curva $x^2 \cdot y = k$ y las rectas $x = a$ e $y = 0$ es el siguiente. Sobre el eje x, se toman puntos con abscisas

$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots, ar^n, \cdots$, ($r > 1$), y se construyen los rectángulos de base $ar^{n+1} - ar^n$ y altura $1/(ar^n)^2$.

Las áreas de estos rectángulos son: $\frac{ar-a}{a^2} = \frac{r-1}{a}$, $\frac{ar^2-ar}{a^2r^2} = \frac{r-1}{a}.\frac{1}{r}$, $\frac{ar^3-ar^2}{a^2r^4} = \frac{r-1}{a}.\frac{1}{r^2}$, …

De este modo, las áreas de los rectángulos forman una progresión geométrica decreciente, cuyo primer término es $\frac{r-1}{a}$ y la razón es $\frac{1}{r}$. La suma de estas áreas será, por tanto, $S = \frac{\frac{r-1}{a}}{1-\frac{1}{r}} = \frac{r}{a}$.

Mientras más próximo esté r de 1, mejor aproximarán los rectángulos el área que queremos calcular. El límite cuando r tiende a uno de esta suma es $1/a$, que equivale al área bajo la curva.

5.4.- Algunas observaciones

Esta sección muestra que las integrales impropias aparecen en la escena matemática como una generalización de resultados, de modo que las técnicas empleadas no son sino una generalización de técnicas ya conocidas. Los matemáticos, en este período, están más interesados en explorar casos particulares y en calcularlos, pero no hay un establecimiento de la teoría sobre las integrales impropias, ni un estudio *a priori* de su convergencia. También hemos visto que algunos resultados paradójicos produjeron sorpresa, e incluso polémica, aunque la actitud de los matemáticos fue la de aceptarlos como nuevos elementos del paisaje matemático de la época.

Fue en el siglo XVIII que el punto de vista cambió y los matemáticos comenzaron a estudiar las propiedades de las funciones en el intervalo de integración. El enfoque pasa de ser geométrico a ser analítico. Pero en el siglo XIX reaparece un enfoque geométrico, aunque esta vez recubierto del formalismo desarrollado en la etapa precedente. En nuestra opinión, este hecho puede producir que, para los estudiantes, el enfoque geométrico normalmente utilizado para introducir la integral de Riemann quede completamente oscurecido por la notación empleada.

6.- EL DISEÑO DE NUESTRA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

Nuestra secuencia de enseñanza trata de regresar al registro original en el que apareció la integral impropia: el registro gráfico. Esta elección aspira a mejorar la comprensión de los estudiantes, interpretando gráficamente la mayoría de resultados. Este enfoque es el que se dio en la historia: generalizar resultados y calcular áreas. Además, el interés en la convergencia y en la clasificación de resultados no aparece en nuestra secuencia hasta que se ha hecho un primer acercamiento al nuevo concepto y se han descubierto algunos resultados utilizando herramientas ya conocidas.

Como ya hemos dicho (sección 2), utilizamos la teoría de las situaciones didácticas (ver

Brousseau, 1988), dando gran importancia a las variaciones del contrato didáctico típico en la universidad y a la construcción de un *medio* adecuado para cada actividad, para que produzca contradicciones, dificultades o desequilibrios y que permita el trabajo autónomo y la aceptación de la nueva responsabilidad por parte de los estudiantes.

6.1.- Metodología

Nuestra secuencia se desarrolló con estudiantes de primer curso de la Licenciatura en Matemáticas y en ella participaron regularmente unos 25 estudiantes. Inspirados por el desarrollo histórico, decidimos articular el registro gráfico con el algebraico.

Nuestras actividades incluyeron el estudio de funciones positivas, en primer lugar, y la interpretación gráfica del cálculo de áreas, justificando la definición de integral impropia en un intervalo no acotado por medio de límites: $\int_a^\infty f(x).dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x).dx$ (figura 3).

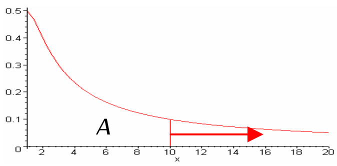


Figura 3

El estudio del comportamiento de estas dos integrales: $a)\int_0^\infty e^{-x}dx = 1 \qquad b)\int_1^\infty x^{-1/3}dx = \infty$, hizo que los estudiantes se dieran cuenta de que dos funciones con gráficas muy similares (en particular, cuando se hacen a mano) pueden encerrar áreas muy diferentes. Este hecho empujó a los estudiantes a pensar en la posibilidad de predecir *cuándo diverge la integral*. El registro gráfico permitió a los estudiantes asegurar que, para $f(x)$ positiva, si a partir de un cierto valor de x se tiene que: $\boldsymbol{f(x) \geq k > 0}$, entonces *la integral será divergente*. Esta conclusión, junto con los dos ejemplos anteriores, permitió a los estudiantes ver el potencial del registro gráfico para concluir la divergencia de una integral dada, así como sus limitaciones para predecir la convergencia, lo que justifica el desarrollo de herramientas más formales. De este modo, los estudiantes comenzaron a desarrollar algunas intuiciones y experiencias sobre este nuevo concepto antes de comenzar a institucionalizar la teoría, reproduciendo así en cierto modo el proceso histórico.

El registro gráfico (con la teoría de series) también permitió la construcción de contraejemplos útiles para cuestiones que suelen producir dificultades a los estudiantes. Por ejemplo, es posible construir una función no negativa, no acotada y sin límite en el infinito cuya integral es convergente, mediante la construcción de rectángulos de área $1/n^2$ sobre cada entero n (figura 4).

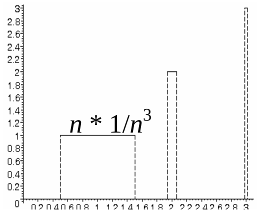


Figura 4

Este tipo de ejemplos ayudan a los estudiantes a ver que es posible tener funciones no acotadas cuya integral es convergente. También, a ver que el hecho de tener una integral convergente no implica que la función deba tender a cero. Con este tipo de ejemplos, fáciles de construir y de comprender utilizando la teoría de series, quisimos dar a nuestros estudiantes un repertorio de funciones para ayudarles a superar el obstáculo de *ligación a la compacidad* (en este caso, un área finita no está encerrada por una línea cerrada y acotada). Más detalles de nuestras actividades y de la secuencia pueden ser encontrados en González-Martín (2006).

6.2.- Toma de datos, análisis y discusión

Nuestra secuencia fue evaluada de varias formas. Durante su implementación, dimos a los estudiantes algunas hojas de trabajo para trabajar en pequeños grupos, respondiendo a nuevas cuestiones utilizando los elementos introducidos hasta el momento; también se les pidió completar una tabla de convergencia de la integral de las funciones usuales, así como la resolución de algunos problemas. La secuencia, de manera global, se evaluó mediante un test de contenidos. Finalmente, los estudiantes completaron un cuestionario de opinión sobre los aspectos más relevantes e innovadores de nuestra secuencia.

Las observaciones de clase nos permiten afirmar que los estudiantes aceptaron gradualmente el registro gráfico para formular algunas conjeturas desde el momento en que se ilustró el *criterio de divergencia*. Para completar la tabla del estudio de la convergencia de la integral de las funciones más usuales, los estudiantes utilizaron mayoritariamente razonamiento gráfico para concluir la divergencia de ciertas integrales y afirmaron que este registro les ayudó a evitar largos cálculos. Además, el trabajo desarrollado en pequeños grupos de trabajo se ponía en común bajo la supervisión del profesor, lo que ayudó a la institucionalización de este registro como un registro matemático. Posteriormente, en el análisis de las hojas de trabajo distribuidas a los estudiantes, podemos ver gran presencia de razonamiento gráfico. Además de lo anterior, los estudiantes mostraron su satisfacción con el uso del registro gráfico en sus respuestas al cuestionario de opinión y expresaron que este registro les había ayudado enormemente a comprender mejor los conceptos.

Por otro lado, en el test de contenidos (26 estudiantes), las preguntas que necesitaban del registro gráfico y de la construcción de contraejemplos fueron respondidas por un porcentaje representativo del total, dando muestras de una comprensión de la integral impropia y de la coordinación de registros. Para más información sobre el análisis de datos, consultar González-Martín (2006).

7.- CONCLUSIONES

Este trabajo muestra elementos de una secuencia de enseñanza de la integración impropia que intenta, además, reforzar el estatus matemático del registro gráfico en los estudiantes universitarios.

La idea de utilizar este registro activamente provino en primer lugar como una consecuencia de nuestro análisis de la génesis histórica de las integrales impropias, y en segundo lugar de nuestro interés en mejorar la comprensión de los estudiantes y en ayudarles a superar algunas dificultades relacionadas con el concepto de integral impropia. Nuestra experimentación nos permitió ver que el trabajo de construir ejemplos y contraejemplos, junto con la interpretación gráfica de los resultados, permite a los estudiantes reconocer este registro y aceptarlo. Además, el conocimiento de nuestros estudiantes sobre las integrales impropias parece ser más fuerte y resistente.

Restan algunas preguntas abiertas que serán abordadas en futuras investigaciones. Por ejemplo, el uso regular de nuestra secuencia durante un semestre (y sus efectos en la actitud de los estudiantes hacia el registro gráfico) es una pregunta interesante, así como la integración de actividades históricas en la secuencia para analizar su influencia en el aprendizaje de los estudiantes.

Referencias

Artigue, M. (1992). Didactic Engineering. En R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Research in Didactics of Mathematics*: 41-65. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : Le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **9** (3), pp. 309-336.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Neuchatel: Peter Lang.

González-Martín, A. S. (2002). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de integral impropia*. Tesina (Tesis de Maestría), Universidad de La Laguna (España) – sin publicar.

González-Martín, A. S. (2006). La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje. Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna: España, ISBN: 84-7756-679-8.

González-Martín, A. S. & Camacho, M. (2004). What is First-Year Mathematics students' actual understanding about improper integration? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **35** (1), 73-89.

Mancosu, P. (1996). Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century. Oxford University Press, New York and Oxford.

Mundy (1987). Analysis of Errors of First Year Calculus Students. *Theory, Research and Practice in Mathematics Education – Proceedings* ICME5.

Mathematical Pulsation at the root of invention

" quand ils arrivent à la vérité, c'est en heurtant
de ce côté et d'autre qu'ils y sont tombés "
Évariste Galois

René Guitart

Summary. Our purpose is to explain in an historical perspective how the true fundamental skill for mathematical invention is the strength of Mathematical Pulsation.

Invention of the objective rigour as a subjective act

The ideology of the *Didactic Transposition* [Chevallard (1991)] (see also [Verret (1975)]) is based on the claim that the mathematics (M) of the mathematicians *are not* the mathematics of the teachers (T), which *are not* those of the pupils (P). Guy Brousseau insists on this point, and maintains [Brousseau (2001), note 5] that the *Mathematical Pulsation* is not a natural state or a law, but an ideal and a useful fiction for the didactic relation. I assert exactly the opposite : the mathematical pulsation is proposed as a law of the natural state of practise of mathematics, roughly expressed by M = T = P [Guitart (1999), p. 286]. Let call that the *pulsation* or *pulsative nexus* MTP. By its radical separation between the M, T and P positions, the Didactical Transposition is disastrous with respect to any good mathematical instruction : doing mathematics, either as an M, as a T or as a P, requires at the very beginning a strong commitment in the full pulsation MTP. An adequat comparison by Jean-Yves Degos [Degos (2002)] is with some Glen Gould's ideas on music [Gould (1992)] : Gould would like to unite the composer, the performer, the auditor. Paradoxically, in order to do mathematics we have to be simultaneously a mathematician, a teacher and a pupil ; we have to construct, to explain and to learn what we are doing. Certainly the good mental state for entrance at mathematics viewed as a craft is to admit that paradox and to experience it effectively. But this basic observation (*the pulsative nexus* MTP) is only the first step in the idea of the Mathematical Pulsation.

Now a second step is the *closed/open bearing* (CO). Let us look at mathematicians as craftmen working with some mental objects. They have some specific dexterities, and the point is to work out the sheer specific skill they use. If we could to know this skill, it will be the top priority to teach it to teachers. This artisanal question is even more basic than the very important psychological question of motivations and pulsions, and in teaching of mathematics we have to take care of both aspects. As a solution for this problem of the specific skill in mathematics, I introduced the notion of the *Mathematical Pulsation* [Guitart (1999]. Two interesting analysis of this work are [Bareil (2000)] and [Legrand (2000/a] and (2000/b]]. But do not mistake this *Mathematical Pulsation* with something like a "Mathematical Pulsion". The later is rather the psychological cause of the former. In fact, in concrete terms, the *Mathematical Pulsation* is nothing else but the thing that everyone does when doing mathematics, even the most elementary ones. It is a very special gesture in understanding ("geste de pensée"), well known by each mathematician. The mind have to go to and fro between to antinomical postures : to have the situation under control, to leave the door open. To master and to fix (a clear unique meaning) or to neglect and to change (toward other possible meanings). Because of the similarity of the pulsation of inspiration and expiration in breath with the pulsation of closing and opening phases in mathematical thinking, at the end of [Guitart (2003/a)] I suggested to consider the famous book "Zen in the Art of Archery" [Herrigel (1997)] as a true treatise in didactic of mathematics : just you have to replace everywhere the words "archery" by "mathematical proof". So you get a first approximation of the idea of the so called Mathematical Pulsation [Guitart (1999)] as a kind of paradoxal mental breath inside every mathematical act. In order to do mathematics you have both to be rigorous *and* to be zen with rigour. Dancing with the rigour, surfing on rigour [Guitart (1999), P. 53]. In order to do mathematics you have to pick up this knack, exactly as when going cycling. The point [Guitart (1999), p. 17] is that free fall forward is what we have to risk in order to get lateral stability. In the area of music, Glenn Gould said that the secret to play piano is partially in the manner you succeed to be separated from the instrument. He also said that he has to be at some distance from himself *and* to take part in the process. He was looking for a piano with keys initially firm under vertical sollicitation but with some lateral looseness when fully pressed [Schneider (1988), p. 107, 109, 74].

The third step is the idea of the *pulsation of the rigour* itself (RP). To enforce our second step, we have to be precise on objective rigour, and on the link between rigour and intimate dexterity. The idea of *Pulsation* cannot be well understood without the admission of three thesis on *dexterity*, in connection with analytical rigour, usefulness and talent. The first thesis is a very particular picture of the mathematical rigour. The mathematical rigour is not only the strict formal rigour, but it is also, at a higher level in the area of reason, the feeling we get when an intuition stop dead on a wording : a paradoxal surfing on rigour takes place there. The absolute obsessive fixation on formal analytical rigor only increases the dexterity. The true rigour is the pulsative surfing on rigour. The second thesis says that in order to be able to do mathematics you do not have to ask yourself of what earthly use it is to you. The usefulness of mathematics increases the pulsion but not dexterity; the true usefullness happens from the pulsation between reality and aesthetic sense. The last thesis say that dexterity is not talent or genius. Everyone can do mathematics like everyone can ride a cycle. The main injonction here is just : do it ! And then we have just to know what it is as an act. Paradoxically, in order to do mathematic we have to be rigorous and not to control if we are rigorous. We have to keep in mind a very strong requirement of accuracy, an absolute one in fact, but it is also necessary in exactly the same time to leave aside questions on analytical rigor, usefulness and talent, and we do not have to control rigorously our practise with rigour.

Of course for training and invention in mathematics we have to think seriously about three things : an *intimate motivation* for mathematical activity, the power to start effectively and *to go on* with mathematical computations and reasonings ("s'y mettre"), a true *dexterity with the paradoxality* of the mathematical rigour. But these three factors of pulsion and desire, moving off and risk taking, pulsation, are closely interlinked. From this link we can understand the will for searching in mathematical problems. In this perspective the search for tools to develop the mathematical imagination [Sinclair (2003)] could be more accurate. By experiment we learn that the closed/open standpoint of the pulsation allows the risk (the risk for the reason in the harsh choice between "to known" and "to do") to be fruitful or not, and the deepest mathematical pulsion will come back from the productive experiment with pulsation in the breath between intuition and *rigorous invention of true*. The Mathematic is a game which is identical to its own invention, and the best pulsion for mathematics is the wish to invent the rigour. In this sense the rigour is the object of mathematics [Guitart (2000/a), p. 87]. And for this *game of rigour*, the invention of mathematical supervising by mathematical logic and theory of proof, or by the description of fundations, were just some possibilities *a posteriori*, when the die is cast. The mathematicians at work proceed differently, by trial and error ([Hadamard (1954)] and [Rostand (1960)]), "they do not deduce, they combine, they compose" (Galois). It is the reason why the mathematicians discover necessities but in a contingent way (as said by Jean Cavaillès). The Mathematical Pulsation is the strength there, before the proof, at the point of contingency of invention.

To see versus To say

A main aspect at macro-level of the pulsation is the alternative between "to see" and "to say" (SS). As Felix Klein claimed, "the charm of geometry is to see what you think". Closed to this observation is our following claim : in mathematical practise you always have to see what you say, and to say what you see [Guitart (2000/b)]. See also [Barbin (2001)]. This is a deep pulsation driving the mathematical mind toward a greater evidence (in the sense of Descartes). Of course this works under the assumption that all evidences are logically equivalent. So in fact a real mathematician knows that *he does not have to choose* between the evidence for the eye and the evidence for the ear, between logic and geometry.

Famous is the case of the Pythagorean Proposition [Loomis (1972)]. Among the great collection of proofs of the Pythagorean Proposition we have not to choose the more geometrical (chinese) or the more logic (greek) or algebraic (modern) ; the point is rather the appreciation of the mathematical fact of this going to and fro.

In [Guitart (2003/b)] I constructed a calculus of "assimilations" as a common tool for analyzing pictures or figures, and for analyzing speeches or discourses. We can considere this theory as a mathematical thought about the fact of the pulsation between "to see" and "to say", and a mathematical achievement of this pulsation, an *abreviation* of this pulsation. By this calculus the two areas communicate and exchange intuitions.

Abreviations and bifurcations in algebra, differential calculus, probability.

In order to get to the heart of the matter, we go on to show more how our explanations above on MTP, CO and RP and SS works in practice, in the true mathematical life. At first, the pulsation works *inside* each mathematical frame, under the angle of bifurcation and abreviation (AB) [Guitart (2000/a), p. 161].

So in the frame of elementary algebra [Guitart (1999)], a basic pulsation is to be able to take the risk to write down *and* to erase letters. In fact all the calculus support this idea : when you compute you have to sollicit appearance *and* disappearance of letters. When in an addition process you get x+0, you have the possibility to erase this 0 and to let x ; but you can also replace 0 by y-y. A second pulsation here is with the use of equality, because very often you have to change your feeling on the meaning of "=" : sometimes it means an absolute identity *and sometimes* it means only a possibility of substitution in a given context. A third pulsation is the possibility to reverse a = b in b = a. And a fourth pulsation is the one invented by François Viète, between knowns and unknowns: to denote by letters unknown *and* known quantities is the crucial decision finishing the creation of algebra.

In the invention of differential calculus and differential geometry we can observe a basic pulsation between the idea of a "touchante" to a curve and the idea of the "derivative" of a function [Guitart (1999), p.98-105]. On the one hand we have a curve C and a straight line outside S0 (given by y = px+h0) approaching parallel to itself until in a position S (given by y = px+h, with h such that there is a unique solution u for px+h = f(x)) it touchs C at a point P (of coordinates (u, f(u)) ; on the other hand we consider a point P on C (of coordinates (u, f(u))) and the tangente as the limit position S of a chord PM when M approach to P (given by y-f(u) = f'(u)(x-u)). Then f'(u) = p, v = f(u), h = v-pu, and the pulsation is reversing of order from (p, u) to (u, f'(u)). We can today consider that the involutive Legendrian contact transformation L(u,v,p) = (-p,-(v-pu), -u) will provide a mathematical setting for this pulsation. This transformation L exhibite the ambiguity between the two versions of a contact element : a straight line with a point on it, ot a point with a line through it ; it is the Galois group of the situation.

Another example is a probabilistic pulsation [Mazliak, (2002)], which takes place in the alternative between on the one hand the data of the sample space of events followed by the description of random variables as numerical function on this space, and on the other hand the direct consideration at first of random variables and there laws : in practice we have to do both, to forget one aspect for the other, and conversely. Historically also this point was essential in the invention of the probability theory.

The changing of frame and polytranslation, the arrow without a target.

An essential observation is that, obviously, when you are doing mathematics in a given setting, in fact you have also to move outside the scope of this setting, to move into a new framework. From algebra to geometry, from complex analysis to minimal surfaces [Douady A & Douady R. (1994)], and so on. Grasping this feature at the level of didactic, Régine Douady introduced her notion of *changing of frame* ("Changement de cadre") (CF) [Douady R. (1984)]. This CF is one aspect of the pulsation, at a macro-level.

Another thing is in a famous letter of André Weil to his sister Simone [Weil (1940)] where he explains how his work is engaged within a process of translation and construction of a trilingual text, written in "theory of algebraic functions of one variable", in "theory of fields of numbers", and in "theory of fields of algebraic functions with finite fields of constants". Such a "polytranslation" is a little different from a standard changing of frame, because here the frames in consideration are not known and fixed a priori before the change, but they are more explicitly partially invented and constructed *by* the act of changing itself. The pulsation at macro-level could be even possible from a given well known discipline toward just the open area outside of this discipline, without an established target. Retrospectively the target will appear as an implicite constituent of the arrow. In this type of practice we could speak of *Open Changing of Frame* (OCF).

The reflexivity, the axiomatic attitude, the indirect way

A well known observation finally is that mathematics are *reflexive*, i.e. that they are able to say in a mathematical way something on what they can do and on what they cannot do. They are plenty of examples, as in the theory of equations (Galois theory), in logic (theorems of Gödel). The axiomatic attitude (AA) is a natural consequence of this reflexivity and of the basic fact that mathematics always work in a roundabout way, *indirectly*. It is absolutely necessary that axioms are assumed as true hypotheses, but simultaneously we know that the choice of hypotheses is always contingent. By axiomatizing we keep at a respectful distance from an ultimate decision. And moreover we can to study mathematically the organization of choices of axioms. More systematically nowdays, the theory of categories take as objects of mathematical investigations today the mathematical gestures of yesterday [Guitart (2005)].

An interesting historical question is when the roundabout way in mathematics appeared explicitly, among means rather than among obstacles. At least in the XVIIth century, in the hands of Fermat (calculus of adequations) and Leibniz ("useful fictions" e.g. imaginary and infinitesimal elements), a significant gesture was invented : at first, *to write down what you want* (entities and relations) and then to see what this imply and produce mathematically. Here, following the words of Leibniz you have not to be careful with the existence of points and indivisible and infinitely small elements [Leibniz (1866), p. 592] because "les vérités mathématiques portent avec elles leurs contrôles et leurs confirmations" [Leibniz (1966), p. 80-1] (cited in [Clero J.-P.-Le Rest E. (1980), p. 177]). To be comparated with the Analysis of Ancients: here, in the case of Fermat and Leibniz, we do not start from a wished result in a known field, but we start with a wish of a new field. The new infinitesimal calculus is constructed inside the cartesian pulsation between algebra and geometry, a kind of OCF, supported on the cartesian pulsation between logic and calculus.

References

Barbin E (2001). La démonstration : pulsation entre le discursif et le visuel, Produire des textes de démonstration, coll. coordonné par É. Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J. Houdebine, C. Laborde, Ellipses, 2001, chap. 2, 31-61.

Bareil H. (2000). Matériaux pour une documentation : La Pulsation Mathématique. *Bulletin de l'APMEP* n°427, avril 2000, 264-266.

Brousseau G. (2001). L'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire : Micro et macro-didactique, in *La matematica e la sua didattica* n°1, 5-30.

Chevallard Y. (1991) *La transposition didactique*, du savoir savant au savoir enseigné, La Pensée Sauvage. Grenoble.

Clero J.-P. et Le Rest E. (1980). *La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, n°16, Centre de documentation sciences humaines Société française d'histoire des sciences et des techniques, CNRS.

Degos J.-Y. (2002), Piano et Guitart, courrier à Évelyne Barbin.

Douady A. & Douady R. (1994). Changements de cadres à partir des Surfaces Minimales, *Cahier de DIDIREM*, 23-1, mars 1994, Paris 7, 32 p.

Douady R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Une réalisation dans le cursus primaire, Thèse de doctorat d'État, Université Paris VV, 10/10/1984, 338p + annexes.

Gould G.(1992). *Fragments d'un portrait*, film de Bruno Monsaigeon, Soirée Thema, ARTE.

Guitart R. (1999). *La pulsation mathématique*, Paris, L'Harmattan

Guitart R. (2000/a) *Évidence et étrangeté*, Mathématique, psychanalyse, Descartes et Freud, PUF, Paris.

Guitart R. (2000/b), Voir ce qu'on dit, dire ce qu'on voit, *Bulletin de l'APMEP*, n°431, nov-déc. 2000, 793-812.

Guitart R. (2001), Modalités et images, *Actes du SIC d'Amiens du 10 novembre 2001*, 9-10.

Guitart R. (2003/a), Sur les places du sujet et de l'objet dans la pulsation mathématique, *Revue du Centre de Recherche en Éducation, n°22-23, Décembre 2002, Didactique des mathématiques, Numéro coordonné par M. Alain denis, Publication de l'Université de Saint-Étienne*, 49-81.

Guitart R. (2003/b). Calcul d'assimilations, modalités et analyse d'images, in *Calculs & formes de l'activité mathématiques*, coord. J. Boniface, Ellipses, 2003, 75-89.

Guitart R. (2005). La structuration catégoricienne comme calcul des gestes mathématiques, 13 octobre 2005, Colloque Impact des catégories, 60 years of Category Theory in Historical and Philosophical Retrospect. Paris. École Normale Supérieure, october 10-14, 2005.

Hadamard J. (1954). *The psychology of Invention in the Mathematical Field*, Dover.

Herrigel E. (1997) Le Zen dans l'art chevaleresque du tir à l'arc, réed. Dervy (1st german edition 1948).

Leibniz (1866). Répliques aux réflexions de Bayle, *Œuvres philosophiques*, t. II, Paris, Leibniz (1966). De la réforme de la philosophie première et de la notion de substance, in *Opuscules philosophiques choisis*, Vrin, Paris.

Legrand M. (2000/a). Notes de lecture : La Pulsation Mathématique, *Repères-IREM*, n°39, avril 2000, 69-72.

Legrand M. (2000/b). La Pulsation Mathématique, René Guitart, rubrique Livres, in *La Gazette des Mathématiciens*, n°85, 91-93.

Loomis E. S. (1972). *The Pythagorean Proposition*, The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Mazliak L. (2002), Sur la pulsation probabiliste, *Bulletin de l'APMEP*. n°440, 287-292.

Rostand F. (1960). *Souci d'exactitude et scrupules des mathématiciens*, Paris, Vrin.

Schneider M. (1988). *Glenn Gould Piano solo*, Gallimard.

Sinclair N. (2003). Softwar for Learning : Tools for Developing Mathematical "Pulsation", FCEM 2003.

Verret M. (1975). *Le temps des études*, Librairie H. Champion, Paris.

Weil A. (1940). *Lettre du 26 mars 1940 à Simone Weil*.

O USO DA PERSPECTIVA MATEMÁTICA E O DOMÍNIO DO ESPAÇO REAL E IMAGINÁRIO

Madalena Grimaldi de Carvalho
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Escola de Belas Artes
arqgrimaldi@uol.com.br

Glaucia Augusto Fonseca
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro - Escola de Belas Artes
PUC Rio – Pontifícia Universidade Católica – Faculdade de Arquitetura
UGF – Universidade Gama Filho – Faculdade de Arquitetura
METODISTA do Rio – Faculdade de Arquitetura
glauciaaugusto@gmail.com

RESUMO

Este artigo faz um estudo sobre o ensino da perspectiva, cujo desenho corresponde a uma das mais significativas técnicas de representação tridimensional do espaço através de um desenho bidimensional. É certo que a descoberta do traçado da perspectiva matemática, na época do renascimento, foi um grande avanço, porém, com o advento da tecnologia computacional, as metodologias de ensino precisam ser reavaliadas, a fim de formar profissionais capazes de dominar as novas ferramentas de construção e ao mesmo tempo, pensar tridimensionalmente ao traçar o espaço real ou imaginário.

Palavras-chave: Percepção espacial, Raciocínio espacial, Desenho, Perspectiva.

INTRODUÇÃO

> "O processo criativo deve produzir uma obra que detenha desenho, harmonia e beleza. Estas qualidades também estão presentes na criação matemática." [1]

Antes de iniciarmos o desenvolvimento deste trabalho, cabem alguns esclarecimentos sobre a evolução do conceito de perspectiva. Ainda que o método geométrico de construção só tenha sido desenvolvido plenamente na época do renascimento, o ser humano sempre utilizou os suportes artísticos como meio de expressão. Os gregos possuíam alguma noção do fenômeno perspectivo e suas pinturas produziam uma razoável ilusão de profundidade, recorrendo ao uso de linhas inclinadas, redução do tamanho das figuras em segundo plano e jogos de claros e escuros.

Por volta de 300 AC, o matemático grego Euclides de Alexandria propôs a noção de cone de visão e anos mais tarde, o matemático e filósofo árabe Alhazen definiu a base ótica da perspectiva, demonstrando que a luz se projeta, em forma cônica, no olho humano.

---

[1] Kline, M. (1953). Mathematics in Western Cultura. Oxford: Oxford University Press. New York, 1977, pag. 523-525.

Grande parte desse conhecimento teórico se perdeu no período medieval. Nessa época, utilizavam a sobreposição de imagens para representar as distâncias e os objetos e personagens possuíam uma escala, de acordo com seu valor espiritual ou temático.

Somente, em meados do século XV (no período da história do Renascimento conhecido como Quatrocento), a perspectiva foi profundamente estudada. A resposta veio pela aplicação de conhecimentos de geometria e álgebra. Ao pensarmos em matemática, muitas vezes a dissociamos de outras ciências que não estejam intimamente ligadas às áreas das ciências exatas, mas a construção correta, em perspectiva, surgiu dos estudos matemáticos e trouxe uma nova maneira de representar a realidade, desta vez com maior precisão e de surpreendente nível qualitativo.

A matemática foi utilizada para representar, de forma fidedigna, objetos tridimensionais. O arquiteto Filippo Brunelleschi desenvolveu uma demonstração da perspectiva por meio de um dispositivo óptico, representando, em escala, os objetos e mantendo a proporção entre seu tamanho real.

Pouco tempo depois, quase todos os artistas florentinos utilizaram-se da perspectiva geométrica em suas pinturas, para retratar uma cena única de forma coerente. Muitos empregavam o recurso de pisos em xadrez, apesar de esses pisos serem historicamente incoerentes. Essa marcação, que se tornou recorrente na arte do Quatrocento, obedecia a regras geométricas e ajudavam o artista a posicionar os objetos no espaço, passando a ser um novo método compositivo.

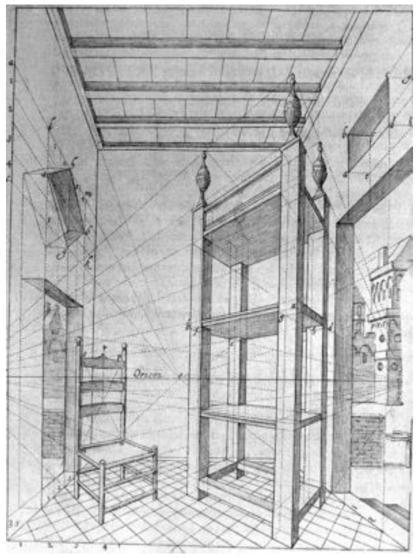


Figura 1: Construção geométrica de uma perspectiva. Gravura por Henricus Hondius

Outros artistas trouxeram importantes contribuições, como Leonardo da Vinci, que utilizava aspectos da geometria e da proporção na formação e construção de um quadro. Ele observou que a aparência dos objetos mudava, à medida que a distância entre objeto e observador aumentava. Desta forma, as linhas que delimitavam a silhueta do objeto, se tornavam menos distintas em grandes distâncias.

Essa evolução do traçado da perspectiva fundamenta sua metodologia de ensino e sua definição nos dias atuais, como: "*a projeção em uma superfície bidimensional de um determinado fenômeno tridimensional. Para ser representada na forma de um desenho (conjunto de linhas, formas e* *superfícies) deve ser aplicado mecanismos gráficos estudados pela Geometria descritiva, os quais permitem uma reprodução precisa ou analítica da realidade tridimensional*". [2]

MÉTODOS UTILIZADOS EM SALA DE AULA

O interesse, no aprimoramento de uma nova metodologia, surgiu ao observar os alunos da Escola de Belas Artes na UFRJ. Ensinamos os métodos tradicionais, na construção de perspectivas, como o processo das visuais e dominantes e o processo dos pontos medidores, com o auxílio de tabelas, onde o estudante se utiliza de medidas pré-estabelecidas, que garantem uma construção gráfica correta. Nesse caso, notamos que a utilização de tabelas favorece o processo mecânico; contudo, pouco ajuda na compreensão do conceito e, conseqüentemente, no domínio do espaço tridimensional.

Constatamos ainda, que essa discrepância entre o domínio do método e do espaço torna-se ainda mais palpável quando trabalhamos com a construção da sombra, parâmetro medido matematicamente, que muda de acordo com a orientação angular da luz. Os exercícios em questão são montados com complexidade crescente: oferecemos as vistas ortográficas (superior, lateral e frontal) de objetos ou espaços cotados. A partir dessas informações, o estudante tem que construir a perspectiva, utilizando um dos processos gráficos ensinados.

Porém, nossa prática em sala de aula tem mostrado que, determinados estudantes sabem construir desenhos em perspectiva de acordo com um procedimento, mas não sabem realmente o que estão fazendo, apenas seguem uma "receita" de construção.

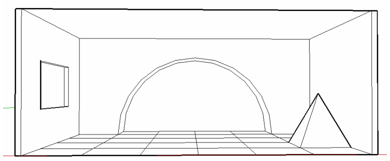
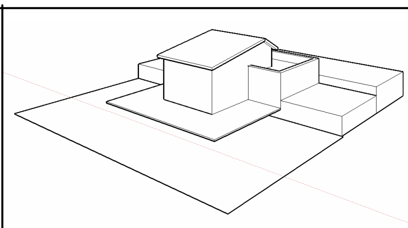
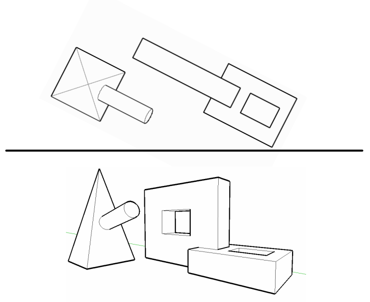
		
Perspectiva com um ponto de fuga: **Processo dos Pontos Medidores**, quadro de frente. Também conhecido como **Processo das 3 Escalas**.	Perspectiva com dois pontos de fuga: **Processo dos Pontos Medidores**. Dispensa a construção da vista superior na mesma escala da construção da perspectiva.	Perspectiva com dois pontos de fuga: **Processo das Visuais e Dominantes**. Necessita do desenho da vista superior.

Figura 2: Tipos de perspectivas desenvolvidas com os alunos no método tradicional

[2] http://pt.wikipedia.org/wiki/Rivethead

Ao analisarmos os resultados dos exercícios verificamos que quando a forma da volumetria foge da convencional, muitos não conseguem “ler” vistas ortográficas (desenhos bidimensionais) fornecidas e visualizar o desenho em três dimensões, não compreendendo corretamente a volumetria da peça a ser construída. Verificamos assim que, alguns de nossos alunos são meramente cumpridores de processos gráficos, não possuindo domínio da visualização e da representação de conceitos geométricos, tão fundamentais para o entendimento do espaço.

No decorrer da nossa disciplina, buscamos que o aluno vá descobrindo, através do raciocínio lógico, a relação imagem visual / imagem espacial, e comece a perceber o espaço tridimensional a partir da representação bidimensional. Para alguns, esse “salto” de compreensão entre a transformação de uma imagem visual mental, em uma imagem representada, incide de forma quase imediata. Para outros, essa evolução só acontece através de um adequado desenvolvimento perceptivo do espaço, ou seja, do processo de formação de imagens visuais. Para tanto, estimulamos a construção de croquis e trabalhamos com fotos onde eles procuram as fugas e começam a entender as relações entre o espaço percebido e interpretado pelo indivíduo. O aluno precisa compreender as regras matemáticas para representação do desenho, necessita preparar o campo da percepção visual e o seu raciocínio lógico, para que através das representações bidimensionais consiga fazer a “leitura” do desenho e processe essas representações de modo a interpretá-las tridimensionalmente.

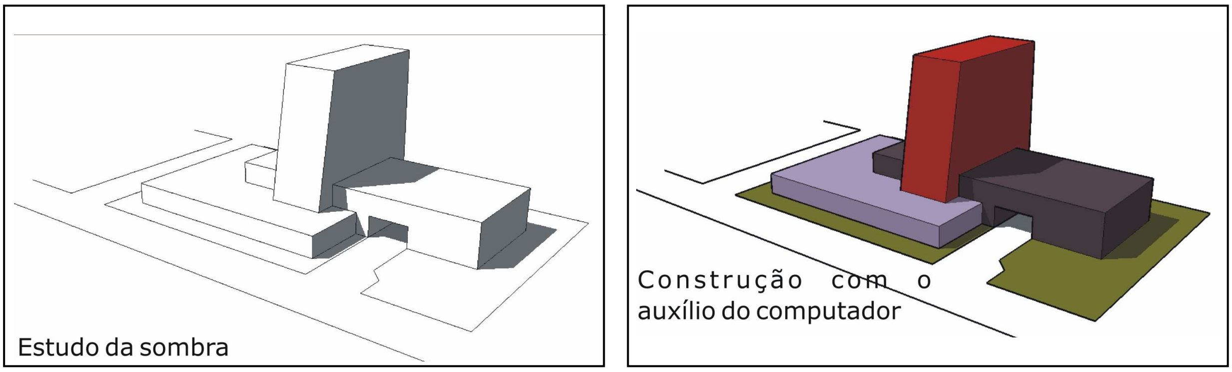
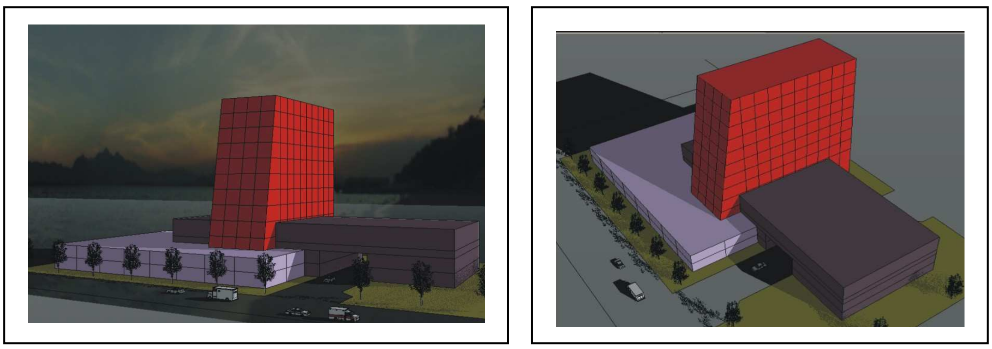


Figura 3: Perspectivas desenvolvidas com o auxílio do computador



Numa tentativa de melhorar a compreensão tridimensional introduzimos o uso do computador, que oferece inúmeras possibilidades para a representação gráfica. Ressaltamos, porém, que a aplicação de determinados *softwares* não favorecem a compreensão da lógica tridimensional, distanciando-se, ainda mais, do entendimento do conceito, embora, em muito, melhore a qualidade gráfica das imagens apresentadas.

No caso, o *software* escolhido tem sido o *SketchUp*. Essa escolha foi por motivos operacionais e de falta de tempo para desenvolver programas mais complexos. O *SketchUp* possui comandos simples e de fácil interatividade, que trabalham diretamente sobre a terceira dimensão. Nesta etapa, percebemos que alguns alunos conseguem inter-relacionar o conhecimento do método com o resultado obtido no computador. Compreendem os conceitos de altura e variação da posição do observador e como o seu deslocamento interfere na escolha da visualização do objeto. Aplicam a sombra, estudam sua variação angular e podem, ainda, trabalhar texturas e cores rapidamente.

Acreditamos que a perspectiva deve ser ensinada como uma representação do espaço que vai além de um simples recurso gráfico, transcendendo o nosso universo visual. O domínio da sua construção e da visualização é de fundamental importância na construção e exploração do conceito matemático, permitindo controlar a representação de um objeto ou de um determinado ambiente.

A PERSPECTIVA COMO MEDIAÇÃO ENTRE O ESPAÇO REAL E O ESPAÇO IMAGINÁRIO

> "A importância dos números e das operações é evidente pelo uso que lhes dão em nosso cotidiano. Porém não é suficiente ensinar os conteúdos que tenham uso evidente. A Matemática é um bem cultural; a cultura, entre outras coisas tem produzido Matemática e Geometria é parte desse evidente bem cultural. No que a Matemática se refere, a escola deve esta custosa produção cultura"[3]

Acreditamos que o aspecto científico na formação das pessoas é de grande importância, porque possibilita a saída do senso comum, na busca de uma nova consciência essencialmente experimental. Aprender não significa somente fixar na memória, nem dar expressão verbal e própria ao que se fixou na memória. Esse é o grande desafio que nos impomos a ensinar o tradicional método de perspectiva, seja usando esquadros ou no computador, não de forma decorada, mas realmente compreendida, para que nossos alunos possam além de saber resolver qualquer problema por raciocínio lógico, sair do "senso comum" e extrapolar no mundo da imaginação.

A construção da perspectiva está inscrita na sua definição tradicional, ou seja, a representação da imagem como ela é percebida pelo ser humano. Desenha-se conforme as convenções: definimos a localização e a altura do observador, o ângulo de visão deste e determinamos as fugas para onde convergem linhas paralelas, criando a idéia do tridimensional numa superfície bidimensional.

[3] Porras Marta. Revista Novedades Educativas Nº 88. Centro de Publicaciones Educativas y Material Didáctico. Buenos Aires. 1998. p. 24.

Construímos o ambiente real estático como um todo, que se identifica com a impressão visual percebida pelo observador. Porém, podemos acrescentar características subjetivas na montagem do espaço, para tanto, é preciso ter pleno domínio do seu traçado, para então construir um espaço imaginário.

Esse tipo de representação onde a perspectiva é ilusória e extrapola a mera tentativa de representar o espaço, pode ser observada em artistas como M. C. Escher, que utiliza, em seus trabalhos, importantes conceitos matemáticos, desenvolvendo, com impressionante maestria, a noção de infinito.

Figura 4: M. C. Escher. Répteis, 1943.

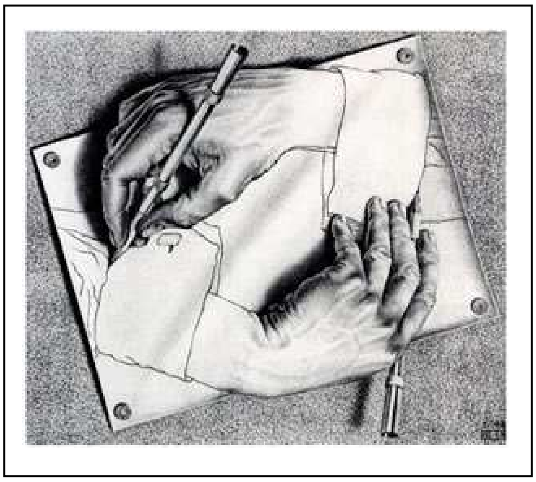


Figura 5: M. C. Escher. Desenhando-se, 1948.

Em sua obra, Escher mostra o conflito da representação espacial em um plano bidimensional. O artista investiga criticamente as leis da perspectiva, utilizadas desde a Renascença, para a representação do espaço e encontra novas leis que ilustra nas suas gravuras, criando uma espécie de ilusão, onde podemos observar o conflito espaço-superfície e figuras impossíveis. A obra de Escher fascina particularmente àqueles que lidam com Geometria.

Outros artistas que merecem ser citados são René Magritte e Rob Gonsalves que seguem a mesma linha, usando uma realidade que só existe na imaginação e que desafia as leis da perspectiva e da compreensão visual.

O desenho em perspectiva não pode se resumir a um ato totalmente mecânico de localizar observador, ângulo visual, linha do horizonte, linha de terra e pontos de fugas e adequar o tipo de processo ao objeto que se queira retratar. Desenhar em perspectiva é fazer surgir um novo espaço, proporcionando uma maravilhosa sensação de criação, a liberação do imaginário que se confunde com a ansiedade do criar e do representar. Esse deve ser o princípio, dominar os elementos e os métodos, sejam eles manuais ou com o uso do computador, para poder trabalhar, não só o espaço real, mas também o espaço imaginário.

Constatamos ainda que, os métodos gráficos tradicionais de construção em perspectiva são, geralmente, esquecidos pelos estudantes, após alguns meses. O desinteresse é percebido em áreas diversificadas. A representação tridimensional utilizando meios mais modernos, como a computação gráfica, tem permitido verificar que os estudantes se sentem mais estimulados, despertando maior curiosidade e criatividade do que somente com a aplicação dos processos tradicionais.

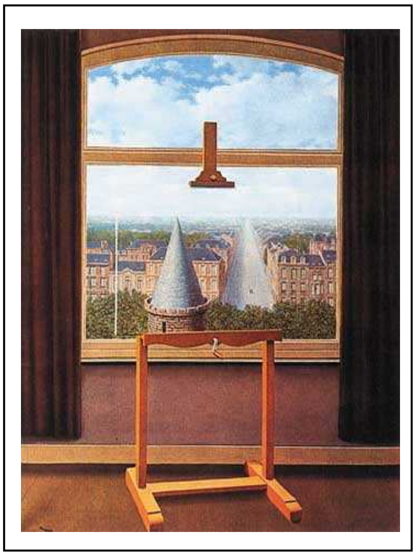


Figura 6: René Magritte
Passeios de Euclides, 1953.

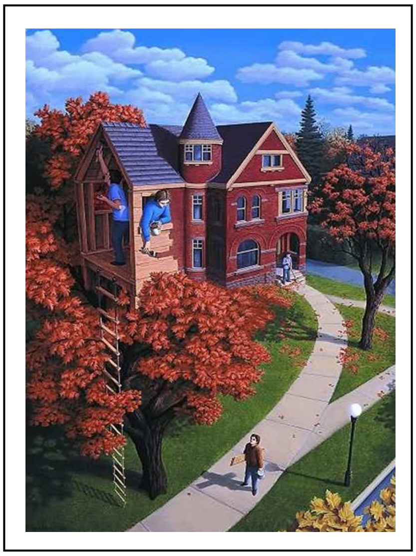


Figura 7: Rob Gonsalves
Casa na árvore no outono, 1966.

A realidade virtual cria situações inusitadas, onde até mesmo se pode passear por dentro das próprias imagens, um universo de fantasia, criado pelo homem com o auxílio da máquina, uma parceria muito presente atualmente. Assim, as imagens em perspectiva se apresentam sob aspectos diferenciados conforme sua intenção representativa, determinada pelo meio de criação e pela intenção do seu criador.

Através desse recurso, pode-se criar e recriar imagens e ambientes. O seu domínio permite manipular realidades, fazendo surgir aspectos que desafiam a compreensão, determinando relações entre a expressão do pensamento, da realidade e das ilusões.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A perspectiva matemática estabeleceu regras e princípios normativos, que fizeram expandir, no mundo das artes, o controle do espaço. O domínio permitiu ultrapassar a compreensão do espaço real para um espaço imaginário, que extrapola o entendimento da nossa visão. Contudo, essa capacidade de representação só acontece quando dominamos os conceitos e os métodos de construção. Percebemos, na prática diária de sala de aula, que muitos trabalham, de forma mecânica, as fórmulas e procedimentos gráficos para a resolução de exercícios de perspectiva, sem o pleno domínio do que estão realizando.

Além disso, em pleno “boom” dos computadores, é preciso repensar a metodologia de ensino da perspectiva. Não nos parece possível não introduzir os meios digitais na formação de profissionais. Não queremos dizer com isso, que não se devem ensinar os métodos tradicionais de construção da perspectiva cônica. Acreditamos, porém, que esse processo tem que fazer parte da carga teórica da disciplina, servindo para o entendimento do traçado e devendo ser exemplificado e construído em exercícios práticos que estimulem a compreensão e o raciocínio.

Nossa experiência tem mostrado que os alunos que não conseguem construir a “mão” quando se deparam com os recursos tecnológicos conseguem compreender melhor a peça e começam a ter uma visão espacial para expressar e explorar a realidade tridimensional aplicada num *software* gráfico. Ou ainda, aqueles que compreendem a lógica da representação tridimensional num espaço bidimensional apresentam ganhos significativos aliando seu conhecimento com as facilidades que os programas digitais oferecem.

Nossa busca é compreender, como os alunos, dentro do contexto didático-pedagógico, processam as inter-relações entre a visualização e a representação de formas geométricas, envolvendo as mídias computacionais e os métodos tradicionais de ensino. O grande desafio que nos impomos é o de contribuir com metodologias didáticas que possibilitem aos alunos ter a capacidade de articular os conhecimentos adquiridos estimulando sempre o raciocínio para resolução de questões tridimensionais tanto do mundo real quanto do imaginário.

REFERÊNCIAS

CHING, Francis D. K.; **Dicionário visual de arquitetura**; São Paulo: Editora Martins Fontes, 2000.

EMMER M. (1991) **La pertfezione visible**. Roma: Theoria ed

ESCHER, M. C. **The magic of M.C.Escher**; London: Thames & Hudson, 2002.

GOMBRICH, E. H.; **Arte e Ilusão: um estudo da psicologia da representação pictórica**; São Paulo: Martins Fontes, 1995.

KLINE, M. (1953). **Mathematics in Western Cultura. Oxford**: Oxford University Press. New York, 1977, pag. 523-525.

MONTENEGRO, Gildo A.; **A perspectiva dos profissionais: sombras, insolação, axonometria**; São Paulo: Edgard Blucher, 2001.

PORRAS Marta. **Revista Novedades Educativas** Nº 88. Centro de Publicaciones Educativas y Material Didáctico. Buenos Aires. 1998. p. 24.

ZUCCOTTI, Giovanna M.; **A perspectiva como mediação entre o espaço da realidade e o espaço matemático**; Itália: Celid, março, 1983.

SITES:

http://pt.wikipedia.org/wiki/Rivethead

www.educacaopublica.rj.gov.br/.../mat05.htm

A HISTÓRIA, AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS E OS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE DA APRESENTAÇÃO DE RETAS PARALELAS

Ana Maria Martensen Roland Kaleff – Universidade Federal Fluminense

Jasias Cezario Franca – Professor do Ensino Médio do Estado do Rio de Janeiro

Este estudo trata da observação das constatações sobre o conceito de retas paralelas nos textos das duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio, mais utilizadas em 2006, nas escolas públicas brasileiras. Como o Quinto Postulado de Euclides é o fator fundamental para o desenvolvimento lógico-histórico e para a criação das geometrias não-euclidianas, analisou-se até que ponto as constatações encontradas são influenciadas por concepções euclidianas, ou seja, o quanto cada constatação é decorrente desse postulado. A análise inclui também os desenhos e fundamenta-se na conversão de registros semióticos proposta por Raymond Duval. Embora sigam as determinações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, os livros apresentam um enclausuramento euclidiano tanto no que se refere aos desenhos, quanto às inferências lógicas, o qual pode vir a influenciar negativamente a aprendizagem dos conhecimentos não-euclidianos.

APRESENTAÇÃO

O presente estudo examinou como o conceito de retas paralelas e as propriedades a ele relacionadas são apresentados pelos livros didáticos mais utilizados nas escolas públicas brasileiras do Ensino Médio do Brasil, em 2006, segundo o Fundo Nacional de Desenvolvimento Escolar (FNDE).
Partiu-se do levantamento das constatações relacionadas às expressões retas paralelas e geometrias não-euclidianas, bem como aos termos paralelismo e correlatos, encontradas nos textos dos três volumes de cada uma das coleções.
No que se segue são apresentadas as motivações que levaram ao estudo, os seus pressupostos teórico-metodologicos, os resultados e as conclusões.

JUSTIFICATIVA DO ESTUDO

Este estudo partiu da percepção de que professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, com longa experiência profissional, apresentam um quase total desconhecimento das geometrias não-euclidianas. O fator que o motivou a elaboração de uma monografia (de conclusão do Curso de Especialização em Matemática para Professores da Universidade Federal Fluminense – UFF), cujos resultados são aqui relatados, foram as dificuldades apresentadas na aprendizagem de conceitos introdutórios às geometria não-euclidianas por profissionais com bastante experiência como professores (Franca, 2007).

A abordagem introdutória às geometrias não-euclidianas apresentada na disciplina *Tópicos de Geometria Elementar e Laboratório de Geometria* despertou o interesse do autor da referida monografia. Este, apesar de sua formação acadêmica e da vivência de mais de vinte anos como professor de Matemática, nunca havia tido contato com as geometrias não-euclidianas, nem ao menos tinha conhecimento de sua existência.

Em sua vivência no curso de especialização, o autor observou uma grande dificuldade de aprendizagem, apresentada por ele e pelos demais participantes. Tais dificuldades vêm ao encontro daquelas relatadas pela orientadora do presente estudo, pois em pesquisa anteriormente realizada, envolvendo o mesmo público-alvo, ou seja, profissionais com cerca de dez anos de magistério, foi constatado que: quase 7% afirmaram não saber o que seja o plano euclidiano, aproximadamente 18% desconhecem quais são os seus postulados e 20% relataram não saber o que seja o Quinto Postulado de Euclides. Também foi constatado que quase 34% não sabiam o que são geometrias não-euclidianas e cerca de 54% não as estudaram nos seus cursos de formação (Kaleff, 2007).

Por outro lado, a importância de uma visão mais ampla, nos meios educacionais, sobre as diversas geometrias, incluindo as não-euclidianas, é apontada por diversos documentos governamentais que orientam o ensino da Matemática, tanto no Brasil quanto internacionalmente (Brasil, 1998; Mammana & Villani, 1998).

METODOLOGIA DE DESENVOLVIMENTO E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Inicialmente, para a realização do presente estudo, foram buscadas informações junto ao Fundo FNDE, sobre o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e sobre o Programa Nacional do Livro do Ensino Médio (PNLEM), ambos do MEC. As informações fornecidas referem-se a todos os volumes relativos à Matemática, encaminhados pelos dois programas às escolas públicas do país, para 2006. Para o estudo foram escolhidas as duas primeiras coleções mais solicitadas, sendo que na planilha do PNLEM em primeiro lugar se encontra a coleção *Matemática Aula por Aula* (Barreto Filho & Silva, 2003) da qual foram solicitados 653.839 volumes, 662.273 e 549.208, respectivamente para as 1ª, 2ª e 3ª séries. Em segundo lugar, entre as solicitações, encontra-se a coleção *Matemática* (Dante, 2004), da qual foram solicitados 425.675 volumes para a 1ª série, 513.809 para a 2ª e 422.212 para a 3ª série.

As questões que orientaram o presente estudo são as seguintes: como os autores do livro didático apresentam o conceito de retas paralelas e suas propriedades? Os livros apresentam relações e inferências lógicas, conversões entre registros semióticos e relações de interdisciplinaridade (dentro da Matemática, ou fora dela), que permitam ou favoreçam o estabelecimento de outras formas de paralelismo e de conceitos não-euclidianos?

O estudo, de caráter qualitativo, foi desenvolvido segundo a orientação para as ações de uma pesquisa como apresentada por Fiorentini & Lorenzato (2006). Além disso, foram utilizados como fundamentação teórica relativamente aos conteúdos matemáticos para a escolha dos elementos de análise dos textos, os autores Gans (1973) e Barbosa (2004). Cabe lembrar que esta última, apresenta um rol de proposições e teoremas considerados não dependentes do Quinto Postulado de Euclides, sendo todos eles, portanto, resultados válidos em qualquer axiomática que admita os Axiomas da Incidência e da Ordem (conforme nomenclatura de David Hilbert). A partir da apresentação do referido postulado (chamado de *axioma* por Barbosa), o texto mescla outros que poderiam estar inseridos em capítulos anteriores, nos quais o autor considera que se encontrem somente resultados independentes desse postulado. Cabe lembrar que a versão desse postulado, como apresentada por Barbosa é a de John Playfair, surgida em1795: *Por um ponto fora de uma determinada reta passa uma e só uma paralela a esta reta*. Essa postura de Barbosa frente aos resultados equivalentes ou dependentes do Quinto Postulado é que permite a análise realizada.

Por sua vez, a análise dos registros gráficos foi realizada à luz da teoria sobre *registros de representações semióticas* (Duval, 2003), a qual engloba uma análise cognitiva das conversões de registros semióticos, conforme Kaleff (2006). Para a apresentação dos dados e de sua respectiva análise, na forma de tabelas a com duas colunas, também se lançou mão das orientações apresentadas por Powell e Bairral (2006).

A título de esclarecimento, cabe lembrar que segundo a linguagem envolvida em uma representação, os registros semióticos podem se apresentar em linguagens *discursivas* e *não-discursivas.* As *linguagens discursivas* são constituídas pela língua natural ou pelas linguagens simbólicas ou formais da Matemática (Duval, 2003). Duval também considera uma espécie de *linguagem mista*, a qual, no entanto, não apresenta características próprias de uma linguagem, e na qual são habitualmente apresentadas as proposições matemáticas. Nessa aparente linguagem ocorrem símbolos matemáticos e sinais da língua natural. Por sua vez, os *registros não-discursivos* são aqueles relacionados às formas gráficas e desenhos como figuras, tabelas, gráficos e outros.

No caso específico das geometrias, uma análise cognitiva como a proposta por Duval permite observar a natureza da um objeto como considerada pelo sujeito ao realizar uma atividade matemática. Ou seja, observando um registro semiótico convertido para outro registro, ambos referentes a um mesmo objeto geométrico, pode-se perceber como o sujeito envolvido na atividade (no caso, o autor do livro-didático,) considera a natureza do objeto matemático em questão. Dessa forma, se o objeto é representado no livro por um registro euclidiano, a sua natureza seria considerada como euclidiana.

Conforme observado em pesquisa realizada por Kaleff (2007), professores, frente à resolução de problemas introdutórios às geometrias não-euclidianas, lançam mão de uma grande diversidade de registros semióticos convencionais da Matemática, ou seja, da teoria dos conjuntos, euclidianos e diagramas de Venn; bem como utilizam uma ampla gama de recursos pertencentes a linguagens não convencionais. Essa diversidade de registros e as suas conversões apresentam-se como um rico manancial para referência aos estudos sobre as concepções geométricas de professores.

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS CONSTATAÇÕES

As constatações encontradas em cada um dos livros didáticos relativamente ao conteúdo objeto deste estudo foram garimpadas por meio de uma atenta leitura dos textos. Apresenta-se mais a seguir, à guisa de ilustração, um quadro contendo uma tabela analítica na qual encontra-se uma das constatações, acompanhada da sua respectiva análise. Cada tabela analítica criada neste estudo apresenta, na primeira coluna, o texto referente à constatação e, na segunda, exibe a sua análise, à qual se segue a apresentação dos registros semióticos envolvidos e as possíveis conversões de registros que ocorreram no transcorrer do texto da constatação. Dessa mesma coluna, quando é o caso, ainda são apresentadas observações complementares com vistas a um melhor entendimento da análise e ao preparo das conclusões decorrentes.

Cabe salientar, que devido às limitações gráficas da apresentação do presente artigo nenhum outro quadro contendo uma tabela analítica original de uma constatação pôde ser apresentado, além da que se encontra no Quadro 1.

Sobre a coleção Matemática Aula por Aula

Na coleção *Matemática Aula por Aula* foi verificada a presença de uma constatação relativamente a retas paralelas e termos correlatos no primeiro volume; seis constatações, no segundo e somente uma, no terceiro.

Pelos dados advindos dessas constatações percebeu-se que os registros semióticos não discursivos, portanto os registros gráficos, são todos euclidianos ou com características euclidianas. Por outro lado, as constatações que fazem menção às geometrias não-euclidianas são apresentadas apenas em linguagem discursiva, sem a ocorrência de conversões de registros que possibilitem a emergência de novas características para os conteúdos geométricos, como ideado por Duval. Dessa forma, essas constatações não apresentam nenhuma relação de conversão entre registros semióticos que possibilitem o estabelecimento de outras formas gráficas de paralelismo e de conceitos não-euclidianos, bem como nenhuma relação ou inferência lógica favorece o estabelecimento dos novos conceitos. No entanto, a análise das inferências aponta que embora existam duas possibilidades de exploração de abertura aos conceitos não-euclidianos, essa não se realiza.

<table>
<tr><th>Apresentação</th><th>Análise</th></tr>
<tr><td rowspan="3">No capítulo intitulado por “Progressões”, em sua seção introdutória “A história conta”, (p. 304), a parte do texto intitulada “A contribuição de Gauss” narra:
“(...) É no campo da matemática, contudo, que se concentra a maior parte de sua obra, (de Gauss), nas áreas de probabilidade, estatística, teoria dos números, teoria das funções e geometria. Sua criatividade concebeu a geometria não-euclidiana, mais tarde desenvolvida pelo seu discípulo Riemann e que sem dúvida, serviu de base tanto para a teoria da relatividade, trabalhada por Einstein, quanto para a teoria atômica do século XX”.</td><td>O texto menciona a geometria não-euclidiana concebida por Gauss e desenvolvida por Riemann. Neste, reconhecendo a importância da geometria não-euclidiana para o desenvolvimento científico nos últimos séculos.</td></tr>
<tr><td>Registros Semióticos e Conversões

Registros Semióticos Apresentados

Língua natural.

Conversões

Não há.</td></tr>
<tr><td>Observações Complementares
Cumpre dar ênfase que apesar do reconhecimento dessa importância, não é apresentada nenhuma noção relacionada a algum tipo de novas geometrias, ou seja, nada que chame a atenção do leitor para outras formas de apresentação das geometrias.</td></tr>
</table>

Quadro 1: Constatação 1 da coleção *Matemática Aula por Aula*

Sobre a coleção *Matemática*

Na coleção *Matemática,* apresentam-se quatorze constatações referentes a retas paralelas, sendo sete no primeiro volume; seis, no segundo e somente uma, no terceiro. Entre os registros semióticos apresentados nessa coleção encontram-se os referentes à linguagem discursiva natural e à simbólica, bem como o registro gráfico euclidiano e até mesmo um tipo de traçado pictórico de características euclidianas, envolvendo traçados e cores (não constante no rol levantado por Kaleff, 2007). Todos esses registros apontam que a coleção opta por uma abordagem euclidiana.

Embora o autor dessa coleção busque escassas situações interdisciplinares com a geografia, não foram encontradas relações de interdisciplinaridade dentro da Matemática, que permitam ou favoreçam o estabelecimento de outras formas de paralelismo e de conceitos não-euclidianos. Este é o caso, de constatações envolvendo registros gráficos do globo terrestre e o desenho de círculos considerados como *"linhas de latitude (chamadas de paralelos) são paralelas entre si e ao equador"* (Dante, p.53). O livro não faz nenhuma referência ao que o termo paralela significa, ou seja, ao resultado de planos paralelos que cortam uma esfera, não se tratando do paralelismo euclidiano de retas. Ao tomar um círculo da esfera como *paralelo*, deixa de lado a oportunidade de abrir caminho ao entendimento dos conceitos e relações elementares da geometria da esfera. Ou seja, ao entendimento do conceito de reta como um círculo máximo da esfera, bem como para a não existência de uma relação de paralelismo relativamente a tal tipo de reta nessa superfície.

Por sua vez, entre as quatorze constatações analisadas, o livro apresenta seis possibilidades de inferências lógicas para a abordagem de situações independentes do Quinto Postulado, as quais poderiam favorecer a abertura para novos conceitos não-euclidianos. No entanto a coleção não as considera e não apresenta nenhuma relação ou inferência que venha a favorecer o estabelecimento de outras formas de paralelismo e de conceitos não-euclidianos.

CONCLUSÕES FINAIS

Inicialmente, cabe salientar que nos volumes do Ensino Médio considerados no presente estudo, os autores partem do pressuposto de que o aluno já tenha estudado os conteúdos de geometria plana no Ensino Fundamental, apesar de não haver coerência seqüencial na escolha das coleções didáticas, pelas escolas públicas brasileiras. Observa-se que os autores das coleções mais solicitadas pelas escolas e apresentadas pelo FNDE para 5ª à 8ª séries, não se apresentam nas coleções privilegiadas para o Ensino Médio. Dessa forma, pode-se concluir que não existe uma seqüência relativamente aos autores dos livros e, portanto, à apresentação didática dos conteúdos geométricos aos alunos.

Diante das constatações mapeadas no presente estudo, percebe-se que as esporádicas menções às as geometrias não-euclidianas são meramente ilustrativas quanto ao seu valor histórico para o desenvolvimento da Matemática e das Ciências. Percebe-se que atualmente no Brasil ocorre a mesma situação relatada por Lénárt em relação às escolas norte-americanas: "*Os livros didáticos [...] em sua maioria não fazem menção sobre a existência de outras geometrias, no entanto, quando o fazem é apenas a título de ilustração*" (Lénárt,1996, p.v).

Com tal abordagem para as citações históricas sobre as novas geometrias, aparentemente os livros procuram satisfazer às orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais. No entanto, ainda que os livros didáticos analisados reconheçam e façam menção às geometrias não-euclidianas como determinantes para o avanço das ciências exatas no século XX, nenhuma incorporação de seus conteúdos é apresentada como atividade didática, e que venha a levar o aluno a ter qualquer noção relativa a esses novos conhecimentos.

Os registros semióticos, como apresentados nos livros didáticos considerados, provavelmente levarão os alunos do Ensino Médio a se enclausurarem frente à utilização de registros euclidianos, da mesma maneira como foi constatado em outras pesquisas realizadas com adultos e professores.

Convém lembrar que experiências brasileiras já foram realizadas para o ensino de geometrias não-euclidianas, desde a oitava série do Ensino Fundamental até o curso superior. Já na década de 1990, apresentaram-se exemplos da introdução às geometrias não-euclidianas, realizados de forma simples e prática. Também, esse é o caso da geometria do táxi a qual foi introduzida no Brasil, em livro didático da 8ª série do Ensino Fundamental por Bigode (2002). Conforme apontam Kaleff e Nascimento (2004), esse tipo de geometria pode ser modelada concretamente por meio de uma maquete, a qual representa uma situação que possibilita o desenvolvimento didático dos seus conteúdos, relacionando-os ao cotidiano do aluno e à geografia urbana.

Um outro exemplo é o do emprego didático da geometria da esfera, com sua interdisciplinaridade intrínseca à geografia, a cujo ensino recorre Martos (2002) em uma experiência envolvendo geometrias não-euclidianas em turmas da 8ª série.

Tais experiências apontam prováveis caminhos para que outras formas geométricas interessantes e significativas possam ser introduzidas, mesmo nas escolas de Ensino Básico.

Pelo que aqui foi apresentado, conclui-se que os autores dos livros didáticos têm em suas mãos uma grande oportunidade para promover uma abertura dos conhecimentos dos alunos, leitores de suas obras, na direção de uma visão mais ampla em relação a outras geometrias além das euclidianas; não precisando ficar restritos a apresentações meramente ilustrativas sobre a importância histórica dessas geometrias, como foi constatado no presente estudo.

Referências

Barbosa, J.L. *Geometria Euclidiana Plana*. 8ª. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

Barreto Filho, B. & Silva, C.X. *Coleção Matemática Aula por Aula.* 1ª ed. São Paulo: FTD, 2003.

Bigode, A. J. L. *Matemática Hoje é Feita Assim, 8ª série*. São Paulo: FTD, 2002.

Brasil - Ministério da Educação. Secretaria de Educação Infantil e Fundamental, MEC *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática: 5ª a 8ª Séries*. Brasília, 1998.

Carvalho, J. B. P. Os Elementos de Euclides. *Cadernos da RPM-Revista do Professor de Matemática*, nº 1, 1994.

Dante, L. R. *Matemática*. 1ª. ed. São Paulo: Ática. 2004.

Duval, R. *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: Alcântara Machado, Silvia D. (Ed.) *Aprendizagem Matemática: Representação Semiótica*. São Paulo: Papirus, 2003, 1-34.

Franca, J. C. *Uma Análise da Apresentação de Retas Paralelas em Livros Didáticos do Ensino Médio*. Monografia de Curso de Especialização. Niterói: Instituto de Matemática. UFF. 2007.

Fiorentini, D. & Lorenzato, S. *Investigação em Educação Matemática:* Percursos Teóricos e Metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

Gans, D. *An Introduction to Non-Euclidean Geometry.* New York, NY: Academic Press, 1973.

Kaleff, A. M. M. R.. Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não-Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. *Bolema-UNESP*. Rio Claro (SP). nº. 28, novembro de 2007. 69-94.

------ *Noese e Semiose: Considerações sobre Processos Cognitivos e Lingüísticos em Educação Matemática.*Anais do Encontro de Educação Matemática, 4, Rio de Janeiro 2006. 1 CD-ROOM.

------ & Nascimento; R. S. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi**.** *Boletim- GEPEM*, Rio de Janeiro, nº. 44, 2004, 11-42.

Lénárt, I. *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere: Activities Comparing Planar and Spherical Geometry*. Berkeley: Key Curriculum, 1996.

Mammana. C.; Villani, V. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century*. Dordrecht: Kluwer. 1998.

Martos, Z.. G. Geometrias não-Euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no ensino fundamental. *Zetetiké-UNICAMP*, Campinas (SP), 10, nº 17/18, 2002. 43-71.

Powell, A. & Bairral, M. *A Escrita Matemática e o Pensamento Matemático*. Campinas SP: Papirus, 2006.

COMPETÊNCIAS PARA A RESOLUÇÃO GRÁFICA DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Maria Helena Wyllie Lacerda Rodrigues
UFRJ – EBA – Departamento de Técnicas de Representação
Gilson Braviano
UFSC – Departamento de Expressão Gráfica

Resumo

Este artigo apresenta um conjunto de competências que constituem os principais comportamentos e mecanismos de raciocínio necessários à compreensão e resolução de problemas geométricos. Mostra-se uma seqüência de estudo em que habilidades, capacidades e procedimentos considerados essenciais neste contexto são explorados num ambiente de geometria dinâmica. Tal série é indicada como alternativa didática para a atualização do conhecimento de professores que atuam na educação gráfica.

Palavras-chave: competências gráficas; resolução de problemas; geometria dinâmica.

INTRODUÇÃO

No artigo intitulado “Formação e invenção do professor no século 21”, Cristovam Buarque (2006) afirma que o maior desafio da educação contemporânea é formar o professor e, indo além nesta reflexão, acrescenta: “mais do que formado, ele tem de ser reformado, reinventado, para servir ao processo de aprendizagem do futuro”.

O que significa “reinventar o professor”? Garantir que ele acompanhe a evolução do conhecimento e também possa, através da pesquisa, fazer acréscimos relevantes ao saber na área em que atua? Levá-lo a adotar novas dinâmicas e a se atualizar em relação aos aparatos tecnológicos, incluindo-os efetivamente em sua prática pedagógica? Incentivá-lo a desenvolver o programa da disciplina com tarefas que desafiem a curiosidade, evitando assim, como adverte Polya (2004), ocupar o tempo em sala de aula com operações rotineiras para não correr o risco de matar o interesse dos estudantes pelo conteúdo e retardar o seu desenvolvimento intelectual? Prepará-lo para enxergar multi, inter e transdisciplinarmente os temas com que irá trabalhar, de modo a dar-lhes um tratamento que contemple tais dimensões?

Certamente, as perguntas acima deixam antever respostas afirmativas. Porém, há outros pontos ‘nevrálgicos’ e não menos importantes nesta discussão que, ao serem focados na área da educação gráfica, servem de inspiração para o presente trabalho, como veremos a seguir.

É comum constatar-se a dificuldade que as pessoas têm para representar graficamente idéias e resolver problemas geométricos que se aplicam a situações do cotidiano. Tal dificuldade não parece estar sendo abrandada de modo significativo pelos professores de matemática, provavelmente pelo fato de, no ensino desta disciplina, não se dar a devida atenção às questões referentes à visualização espacial. Por outro lado, os professores de desenho geométrico e projetivo, embora procurem utilizar ferramentas gráfico-computacionais e propor atividades criativas aos seus alunos, nem sempre mostram-se capazes de solucionar problemas que lhes são desconhecidos[1].

Isso nos faz suspeitar que, em princípio, mais do que se manterem atualizados quanto ao instrumental tecnológico, os professores deveriam constantemente reestruturar sua caminhada, com base nos conteúdos e competências relacionados ao seu campo de atuação, procurando também visualizar seus elos com outras áreas de fundamentação e aplicabilidade daquele conhecimento.

CONTEÚDOS E COMPETÊNCIAS

A despeito de o conceito de competência ser explorado na literatura sob vários pontos de vista e analisado em diferentes contextos, especialistas no assunto, como Perrenoud (2002) e Le Boterf (2001), concordam em defini-la como o ato de saber mobilizar recursos cognitivos para agir eficientemente em situações-problema. Reforçam, assim, a distinção entre conteúdos (porções do conhecimento que fazem parte de programas disciplinares) e competências (potencialidades do ‘saber fazer’ em várias instâncias).

Interpretando o pensamento dos estudiosos do tema, Rodrigues, Kopke e da Mata (2003: p. 2) entendem que as competências não exprimem simplesmente a aplicação de recursos para resolver, com eficiência, algo merecedor de uma intervenção, mas “se caracterizam pela própria ação do indivíduo em situações reais de vida, vinculadas à sua prática social”.

Ao trazermos o assunto para o campo de interesse desta exposição, mais especificamente no que se refere ao tratamento gráfico exigido quando se busca a solução para exercícios de construção, reproduzimos algumas subcategorias que se incluem na competência “saber resolver problemas geometrográficos”, listadas por Rodrigues (2006), e acrescentamos outros itens.

Tais microcompetências, ativadas tanto na dimensão ideativa (conjunto de conceitos) quanto na perceptiva (conjunto de imagens), se harmonizam, em princípio, com os níveis de evolução do ‘pensamento geométrico’ apontados por Van Hiele e comentados nos estudos de Fuys, Geddes e Tischler (1988): identificação de figuras geométricas; análise das figuras em função de seus componentes e

[1] A afirmativa é baseada em observações feitas, ao longo das aulas de Geometria Gráfica Bidimensional no Curso de Especialização em Técnicas de Representação Gráfica (EBA – UFRJ), cuja clientela é, em sua maior parte, formada por professores de Desenho que trabalham nos níveis fundamental e médio de ensino.

respectivas relações e propriedades; interrelação lógica das propriedades descobertas, ainda informal; prova dedutiva de teoremas; estabelecimento de teoremas em diferentes sistemas de postulados e análise comparativa entre estes.

Apresentam-se, então, como potencialidades requeridas no desenvolvimento da mente gráfica, os seguintes saberes:

- Interpretar o enunciado de uma situação-problema;
- esboçar, gráfica ou mentalmente, uma figura de análise para o problema, identificando o que é pedido, o que é dado e o ponto-chave da questão;
- reconhecer as constantes de determinação métrica e local para aquela construção;
- visualizar 'subproblemas' dentro do problema a ser resolvido;
- buscar e combinar os recursos cognitivos necessários à redescoberta dos lugares geométricos para o ponto eleito como chave no problema;
- utilizar as ferramentas e procedimentos adequados ao processo de sua resolução;
- considerar diferentes alternativas para obter sua solução;
- avaliar qual a melhor forma de resolvê-lo;
- identificar as condições que garantem haver, ao menos, uma solução para ele;
- visualizar o número máximo de soluções (tanto métricas quanto locais) para o problema;
- criar variantes daquele mesmo problema;
- transferir o raciocínio de um problema para outro de mesma classe;
- aplicar raciocínios e procedimentos operacionais similares em problemas com diferentes referenciais;
- perceber a relação de um problema de geometria com noções e atividades pertinentes a outras áreas do conhecimento;
- relacionar um problema geométrico à determinada situação do cotidiano e vice-versa.

Embora estejamos certos de que a lista de microcompetências não se esgota nos itens acima citados, acreditamos ter destacado pontos de capital importância na formação de quem trabalha com a geometrografia.

ALTERNATIVA PARA O ESTUDO DE CONTEÚDOS GRÁFICOS

No segundo período letivo de 2007, dedicamo-nos a preparar um conjunto de módulos para o estudo de transformações pontuais básicas, batizando-o com a sigla SEID: Séries de Estudo Interativo-Dinâmicas. Escolhemos para isso, dentro do universo gráfico-computacional, um programa que permitisse a manipulação pelo usuário e servisse de ambiente para autoaprendizagem - “The Geometer’s Sketchpad” (JACKIW, 1995) - micromundo generoso na oferta de instrumentos para as construções geométricas e a resolução de problemas, bem como rico em recursos didáticos para a organização de seqüências de estudo a distância.

O material obtido na produção do conjunto SEID consta de 12 unidades, parte delas dedicada a conceituar as transformações ali exploradas e, outra, a propor exercícios em que estas se aplicam (RODRIGUES, 2007). Na elaboração das séries, procuramos tratar os assuntos e sugerir atividades de maneira a contemplar aquelas microcompetências.

Selecionamos aqui, à guisa de exemplificação, um dos módulos produzidos: o que se refere à construção de caminhos mínimos[2].

A figura 1 mostra a tela em que se propõe a situação-problema, a partir da qual o estudo daquela aplicação geometrográfica da simetria axial será desenvolvido. A página disponibiliza botões de acesso a uma figura de análise animada[3] e a perguntas que desafiam o estudante a optar por um ponto-chave e descobrir seus lugares geométricos. Esta SEID contém 16 telas ao todo, que podem ser acessadas, seqüencialmente ou não, pelas abas dispostas na barra inferior.

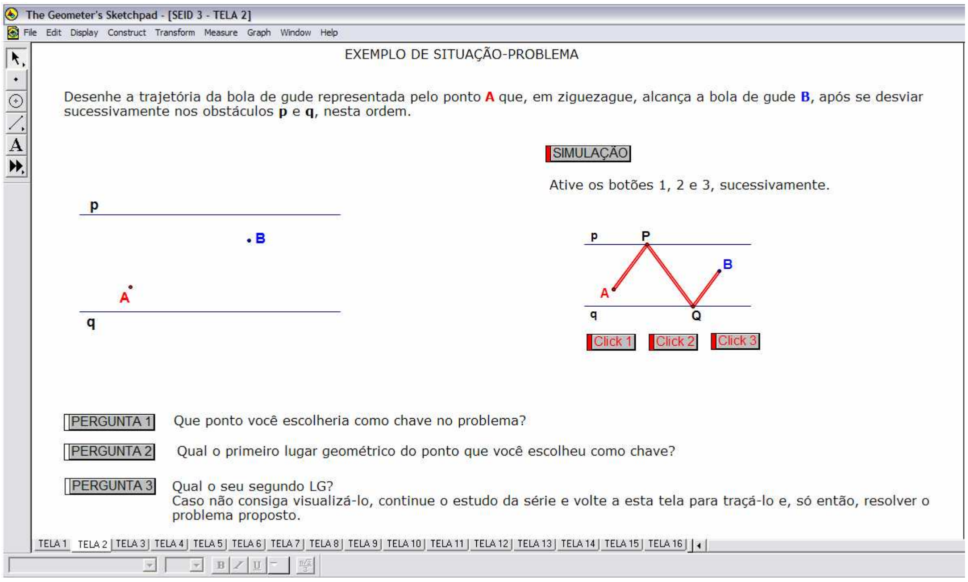


Figura 1: Situação-problema inicial.

A figura 2 ilustra o momento em que são trazidas, ao conhecimento do aluno, as noções essenciais à compreensão do fenômeno físico de reflexão, de modo que ele possa fazer as devidas associações com a situação-problema sugerida de início. Cada item é apresentado textual e graficamente, quando se recorre aos botões de ação do tipo *Hide/Show* e *Animation.*

[2] BRAVIANO (2007) desenvolve o mesmo tema em seqüência didática construída no programa Cabri-Géomètre II.

[3] Pela ativação dos botões “Click 1, 2 e 3”, o ponto A desliza na tela, deixando visível sua trajetória até coincidir com o ponto B, após desviar-se ao atingir, sucessivamente, os obstáculos representados pelas retas p e q.

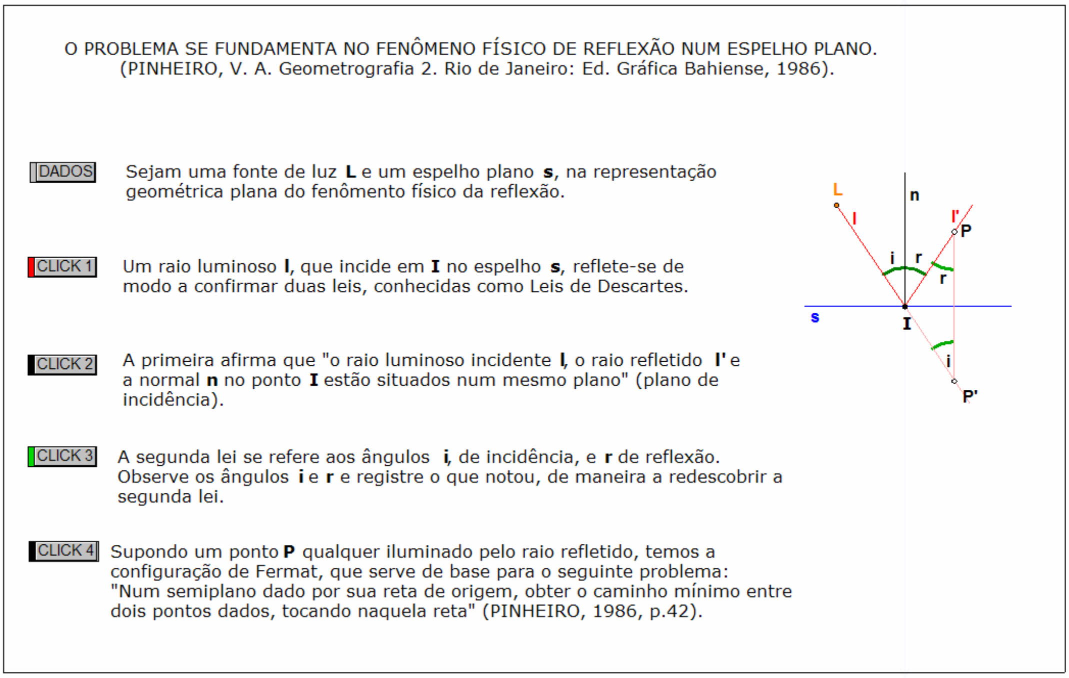


Figura 2: Página de fundamentação teórica.

Convém enfatizar que, pelo fato de as informações serem introduzidas à medida que o usuário pressiona cada botão, dá-se-lhe a oportunidade de refletir sobre cada uma delas enquanto interage com o programa de estudo. As noções, devidamente apropriadas, servirão de insumo para o cabedal de recursos cognitivos a serem acessados no processo de resolução deste tipo de problema.

Após várias páginas de exploração do assunto em foco, são enunciados outros exercícios em que se aplica aquela mesma transformação pontual.

Nas figuras 3 e 4, podem ser observados os diversos passos dados na análise da questão proposta:

- Aquele em que, ao ativar o primeiro botão, mostra-se a configuração que o problema deverá ter após resolvido (figura de análise), destacam-se os elementos dados e escolhe-se o ponto-chave; o instante no qual, através do botão 2 da análise, convida-se o aprendiz a identificar o lugar geométrico deste ponto - segmento de reta já visível no traçado do triângulo ABC (figura 3);
- o estímulo para que, com recurso ao botão 3 da análise, acompanhado pelos de animação[4] 1 e 2, seja redescoberto o segundo lugar geométrico daquele ponto-chave; a enunciação dos LLGG[5] descortinada pelo botão “CONFIRA” e, logo a seguir, a sugestão dada ao estudante para comandar, com o ferramental do programa, os procedimentos operacionais necessários à resolução do problema (figura 4).

[4] O ponto P desliza, respectivamente adotando as posições P’ e P”, ao transformar-se por reflexão de eixos AB e AC.
[5] Sigla para lugares geométricos.

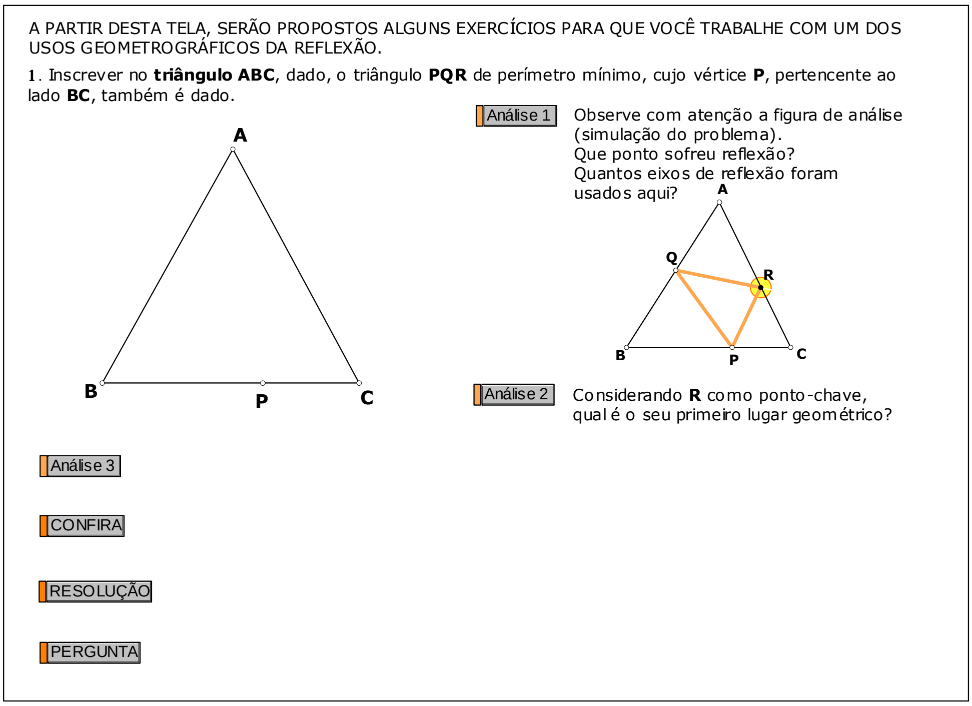


Figura 3: Exercício 1 (enunciado, dados gráficos e figura de análise).

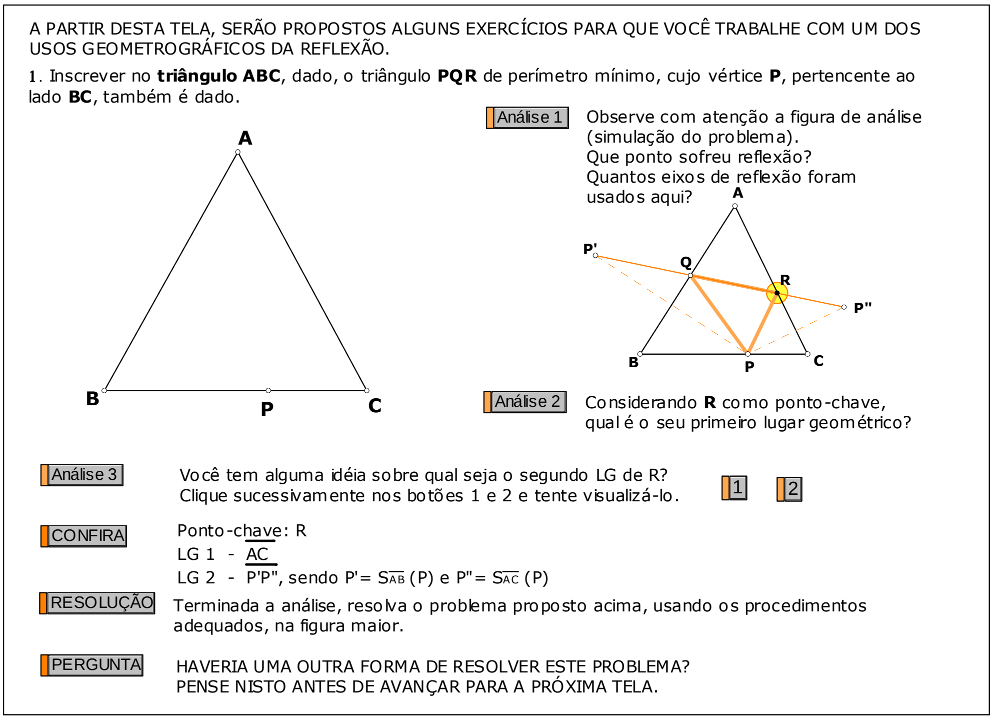


Figura 4: Exercício 1 (demais itens da análise).

Observe-se, também na figura 4, a pergunta instigadora que se encontra na parte inferior da tela, ali colocada com o propósito de levar o aluno a conjecturar sobre outra possível via de busca de solução para o exercício.

O desenvolvimento da capacidade para visualizar caminhos mínimos e traçá-los exige um tratamento em diferentes etapas de dificuldade, ou seja, deve-se trabalhar do nível mais simples aos de maior complexidade, à medida que são impostas condições adicionais. Para realizar essa tarefa, o conhecido problema da "mesa de bilhar" é particularmente adequado, pois além de admitir a inclusão de novos obstáculos, aumentando assim o desafio, é dotado de notável poder de atração, garantindo o interesse dos alunos (figura 5).

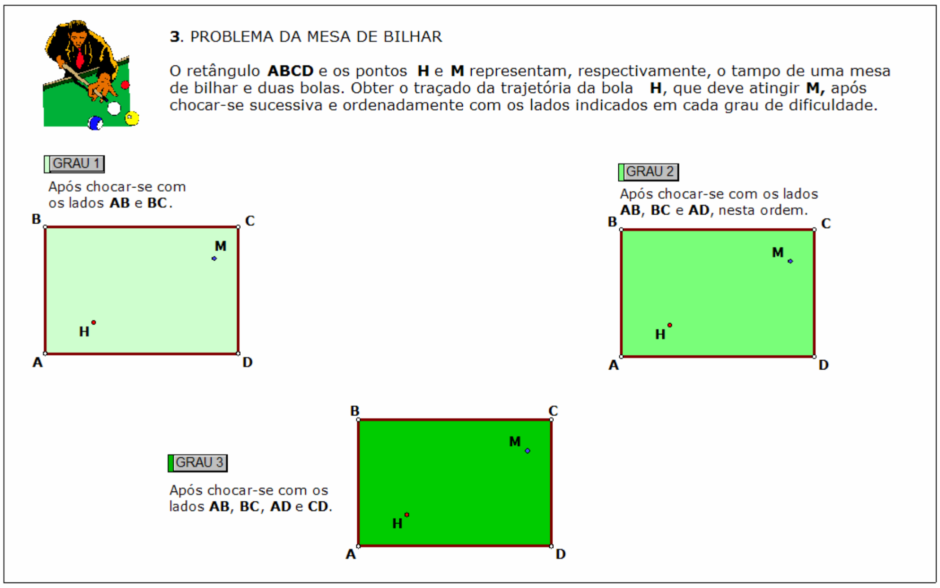


Figura 5: Proposta do problema da mesa de bilhar.

Depois de compreender os princípios em que se fundamentam as operações ali exigidas, o estudante pode ainda ser incentivado a criar uma nova ferramenta (macroconstrução), de modo a obter automaticamente o caminho mínimo desejado.

A SEID aqui mostrada, assim como as outras do conjunto, constitui um instrumental que objetiva auxiliar o aprendiz a evitar o uso de 'receitas prontas' e a reconstruir apropriadas linhas de raciocínio na procura de solução para questões geométricas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir de uma reflexão sobre a dificuldade normalmente encontrada no que diz respeito à visualização espacial e à resolução de problemas geométricos, apresentou-se, no presente artigo, uma lista de potenciais requeridos nestas atividades e mostrou-se uma seqüência didática, organizada de maneira a explorar caminhos mínimos e desenvolver aquelas competências.

Acreditamos que este tipo de material possa atualizar os professores em relação aos conteúdos geometrográficos e aos ambientes computacionais, tanto quanto inspirá-los a produzir outras séries em que diferentes temas de estudo sejam trabalhados.

"Reinventar o professor" é, portanto, torná-lo aberto à inovação e à constante mudança, estimulando-o não somente a ser um eterno estudante e pesquisador, mas, também, a assumir um papel de vanguarda no processo educacional.

Referências

Braviano, Gilson. Aprendizagem da Simetria através de uma seqüência didática. In: GRAPHICA 2007: VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENGENHARIA GRÁFICA NAS ARTES E NO DESENHO e 18º SIMPÓSIO NACIONAL DE GEOMETRIA DESCRITIVA E DESENHO TÉCNICO, 2007, *Anais*... Curitiba, UFPR, ABEG, 2007.

Buarque, Cristovam. Formação e Invenção do Professor no Século 21. Disponível em http://www.reescrevendoaeducacao.com.br/2006/pages.php?recid=30. Acesso em nov. de 2007.

Fuys, David; Geddes, Doroty; Tischler, Rosamond. *The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents.* JRME Monograph # 3. USA, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

Jackiw, Nicholas. *The Geometer's Sketchpad.* Berkeley: Key Curriculum Press, 1995.

Le Boterf, Guy. *"Construire les competences individuelles et collectives."* Paris: Editions d'organisation, 2001.

Perrenoud, Philippe. As competências para ensinar no século XXI: a formação dos professores e o desafio da avaliação. Porto Alegre: Artmed Editora, 2002.

Polya, G. *How to solve it: a new aspect of mathematical method.* Princeton: Princeton University Press, 2004.

Rodrigues, M. H. W. L.. Conteúdos e Competências: um diálogo necessário. 5º ENCONTRO REGIONAL DE EXPRESSÃO GRÁFICA – EREG 2006, 2006. *Caderno de resumos*... Salvador, UFBA, ABEG, UNIME, CEFET-BA, UNIVASF. pp. 138-146... http://www.ereg2006.ufba.br.

Rodrigues, M. H. W. L.. Séries de Estudo Interativo-Dinâmicas: construção, aplicação e avaliação. In: GRAPHICA 2007: VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENGENHARIA GRÁFICA NAS ARTES E NO DESENHO e 18º SIMPÓSIO NACIONAL DE GEOMETRIA DESCRITIVA E DESENHO TÉCNICO, 2007, *Anais*... Curitiba, UFPR, ABEG, 2007.

Rodrigues, M. H. W. L.; Kopke, R. C. M.; Mata, S. F. Competências para o Desempenho de Atividades na Área Gráfica. In: GRAPHICA 2003: V CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENGENHARIA GRÁFICA NAS ARTES E NO DESENHO e 16º SIMPÓSIO NACIONAL DE GEOMETRIA DESCRITIVA E DESENHO TÉCNICO, 2003, *Anais*... Santa Cruz do Sul: UNISC, ABEG. 2003.

EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA E FORMAÇÃO PEDAGÓGICO-TECNOLÓGICA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO NA PERSPECTIVA DA TEORIA DIALÉTICA

Adriana Richit
Doutoranda em Educação Matemática - Unesp / Rio Claro, SP
Membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM)
Bolsista CNPq

RESUMO

Este texto tem por objetivo discutir o processo de formação pedagógico-tecnológica em matemática, o qual está sendo investigado em uma pesquisa de doutorado do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp / Rio Claro, SP. A referida proposta de formação foi implementada por meio de um Curso de Extensão, na modalidade semi-presencial, com professores de Matemática da rede pública de ensino do estado do RS, tendo como suporte a teoria dialética do conhecimento. Esse Curso enfocou as possibilidades de uso pedagógico das tecnologias da informação e comunicação (TIC) na abordagem de conteúdos matemáticos, levando em conta os princípios da teoria supracitada. Foram promovidas leituras e reflexões com os professores acerca de teorias que tratam do uso das TIC nas práticas de sala de aula e na formação de professores, em particular a EaD e promovidas experiências diversas envolvendo o uso de softwares matemáticos (gráficos, algébricos e de geometria dinâmica) na abordagem de conteúdo curriculares de Matemática da Educação Básica.
Palavras-chave: Tecnologias Informáticas, Educação a Distância, Teoria Dialética, Educação Matemática, Formação de Professores.

INTRODUÇÃO

O presente texto apresenta uma discussão acerca do processo de formação pedagógico-tecnológica em matemática realizado semipresencialmente com professores da rede pública de ensino do RS, tendo como suporte a teoria dialética do conhecimento, a qual está enraizada na teoria elaborada por Marx sobre o modo de produção da sociedade capitalista. Assim, o texto, na íntegra, está dividido em três partes. Na primeira parte faço alguns esclarecimentos sobre os encaminhamentos iniciais da pesquisa, apresentando o objetivo da mesma e a relevância para a área da Educação Matemática e para a linha de pesquisa *Novas Tecnologias e Educação Matemática*, a qual vem ganhando notoriedade nacional em função das possibilidades que emergem da incorporação das mídias informáticas nos processos educacionais. Na segunda parte faço uma abordagem teórica sobre a teoria dialética, destacando sua trajetória histórica e discutindo os pressupostos teóricos que constituem sua base, bem como evidencio algumas contradições que estão pressentes no processo de evolução do desenvolvimento profissional do professor. Por último, explicito os aspectos metodológicos e práticos da pesquisa e teço algumas considerações sobre o processo de formação implementado e investigado nessa pesquisa.

DETALHAMENTO DA PESQUISA

A pesquisa em questão emergiu da combinação de diversos fatores que se apresentaram ao longo da carreira acadêmica e profissional da autora desse texto. Entre eles, a problemática enfrentada pelos profissionais da educação pública do RS, que não recebem incentivo da equipe diretiva das escolas para participar de cursos de formação ou eventos na área de educação. Além disso, como venho me dedicando a pesquisa sobre formação de professores desde o mestrado, tenho identificado alguns aspectos que carecem de mais pesquisas, em particular sobre a formação continuada. Do mesmo modo, destaco que o RS vem criando políticas públicas favoráveis à formação tecnológica de professores, em particular aqueles que devem atuar nos Núcleos Tecnológicos de Educação (NTE), bem como tem investido na instalação de NTE e Laboratórios de Informáticas. Porém, pelo levantamento que realizei nas escolas do município, os docentes não estão preparados para fazer uso desses recursos na prática pedagógica.

Outro fator relevante à minha opção refere-se as potencialidade da EaD à formação continuada de professores. Tendo em vista que muitos estudos têm sido realizados focando o papel da EaD na formação docente, como Zulatto (2007) e Valente (2007), e que esta modalidade de educação tem se mostrado favorável aos objetivos e necessidades da formação continuada de professores, devido à flexibilidade de horários e superação de limites geográficos, avalio que a EaD é viável aos interesses dessa pesquisa, assim como novos estudos se fazem necessários para que sejam exploradas outras dimensões do processo de formação pedagógico-tecnológica de professores e da própria EaD. Ainda, considero que o ensino de Matemática na educação básica vem enfrentando problemas metodológicos e epistemológicos. Daí decorre a necessidade de se investigar formas de modificar essa realidade e isto implica rever os processos de formação docente.

Partindo das considerações acima, a pesquisa ora apresentada visa a *explicitar e analisar as dimensões/relações da formação pedagógico-tecnológica de professores de matemática, que podem emergir do entrelaçamento entre teoria dialética e EaD, olhando a realidade educacional de professores da rede pública de ensino do RS.*

O contexto social escolhido para a realização da referida pesquisa é a rede pública de ensino na região norte do RS, focando especificamente o município de Erechim. Para compor o coletivo da pesquisa, foram convidados 15 professores de Matemática da educação básica, os quais são regentes de sala de aula. Esses professores, pelo levantamento feito, necessitam de formação para uso pedagógico das TIC, assim como são fortemente cobrados para que se atualizem, porém não recebem apoio para tal. Este aspecto explicita uma das contradições que permeiam a realidade educacional no estado do RS.

O cenário escolhido para a realização dos encontros presenciais é o laboratório de informática de uma escola pública do referido município, a qual possui um laboratório bem equipado e com internet rápida. As sessões a distância foram realizadas usando o recurso bate papo da plataforma TelEduc, bem como outras ferramentas disponíveis.

O processo de formação analisado baseia em um Curso de Extensão na modalidade semi-presencial com duração de 80 h/a. A ementa do Curso inclui conteúdos matemáticos como funções, geometria plana, analítica e espacial, polinômios e matrizes, bem como conteúdos pedagógicos como teorias sobre produção de conhecimento baseada no uso de tecnologias, formação de professores e EaD. Ao longo do Curso foram usados diversos recursos materiais e tecnológicos (softwares gráficos, de geometria dinâmica e algébricos, além dos recursos do TelEduc).

TEORIA DIALÉTICA: ORIGENS E PRINCÍPIOS TEÓRICOS

Abordar a teoria dialética neste texto é necessário porque a proposta de formação investigada nessa pesquisa foi planejada a partir dos pressupostos dessa teoria e, porque o processo de formação implementado está sendo analisado dialeticamente. Esclareço que nessa pesquisa a dialética é assumida como teoria do conhecimento, cujas origens estão associadas à teoria marxista da sociedade. Porém, existem duas vertentes filosóficas a respeito desse assunto. Uma toma a dialética como método de análise e outra como teoria.

A dialética, concebida por Marx, preconiza que quaisquer mudanças históricas ocorridas na vida material produzem modificações no pensamento e no comportamento humano. Para Marx, o trabalho é a condição essencial para que o homem se torne homem, pois ele não o é, ele se torna. Esse autor diz ainda que a mediação entre o homem e o mundo se realiza pela atividade material.

Essas concepções, articuladas a outras como a idéia de movimento e mudança, constituem a teoria de Marx, que propõe que a dialética não é somente uma forma metódica de pensar, mas o próprio devir histórico da humanidade, ou o movimento do mundo em processo. A dialética considera as coisas em sua dinâmica, no seu movimento contínuo, na luta de seus contrários, assim como ela não é apenas um método para se chegar à verdade, é uma concepção de mundo, de sociedade e da relação homem-mundo, é uma forma de interpretar a realidade e é práxis humana. Visando a propiciar ao leitor uma compreensão maior do processo de evolução da dialética, apresento algumas concepções que antecederam Marx, as quais estão presentes na filosofia.

Na Grécia antiga a dialética era concebida como um modo de argumentação usado em disputas verbais, que consistia em revelar as contradições contidas no raciocínio ou nas argumentações do adversário (análise), negando a validade dessas argumentações ou proposições, superando-as por outras (síntese). Assim entendida, a dialética se referia a arte do diálogo, a arte de conversar. Heráclito afirmava que só existe o diálogo entre os diferentes, a diferença é constituidora da contrariedade e do conflito.

Os principais nomes associados à dialética nesse período são Lao Tse Tung (600 a.C.), considerado o precursor da dialética, pois fundou sua doutrina (taoísmo) baseada no princípio da contradição, que é um dos princípios básicos da dialética. Sócrates (479-399 a.C.), considerado o maior dialético grego, a concebia como a arte do diálogo e da discussão. Zenão de Eléa (340-263 a.C.), o qual preconizava que a realidade é um constante devir, em que prevalece a luta dos opostos, de modo que um se transforma no outro num processo repetitivo e dialético. Outro dialético notável foi Aristóteles (385-322 a.C.), o qual concebia a dialética como auxiliar da filosofia, pois para ele não era um método para se chegar a verdade, mas uma atividade crítica. Para ele, a dialética não leva ao conhecimento, mas a disputa e a opinião. Platão (420-348 a.C.) concebia dialética como um método de ascensão ao inteligível (relativo aos domínios da inteligência). Ou seja, como um método de dedução racional de idéias. Para ele a dialética era uma técnica que se aplicava mediante a colaboração de duas ou mais pessoas, procedendo por perguntas e respostas, de modo que o conhecimento deveria nascer do encontro, da reflexão coletiva e da disputa.

Na Idade Média a dialética atravessou um longo período de estagnação e, apenas Plotino (203-259) considerou a dialética como parte da filosofia e não como método. Porém ao longo da idade média a vertente predominante concebia a dialética como método da filosofia. Essa estagnação ocorreu porque nesse período prevaleceu o regime feudal, onde a sociedade era divida em classes bem definidas e estáveis, de modo que as pessoas nasciam, cresciam e morriam pertencendo à mesma classe e fazendo as mesmas coisas, desenvolvendo as mesmas atividades econômicas. A vida era muito parada, o comércio quase se extinguiu e praticamente não ocorriam mudanças nessas sociedades. Assim, a dialética era incompatível com a realidade.

Porém, com o renascimento a revolução comercial, após a idade média, a dialética emergiu dos subterrâneos que foi obrigada a permanecer durante séculos e muitos foram os dialéticos que contribuíram para revitalizá-la. Descartes (1596-1650) diz que para se chegar a verdade é preciso proceder por análises e sínteses. A análise permite atingir cada elemento do objeto ou fenômeno estudado e a síntese permite fazer a reconstituição do conjunto por meio da unificação dos elementos. Hegel (1770-1831) diz que a realidade é compreendida como em estado contínuo de movimento e mudança, constituindo-se em totalidade. Para ele a razão domina o mundo e tem por função a unificação, a conciliação e a manutenção da ordem do todo. Segundo ele, os homens não são sujeitos de sua história, mas sim suas idéias, ideologias, incluindo-se a própria religião. Feuerbach (1804-1872) foi outro defensor moderno da dialética. Ele combateu a dialética idealista de Hegel e concebeu a dialética materialista, a qual considera a matéria como a única realidade. Esse dialético nega a existência da alma, do pensamento e de Deus.

Porém, foi com Marx que a dialética avançou, pois este lhe atribuiu uma nova base. Em primeiro lugar a dialética marxista não separa teoria (conhecimento) e prática (ação), pois a teoria não deve ser vista como um dogma, mas servir como um guia para a ação. Marx supera a dialética idealista de Hegel (a qual limitava-se ao mundo do espírito, baseada apenas em leis do pensamento) por um realismo materialista (o qual explicava a evolução da matéria, da natureza e do próprio homem). Assim concebida, a dialética materialista torna-se a ciência das leis gerais do movimento, tanto do mundo exterior como do pensamento humano. Para ele, dialética é pensamento e realidade ao mesmo tempo. Do mesmo modo, assinala que é através da atividade social/material, notadamente do trabalho, que a consciência é formada.

Marx concebe o homem como um ser concreto, levando-se em conta que ele tem uma dimensão imanentemente natural, pois ele inicia e desenvolve sua trajetória na natureza e na relação social que estabelece com os outros e com o mundo, bem como postula que a contradição de um fenômeno ou de uma argumentação não está na lógica, mas no cerne da própria coisa, da matéria.

Marx também propõe uma nova concepção de filósofo de filosofia. Ele considera que filósofo não é aquele especialista que elabora novas e grandiosas teorias sobre a realidade, mas aquele que modifica sua realidade por meio de sua práxis, atribuindo sentido a essa realidade, e com isso dando sentido à história e fazendo história. E a filosofia não deve ocupar-se apenas em interpretar a realidade, mas sim, em interpretar e transformar a realidade.

PRESSUPOSTOS TEÓRICOS DA TEORIA DIALÉTICA

A teoria dialética firma-se sobre quatro pressupostos, os quais emergiram somente após uma árdua e profunda análise realizada por Marx sobre seu estudo já concluído acerca do modo de produção capitalista. São eles: totalidade, movimento, mudança qualitativa e contradição.

O princípio da *totalidade* propõe que a natureza, o fenômeno ou a realidade se apresenta como um todo coerente em que cada um dos seus elementos se relacionam entre si, condicionando-se reciprocamente, tal que o sentido das coisas não consiste em considerar as partes (a individualidade), mas a sua totalidade. Para exemplificar esse princípio, consideremos o processo de formação docente, o qual deve considerar todos os elementos que se fazem presentes na vida profissional, social, familiar, aspectos emocionais, econômicos, psicológicos e morais que interferem diretamente no processo de desenvolvimento do professor.

O princípio do *movimento* postula que tudo se transforma, pois a dialética considera todas as coisas no seu devir. O movimento é uma qualidade inerente a todas as coisas. Por exemplo: o processo educativo é um processo em mudança, pois as transformações ocorridas na vida material dos alunos interferem nas atividades desenvolvidas nesse espaço e no desenvolvimento dos alunos.

O princípio da *mudança qualitativa* preconiza que a transformação das coisas não se realiza num processo circular de eterna repetição. De acordo com essa idéia, o acúmulo de pequenas mudanças quantitativas, pode resultar em uma mudança qualitativa

O princípio da *contradição* define que na dialética a realidade ou as coisas só podem ser transformadas porque no seu interior coexistem e confrontam-se forças opostas, as quais tendem à unidade e à oposição.

Discutindo profundamente os pressupostos teóricos da teoria dialética Saviani (2004) diz que o processo de elaboração do conhecimento segundo essa teoria perpassa três momentos: síncrese, análise e síntese. Segundo essa concepção, o ponto de partida para exposição de determinado assunto inicia-se com a *síncrese*, que corresponde ao momento de afirmação, ou seja, o momento de explicitar a visão de conjunto do todo. Trata-se de uma totalidade precária ou caótica. Se pensarmos na proposta de formação docente, trata-se de explicitar e discutir as concepções que os professores têm sobre sua profissão, sobre as condições de trabalho, sobre o processo de construção do conhecimento, do conteúdo e sua importância e do próprio processo de formação.

A *análise* é o momento de mediação, de negação da visão inicial, de antítese. Negar não significa descartar o conhecimento que está no ponto de partida. No momento de análise ocorre o reencontro do conhecimento sincrético e do conhecimento científico. No caso da prática docente, no momento da análise o professor precisa explicitar os conceitos particulares relacionados ao assunto que será abordado, procurando não se limitar apenas à exposição de um conteúdo e buscando outras técnicas e recursos que favoreçam a aprendizagem dos alunos.

O ponto de chegada corresponde ao momento de síntese. É o momento em que se estabelece uma nova totalidade, concreta, caracterizada por novas relações e determinações. É, portanto, um momento de reelaboração da visão caótica do momento inicial. A síntese pressupõe a necessidade de se articular os conceitos entre si, contextualizar o assunto estudado na prática social dos alunos, ressaltando a relevância social do mesmo.

TEORIA DIALÉTICA E FORMAÇÃO PEDAGÓGICO-TECNOLÓGICA EM MATEMÁTICA: ARTICULANDO NECESSIDADES E POSSIBILIDADES

Partindo das leituras feitas e levando em conta o processo de formação docente analisado nessa pesquisa, são sugeridas algumas articulações entre a teoria dialética e a formação continuada de professores. Primeiramente, considero que é necessário identificar as contradições que permeiam o desenvolvimento profissional do professor, procurando compreendê-las e superá-las, pois acredito que por meio da superação dessas contradições pode-se compreender melhor a natureza da formação docente. ainda, acho que analisar e compreender o embate entre as contradições que permeiam a mudança da prática do professor é essencial para se entender como a mudança ocorre, sua natureza e dimensões.

Uma das contradições identificadas se refere às incoerências contidas no próprio processo de formação, revelando um movimento de resistência e outro de mudança agindo concomitantemente. É preciso levar em conta todos os fatores que o incitam a investir na sua capacitação, na sua formação continuada e quais obstáculos ele enfrenta (baixos salários, falta de apoio e incentivo, indisciplina em sala de aula, falta de interesse dos alunos, problemas familiares), que o impedem de evoluir no seu desenvolvimento profissional.

Por outro lado, sabe-se que a atitude de incorporar as tecnologias informáticas à prática de sala de aula implica sair da “zona de conforto” (PENTEADO, 2001), onde as situações educacionais são previsíveis e onde o professor tem as coisas sob controle e entrar na zona de risco, onde podem surgir situações inesperadas ou problemas para os quais o professor não tem solução imediata. Busco entender como o professor encara a possibilidade de sair da zona de conforto e entrar na zona de risco. Como ele pode superar as contradições que estão implícitas nessa transição? Que forças o fazem permanecer na zona de conforto ou a encarar a zona de risco?

Além disso, é necessário compreender como o professor pode recriar o conhecimento matemático que ele possui, a Matemática estática que tão seguramente aborda em sala de aula, passando a abordá-la de uma forma diferente, com outras propriedades para enfatizar em função da dinâmica que o uso das tecnologias propicia a abordagem de conteúdos matemáticos diversos.

Igualmente considero que existem contradições entre o que é determinado pelas políticas e as ações que são colocadas em prática. É preciso fazer um levantamento das determinações das políticas públicas e como elas são interpretadas pelos promovedores da formação docente, resultando em ações. Que contradições caracterizam esses dois momentos? Como o professor é visto nesse processo e como gerencia as contradições entre política e ação?

A superação de uma contradição no processo de formação docente se dá na medida em que o professor produz idéias e as transforma em modos de ação e de comunicação. Essa superação não existe fora das relações homem-mundo, ou seja o professor poderá superar as contradições da sua prática e do seu processo de formação por meio da atividade social e das relações que estabelece nessa realidade. Ainda, sublinho que para mim o professor somente poderá evoluir no seu processo de formação se assumir-se carente de formação e engajar-se verdadeiramente nesse processo.

Nessa pesquisa a formação continuada de professores de Matemática, baseada na EaD, é considerada um processo dialético e materialista histórico. Materialista, porque se baseia no mundo material, de modo que é preciso compreender como o professor se organiza e se relaciona no espaço de trabalho, produzindo e reproduzindo sua prática e como ele vem se organizando através da história, à medida que busca se adaptar as mudanças que ocorrem na sociedade. E dialético porque comporta contradições que interferem na produção e reprodução da sua prática cotidiana.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Avaliando a evolução do curso, notei que houve uma resistência muito grande em usar os recursos do TelEduc. Resistência esta resultado da falta e domínio das ferramentas disponíveis nessa plataforma. Percebi que as discussões matemáticas fluíram com mais naturalidade e riqueza de argumentação nos encontros presenciais, enquanto que as discussões teóricas foram mais proveitosas nos encontros mediados pelo TelEduc. O bate papo permitiu que todos expressassem suas opiniões sem atrapalhar o debate, ou seja, mostrou-se mais democrático. E até os mais tímidos nos encontros presenciais, sentiram-se mais a vontade para expressar suas opiniões.

Por se tratar de professores pertencentes a uma realidade educacional problemática, a questão do tempo interferiu muito no processo de formação de cada um, porém de formas diferentes. Houve aqueles que realmente engajaram-se na sua formação e aqueles que se limitaram a participar minimamente das atividades, alegando falta de tempo. Ainda, notei por parte de muitos deles uma dependência muito forte do meu suporte (ora presencial, ora a distância).

Partindo da experiência promovida nessa pesquisa, pondero que na medida em que o professor tem contato com novas experiências formativas e distintas teorias, sua atividade docente pode ser qualitativamente modificada e essas modificações podem suscitar novas reflexões sobre a prática, podendo se converter em novas mudanças e assim sucessivamente, se constituindo num processo dialético, que parte da realidade e retorna à realidade. Porém, cabe frisar que não é somente pelo contato com experiências diferenciadas que mudanças vão ocorrer na prática do professor, ele precisa antes de tudo querer mudar. É nesse sentido que a teoria dialética se mostra adequada, pois uma mudança pode acontecer se o docente querer e receber suporte e apoio para tal.

REFERÊNCIAS

SAVIANI, D. **Educação**: do senso comum à consciência filosófica. 15.ed. Campinas: Autores Associados, 2004.

VALENTE, J.A.; ALMEIDA, M.E.B. (Org.). **Formação de Educadores a Distância e a Integração de Mídias**. São Paulo: Avercamp, 2007.

ZULATTO, R.B.A. **A Natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação de continuada de professores**. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

CONCEPÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Marger da Conceição Ventura Viana
Universidade Federal de Ouro Preto - marger@iceb.ufop.br

Célia Maria da Silva - Universidade Federal de Ouro Preto - celiamariaufop@yahoo.com.br

Resumo: *O objetivo desta pesquisa foi conhecer concepções de professores sobre a utilização da História da Matemática (HM) no processo de ensino-aprendizagem (PEA) da Matemática. Para isso, foi feita uma revisão da literatura sobre o uso da HM como instrumento auxiliar ao PEA e elaborado um questionário que foi aplicado a professores de Matemática, do Ensino Fundamental e do Médio de escolas das redes municipal e estadual de ensino de Ouro Preto, MG, para coletar dados. As perguntas basearam-se em argumentos favoráveis à utilização da HM, encontrados na literatura. Os dados foram organizados e analisados qualitativa e quantitativamente, segundo a natureza da pergunta. Concluiu-se que a maioria dos professores busca elementos da HM para utilizar no PEA, principalmente como motivação. Por exemplo: mostrar como surgiram certos conteúdos, muitas vezes como curiosidade.*

Palavras-chave: História da Matemática, processo de ensino-aprendizagem, concepções de professores de Matemática sobre a utilização da História da Matemática no processo de ensino-aprendizagem.

1. Introdução

Na escola é freqüente ouvir alunos questionarem a utilidade de estudar certos conteúdos. Acredita-se, porém, que a abordagem histórica pode levá-los à compreensão da necessidade e do surgimento de tais conteúdos. Nobre (1996) sugere partir do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos: “Ao invés de se ensinar a praticidade dos conteúdos escolares, investe-se na fundamentação deles. Em vez de se ensinar o para quê, se ensina o porquê das coisas” (p. 31).

Esta pesquisa partiu do pressuposto de que a Educação Básica forma o alicerce do conhecimento que se adquire na vida acadêmica. Além disso, considera que a Educação Matemática procura encontrar instrumentos metodológicos.

Nesse sentido, Baroni e Nobre (1999) destacam que o movimento da Educação Matemática incorpora, de tempos em tempos, componentes que visam a fornecer instrumentos que podem ser utilizados pelo professor de Matemática. Entre estes a Resolução de Problemas, a Modelagem Matemática, a Etnomatemática e a Informática. Mas esta pesquisa inclui entre eles a HM, que nos últimos tempos, vem ganhando destaque.

Por outro lado, Baroni e Nobre (1999) afirmam que a HM (assim como a Análise, a Álgebra, a Topologia, etc.) constitui uma área do conhecimento matemático, um campo de investigação científica. Portanto consideramos uma ingenuidade considerá-la apenas um instrumento metodológico.

A proposta que se fez foi investigar acerca do uso da HM como fornecedora de elementos necessários para a construção de caminhos lógicos com vistas à construção de conceitos que se deseja ensinar, proporcionando aos alunos uma visão do significado e da totalidade da matéria.

Mas a HM pode contribuir, de fato, para o êxito do processo de ensino-aprendizagem da Matemática?

Considerando os aspectos citados, esta pesquisa se justifica.

2. A pesquisa

A pesquisa teve início com uma revisão da literatura sobre a HM como instrumento auxiliar ao PEA da Matemática e, a partir daí, foram determinados o problema, objeto e objetivo de estudo.

Embora o uso da HM seja indicado pelos PCNs e apontado por vários pesquisadores como auxiliar ao PEA, será que isso tem chegado aos professores? O que eles pensam sobre o assunto? Têm seguido a recomendação? Como fazem? Quais resultados têm obtido?

Neste contexto, pretendeu-se dar resposta a tais questões. Foi, então, elaborado o problema: Quais são as concepções de professores de Matemática do Ensino Fundamental (séries finais) e do Ensino Médio sobre o uso da HM no PEA da Matemática?

Portanto o objetivo foi conhecer concepções de professores sobre a utilização da HM no PEA da Matemática e o objeto de estudo foram concepções de professores de Matemática sobre o uso da HM no processo de ensino-aprendizagem.

Como instrumento para coletar os dados necessários à investigação, foi elaborado um questionário (SILVA, 1999, p.55), com perguntas baseadas nos argumentos favoráveis à utilização da HM analisados por Miguel (1997). E a opção pelo questionário deveu-se à possibilidade de rapidez no retorno das respostas e à maior facilidade para contatar professores, visto que eles dispõem de pouco tempo para atendimento a pessoas externas à escola.

Foi definida a população-alvo da pesquisa: professores de Matemática do Ensino

Fundamental (séries finais) e do Médio de escolas da rede municipal e estadual da cidade de Ouro Preto - MG, para que o estudo contemplasse a Educação Básica.

Realizada a validação do instrumento, foram contatadas escolas e professores por meio de uma carta-convite. Os questionários foram entregues diretamente aos professores, assim que a pesquisa foi autorizada pela direção das escolas.

3. A HM no processo de ensino-aprendizagem: algumas leituras

Segundo Milies (2003), a HM pode ser um instrumento eficaz para o PEA da Matemática, ao permitir entender por que o conceito foi introduzido nesta ciência e por que isso ocorreu em determinado momento histórico. Permite também estabelecer conexões da História com a Filosofia, com a Geografia e várias outras manifestações da cultura. O conhecimento da HM possibilita perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram de desafios que os matemáticos enfrentaram e que foram desenvolvidas com grande esforço, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após o processo de formalização. Isso é confirmado por Nobre (1996), ao constatar que muitos conhecimentos matemáticos são transmitidos como se fossem obtidos de forma natural e apresentados como desprovidos de erros e dificuldades. Nesse sentido, o autor, destaca a necessidade de o professor observar que a forma acabada na qual hoje se encontra o conceito matemático esconde modificações sofridas ao longo de sua história e que isso deve ser levado em conta na elaboração de atividades para aprendizagem, já que a forma como um assunto é tratado influencia a sua compreensão. A essência da proposta deve estar na "busca das contradições da ciência para que surjam outras contradições" (NOBRE, 1996, p.31). É uma proposta que proporciona ao aluno e ao professor, a oportunidade de levantar questões sobre temas que, muitas vezes, aparecem como inquestionáveis e intocáveis.

Uma forma de participação da HM no ensino de Matemática, manifestada na proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1998), diz respeito ao uso de problemas históricos, por considerar que os conceitos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas:

> A própria HM mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática (PCNs, 1998, p. 40).

Para os PCNs, conceitos abordados em conexão com sua História constituem-se veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A HM é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural, o que se pode confirmar:

> [...] verificar o alto nível de abstração matemática de algumas culturas antigas, o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas. Desse modo, será possível entender as razões que levam alguns povos a respeitar e conviver com práticas antigas de calcular, como o uso do ábaco, ao lado dos computadores de última geração (PCNs, 1998, p.43).

Para D'Ambrosio (1999), em Matemática é impossível discutir práticas educativas que se fundam na cultura, em estilos de aprendizagem e nas tradições sem recorrer à História, que compreende o registro desses fundamentos: "Desvincular a Matemática das outras atividades humanas é um dos maiores erros que se pratica particularmente na Educação Matemática" (p. 97). Propõe ele que se recupere a presença de idéias matemáticas em todas as ações humanas. Para isso, em afinidade com o pensamento de Paulo Freire, argumenta ser necessário recorrer à História no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Para o próprio D'Ambrosio, a HM também ajuda a definir o que se entende por Matemática. Isso porque é necessário entender e destacar as origens da Matemática nas culturas da Antigüidade Mediterrânea e seu desenvolvimento na Idade Média, criando estilo próprio e incorporando-se ao sistema escolar das diversas nações colonizadas a partir do século XVI. Ensinar a Matemática recorrendo à sua história é tratá-la como uma manifestação cultural. Dessa forma, a HM e sua interpretação podem ser vistas como imprescindíveis à Educação Matemática.

Struik (1985), assim como D'Ambrosio, considera que a HM ajuda a entender a herança cultural, aumenta o interesse dos alunos pela matéria, possibilita a compreensão das tendências em Educação Matemática podendo servir tanto ao ensino quanto à pesquisa.

Mendes (2003) considera que a HM deva ser utilizada na elaboração e realização de atividades voltadas à construção das noções básicas de conceitos matemáticos, fazendo com que os alunos percebam o caráter investigatório presente na geração, organização e disseminação desses conceitos ao longo do seu desenvolvimento histórico. Segundo esse autor, o aluno deve participar da construção do conhecimento escolar de forma ativa e crítica, sendo uma das exigências a relação com a necessidade histórica e a social que sustentaram o surgimento e o desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Para Miguel (1997), deve ser feita uma reconstituição não apenas dos resultados matemáticos, mas principalmente dos contextos epistemológico, psicológico, sociopolítico, e cultural. Sendo assim, os alunos observariam onde e como esses resultados foram produzidos, contribuindo para a explicitação das relações que a Matemática consegue estabelecer com a sociedade em geral, com as diversas atividades teóricas específicas e com as práticas produtivas. Mendes (2003) sugere dois caminhos a ser seguidos.

No primeiro é necessário que a atividade seja revestida também pela pesquisa. “Isso significa ser necessário ao professor levantar na HM, problemas que necessitem respostas, visando assim torná-los como ponto de partida das atividades pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula” (p.229). Os resultados obtidos podem contribuir para a organização sistemática do conhecimento matemático objetivado pelo conteúdo programático. Mendes entende que a investigação possa contribuir para que os alunos percebam os “porquês” matemáticos, também recomendados por Nobre (1996). Contudo, para Mendes, este caminho é mais viável em instituições de ensino superior, principalmente nos cursos de Licenciatura em Matemática.

O segundo caminho “diz respeito à utilização das informações históricas presentes nos livros de HM ou similares e, a partir de tais informações, elaborar atividades de ensino visando com isso fomentar a construção de noções matemáticas pelo aluno” (MENDES, 2001, p.230). Assim, de acordo com Mendes, as atividades históricas podem conduzir os alunos a um processo dinâmico da construção do conhecimento matemático.

A utilização da HM no PEA é tratada por Miguel (1997), ao apresentar e analisar argumentos reforçadores e questionadores de há potencialidades pedagógicas. Entre os que reforçam estão estes: a HM é fonte de motivação, de objetivos, de métodos, de seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos; é instrumento de desmistificação e desalienação do ensino, de formalização de conceitos, de promoção do pensamento independente e crítico, como unificador dos vários campos da matemática, de promotor de atitudes e valores, de conscientização epistemológica, promotor de aprendizagem significativa e de resgate da identidade cultural.

Miguel (1997) apresenta pontos que justificam individualmente cada um desses argumentos. Explica, ao mesmo tempo, que tomados isoladamente, apresentam-se frágeis para a defesa da inclusão da HM no ensino. Portanto, paralelamente aos doze argumentos reforçadores, Miguel apresenta quatro argumentos questionadores muito fortes: ausência de literatura adequada, a natureza imprópria da literatura disponível, o fator complicador que pode representar o elemento histórico e a ausência na criança do sentido do progresso histórico.

Miguel (1997) faz menção a duas posições extremadas, que tentam convencer de que no uso da HM “tudo pode ou nada pode”. Há possibilidade, entretanto, de uma posição intermediária em que a HM só pode surtir efeitos desejados se for compatível com os fins pedagógicos e articulados com as demais variáveis que intervêm no processo de planejamento didático.

Também segundo Miguel (1997), a Matemática colocada nos currículos oficiais e nos manuais didáticos apresenta os conteúdos como reprodução de resultados sem contextualização. E para que o uso da HM se torne pedagogicamente útil, é necessário que ela seja escrita sob o ponto de vista do educador matemático. Enfim, a utilização dos recursos da HM tem de ser feita de forma "pedagogicamente orientada, isto é, uma história viva, humana, esclarecedora e dinâmica [...] poderia constituir-se em ponto de referência para a prática pedagógica problematizadora em Matemática" (p. 103).

Portanto, ao abordar a HM em sala de aula, o professor deve revelar a Matemática como uma criação humana, levando os alunos a encará-la como fruto da necessidade do homem. Sendo assim, o conteúdo vinculado à História pode despertar interesse nos alunos.

4. Análise e Resultados

Dos 41 questionários distribuídos, 58,5% retornaram. Os 41,5% que não responderam, podem indicar desinteresse em colaborar, em utilizar a HM ou até mesmo falha do próprio instrumento. De fato, a questão 4 recebeu críticas de alguns professores, alegando ser extensa, difícil e trabalhosa, o que pode indicar falta de leituras sobre essa tendência do ensino da Matemática. Contudo se acredita que tal questão cumpriu o papel de estimular respostas.

Segundo os pesquisados, a utilização da HM no PEA da Matemática faz com que as aulas transcorram de maneira mais tranqüila, permitindo mais compreensão do conteúdo que está sendo estudado. Acreditam na importância do tema, que pode trazer contribuições para o PEA da Matemática. A maioria deles, 75%, diz buscar elementos da HM para ser utilizados em sala de aula, até mesmo os 33,3% que afirmaram não ter cursado a disciplina específica HM em seu curso de formação inicial.

Ainda segundo os professores, com o conhecimento histórico pode-se explicar para os alunos o trabalho que foi despendido trabalho no estudo de muitos tópicos. E também que tudo foi construído a partir da realidade das pessoas. Com isso, a partir do momento que se conhece a HM, as aulas ficam mais interessantes e com aprendizado de qualidade. Por isso busca motivação para o PEA da Matemática na própria História, que pode ser utilizada para ilustração de fatos, análise de erros dos alunos, elaboração de atividades, etc. Dos pesquisados, 25% afirmaram utilizar a HM na introdução de conteúdos, 29,2% para mostrar como surgiram, 12,5% como curiosidade e 33,3% de outras maneiras.

Também 50% das respostas indicaram que a HM constitui-se num instrumento unificador dos vários campos da Matemática. No entanto as ações tomadas como exemplo, como a do Professor P_{11} ["Digo para eles que sem Matemática não há vida (do amanhecer ao anoitecer) só vivermos em função de quantidades"] parece não poder estabelecer a pretendida unificação. Além desse tipo de utilização ser difícil, talvez a pergunta não estivesse clara o suficiente, para o respondente.

Percebeu-se também que a HM vem sendo empregada por 75% dos professores pesquisados como motivação para iniciar um assunto, geralmente utilizando textos trazidos nos livros didáticos e/ou paradidáticos e na internet. Afirmaram contar histórias de fatos ocorridos ou como ocorreu a construção desta ciência. Mas Baroni e Nobre (1999) consideram que a HM não deve ser usada apenas como elemento motivador ao desenvolvimento do conteúdo: "sua amplitude extrapola o campo da motivação e engloba elementos cujas naturezas estão voltadas a uma interligação entre o conteúdo e sua atividade educacional" (p. 132).

Os respondentes também afirmaram que a abordagem histórica pode justificar o surgimento da Matemática e que com isso os alunos se mostram mais interessados em aprender. Para eles, a HM representa um material de apoio, base imprescindível para lecionar. E também dizem que ajuda muito na conscientização dos alunos de que a Matemática não é uma coisa pronta.

O maior ganho dessa forma de utilizar a HM na Educação Matemática é a possibilidade de discutir-se crenças, emoções e afetos envolvidos na prática em que tal criação ocorreu. Isso pode favorecer uma elaboração mental dos alunos similar à que historicamente ocorreu na abstração dos conceitos matemáticos, gerando aprendizagem rica em significados. Dos pesquisados a metade afirmou acreditar que a HM se constitui num instrumento promotor de aprendizagem significativa e compreensiva da Matemática.

Outro aspecto citado por 54,2% dos professores é a HM como fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos a ser incorporados nas aulas.

Um pouco citado pelos professores foi a HM como objetivo para o ensino (29,2%), assim como extrair dela métodos pedagogicamente adequados (33,3%).

Observou-se que, em geral, os professores utilizam os argumentos analisados por Miguel (1997), com algumas justificativas apresentados por esse autor. Para Silva (2001), esses argumentos são mesmo muito fortes para o ensino da Matemática.

Ainda há professores que, como ocorreu na pesquisa de Garcia (2005), apesar de achar importante o uso da HM em sala de aula, dizem não saber como utilizá-la, pois têm pouco conhecimento do assunto, mas gostariam de fazê-lo. Nesse contexto, valem as sugestões de Silva (2001): utilizar informações contidas em periódicos, jornais, enciclopédias, dicionários biográficos e alguns endereços na Internet sobre HM.

Recomenda-se que os cursos de formação inicial dêem mais atenção ao tema e que na formação continuada se realizem oficinas oferecendo opções de utilização da HM no PEA da Matemática.

5. Referências

BARONI, R. L. S. e NOBRE, S. (1999). A Pesquisa em História da Matemática e Suas Relações com a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A.(org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP, pp. 129-136.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Introdução*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

D'AMBROSIO, U. (1999). A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.(org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP, pp. 97-115.

________, (1996). História da Matemática e Educação. In: *Cadernos CEDES 40. História e Educação Matemática*. 1ª ed. Campinas, SP: Papirus, pp.7-17.

GARCIA, Fabiano T. (2005). *A participação da História da Matemática no Ensino da Matemática: A visão dos professores das séries finais do Ensino Fundamental de Itabirito*. Monografia (Especialização) Curso de Especialização em Educação Matemática, Ufop, Ouro Preto.

MENDES, I. A. (2001). Construtivismo e História da Matemática: uma aliança possível. In: IV *Seminário Nacional de História da Matemática.* Natal, RN. Anais... Rio Claro, SP: Editora da SBHMat, 228-234.

________, (2003). História da matemática: um enfoque transdisciplinar. In: XI CIAEM. FURB. Blumenau: FURB, CD-CARD.

MIGUEL, A. (1997). As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *Zetetiké,* 8, 73-103.

MILIES, C. Polcino.(2007). *História da Matemática***.** Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/>. Acesso em: 26 fev. 2007.

NOBRE, S. (1996). Alguns "porquês" na História da Matemática e suas contribuições para a Educação Matemática. In: *Cadernos CEDES 40. História e Educação Matemática*. Campinas, SP: Papirus, pp.29-35.

SILVA, Circe, M. S. (2001). A História da Matemática e os cursos de formação de professores. In: Helena Noronha Cury (org.). *Formação de professores de Matemática: uma visão multifacetada.* Porto Alegre: EDIPUCRS, pp. 129-165.

SILVA, Célia M. (2007). *Concepções de Professores de Matemática sobre a utilização da História da Matemática no processo de ensino-aprendizagem*. Monografia (Graduação) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática.

STRUIK, D. J. (1985). Por Que Estudar História da Matemática? Trad. De Célia Regina A. Machado e Ubiratan D'Ambrosio. In: *História da técnica e da tecnologia: textos básicos.* Ruy Gama (org.). São Paulo: T. A. Queiroz e EDUSP, pp. 191-215.

Abstract: *The objective of this research was to gain knowledge of teachers' conceptions about the use of the history of mathematics (HM) in the process of teaching and learning (PTL) of mathematics. A review of the literature regarding the use of the HM as a support instrument to the PTL was realized. Based on the literature, a questionnaire was prepared and applied to elementary and high school teachers in city and state public schools in Ouro Preto, Minas Gerais. The questions were based on arguments in favor of the use of the HM. Qualitative and quantitative procedures were used to organize and analyze the data according to the nature of the questions. It was concluded that a majority of the teachers seek elements from the HM to use in the TLP, principally as a means of motivation; for example, to show, as curiosities, how certain contents came into being.*

Keywords: History of mathematics, process of teaching and learning, mathematics teachers' conceptions about the use of the history of mathematics in the teaching e learning process.

ATIVIDADES COM FRACTAIS EM UMA PROPOSTA DE INOVAÇÃO CURRICULAR PARA CURSOS DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES

José Carlos Leivas, UFPR e Helena Noronha Cury, PUCRS

Neste trabalho, apresenta-se parte de um projeto de tese de doutorado, em que se sugere e analisa uma proposta de trabalhar com fractais com auxílio do software Geometricks. Faz-se menção a algumas características do "sentido do símbolo", tais como a conscientização de que se pode manejar relações algébricas que expressam informações dadas em mais de um tipo de representação. Apontam-se algumas referências à obra de Mandelbrot e, em seguida, detalha-se a proposta de atividade de construção do fractal em X de quadrados. Pelos resultados obtidos em aplicações da atividade em cursos de formação de professores, conclui-se que a possibilidade de relacionar processos recursivos, fractais e recursos tecnológicos em cursos de Licenciatura em Matemática possibilita aos docentes o conhecimento de novos conteúdos, métodos e recursos para o ensino.

INTRODUÇÃO

Com vistas a identificar a Geometria que é ensinada em cursos de Licenciatura e Bacharelado no Estado do Rio Grande do Sul, bem como implementar experimentos de ensino em Geometria com alunos de formação inicial em Matemática e, a partir dessas experiências, indicar elementos para uma nova proposta de ensino dessa área, foi elaborado um projeto de pesquisa a ser desenvolvido em um curso de Doutorado em Educação. Neste trabalho, apresentamos apenas um recorte do projeto de tese, em que algumas experiências de ensino estão sendo planejadas, com base em resultados provenientes da prática do primeiro autor como professor de Geometria, em cursos de formação inicial e continuada de professores durante mais de 20 anos.

A associação entre Álgebra e Geometria, em atividades para o Ensino Fundamental e Médio de Matemática, tem sido apresentada em livros didáticos, artigos e dissertações. Hellmeister e Galvão (1998) relatam atividades desenvolvidas com professores da rede pública paulista, em um programa de formação continuada, com o objetivo de modelar, por meio de peças coloridas de cartolina, expressões algébricas de 1º e 2º graus, utilizadas, posteriormente, para resolução de equações e fatoração de trinômios de segundo grau. Groenwald et al. (1999) mencionam um projeto desenvolvido em escolas públicas de uma cidade da Grande Porto Alegre, trabalhando com materiais manipulativos para a introdução de operações com polinômios. Mottin (2004) faz uso de recursos didático-pedagógicos para a resolução de problemas que envolvem produtos notáveis e Teorema de Pitágoras, em uma 8ª série de uma escola privada do interior do Rio Grande do Sul. Essas propostas levam em conta, especialmente, a possibilidade de utilizar mais de uma representação para conceitos matemáticos, aproveitando operações e propriedades já conhecidas pelos alunos para introduzir novos entes matemáticos. No entanto, nesses casos exemplificados e em outros que seguem a mesma orientação, os conteúdos de Álgebra são aqueles trabalhados no Ensino Fundamental e os geométricos são os tradicionalmente estudados em Geometria Plana. Acreditamos que há muitas outras possibilidades de relacionar Álgebra e Geometria, inclusive pensando em termos de atividades para Ensino Médio ou superior. É com essa idéia que trabalhamos neste texto, sugerindo uma proposta para uso de um software de Geometria Dinâmica (*Geometricks*), habilidades associadas ao ensino de Álgebra e uma construção que foge dos padrões euclidianos, relacionada aos fractais.

HABILIDADES PARA APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Entre as habilidades necessárias para a aprendizagem de Álgebra, tem sido citado o sentido do símbolo e Arcavi (1995, p. 159) reporta-se a uma idéia não totalmente definida sobre esse constructo, apresentada por Fey, em 1990: "uma habilidade informal de lidar efetivamente com expressões simbólicas e operações algébricas". Fey considera, entre as componentes básicas do sentido do símbolo, a habilidade de examinar uma expressão algébrica para fazer estimativas aproximadas dos padrões que podem emergir ou das representações gráficas (apud Pierce e Stacey, 2004). Ainda que não esteja apresentando uma definição para o sentido do símbolo, que segundo ele é uma noção complexa e multifacetada, Arcavi (1994) apresenta características que devem estar incluídas nesse "sentido". Entre elas, podemos citar: a) um sentimento de quando se deve abandonar os símbolos e usar outras abordagens, ao resolver um problema; b) a conscientização de que se pode manejar relações algébricas que expressam informações dadas em mais de um tipo de representação.

Pelas idéias acima apresentadas, vemos que entre as habilidades a serem desenvolvidas no ensino de Álgebra estão a visualização de padrões e sua representação simbólica. No entanto, se partirmos de uma determinada representação, como um fractal, obtido por um processo iterativo gerado por um software, a possibilidade de entender o processo em si será maior. Brandão (2002) propôs a construção de fractais por meio de processos de recorrência, para a exploração de conceitos algébricos, como progressões geométricas e somatórios. Leivas (2007), em um mini-curso sobre as conexões entre dimensão, logaritmo e fractais, propôs a construção de objetos fractais cujas dimensões, dadas por números decimais, pudessem ser expressas por logaritmos, proporcionando ao professor que atua na escola básica algum significado para o estudo da função logarítmica. Neste trabalho, pretendemos sugerir mais uma relação entre Álgebra e Geometria, propondo o desenvolvimento de habilidades algébricas a partir da obtenção e visualização do resultado de um processo algébrico, o fractal, objeto de uma nova Geometria.

A GEOMETRIA FRACTAL

Benoit Mandelbrot, matemático de origem polonesa radicado em Paris, iniciou o estudo da Geometria Fractal a partir da busca de padrões irregulares e fragmentados, encontrados na natureza e em conjuntos de dados aparentemente imprevisíveis. Mandelbrot (1977) questiona o fato de que a Geometria é freqüentemente descrita como fria e árida e argumenta que essa descrição está ligada à sua inabilidade de descrever formas da natureza. O autor acrescenta que “muitos padrões da natureza são tão irregulares e fragmentados que, comparados com *Euclides* [...], a natureza exibe não somente um grau mais alto, mas um nível completamente diferente de complexidade.” (p. 1).

O ente matemático descrito por Mandelbrot é designado pela palavra “fractal”, que tem origem no latim “fractus”, que significa “irregular” ou “quebrado”. Partindo de conceitos da Topologia, Mandelbrot (1977) definiu fractal como “um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica.” (p. 15). Segundo Barbosa (2002), essa definição recebeu críticas e foi sendo reformulada por vários matemáticos, entre eles Falconer, que considerou que um conjunto F é um conjunto fractal se, por exemplo, “pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo.” (Barbosa, 2002, p. 19).

Um processo é dito *recursivo* ou *iterativo* quando, ao final de sua execução (algoritmo que permite sua criação), é executado novamente, criando uma estrutura similar. Vemos, então, a partir da idéia de recursão, a ligação da Álgebra com a Geometria Fractal, ligação esta que não é usual em livros didáticos da educação básica, mas que poderia ser explorada, evitando o ensino tradicional, que emprega apenas geometria euclidiana axiomatizada e resolução de exercícios aplicativos de fórmulas.

Segundo Barbosa (2002) a utilização de fractais em sala de aula no Ensino Fundamental e Médio é importante pelas seguintes razões: a) estabelece conexões com várias ciências; b) mostra deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza; c) utiliza a difusão e acesso às tecnologias computacionais nos vários níveis de escolaridade; d) explora a beleza dos fractais para o desenvolvimento do senso estético; e) desenvolve a curiosidade, face ao caráter inesperado de cada iteração.

A PROPOSTA DE UMA ATIVIDADE COM O SOFTWARE GEOMETRICKS

O software *Geometricks* foi criado por V. Sadolin e traduzido para o português por Miriam Penteado e Marcelo Borba. É um programa que “traz um recurso para a introdução ao estudo da Geometria Fractal que permite definir elementos sobre os quais são aplicadas determinadas transformações que, por meio de processos repetitivos, geram os fractais.” (Penteado, Amaral e Borba, 2000, p. 5).

Vamos, nesta proposta, construir o fractal em X de quadrados. Barbosa (2002) aponta este fractal como uma variação do Triângulo de Sierpinski, por exigir uma exploração diferenciada do que o *Geometicks* apresenta num primeiro momento, a saber, a exploração de ternas ordenadas para as construções, sendo necessário, nesse caso, a elaboração de estratégias que vão além do imediatismo oferecido pelo recurso computacional. Dessa forma, após a realização de uma atividade com Triângulos de Sierpinski, elaboramos uma seqüência de passos para a construção do fractal em X de quadrados, solicitados aos alunos e apresentados a seguir:

a) clique no símbolo que indica os eixos coordenados, no canto superior direito;

b) construa um quadrado ABCD, cuja medida do lado seja de 24 unidades, aproveitando os pontos que aparecem na tela;

c) divida cada lado do quadrado em três partes iguais, marcando os pontos de modo que fiquem definidos nove quadrados menores, todos com lado igual a 1/3 do lado do quadrado maior;

d) para definir o fractal, deve-se pensar nos quadrados por meio de triângulos obtidos pelas diagonais dos quadrados, pois o único recurso no *Geometricks* é a utilização de ternas. Assim, comece por pensar em construir a metade do quadrado, isto é, um triângulo dado por dois lados do quadrado e por uma diagonal, ou seja, utilize as ternas exigidas pelo software;

e) num dos triângulos obtidos por esta diagonal imaginária, defina os nove triângulos menores congruentes, dos quais quatro serão retirados. Da mesma forma que foi feito no Triângulo de Sierpinski, aqui você deve definir as seis ternas que permanecerão a partir do triângulo maior. Abrindo a janela “Fractal” clique em “Definir fractal” e surge uma janela na qual se digita o número seis, correspondente às seis ternas;

f) defina as ternas clicando cuidadosamente nos pontos que correspondem a cada uma delas, na mesma ordem. Abrem-se, na janela “Fractais”, as demais possibilidades. Clique em “Níveis”, abrindo-se uma segunda janela para digitar o nível desejado. Escolha 1 para proceder à iteração 1, obtendo uma representação como a da figura 1, que representa a metade do fractal que vai ser construído;

g) o fractal continua sendo construído até que você pare o processo e isso só ocorre quando clicar na barra superior, do lado direito, no ícone “stop”;

h) retorne e clique em “Fractais-Níveis” e siga buscando os demais níveis, aproveitando para indicar com cores diferentes cada um deles. No nível 2, aparece a figura 2;

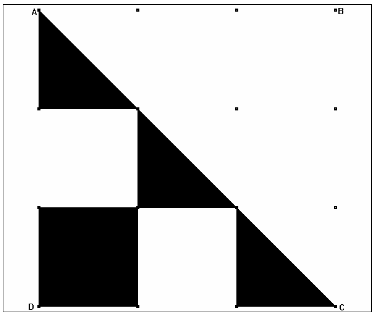


Figura 1

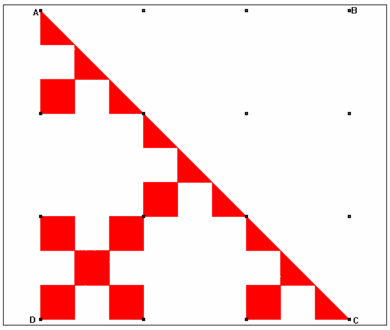


Figura 2

i) ao redefinir o fractal para a outra metade do quadrado, e unindo as duas partes, como as obtidas no nível 1, obtém-se a figura 3, que representa o fractal completo nesse nível;

j) continue as iterações e os processos de união. Na décima iteração, por exemplo, obtém-se o fractal em X de quadrados, representado na figura 4.

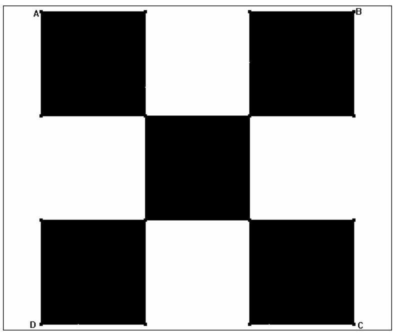


Figura 3

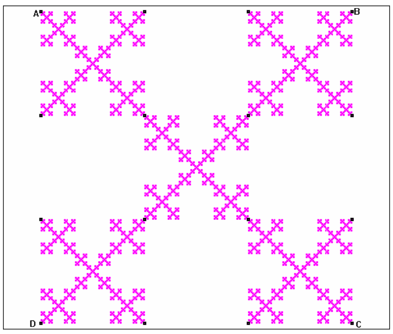


Figura 4

A proposta aqui apresentada fez parte de um projeto de formação continuada de professores de Matemática, realizado em 2004, na Fundação Universidade Federal do Rio Grande, tendo como participantes 30 professores da região de Rio Grande, Pelotas, Santa Vitória do Palmar e São José do Norte. (Pacheco e Leivas, 2004). Detectou-se que os esses docentes apresentavam grande dificuldade com as tecnologias computacionais, além de um completo desconhecimento sobre o assunto “fractais”. Na tentativa de auxiliá-los a superar as dificuldades com softwares e o desconhecimento de um tema atual no ensino de Matemática, foram planejadas atividades em que os professores, inicialmente, fizeram uso da Internet, para buscar informações sobre fractais. Em seguida, optou-se pela escolha do software *Geometricks*, por ser de fácil aquisição e baixo custo. A simplicidade de sua utilização e o uso de ternas de pontos foi um fator decisivo para seu emprego, visto que a geometria básica no triângulo pode ser reconstruída rapidamente e a passagem à construção dos processos iterativos que constituem determinados fractais pode ser facilmente obtida.

De imediato, a exploração do fractal Triângulo de Sierpinski proporcionou ganhos significativos para os professores que atuavam no Ensino Médio, pela possibilidade de explorar conceitos e propriedades de progressões geométricas. O fractal em X de quadrados, cuja construção foi proposta a seguir, possibilitou que, além do uso do processo iterativo, próprio dos fractais, os docentes tivessem que fazer uso de processos interpretativos e criativos, visto que o software só permite a construção por ternas e há necessidade de formar quadrados na constituição desse fractal.

Percebeu-se que a maioria dos professores participantes do projeto, além de perderem em parte o medo do uso do computador, desenvolveram habilidades no trato com a ferramenta computacional. Além disso, o conhecimento de um tópico da Matemática não estudado, em geral, durante a formação inicial, proporcionou a atualização e a possibilidade de usos didáticos para o ensino de Matemática no Ensino Médio. Na seqüência do curso, percebeu-se uma melhoria no tratamento da geometria espacial, quando foram realizadas atividades com quebra-cabeças utilizando sólidos geométricos e na resolução de problemas de áreas, volumes, Princípio de Cavaliere e outros.

A seqüência de atividades realizadas nesse curso foi re-aplicada em outras ocasiões e locais, com resultados semelhantes, o que nos permite supor que é adequada sua inclusão na sugestão de uma nova proposta para o ensino de Geometria nos cursos de formação de professores de Matemática, que é um dos objetivos do projeto de tese inicialmente mencionado.

CONCLUSÕES

Mencionamos anteriormente, entre as características do sentido do símbolo, a possibilidade de manejar relações algébricas que expressam informações dadas em mais de um tipo de representação. Essa habilidade, que deve fazer parte da aprendizagem de Matemática em qualquer nível de ensino, destaca-se ainda mais se pensarmos na formação do professor da Educação Básica. Assim, a possibilidade de trabalhar com procedimentos recursivos – que estão na origem de tantas definições matemáticas – e gerar fractais com auxílio de um software de Geometria Dinâmica, proporcionando a esses docentes a aquisição de conhecimentos a que eles não tiveram acesso em sua formação inicial, mostrou que muito ainda se pode fazer em formação continuada, para atualização do professor de Matemática. Até mesmo os que se graduaram recentemente ainda não dominam muitos dos conhecimentos matemáticos desenvolvidos nos últimos tempos e o exemplo de fractais é um deles, bem como o de geometrias não euclidianas. Esses tópicos ainda não constam dos currículos da Licenciatura em Matemática e até mesmo do Bacharelado, como está sendo avaliado na pesquisa de doutorado mencionada inicialmente. Assim sendo, numa proposta de inovação curricular que pode vir a melhorar a formação inicial do professor de Matemática, deve-se atentar para o uso das tecnologias como elemento dinâmico para trabalhar com temas diversos que, na maioria das vezes, ainda são tratados de forma obsoleta, tanto em termos de métodos quanto de conteúdos.

Referências

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14 (3), 24-35.

Arcavi, A. (1995). Teaching and learning algebra: past, present and future. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 145-162.

Barbosa, R. M. (2002). *Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte, Autêntica.

Brandão, L. de O. (2002). Algoritmos fractais com programas de GD. *Revista do Professor de Matemática*, 49, 27-34.

Groenwald, C. L. O. et al. (1999). Álgebra com geometria: um enfoque prático na 7ª série do ensino fundamental. *Educação Matemática em Revista-RS*, 1 (1), 37-46.

Hellmeister, A. C., & Galvão, M. E. E. L. (1998). Resolvendo fisicamente. *Revista do Professor de Matemática*, 38, p. 15-22.

Leivas, J. C. P. (2007). Dimensão, logaritmo, fractal: estabelecendo conexões. *Anais do 9º Encontro Nacional de Educação Matemática*. Belo Horizonte: SBEM.

Mandelbrot, B. B. (1977). *The fractal geometry of nature*. New York, Freeman.

Mottin, E. (2004). *A utilização de material didático-pedagógico em ateliês de matemática, para o estudo do teorema de Pitágoras*. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Pacheco, A. T., & Leivas, J. C. P. (2004). *Formação continuada de professores de matemática: a geometria e suas dimensões para o ensino médio*. Rio Grande, FURG.

Penteado, M., Amaral, R. B., & Borba, M. C. (2000). Manual do Geometricks. São Paulo, Editora da UNESP.

Pierce, R., & Stacey, K. (2004). Monitoring progress in a CAS active context: symbol sense, algebraic insight and algebraic expectation. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 11 (1), 3-12.

O USO DE PROGRAMAS COMPUTACIONAIS COMO RECURSO AUXILIAR PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Angélica Menegassi da Silveira – UNIFRA

Eleni Bisognin - UNIFRA

***Resumo**: O presente artigo tem como objetivo apresentar alguns resultados parciais de uma dissertação de mestrado profissional sobre o ensino de Geometria Espacial, no Ensino Médio, referentes às contribuições do uso de recursos computacionais como os programas Cabri 3D e Macromedia FLASH 8 para compreensão dos conceitos e exploração das propriedades dos sólidos geométricos. Foram selecionadas algumas atividades que foram aplicadas em sala de aula e pode-se concluir da análise dos resultados obtidos, que o uso destes recursos auxiliou ao aluno tornar-se mais autônomo e que estas ferramentas auxiliaram na melhoria do ensino e da aprendizagem da Geometria.*

INTRODUÇÃO

Pesquisas em Educação Matemática têm mostrado que os recursos tecnológicos vêm proporcionando mudanças no Ensino de Matemática e, em particular, no Ensino de Geometria.

A utilização do computador e dos softwares educacionais, como recursos pedagógicos auxiliam os professores a tornar as aulas mais atraentes e resgatando o interesse do aluno pelo estudo da Matemática. No Ensino de Geometria o uso de softwares educacionais oferece muitas potencialidades, pois podem criar um ambiente rico de imagens, sons e animações, fornecendo dessa maneira, um estudo mais dinâmico e permitindo que o aluno visualize, interaja com o computador, construa e experimente. Diante do computador os alunos procuram as soluções para os seus problemas e dessa maneira constroem seus próprios conhecimentos.

O uso desses recursos tecnológicos vem proporcionando mudanças não só na área educacional, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, mas em todos os setores da sociedade. Quando usados adequadamente, esses recursos facilitam a construção de conhecimentos geométricos de maneira significativa. A interface dinâmica, a interatividade que esses programas propiciam e os recursos de manipulação e movimento das figuras geométricas que se apresentam na tela do computador, contribuem no desenvolvimento de habilidades em perceber diferentes representações de uma mesma figura, levando desta maneira a descoberta das propriedades das figuras geométricas estudadas. Nos ambientes de geometria dinâmica, com a possibilidade de movimentar e analisar o objeto estudado sob diferentes ângulos, os alunos têm a possibilidade de explorar as propriedades do objeto levando-o a experimentar, testar hipóteses, desenvolver estratégias, argumentar, deduzir.

De acordo com (King e Schattshneider, 1997), alguns dos principais benefícios e aplicações de um sistema computacional de Geometria Dinâmica são:

(i) A construção, manipulação e a transformação de objetos espaciais que permitem aos usuários explorar a geometria, de forma que novas relações e propriedades sejam descobertas.

(ii) O desenvolvimento do conhecimento do espaço: planificação de sólidos geométricos, bem como o cálculo de áreas e volumes em espaços virtuais.

De acordo com os (PCN's,1998), a formação do aluno deve ter como objetivo central a aquisição dos conhecimentos básicos e o desenvolvimento de capacidades tais como: de pesquisar, buscar informações, selecioná-las e analisá-las ; a capacidade de formular hipóteses, verificá-las e testá-las. Neste sentido, o uso de softwares computacionais auxilia o professor de Matemática a transformar sua aula numa aula investigativa facilitando a criação de situações–problema que servem de motivação e de desafio aos alunos.

Neste trabalho são apresentados alguns resultados de uma experiência realizada, a partir da aplicação de uma Seqüência de Ensino, elaborada seguindo algumas etapas da metodologia da Engenharia Didática e utilizando-se recursos tecnológicos no ensino de Geometria Espacial, com alunos do Ensino Médio, de uma escola pública de Santa Maria, RS. Optou-se em utilizar o *software* geométrico Cabri 3D, o qual é uma ferramenta que auxilia no ensino da Geometria e é utilizado tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior. O Cabri 3D é um ambiente de geometria dinâmica em três dimensões que possibilita a construção e manipulação de sólidos geométricos o qual juntamente com o Macromedia Flash 8 auxilia na exploração dos mesmos.

A ATIVIDADE EM SALA DE AULA

As atividades descritas neste trabalho fazem parte de uma Seqüência Didática a qual foi elaborada seguindo algumas etapas da Engenharia Didática.

Segundo (ARTIGUE, 1995), a Engenharia Didática se caracteriza por ser: "como um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de Seqüências de Ensino".

Neste artigo são apresentadas duas atividades que foram desenvolvidas em sala de aula, com alunos do Ensino Médio, sobre o cálculo do volume do prisma e da pirâmide utilizando o Princípio de Cavalieri e com o auxílio do programa Cabri 3D e Macromedia Flash 8, as quais são um recorte da Seqüência Didática que fazem parte da Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, da autora. Para a elaboração desta Seqüência Didática foi feito, primeiramente, um levantamento sobre as concepções dos alunos e as dificuldades e obstáculos referentes ao processo ensino-aprendizagem da geometria espacial. Para obtenção dessas informações foi aplicado um teste diagnóstico composto de exercícios de Geometria Espacial com o propósito de averiguar os conhecimentos dos alunos sobre a compreensão dos conceitos e propriedades dos sólidos geométricos. Utilizou-se, também o modelo de Van Hiele como suporte teórico para analisar o desenvolvimento do pensamento em Geometria (Van Hiele, 1986; Kaleff et all, 1994; Nasser, 1997).

Atividade 1- Determinação do volume de um prisma.

O propósito dessa atividade foi determinar o volume de um prisma utilizando-se o Princípio de Cavalieri. Este princípio diz que: dois sólidos $\mathbf{S_1}$ **e** $\mathbf{S_2}$, de mesma altura **h** e com bases de áreas iguais, contidas num mesmo plano $\boldsymbol{\alpha}$, têm mesmo volume se, qualquer plano $\boldsymbol{\alpha}$ paralelo a $\boldsymbol{\beta}$, determinar nos sólidos $\mathbf{S_1}$ **e** $\mathbf{S_2}$, seções transversais com áreas iguais.

Utilizando-se o Princípio de Cavalieri, comparou-se o volume de um prisma triangular com um paralelepípedo cujas bases possuem a mesma medida, conforme mostrado na Figura 1 abaixo.

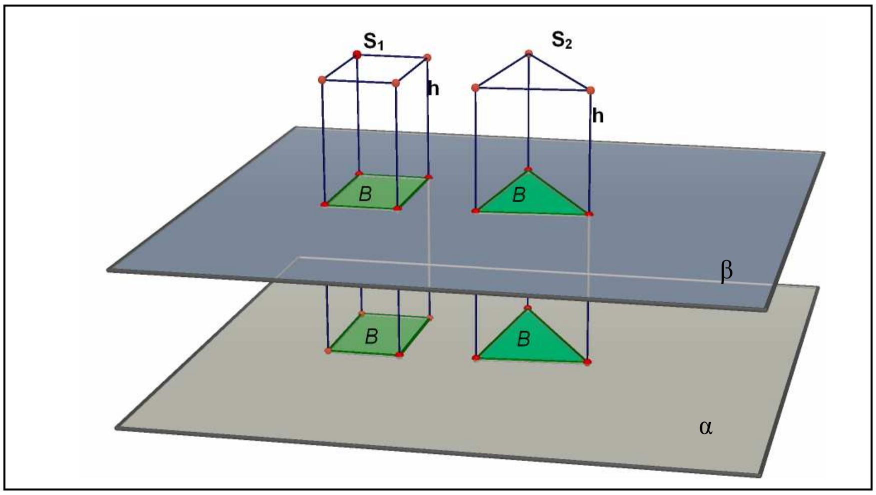


Figura 1 – Comparação do volume do paralelepípedo e do prisma triangular.

Como as seções paralelas determinadas pelos planos possuem mesma área e os dois sólidos têm a mesma altura, pelo Princípio de Cavalieri conclui-se que eles possuem o mesmo volume. Comparações semelhantes feitas com outros prismas, cuja área da base possui a mesma medida da área da base do paralelepípedo, pode-se concluir, neste caso, que,

$$V_{prisma} = V_{paralelepípedo}$$

Portanto, o volume do prisma é o produto da medida da área da base pela medida da altura, isto é,

$$V_{prisma} = A_{base} \text{ x } \text{altura}$$

A determinação do volume de um prisma pentagonal ou hexagonal foi feita utilizando-se o cálculo do volume do prisma triangular. O recurso computacional utilizado como Cabri 3D permitiu uma melhor visualização, como mostrado nas Figuras 2 e 3 abaixo, e o Flash 8 permitiu mostrar por meio do movimento das partes a composição ou decomposição do prisma pentagonal e do prisma hexagonal em 5 e 6 primas triangulares respectivamente.

A Figura 2 e 3 mostram a decomposição do prisma pentagonal e hexagonal em prismas triangulares e, a partir do volume do prisma triangular, os alunos calcularam o volume do prisma pentagonal e do prisma hexagonal.

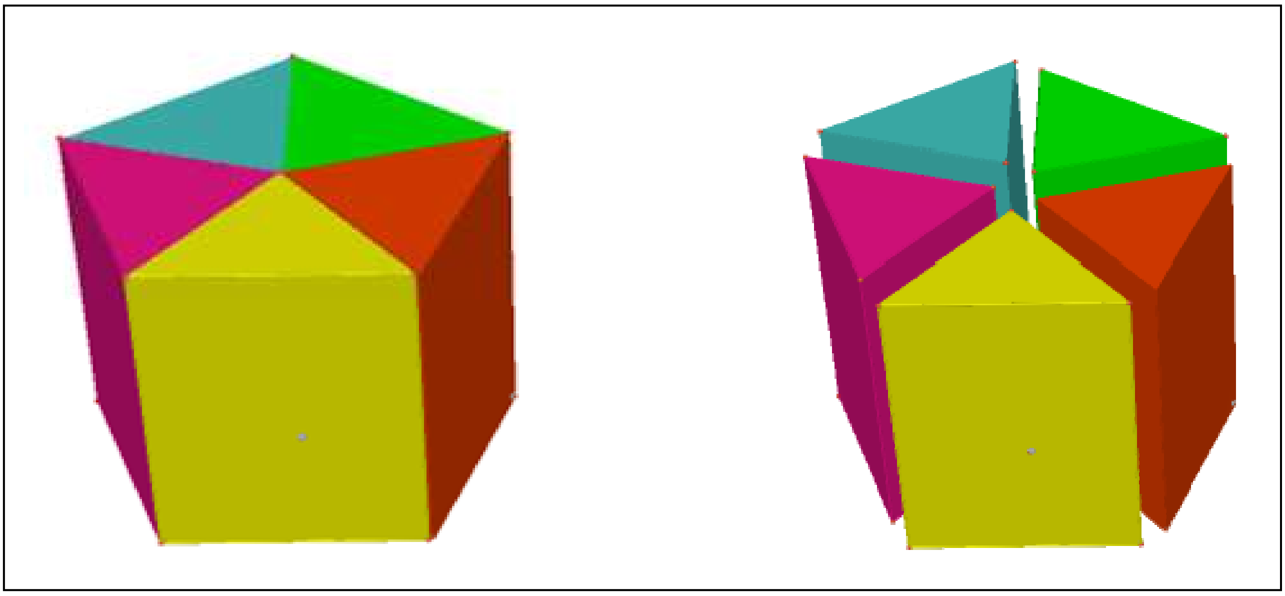


Figura 2 – Prisma pentagonal

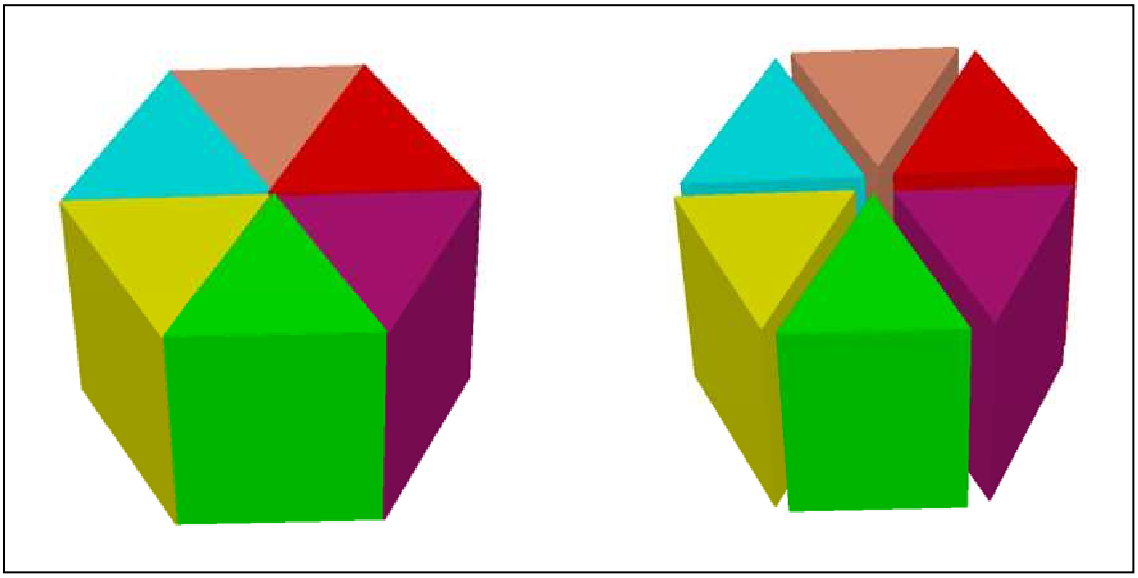


Figura 3 – Prisma hexagonal

Uma contribuição significativa do *software* Cabri 3D e do Flash 8 para apropriação dos conceitos geométricos foi a possibilidade de movimentação das figuras, no caso os prismas de bases formadas por diferentes formas geométricas, oportunizando seu tratamento de forma diferenciada, favorecendo o reconhecimento das propriedades particulares do sólido. Nas atividades utilizando o *software* Cabri 3D, os alunos puderam manipular as figuras e interagir com os colegas para definir e se apropriar de conceitos e propriedades dos prismas. No início de cada atividade a professora deu as explicações e orientações necessárias para o desenvolvimento da atividade e deixou os grupos interagirem, intervindo somente no momento de necessidade. As observações sobre as interações e apropriações dos conceitos foram anotadas para posterior análise. Ao final de cada atividade, foram reunidas as construções e definições dos grupos para analisar os conceitos e as propriedades deduzidas referentes à atividade proposta.

Atividade 2- Determinação do volume da pirâmide triangular.

O propósito desta atividade foi calcular o volume da pirâmide de base triangular a partir do volume do prisma triangular

Considerou-se primeiramente o prisma triangular conforme a Figura 4, a seguir.

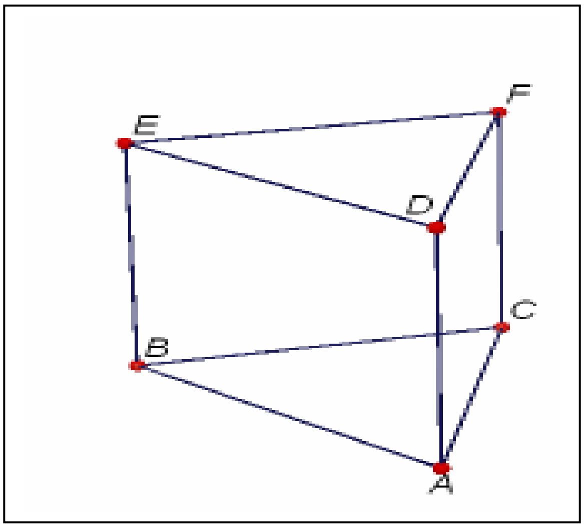


Figura 4 – Prisma triangular

A partir do prisma triangular e com auxílio de recursos do programa computacional este prisma foi decomposto em 3 pirâmides triangulares como mostrado na Figura 5 abaixo.

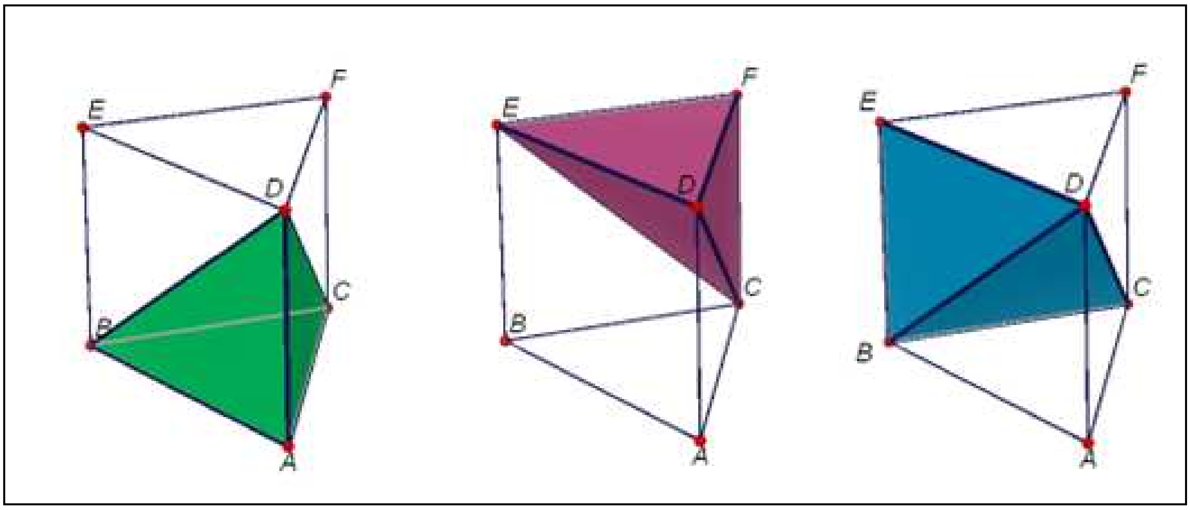


Figura 5 – Decomposição do prisma em três pirâmides triangulares.

A visualização da decomposição do prisma triangular em 3 pirâmides triangulares permitiu a concluir que, se as bases triangulares do prisma e das pirâmides possuem mesma área então,

Volume pirâmide = 1/3 Volume do prisma

Observou-se que resultados como esse relacionado à determinação do volume dos prismas e pirâmides, cuja dedução foi facilitada pelo uso do software Cabri 3D, trouxeram contribuições importantes quanto à construção de conceitos e verificação das propriedades, compreensão do cálculo do volume, embora a utilização dessas ferramentas computacionais exigisse dos alunos novas habilidades quanto ao manuseio dessas ferramentas e novas posturas diante da aprendizagem no sentido da autonomia e independência intelectual.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso propósito nesse trabalho foi apresentar algumas atividades de Geometria Espacial para o Ensino Médio, destacando a importância do uso de programas computacionais como Cabri 3D e Flash 8 como uma alternativa para ensinar e aprender o conteúdo de sólidos geométricos.

Criar diferentes estratégias de ensino com o auxílio da tecnologia, numa proposta pedagógica que tenha como centro o aluno, foi também uma de nossas preocupações. Podemos concluir que o uso de recursos computacionais auxiliou os alunos a serem mais autônomos, pois possibilitou construir e visualizar os sólidos geométricos oportunizando a descoberta das propriedades e a exploração de suas relações.

Podemos concluir, também, que as representações dinâmicas propiciadas pelos *softwares* Cabri 3D e Flash 8 foram importantes na construção dos conceitos e nas deduções das propriedades dos prismas e das pirâmides bem como no cálculo do volume desses sólidos. Essas observações e conclusões propiciaram uma reflexão sobre o uso dos *softwares* de geometria dinâmica em atividades de ensino e suas potencialidades em propostas pedagógicas com esses recursos e de que forma esses recursos tecnológicos contribuem para a apropriação do significado dos conceitos geométricos.

Referências

Artigue, M; Douady,R; Moreno, L.(1995) *Ingeniería Didáctica em Educación Matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: 1. ed.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais:* ensino médio. Brasília. MEC. 1999; BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+- ensino médio, orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais*. Brasília. 2002.Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/ensino/pcn.shtml>. Acesso em: 10 set. 2007.

King, J. e Shattschneider,D; (1997). *Geometry Turned On - Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*, Washington: Mathematical Association of America.

Kaleff, A.M; Henriques, A; Reid, M; Figueiredo,L.G; (1994) Desenvolvimento do pensamento geométrico: modelo de Van Hiele. *Bolema*, Rio Claro, v.10, p.21-30.

Nasser,L; (1997).*Geometria segundo a teoria de Van Hiele*. Rio de Janeiro: Projeto Fundão.

Van Hiele, P.,(1986). *Structure and Insight*: *a theory of mathematics education*. New York: Academics Press.

UMA DISCUSSÃO SOBRE O PAPEL DO COMPUTADOR NA REPRESENTAÇÃO E ENTENDIMENTO DE PROPRIEDADES MATEMÁTICAS DE OBJETOS TRIDIMENSIONAIS

Thiago Maciel de Oliveira

Colégio Militar do Rio de Janeiro - thiagomoliveira@oi.com.br,

Rafael Garcia Barbastefano

MPECM – DEPRO-CEFET/RJ – rgb@cefet-rj.br

Desenhos desempenham um importante papel na compreensão de conceitos, na formulação de conjecturas e na solução de problemas. Entretanto, ambigüidades ocorrem uma vez que um mesmo desenho pode gerar diferentes interpretações para diferentes observadores. Nesse artigo apresentamos um estudo de caso conduzido para analisar aspectos inerentes à exploração de mundos virtuais que promovem novas interpretações para imagens que representam objetos geométricos tridimensionais. As cenas em realidade virtual foram feitas através de Virtual Reality Modeling Language (VRML). Ambigüidades em representações convencionais ou em cenas em realidade virtual são analisadas à luz de três referenciais teóricos principais: a teoria da representação, a teoria da Gestalt e os estudos sobre o desenvolvimento do pensamento espacial.

1. INTRODUÇÃO

Frente a um problema, é comum o surgimento de questões do tipo: Como traduzimos, na forma de um diagrama, as idéias associadas aos objetos que fazem parte do problema? O que vemos? Como modificamos o que vemos a fim de obtermos uma situação mais favorável à solução do problema? Em se tratando do ensino de geometria espacial, algumas representações levam a interpretações diferentes entre alunos e professores.

Neste trabalho, apresentamos um estudo de caso sobre o papel de ferramentas de realidade virtual na interpretação da representação de figuras geométricas ambíguas. As cenas em realidade virtual foram feitas através de Virtual Reality Modeling Language (VRML). Ambigüidades em representações convencionais ou em cenas em realidade virtual são analisadas à luz de três referênciais teóricos principais: a teoria da representação, a teoria da Gestalt e os estudos sobre o desenvolvimento do pensamento espacial.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. Na próxima sessão, apresentamos resumidamente os referenciais teóricos adotados. Em seguida, falamos da ferramenta de realidade virtual utilizada. Nas sessões 4 e 5 apresentamos o estudo de caso e resultados obtidos.

2. REPRESENTAÇÃO, GESTALT E O PENSAMENTO ESPACIAL

Usamos três referenciais teóricos associados às atitudes que levam um indivíduo à análise e posterior solução de um problema: a teoria da representação, a teoria da Gestalt e os estudos sobre a formação do pensamento espacial. YAKIMANSKAYA (1991:50), ao comentar o processo de solução de problemas, em particular aqueles que lidam com soluções gráficas, diz que tal processo é composto de uma combinação de: 1) imagens iniciais que surgem em um contexto visual especial através de uma seleção de métodos para transformá-las (i.e., modelagem gráfica); e 2) imagens na forma de diagramas gráficos de movimentos que reproduzem a lógica subjacente à construção mental da representação feita pelo aluno.

Existem modificações na figura que não são físicas, mas produzidas pelo cérebro. Agrupamos elementos por similaridade, buscamos regularidade, unificamos elementos presumindo continuidade, geramos complementos, criamos movimento interligando seqüências de imagens estáticas, ou seja, modificamos imagens, o que nos torna capazes de transformá-las sem que fisicamente haja tal mudança. O desenvolvimento do pensamento espacial permite irmos além do que uma representação estática permite ver, intuirmos ou conjecturarmos, permitindo que, sobre um desenho, se tenha acesso a novas interpretações possíveis. Ao trabalharmos em um ambiente matemático abstrato, dispomos de possibilidades de manipulação úteis na análise de problemas envolvendo propriedades geométricas espaciais. O pensamento espacial é dinâmico e requer contínua interpretação (recodificação) das imagens. Imagens são manipuladas, resultando em novas imagens que são, também, manipuladas, e o processo cíclico continua (YAKIMANSKAYA, 1991). A habilidade mental de fazer modificações (gerar transformações) em objetos lida diretamente com aspectos cognitivos relativos à solução de problemas.

3. VIRTUAL REALITY MODELING LANGUAGE

Virtual Reality Modeling Language tem origem em meados dos anos 90, surgindo como uma ferramenta de modelagem tridimensional para Internet que permite a exploração de imagens tridimensionais com possibilidades de movimento e interação com os objetos. Os arquivos produzidos em VRML podem ser visualizados através do programa Cortona. Este programa implementa uma barra de comandos no browser permitindo algumas ações sobre o objeto, como: 1) Walk: mover-se sobre um plano horizontal, afastando-se ou aproximando-se do objeto; 2) Fly: movimento em um plano vertical; 3) Study: gerar rotações no objeto.

O uso do VRML como uma linguagem para a produção de cenas contendo objetos geométricos tridimensionais traz algumas vantagens sobre a representação plana estática desses mesmos objetos. Em cada instante, é possível escolher uma diferente posição para olhar o objeto, evidenciando certas propriedades que uma planificação estática pode esconder. Além disso, é possível programar movimentos e transformações a esses objetos. O estudo de caso aqui apresentado permite indicar as cenas em VRML como ferramentas que permitem ao observador interagir com as mesmas, possibilitando a verificação de propriedades, a realização de inferências, a formulação de conjecturas para contra-exemplos, entre outros aspectos apresentados por PARZYSZ (1991) como papéis atribuídos às representações em Matemática. Segundo SONG (2002:152), “tecnologia VRML permite aos estudantes observar objetos como se estivessem manuseando objetos reais”.

4. APRESENTANDO O ESTUDO DE CASO

Foram selecionados dois grupos de 30 alunos da 2ª série do Ensino Médio para responderem a questionários que envolviam questões de visualização espacial com base em representações convencionais para certos objetos geométricos tridimensionais. Os grupos responderam às mesmas questões, sendo que um grupo (Grupo 1) respondeu o questionário a partir de imagens impressas no mesmo, ficando cada aluno do outro grupo (Grupo 2) com questionários sem imagens impressas e um computador com cenas em VRML. O ponto de vista inicial da cena em VRML era idêntico à imagem impressa nos questionários do Grupo 1. Os questionários eram compostos de 7 questões, cada uma delas com três opções de respostas.

A questão 1 levou em conta a posição de um ponto A em relação a um plano P, ambos representados através de convenções usuais (plano representado por um paralelogramo e ponto representado pela interseção de dois segmentos). As possibilidades de respostas para a questão 1 eram: a (“O ponto A está no plano P”); b (“O ponto A está fora do plano P”) e; c (“Não sei”). A mesma imagem utilizada para a questão 1 apresentava, além do ponto A, outros dois pontos B e C, sendo a posição relativa desses pontos em relação ao plano P o foco das perguntas das questões 2 e 3, respectivamente. As possibilidades de respostas para essas perguntas eram iguais àquelas dadas para a questão 1. Essa imagem fez parte do estudo apresentado por PARZYSZ (1988).

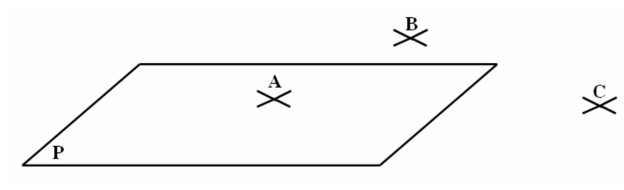


Figura 1: Imagem para as questões 1, 2 e 3

As imagens utilizadas nas questões 4, 5 e 6 foram obtidas a partir de pontos de vista de um cubo em wireframe. Para essas questões a pergunta era a mesma: a imagem apresentada representa um cubo? As possibilidades de respostas eram: a (“Sim”); b (“Não”) e; c (“Não sei”).

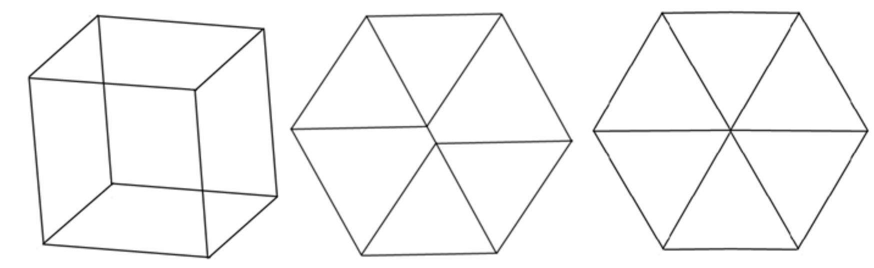


Figura 2: Imagens para as questões 4, 5 e 6.

A questão 7 envolve uma representação para um prisma de base triangular, sendo perguntado ao aluno qual dos elementos do prisma está mais próximo, com as seguintes possibilidades de respostas: a (“A aresta CF”); b (“A face retangular ABED”) e; c (“Não sei”). A imagem vista por ambos os grupos é multiestável, uma vez que uma aresta e uma face alternam-se periodicamente quanto à proximidade com o observador. Nosso interesse era investigar se a manipulação da cena pode auxiliar nessa decisão.

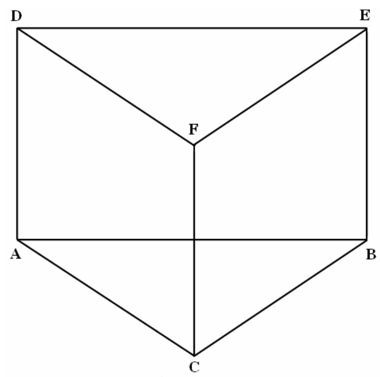


Figura 3: Imagem para a questão 7.

O Grupo 2 foi subdividido nos grupos 2.1 e 2.2 para que obtivéssemos respostas sobre o uso de cenas em VRML no auxílio para interpretação de imagens ambíguas. O Grupo 2.1 respondeu a questão 7 com base em uma cena na qual a aresta CF realmente estava na frente, enquanto o Grupo 2.2 é constituído por alunos que responderam à questão 7 com base na cena em que a face estava na frente. O ponto de vista inicial de ambas as cenas apresentava a mesma imagem, imagem esta que deu origem à figura impressa no questionário do Grupo 1. Dessa maneira, os testes aplicados poderiam mostrar a influência das cenas em realidade virtual nas respostas dos alunos, caracterizando, assim, uma forma de adquirir informações sobre o objeto geométrico representado.

5. APRESENTANDO OS RESULTADOS OBTIDOS

Uma análise inicial dos valores da Tabela 1 para a questão 1 mostra que a maioria dos alunos do Grupo 1 optou pela resposta a. Os alunos do Grupo 1 levaram em consideração as convenções utilizadas para a representação dos elementos geométricos em questão. Um ponto desenhado no interior de um paralelogramo usualmente indica que tal ponto pertence ao plano representado no desenho. A cena em VRML, após sua manipulação e análise em diferentes pontos de vista, mostra que, na verdade, o ponto A está fora do plano P (Figura 4). Nesse caso, as possibilidades de visualização provenientes da interação com a cena constituíram uma fonte para a obtenção de informações sobre a figura, modificando a resposta dos alunos do Grupo 2 em comparação com o Grupo 1.

	Respostas – Grupo 1			Respostas – Grupo 2		
	A	B	c	a	b	c
Questão 1	93,3%	0%	6,7%	16,7%	80%	3,3%
Questão 2	13,3%	73,4%	13,3%	6,7%	93,3%	0%
Questão 3	16,7%	73,3%	10%	46,7%	53,3%	0%
Questão 4	60%	30%	10%	93,4%	3,3%	3,3%
Questão 5	46,7%	40%	13,3%	93,4%	3,3%	3,3%
Questão 6	30%	56,7%	13,3%	80%	3,3%	16,7%

Tabela 1: Percentuais de respostas dos Grupos 1 e 2 para as questões 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

	a	b	c
Grupo 1	76,7%	10%	13,3%
Grupo 2.1	75%	12,5%	12,5%
Grupo 2.2	42,9%	50%	7,1%

Tabela 2: Percentuais de respostas para a questão 7 dos Grupos 1, 2.1 e 2.2.

No caso do Grupo 2, o fato de existirem alunos que não optaram pela resposta b (resposta correta para a cena em VRML) motivou uma investigação que permitisse a identificação de problemas que levaram os alunos a não identificar o ponto A fora do plano P. Dessa forma, identificamos dois problemas centrais que motivaram as respostas erradas para a questão 1: a) problemas conceituais, que indicam que os alunos apresentaram noções geométricas equivocadas sobre os objetos presentes na cena e; b) problemas ligados à manipulação da cena, uma vez que a interpretação do aluno para a cena foi influenciada pela interação com a mesma. Tal qual ocorrido na questão 1, a resposta dos alunos do Grupo 1 para a questão 2 foi influenciada pelas convenções para representação dos objetos geométricos apresentados.

Na questão 3, o ponto C está fora do paralelogramo à direita do ponto A. Em ambos os grupos, verifica-se a influência das representações convencionais na interpretação de um desenho. A resposta b ("O ponto C está fora do plano P") foi escolhida pela maioria dos alunos em ambos os grupos, que justificaram suas respostas com base no fato de o ponto C não estar no interior do paralelogramo que representa o plano P. A possibilidade de modificar o ponto de vista sobre a cena influenciou as respostas dos alunos, que puderam visualizar a cena em diversos pontos de vista e intuir a relação de inclusão estabelecida entre o ponto C e o plano P.

Na questão 4, as respostas do Grupo 1 foram justificadas com base em conjecturas surgidas a partir da visualização do desenho, sendo a interpretação dos alunos influenciada pelas convenções conhecidas por eles para a representação deste objeto geométrico. Através da observação direta da interação dos alunos com a cena em VRML, destaca-se um comportamento reproduzido por muitos deles: a sobreposição das faces opostas para que fossem intuídas propriedades presentes na cena constituiu um fato que modificou as respostas do Grupo 2 em relação ao Grupo 1.

Na questão 5, um ponto de vista específico do mesmo cubo utilizado na questão 4 foi apresentado a ambos os grupos a fim de que fossem analisados os problemas de multiestabilidade presentes nessa representação. Na imagem vista pelos grupos, duas arestas do cubo estão sobrepostas, dificultando a identificação de elementos característicos da figura geométrica original. As arestas sobrepostas podem ser vistas como um único segmento, "escondendo" a figura espacial em uma representação multiestável. Em VRML, a mudança do ponto de vista resolveu a questão da sobreposição das arestas, evidenciando imagens que se assemelham à cena utilizada na questão 4. A partir daí, a análise da cena, através da possibilidade de sobreposição das faces, forneceu os mesmos resultados para o Grupo 2 nas questões 4 e 5.

Na questão 6, apresentou-se aos alunos de ambos os grupos um ponto de vista do mesmo cubo das questões 4 e 5. Nesse ponto de vista, pelo fato de dois vértices do cubo estarem sobrepostos, a imagem vista pelos grupos é multiestável. Na imagem utilizada para essa questão, os segmentos sobrepostos e colineares são vistos como um único segmento, fazendo com que a imagem seja mais prontamente vista como uma figura plana (um hexágono regular com diagonais traçadas). Ao manipular a cena em VRML, o aluno realiza testes sobre a imagem e é capaz de verificar que a conjectura inicial de se tratar de uma figura geométrica plana não é sustentada para outros pontos de vista diferentes do inicial.

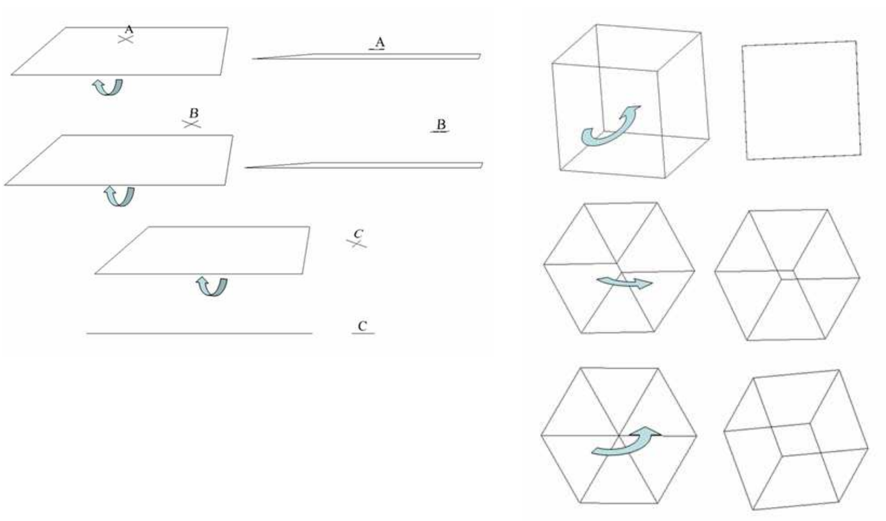


Figura 4: Transformações nas cenas para as questões 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Na questão 7, as justificativas do Grupo 1 levavam em consideração, principalmente, impressões individuais. Manipular a cena permitiu que um maior percentual de alunos do Grupo 2.2 chegasse à conclusão correta em comparação com os grupos 1 e 2.1. Entender o movimento que era provocado, em particular as rotações provocadas pela opção Study do software utilizado, era crucial para uma decisão sobre a posição dos elementos. O aluno deveria perceber que, ao provocarmos uma rotação, fisicamente temos um efeito sobre um determinado objeto. Para os alunos do Grupo 2.1, rodar o prisma para a esquerda faria a aresta caminhar para a esquerda, enquanto a face quadrangular mover-se-ia em sentido oposto. Para os alunos do Grupo 2.2, a situação seria inversa: rodar o prisma para a esquerda moveria a face nesse mesmo sentido, ficando a aresta com o sentido contrário. O resultado do Grupo 1 é, de certa forma, repetido pelo Grupo 2.1, que pode ter respondido com base na interação com a cena em VRML ou segundo as convenções representacionais para esse objeto geométrico, como foi feito pelos alunos do Grupo 1.

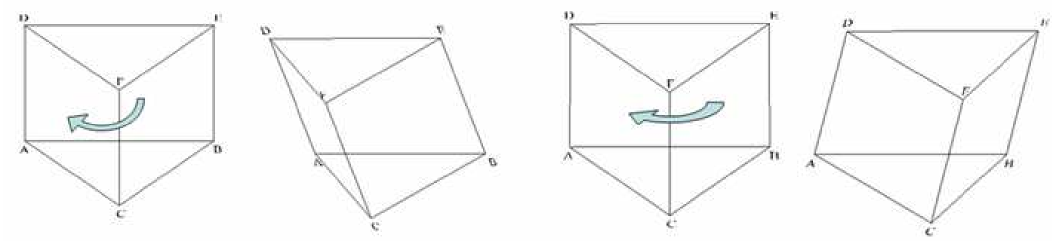


Figura 5: Transformações nas cenas para a questão 7 (Grupos 2.1 e 2.2).

Conclusão

Com os testes aplicados, uma vez apresentados os resultados, podemos concluir que: a) figuras geométricas podem herdar propriedades das suas representações, mesmo em realidade virtual; b) mesmo com as cenas em VRML, a influência das representações convencionais conhecidas pelos alunos é um fator determinante na interpretação de imagens; c) manipular a cena constitui uma maneira de obter informações de objetos geométricos presentes na mesma; d) a escolha dinâmica de pontos de vista sobre a cena pode resolver problemas de ambigüidades na imagem; e) havendo claro entendimento das transformações realizadas na cena, é possível decidir entre duas ou mais interpretações (coerentes) para uma mesma imagem.

A cena em VRML depende da interação entre observador e objeto para que ela, efetivamente, promova novas interpretações. Estática, sem que haja interação com o usuário, a imagem em realidade virtual forneceria resultado equivalente àqueles obtidos através das imagens impressas no papel. Mesmo se existisse movimento, se o controle sobre o mesmo não estivesse com o observador, os problemas de multiestabilidade permaneceriam e teríamos resultados ainda distintos daqueles que aqui foram obtidos. Ver uma imagem em movimento não promove os mesmos efeitos em termos de interpretação que atribuir ao indivíduo o papel de agente do movimento. A escolha da transformação, que deve ser feita para que a cena seja vista por um ponto de vista mais favorável, já atribui ao observador uma posição não passiva diante da representação, posição esta que trabalha com o desenvolvimento do pensamento espacial.

Referências

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.

Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and student’s conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, 22(6), 575-593.

Song, K. S. (2002). A virtual reality application for geometry classes. *Journal of Computer Assisted Learning*, 18(2), 149-156.

Yakimanskaya, I. S. (1991). *The development of spatial thinking in schoolchildren*. Reston, VA: National Council of Theachers of Mathematics.

UM CONTEXTO INVESTIGATIVO ENVOLVENDO CURVAS PLANAS MEDIADO POR RECURSOS COMPUTACIONAIS

Valéria de Carvalho, UNIP (val.carvalho@uol.com.br)

Sandra A. Santos, IMECC, Unicamp (sandra@ime.unicamp.br)

O propósito desta pesquisa foi desenvolver uma prática reflexiva, investigativa e colaborativa com estudantes de licenciatura em matemática, mediada por recursos computacionais (lista de discussão e programas de computação algébrica e visualização), na temática da parametrização de curvas planas, motivada pela construção e criação de mandalas. Esta pesquisa procurou valorizar as diferentes linguagens – verbal ou discursiva, matemática, gráfica e computacional – para comunicação das idéias, interpretações e produções do grupo envolvido.

APRESENTAÇÃO

Esta pesquisa é um estudo sobre as potencialidades do uso de algumas ferramentas das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC's) e da aprendizagem colaborativa aplicado a tópicos de Geometria. O ponto de partida dessa investigação foi a construção computacional de *mandalas*[1], associada à discussão e reflexão a respeito de algumas características matemáticas presentes nesses objetos, tais como serem constituídos por curvas planas fechadas, possuírem padrões de simetria, entre outros. Esse trabalho foi um estudo realizado à distância, dele participou um grupo de alunos do curso noturno de licenciatura em matemática de uma universidade particular de Campinas, orientado pelas duas autoras. A ferramenta de comunicação entre os participantes foi uma Lista de Discussão (LD) e a duração do estudo foi de aproximadamente três meses.

Sabemos que durante as aulas tradicionais os alunos passam parte de seu tempo tentando acompanhar o raciocínio desenvolvido pelo professor e, em outra parte, 'se perdem e se acham' em suas conjecturas, dúvidas e intuições próprias sobre o que está sendo abordado pelo professor. Nesse exercício, buscam estabelecer e/ou construir alguma correlação entre o que ouvem e vêem

[1]As mandalas são símbolos ancestrais que representam o Universo. No seu interior abrigam as forças da natureza representadas num simbolismo perfeito. Matematicamente falando, as mandalas podem trazer em sua configuração imagens gráficas de parametrizações de curvas como hipociclóides e epiciclóides, nas suas diversas formas e variações. A análise e construção dessas imagens gráficas, através de um processo de investigação, discussão e teste de conjecturas, propiciaram a discussão e o estudo de temas como número de vértices/cúspides, laços e ondulações da curvas citadas.

com seus conhecimentos prévios, mas esse processo é geralmente silenciado pela fala do professor e pelas emergências cotidianas e institucionais da sala de aula e de fora dela. Essa pesquisa buscou resgatar parte desse processo de aprendizado dos alunos que é silenciado cotidianamente. Constituiu também uma oportunidade do professor ouvir, questionar, indagar e refletir sobre as possibilidades de ir além de suas suposições pessoais do que seriam as indagações e divagações individuais de seus alunos. Permitiu que todos os envolvidos construíssem novos conhecimentos, graças aos recursos tecnológicos (LD e aplicativos matemáticos computacionais) e a disposição afetiva, pessoal e intelectual dos participantes.

JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS

A pesquisa em questão se justifica pela escassez de referências sobre práticas envolvendo o diálogo com o conhecimento prévio e as reflexões dos educandos em sala de aula, sobretudo no ensino superior[2]. Essa escassez pode fazer com que professores percam a oportunidade de refletir criticamente sobre a sua atuação, e consequentemente, deixem de contribuir para que os alunos aumentem sua auto-estima e melhor desenvolvam seu espírito investigativo no que diz respeito ao conhecimento escolar superior matemático.

Em geral, a escola, em todos os níveis de ensino, trata os alunos por igual. É como se todos aprendessem da mesma forma, com a mesma motivação, no mesmo ritmo. A educadora María Teresa Nidelcoff nos alertou, no entanto, que os alunos

> NÃO SÃO IGUAIS. Em função disso, para uns tantos será suficiente aquilo que a escola lhes dá; para outros não. Uns triunfarão, outros irão fracassar. Esse triunfo confirmará aqueles a quem a sociedade forneceu meios para triunfar. *E o fracasso geralmente confirmará o desprezo àqueles que a sociedade condicionou como inferiores*. (NIDELCOFF, 1978, p.10, grifos da autora)

A afirmação da autora sustenta o que geralmente naturalizamos, em nosso discurso como professores do ensino superior, como o alto índice de reprovação dos alunos nas disciplinas de conteúdo matemático específico, como cálculo, análise, entre outras.

Essa pesquisa se justifica porque percebemos que o diálogo entre os alunos e o trabalho colaborativo, como foi proposto nessa investigação prática-reflexiva e registrada em LD, pode contribuir para que os alunos aprendam em seu próprio tempo a utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimento matemático. Nesse processo, o professor pode contribuir para que os alunos ativem suas potencialidades em situações

---

[2] Vale destacar o material organizado por Cury (2004), o qual visa divulgar experiências de professores que trabalham com disciplinas matemáticas em cursos superiores, para profissionais não dedicados especificamente à licenciatura em matemática.

de aprendizado, incentivando e orientando o levantamento de conjecturas, a investigação, a validação de hipóteses, e o registro reflexivo destas etapas, visando construir e reconstruir conceitos.

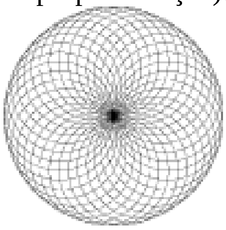
A forma com que esta pesquisa foi encaminhada propiciou aos alunos apoio e ferramentas para que seus questionamentos e conjecturas fossem investigados. Para tanto, foram essenciais o pensamento lógico, as ferramentas tecnológicas, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, a seleção de procedimentos e a verificação de sua adequação. Os alunos também usaram diferentes linguagens – verbal, discursiva, matemática, gráfica, computacional – como meio de produzir e comunicar suas idéias e conjecturas, bem como interpretar e usufruir de outras produções, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação.

A PROPOSTA DA PESQUISA: O CONVITE AOS ALUNOS

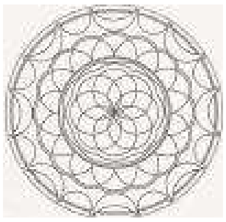
Os alunos das disciplinas *Prática de Ensino de Matemática* e *Geometria Superior das Curvas* do quinto semestre do curso de Licenciatura em Matemática de uma IES de Campinas (totalizado em seis semestres) foram convidados a participar voluntariamente de uma prática investigativa e reflexiva, conforme o texto do quadro a seguir:

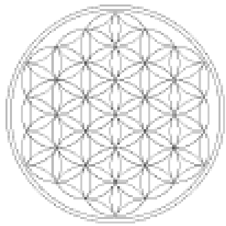
Convite

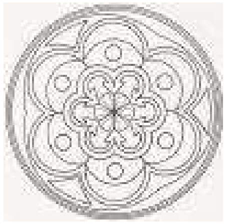
Convidamos os interessados para participarem como voluntários em uma prática investigativa utilizando TIC's com foco no tema de parametrização de curvas planas, desencadeado pela contrução de mandalas. Esta investigação terá duração de três meses, com início em 5 de abril e término em 5 de julho de 2007.
Inspirado(a) pelas mandalas a seguir, identifique os elementos matemáticos presentes nas imagens para que possa modelar uma mandala de sua escolha (dentre as apresentadas, encontradas em outras fontes, ou de sua própria criação).

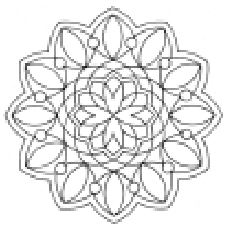

(1)

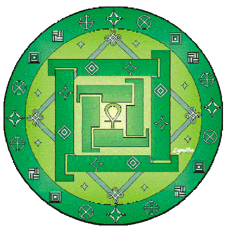

(2)

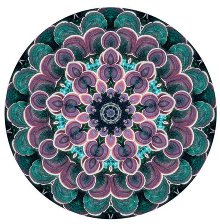

(3)

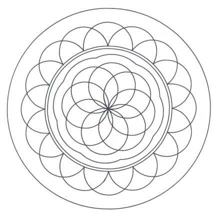

(4)

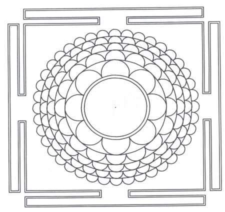

(5)


(6)


(7)


(8)


(9)


(10)

(Imagens (1) a (7) extraídas de http://www.lyndha.com/mandalas, imagem (8) encontrada em http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Woodland_fairylodge_600.jpg, e imagens (9) e (10) retiradas do livro de Celina Fioravanti, *Mandalas: a Religação da Alma com Deus Através de Desenhos Sagrados*, São Paulo: Ground, 1997).
Utilize ferramentas computacionais com as quais tenha alguma familiaridade para auxiliá-lo em sua experimentação, no teste das suas conjecturas, e na construção das curvas que compõem o seu modelo.

Esta atividade poderá ser desenvolvida individualmente ou em duplas. As indagações, dúvidas e descobertas de cada etapa devem ser registradas em um diário de campo eletrônico, juntamente com as impressões e sentimentos. O trabalho será compartilhado entre todos os alunos envolvidos, monitorado e orientado pelas professoras em uma lista de discussão virtual.
Vale destacar que este estudo é uma oportunidade para os participantes vivenciarem uma prática investigativa e reflexiva, e apesar de não estar associada à avaliação de nenhuma das disciplinas cursadas, poderá contribuir de forma diferenciada para a sua formação. Os interessados deverão contactar a profa. Valéria (val.carvalho@uol.com.br) ou a profa. Sandra (sandra@ime.unicamp.br).

Seis alunos demonstraram interesse inicial no projeto, dois deles com intervenções esporádicas, e quatro colaboraram efetivamente nos estudos e nas discussões.

A PESQUISA E SUA ANÁLISE

Planejamos as seguintes etapas para o desenvolvimento da investigação, com cada uma delas permeada por reflexões e registros escritos dos alunos, compartilhados entre o grupo, de forma sistemática e continuada:

1. Pesquisa sobre o significado das mandalas. Levantamento de novas imagens e conexões com outras áreas de conhecimento, com referências completas ao material levantado.
2. Resgate matemático e computacional da parametrização de curvas planas. Levantamento de elementos e características de algumas curvas matemáticas possíveis de serem aplicadas na construção de mandalas.
3. Produção das mandalas propriamente ditas.
4. Reflexão final acerca da prática investigativa experienciada.

Na primeira etapa, destacamos as conexões levantadas entre as mandalas e outras áreas do conhecimento: em arquitetura, especialmente com vitrais (ex. Notre Dame); em biologia (fungos da imagem (8) do quadro Convite, flores e outras formas da natureza); em obras de arte; na geometria do sagrado, associada ao exoterismo e à transcendência (mandalas para meditar, filtro de sonhos). Apareceu ainda o aspecto lúdico: mandalas para colorir, jogo das mandalas, e o resgate do brinquedo *Espirograf*, lançado pela Estrela nos anos 70.

Na segunda etapa, a LD propiciou debates e o resgate matemático e computacional sobre a parametrização de curvas planas. Foi iniciada com o levantamento, pelos alunos, dos elementos matemáticos presentes nas mandalas, a saber, simetria central/radial, objetos geométricos, curvas planas, presença ou não de diferenciabilidade em todos os pontos, entre outros. A seguir, visando a posterior modelagem e construção computacional de mandalas, as professoras encaminharam uma discussão sobre a parametrização de ciclóides, resgatando o fato de serem construídas por um ponto de uma circunferência que desliza sobre uma reta[3]. Encaminharam também as extensões dos casos

[3] Para mais explorações neste contexto de curvas mecânicas sugerimos o artigo de Costa, Grou e Figueiredo (1999).

de ciclóides alongadas e achatadas (ponto exterior ou interior, respectivamente, à circunferência deslizante). A idéia foi propor uma preparação para a compreensão das parametrizações de hipociclóides e epiciclóides, também em suas formas simples, alongadas e achatadas, obtidas pelo deslizamento de uma circunferência sobre outra, interna ou externamente, respectivamente. Nesta etapa, o capítulo 10 de Stewart (2001) e a atividade 3 do capítulo 3 de Figueiredo, Mello e Santos (2005) foram bastante úteis. Para o traçado de hipociclóides e epiciclóides foi preciso determinar o extremo superior do intervalo de variação do parâmetro (ângulo descrito pela circunferência deslizante), que está associado ao número de voltas necessário para a curva 'fechar'. Denotando por a o raio da circunferência fixa e por b o raio da que desliza sobre a primeira, a orientação de uma das professoras a seguir procura ajudar os alunos a sistematizarem a análise, após uma série de conjecturas e experimentos:

> ... notem que no perímetro da circunferência fixa (2 pi a), queremos ver como se encaixa o perímetro da deslizante (2 pi b). Por isso, em última análise está a relação entre a e b. Quando a e b são primos entre si, parece que o número de voltas é b. Para 'derrubar' a hipótese de que b contempla sempre esse número de voltas, pensem no caso a=60 e b=18. Notem que bastam 3 voltas para fechar... Ocorre que 3 é justamente o resultado de dividir b=18 pelo MDC entre 60 e 18... É assim que chegamos à fórmula para o número k de voltas necessárias para a curva fechar: $k = b/\text{MDC}(a,b)$. Se a e b são primos entre si, o MDC é 1, portanto o número de voltas é b, como tínhamos suspeitado. Agora, se b divide a, o MDC é b, e a curva se fecha na primeira volta, como também já havíamos percebido. Por fim, a expressão $k=b/\text{MDC}(a,b)$ parece resolver o caso a=60, b=18, e situações análogas. Será que temos finalmente a fórmula desejada?

Outro aspecto que gerou investigação foi a determinação do número de vértices/cúspides, laços, ou ondulações, para os tipos de hipo/epiciclóides comuns, alongadas ou achatadas, respectivamente, de acordo com os valores para os raios a e b. Neste caso, foi a noção do mínimo múltiplo comum (MMC) que permitiu sistematizar o que foi experimentado computacionalmente:

> O número de vértices da curva é MMC(a,b)/b. De fato, se a e b são primos entre si, o MMC é $a*b$ e dividindo por b temos a, número de vértices percebidos com os exemplos com a=20. Agora, se a é um múltiplo de b, digamos k, então o MMC(a,b) é o próprio a, e o número de vértices é $a/b=k$. E quando a e b tem um fator comum, diferente de b, como no caso a=60 e b=18? A fórmula continua valendo? Por que?

A dificuldade enfrentada pelos alunos para lidar com o *software* escolhido também foi um aspecto para destaque. Neste sentido, ressaltamos a escolha e familiaridade com os comandos empregados para a visualização, bem como a decisão acerca dos parâmetros e argumentos necessários para produzir os objetos desejados. Por exemplo, uma sobrestimativa do extremo superior do intervalo de variação do parâmetro que gera a curva implica na sobreposição da curva traçada, e cabe uma identificação visual desta questão. As professoras instigaram os alunos a lançarem um olhar crítico sobre as imagens produzidas, visando distinguir entre falhas na parametrização, no uso do comando ou nas limitações do próprio *software*. O número de pontos *default* empregado pelo programa no traçado de uma curva, por exemplo, pode não ser suficiente para produzir o efeito visual desejado. Também vale dizer que, em explorações iniciais, o desconhecimento da imagem esperada aliado à insegurança com o uso do programa podem gerar tensões adicionais. O diálogo a seguir, extraído da LD, ilustra esse fato:

> **Aluno 3:** Não consigo mesmo usar o *Mathematica*... Comecei tentando desenhar a hipociclóide $x(t) = (a\text{-}b)\cos t + b\cos[(b\text{-}a)t/b]$, $y(t) = (a\text{-}b)\text{sen } t + b\text{sen}[(b\text{-}a)t/b]$) com a=2, b=1e t entre 0 e 2pi e não apareceu nada!
>
> **Profa.1:** Será que o problema é do *Mathematica*? Trabalhe com lápis e papel nas equações da curva, com os valores de *a* e *b* que escolheu e veja o que acontece...
>
> **Aluno 3:** (algum tempo depois) Nossa! O *y* ficou igual a zero...
>
> **Profa.1:** Experimente mudar a espessura da curva usando **PlotStyle->Thickness[0.02]** antes de fechar o comando e desenhe de novo. O que você vê?
>
> **Aluno 3:** Calma aí... Vejo o segmento [-2,2]. Tá certo, $x(t)$ = 2 cos t com t entre 0 e 2pi e $y(t)$=0. Antes desenhava em cima do eixo, por isso pensei que não estava fazendo nada... Valeu! Agora vou tentar com outros valores para *a* e *b*...

O fragmento da LD acima reitera a necessidade do usuário interagir criticamente com o programa, alterando as opções *default*, para conseguir obter informações mais significativas, ou até mesmo para produzir imagens mais bonitas. Na Figura 1 ilustramos algumas das mandalas produzidas pelo grupo, em que o recurso da cor se mostrou esteticamente agradável. A Figura 1(a) foi inspirada em elementos da Figura (7) do Convite, e a 1(b), na flor petúnia. Nas Figuras 1(c) e 1(d), para criar um efeito de encaixe entre as curvas traçadas, surgiu a necessidade de modificar a fase do ângulo inicial, diferente de zero nas curvas em verde e azul de 1(c) e no azul intermediário de 1(d).

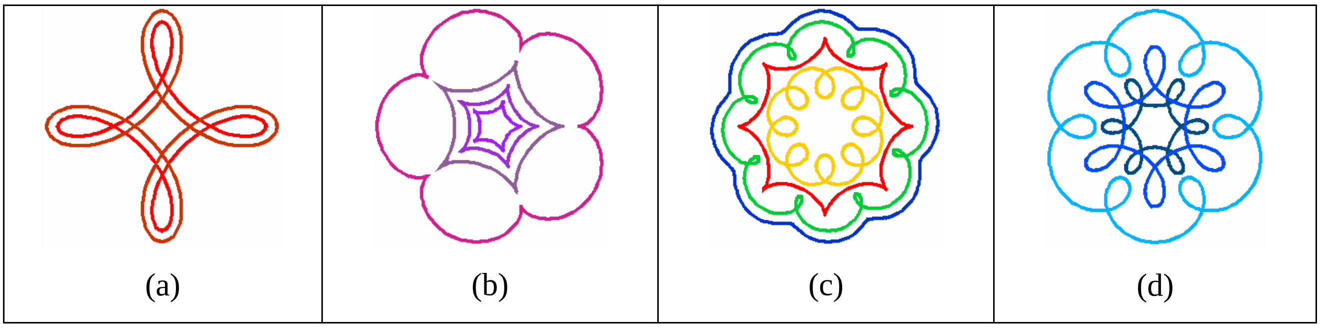


Figura 1. Mandalas produzidas pelo grupo de alunos do estudo.

A dificuldade para se registrar os processos de inferências e conjecturas em linguagem discursiva foi um aspecto bastante recorrente na LD, evidenciado não só pela fala dos alunos (em alguns casos, ausência da 'fala'), como também pela necessidade de intervenção das professoras para resgatá-lo quase que o tempo todo. Possivelmente a terminologia matemática específica aliada à sofisticação do conteúdo em estudo – parametrizações de curvas com uma série de elementos matemáticos a serem controlados – bem como às dificuldades inerentes do software nos revelaram que os alunos preferiam testar que explicar o procedimento. Pela ansiedade de chegar a um resultado, muitas vezes acabavam perdendo o registro do processo de descoberta de uma relação. Só quando, após uma série de testes, não produziam o que queriam, é que sentiam a necessidade de se comunicarem. De qualquer forma, quase não apareceram, nos registros da LD, as ‘angústias e divagações’ ocorridas durante o trabalho. Mesmo após uma descoberta, festejavam o resultado, mas eram bastante sintéticos na explicação de como chegaram até ali. As professoras tiveram que intervir e instigar para que procurassem entender por que funcionou, sistematizar a descoberta e comunicá-la ao grupo.

Com relação às reflexões finais acerca da prática investigativa experienciada, destacamos os trechos a seguir:

> Não conhecia nada sobre mandalas e essa pesquisa me despertou pra ver mais da matemática fora da sala de aula. Senti dificuldade com as parametrizações e foi difícil acompanhar as discussões das fórmulas para número de voltas e de vértices que a professora queria que a gente explicasse. (Aluna 1).
>
> Me senti mais a vontade na LD que na sala de aula. Não tive vergonha de perguntar minhas dúvidas, mas era bem difícil explicar exatamente o que não entendia. Conforme ia tentando explicar a dúvida, percebi que as vezes acabava quase solucioentendendo melhor o problema. Pelo menos quando não era uma dúvida do programa (Aluno 3).
>
> No final do semestre ficou mais difícil pra participar, mas gostava de ler as conversas dos colegas e tentava acompanhar o que estavam discutindo. Cheguei a comentar com um amigo que não fez parte do grupo que ele perdeu uma super oportunidade (Aluno 4).
>
> As professoras estão de parabéns pela iniciativa! Acho que aprendi bastante com esse estudo. No começo senti um pouco de preguiça, ainda mais que não ia valer nota, mas no fim fiquei orgulhosa da mandala que criei (Aluna 5, autora da mandala da Figura 1(b)).
>
> O que mais gostei foi das trocas de idéias na lista de discussão. Quando a coisa esquentava e começava a dar confusão, as profs faziam alguma pergunta pra gente pensar! Também ficaram mais ricas as construções que fizemos em grupo. (Aluno 6)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta prática investigativa foi desafiadora e gratificante para todos os envolvidos. Percebemos, pela vivência criada, que, assim como as autoras deste artigo, os estudantes que aceitaram nosso convite (e desafio!) saíram fortalecidos. O monitoramento da LD certamente gerou tensão, pois por um lado sentimos constantemente necessidade de instigá-los a refletirem, pesquisarem e expressarem melhor suas idéias, e por outro, queríamos deixá-los livres para criar, descobrir e tornarem-se capazes de fazer suas próprias perguntas e trilharem seu próprio caminho. Também foi importante sermos duas para gerenciarmos a LD, buscando minimizar a ansiedade e atender à demanda, muitas vezes alta, de dúvidas e questionamentos. Com base na evolução da discussão da LD e nas reflexões finais dos alunos, temos indícios para afirmar que a prática investigativa proposta repercutiu positivamente em seus participantes. Mason (1996) acredita que

> é vantajoso para a sociedade como um todo, e em particular para os matemáticos com responsabilidades e interesses na situação do ensino da matemática, que um número cada vez maior de pessoas tenham uma experiência mais ampla relativamente ao "quê" da matemática, com as suas intuições e consciência enriquecida, com base na sua experiência de manipulação de objetos no ecrã. Na medida em que amplia a sua percepção do conteúdo da matemática, a mesma experiência não pode deixar de gerar também interessse no "como"e no "porquê", através da utilização de vários níveis de ícones, objetos no ecrã e álgebra subjacente. Mas, entretanto, espero ver transformações importantes no modo como as idéias são apresentadas e experimentadas pelos alunos. O acompanhamento destes progressos representa por si só, e assim continuará a ser no futuro, um esforço considerável. (MASON, 1996, p.22-23)

Os resultados de nossa investigação contribuem para corroborar as palavras de Mason. Porem, pensamos no desafio de propor uma prática nesse espírito em uma disciplina do ensino superior, da qual participassem todos os alunos, e estivesse agregado o elemento da avaliação. As limitações institucionais, com turmas com grande número de alunos, ementas estanques a cumprir, horários a obedecer e disponibilidade restrita de laboratórios, aliados à ansiedade dos participantes... Será que "daríamos conta" de toda a demanda envolvida?

Agradecimentos. Somos gratas aos alunos voluntários, que foram nossos parceiros nessa empreitada.

Referências Bibliográficas

Costa, S. I. R.; Grou, M. A., Figueiredo, V. L. X. (1999) Mechanical Curves - A Kinematic Greek Look Through the Computer. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 30 (3), 459-467.

Cury, H. N. (org.) *Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores: Reflexões, Relatos, Propostas*. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

Figueiredo, V. L. X., Mello, M. P., Santos, S. A. (2005) *Cálculo com Aplicações: atividades computacionais e projetos*. Coleção IMECC Textos Didáticos 3, Campinas, SP: Unicamp/IMECC.

Fioravanti,C. (1997) *Mandalas: a Religação da Alma com Deus Através de Desenhos Sagrados*, São Paulo: Ground.

Mason, J. (1996) O "quê", o "porquê" e o "como" em matemática. In P.Abrantes, L.C.Leal & J.P.Ponte (orgs.) *Investigar para Aprender Matemática*, Lisboa: CIEFCUL e APM, p.15-23.

Nidelcoff, M. T. (1978) *Uma escola para o povo*. São Paulo: Editora Brasiliense.

Stewart, J. (2001) *Cálculo* Vol. II, 4ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

UTILIZANDO O WINPLOT PARA ESTUDAR DERIVADAS

Eduardo Machado da Silva[1]
Leonor Farcic Fic Menk[2]

Neste artigo apresentamos algumas experiências realizadas com alunos do 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática com Ênfase em Informática, de uma Universidade particular do interior do estado de São Paulo, com o objetivo de estudar Limites e Derivadas usando o Winplot. As experiências foram baseadas no estudo de Limites de Derivadas.

1. INTRODUÇÃO

Um dos mais importantes ramos da Matemática, o Cálculo Diferencial e Integral, tem suas origens na Grécia Antiga, com Arquimedes e o Método da Exaustão. A partir do século XVII, Newton e Leibniz desenvolvem esse campo de estudo que tem sua fundamentação no final do século XIX.

É indiscutível a importância de se estudar os conceitos básicos de Cálculo Diferencial e Integral, (CDI), em um curso de Licenciatura em Matemática, porém tal disciplina é apontada pelos alunos como uma das mais difíceis e, costuma apresentar um grande número de alunos reprovados. Pode se argumentar que um dos motivos para que isso ocorra é que os alunos, na maioria dos casos, não têm maturidade suficiente para compreender conceitos como o de limites, derivadas e integrais.

Além da imaturidade, Villarreal apresenta em sua tese de doutorado outras causas. Uma delas pode estar relacionada aos obstáculos epistemológicos proposto por Bachelard: "Um obstáculo é uma concepção, possivelmente um conhecimento, que tem sido eficiente para resolver algum tipo de problema, mas fracassa perante outros".

Outra problemática, apresentada por Villarreal, apontando Franchi é que o ensino tradicional de CDI em sala de aula possui algumas características básicas tais como:

> "Aulas expositivas centradas na fala do professor, conteúdos apresentados como prontos e inquestionáveis, sem relação com situações reais, apresentações caracterizadas pela seqüência: definições, enunciados, teoremas e demonstrações, seguidos de cálculo e exercícios."

---

[1] Mestrando em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL, Professor do Colégio FEMA, FATEC – Faculdade de Tecnologia campus de Ourinhos e UNIVEM – Centro Universitário Eurípedes de Marília.
[2] Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL; Professora da FEMA – Fundação Educacional do Município de Assis

Existem outros fatores apontados por essa autora, mas nosso objetivo neste trabalho não é discutir tais problemas e sim apresentar sugestões que possam auxiliar professores que ministram essa disciplina.

Baseados no fato de que a utilização de software educacionais nos cursos de ensino superior tem aumentado com freqüência no decorrer dos anos, nossa proposta é que se utilizem tais ferramentas.

Porém, como alguns deles, necessitam de licença de uso, cujo preço costuma ser pouco acessível, acreditamos que uma solução para resolver esse problema seja a utilização de software livres, pois eles podem ser “baixados” gratuitamente da Internet. Como exemplo, podemos citar: o Winplot, o Winmat, o Wingeo e o Modellus entre outros que podem ser utilizados nas aulas de CDI.

Além disso, muitos problemas estudados nessa disciplina podem ser representados usando a Geometria Analítica (GA). Ou seja, em algumas situações é conveniente o auxílio da visualização gráfica, associada a forma analítica, como parte da resolução. Essa visualização gráfica pode ajudar até mesmo a entender determinados conteúdos como o estudo das derivadas, por exemplo. Portanto, atrelado à visualização gráfica de determinados problemas e/ou conteúdos, a utilização de um computador pode se tornar uma ferramenta útil, já que a maioria dos softwares possui recursos gráficos e de animações.

> “A proposta do uso da tecnologia na Educação Matemática como uma das possíveis propostas alternativas para superar estas dificuldades, visando uma transformação do ensino de Cálculo, é apresentada e analisada como proposta didática e como área de pesquisa”. (VILLARREAL, 1999)

Ainda de acordo com a autora:

> “O emprego do computador como um mero executor de algoritmos, somente transfere à máquina uma atividade que com lápis e papel é desenvolvida pelos estudantes através da realização de algoritmos que ocupam grande parte dos cursos de Cálculo.”

2. EXPERIÊNCIAS

Neste artigo pretendemos relatar algumas experiências realizadas recentemente em um curso de Licenciatura em Matemática, de uma Universidade particular de uma cidade do interior do estado de São Paulo, trabalhando a disciplina de Aplicativos da Informática. Nessa atividade o conteúdo estudado foi o de derivadas, utilizando o Winplot.

Estes alunos já haviam estudado problemas semelhantes, aos propostos, em uma disciplina de CDI, lecionada no semestre anterior. Porém, a maioria dos alunos ainda apresentava dúvidas, (alguns até confessaram ter decorado algumas coisas) sobre o estudo de limites de determinadas funções e sobre alguns conceitos que são tidos como básicos no ensino de derivadas.

A seguir, apresentamos algumas experiências.

2.1. Estudo das Derivadas

Um dos tópicos estudados nos cursos de CDI é o estudo das derivadas de uma função. Assim, o objetivo dessa atividade era discutir com os alunos alguns conceitos básicos relacionado com esse tópico. Escolhemos o problema de determinar as retas tangentes ao gráfico de uma função em um ponto dado, já que esse foi um dos problemas estudados por Newton que também motivou o desenvolvimento do CDI. Portanto, nosso objetivo não era apenas executar algoritmos para traçar gráficos e as tangentes a este em um ponto dado com o Winplot, mas também discutir com os alunos as respostas apresentadas por esse software.

Nesta atividade apresentamos um "exemplo simples" para discutir os conceitos iniciais do estudo de derivada. O objetivo era que os alunos descobrissem que o gráfico da derivada da função num determinado ponto coincide com o gráfico da reta tangente nesse ponto. O que motivou a escolha dessa proposta é que esse foi o primeiro exemplo que os alunos estudaram durante a disciplina.

Inicialmente os alunos construíram o gráfico da função $f(x) = x^2$ e em seguida, usando o recurso "derivada" do Winplot encontraram o gráfico da derivada da função. A maioria apresentou como solução os seguintes gráficos:

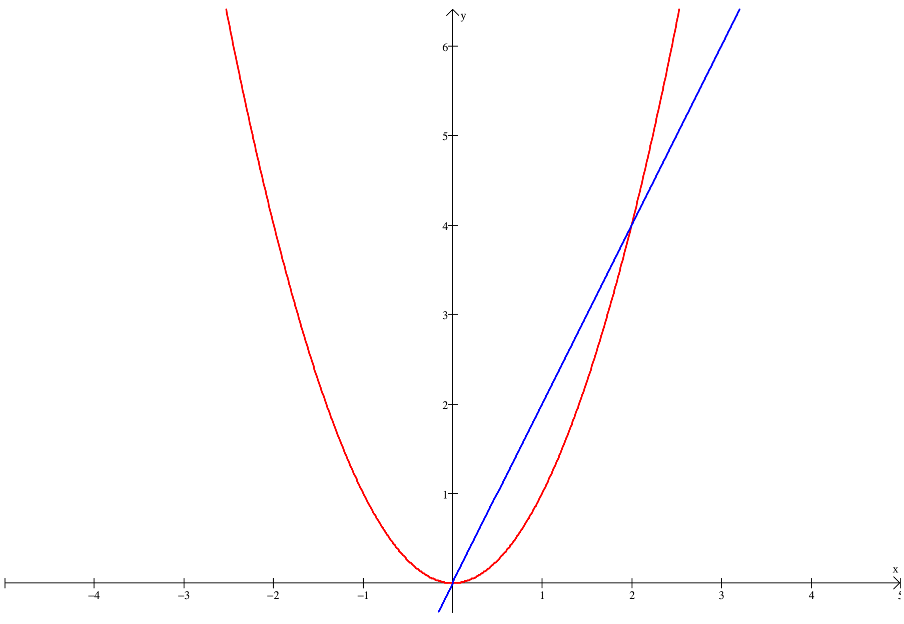


Figura 1: Solução inicial apresentada pelos alunos

Na seqüência, eles foram questionados se a solução estava certa ou se apresentava algum erro e, se apresentava erro qual era ele. Muitos disseram que a solução estava correta, pois foi o computador quem a produziu. Então foram questionados novamente sobre o seguinte fato:

O gráfico da função derivada não deveria ser tangente ao gráfico da função *f(x)*?

Por que o gráfico da derivada não é tangente ao gráfico da função *f*(*x*)?

Quase todos ficaram confusos e não conseguiram entender porque o gráfico não era tangente. Surgiram vários questionamentos sobre a solução e a maioria disse ter aprendido que a derivada da função $f(x) = x^2$ é $f(x) = 2x$ pela regra de “descer” o expoente e subtrair um do mesmo. Neste momento, foi sugerido para que eles demonstrassem, usando a teoria e o conhecimento sobre limites, que a derivada da função $f(x) = x^2$ é $f(x) = 2x$. Apresentando a solução usando as idéias do conceito de limites, os alunos concluíram que a função derivada é tangente em um ponto x_0 e a derivada mostrada no gráfico anterior é da função derivada em qualquer ponto.

Bem, então como fazer o gráfico da função derivada no ponto $x_0 = 2$, por exemplo?

Novamente os alunos sentiram-se um pouco perdidos e foram levados a revisar como determinar a equação de uma reta. Com um pouco de esforço lembraram que a equação da reta (já estudada na disciplina de GA) era dada por: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

A partir da equação obtida, os alunos construíram com auxílio do software, o gráfico da derivada da função no ponto $x_0 = 2$ obtendo a figura abaixo:

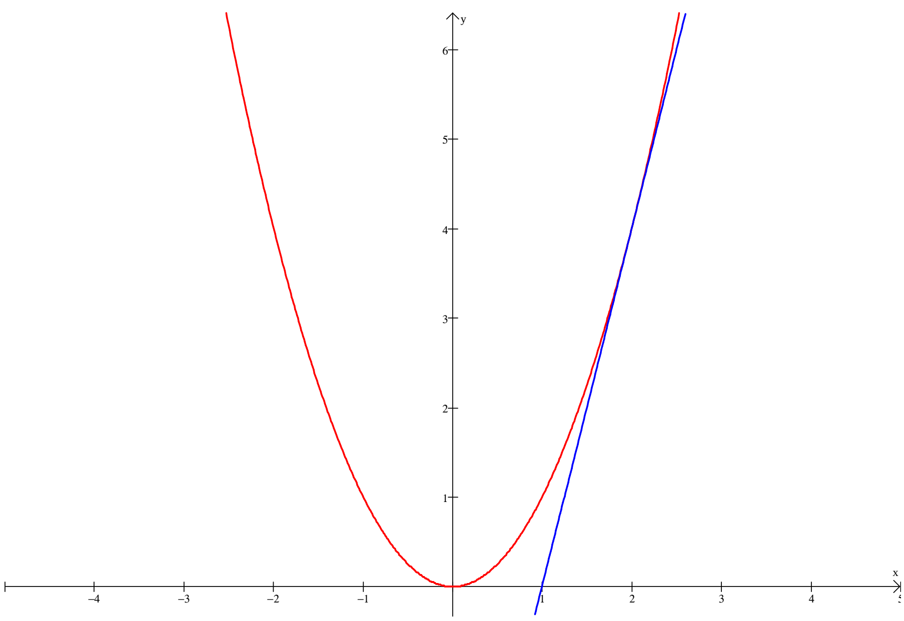


Figura 2: Reta tangente ao gráfico de *f*(*x*) = *x*^{2} em *x*$_0$ = 2

Calcular a derivada da função em um ponto x_0 dado, passou a ser uma "tarefa fácil" neste momento. Os alunos foram então convidados a procurar "todas" as derivadas em um ponto x_0 qualquer que pertence a um determinado intervalo. No Winplot esse intervalo inicialmente varia entre -10 e 10, mas pode ser alterado para outros valores.

A maioria dos alunos conseguiu resolver o problema usando a equação reta e substituindo no lugar de x_0 um valor para o parâmetro *a* qualquer. No Winplot o primeiro valor que é atribuído a esse parâmetro é zero. Dessa forma o gráfico obtido foi:

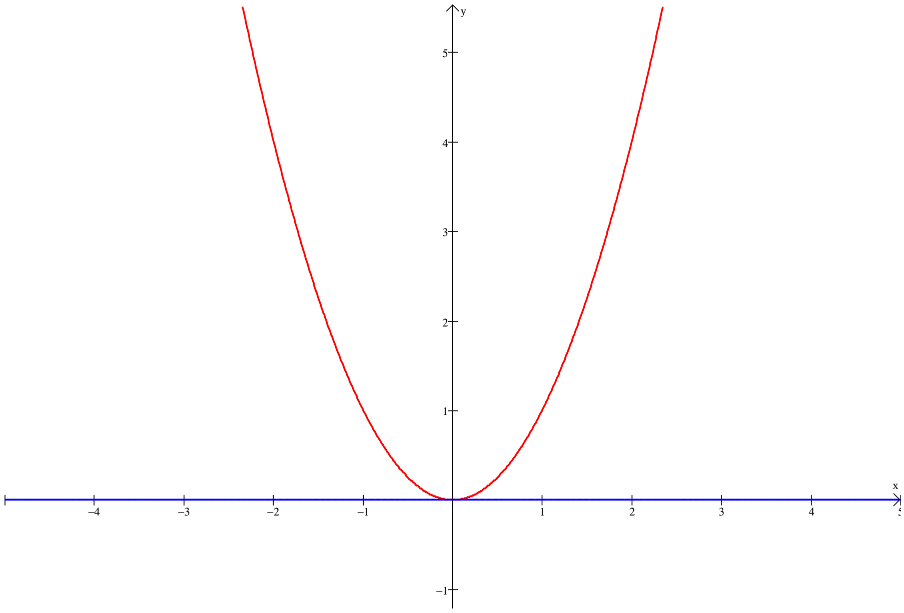


Figura 3: Reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 0$ (parâmetro $a = 0$)

Embora alguns alunos ficassem confusos com a solução, o gráfico está correto, pois, a tangente a $f(x)$ no ponto $x_0 = 0$ coincide com o eixo x. Para verificar as demais derivadas no intervalo fixado foi necessário utilizar o recurso de animação "Anim" disponibilizado pelo Winplot. Utilizando essa ferramenta e fazendo o parâmetro *a* variar (no intervalo de -10 a 10) os alunos conseguiam ver (e mostrar) "todas" as derivadas deste domínio da função. A figura abaixo mostra alguns desses gráficos:

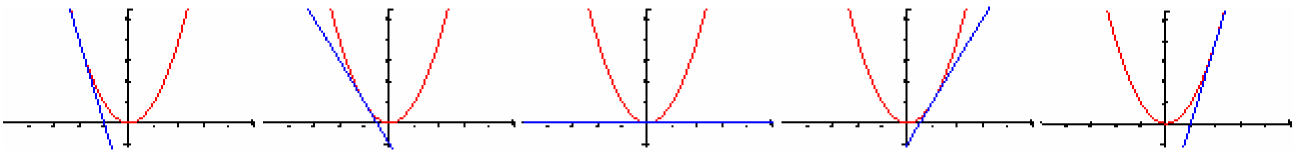


Figura 4: Seqüência de retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2$, nos pontos $x_0 = -2$, $x_0 = -1$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$ e $x_0 = 2$ respectivamente (parâmetro *a* sendo -2, -1, 0 1 e 2)

Outra idéia explorada pelos alunos nessa etapa foi questionando-os sobre como encontrar o gráfico da reta normal (perpendicular) ao gráfico da função $f(x)$ no ponto x_0 (mesmo ponto no qual o gráfico da derivada é tangente ao gráfico da função). Novamente os alunos foram levados a revisar os conteúdos já estudados nas disciplinas de CDI e GA no semestre anterior. Logo, eles encontraram a resposta para o problema, ou seja, recordaram que a chave para solução é dada por $m_r.m_s = -1$ (m_r coeficiente angular da reta tangente e m_s coeficiente angular da reta normal), ou seja, que o coeficiente da reta normal é dado pelo "inverso do coeficiente angular da reta tangente com o sinal trocado". Assim, para calcular a reta normal em relação a função $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 2$ tem-se: $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ que graficamente é dado por:

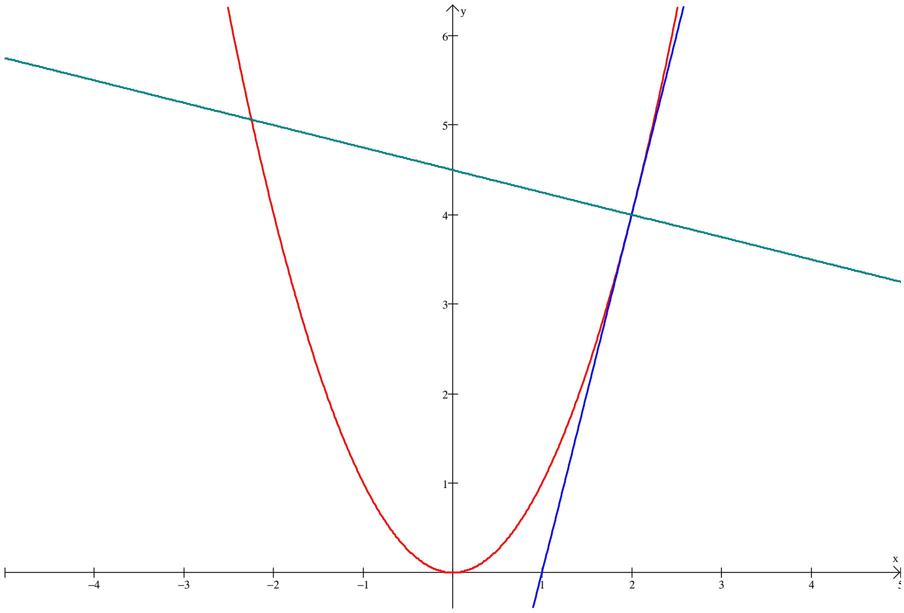


Figura 5: Reta tangente e reta normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 2$

É claro que essa atividade pode ser estendida para qualquer reta tangente, desde que façamos as alterações necessárias.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Algumas considerações que podemos fazer a partir deste trabalho é que os softwares (pagos ou livres) são ferramentas importantes para auxiliar os alunos a estudar CDI. Aqui realizamos um estudo envolvendo conceitos iniciais de derivada utilizando o Winplot que é um software gratuito disponibilizado na Internet.

O auxílio da visualização gráfica, por meio do software escolhido, revelou-se uma ferramenta importante para a investigação realizada pelos alunos, já que muitas vezes os conceitos não são (ou não foram) demonstrados nos cursos iniciais de CDI ou ainda foram impostos sem nenhuma justificativa.

Além disso, os alunos foram obrigados a revisarem conteúdos que haviam sido trabalhados em outras disciplinas, como GA, por exemplo.

Outra consideração importante, é que os participantes do projeto puderam perceber que para operar com um software é preciso saber manipular algumas equações para implementar na linguagem do programa. Não era possível escrever a equação da reta $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ no Winplot, mas sim escrever a forma reduzida $y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$ da equação anterior, utilizando o comando "equação explícita". Novamente, os estudantes se encontraram em uma situação na qual foi necessário recordar conceitos estudados anteriormente, como no ensino médio, e revisar os tipos de equações da reta.

Com o auxílio do software os alunos foram encorajados a explorarem novas situações de estudos. Além disso, eles puderam procurar, testar e justificar suas soluções.

É claro que a utilização de recursos computacionais não é uma solução definitiva para os problemas pedagógicos enfrentados por alunos e professores no curso de CDI, mas possibilita criar oportunidades para que se pense, resolva e explore problemas de uma nova forma.

Uma outra consideração a ser feita é que uma vez que o software é livre facilita o acesso ao mesmo. O download do software utilizado pode ser obtido pela rede além de não ter nenhuma licença, ou seja, pode ser instalado em qualquer laboratório de informática de qualquer instituição, pois se trata de um software livre.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, G. **Cálculo das Funções de uma Variável**. LTC editora, 7ª ed., volume 1, 2003.

BARUFI, M. C. B. & LAURO, M. M. **Funções Elementares, Equações e Inequações: Uma Abordagem Utilizando o Microcomputador**. CAEM – IME/USP.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Higyno H. Domingues – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências: Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática**. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2006.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. LTC: 3ª edição, 1997, volume 1.

LIMA. E. L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. Sociedade Brasileira de Matemática: Rio de Janeiro, 5ª edição, 2006.

VILLARREAL, M. E. **O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas**. Tese de Doutorado em Educação Matemática, Unesp (Rio Claro), 1999.

DIFERENCIAÇÃO IMPLÍCITA: VISUALIZANDO AS RETAS TANGENTES E NORMAIS COM O AUXÍLIO DO *WINPLOT*

Silmara Alexandra da Silva Vicente – Universidade Presbiteriana Mackenzie
Gisela Hernandes Gomes – Universidade Presbiteriana Mackenzie e Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (doutoranda em Educação Matemática)

Resumo*: O presente trabalho pretende levantar algumas questões para uma discussão sobre a interpretação dos alunos com relação à resolução de uma atividade proposta na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral para uma turma de Engenharia Civil da Universidade Presbiteriana Mackenzie. Essa atividade teve como objetivo o uso de uma ferramenta tecnológica para auxiliar na compreensão dos conceitos trabalhados em sala de aula, assim como, propor outra forma de avaliar esse aluno não somente por intermédio de avaliações escritas. O principal ponto da discussão é como auxiliar um aluno que resolve um exercício de diferenciação implícita de forma algébrica, traça o gráfico da função, da reta tangente e da reta normal em um determinado ponto dessa função usando um recurso tecnológico e não consegue perceber que sua resolução está incorreta. Nesse artigo apresentamos alguns exemplos que foram entregues por esses alunos e levantamos algumas questões sobre o uso da tecnologia em sala de aula e como ela deve propiciar uma análise crítica por esse aluno.*
Palavras-chave*: Diferenciação Implícita. Software Winplot. Ensino de Engenharia.*

1 INTRODUÇÃO

Diversas pesquisas vêm abordando as dificuldades encontradas pelos alunos na disciplina Cálculo Diferencial e Integral, que é ministrada em cursos de graduação na área de exatas e principalmente nos cursos de Engenharia. Os alunos que iniciam um curso de Engenharia muitas das vezes sofrem pela falta de embasamento matemático, geralmente com tópicos relacionados às funções, como destaca Mariani (2006). No entanto essas dificuldades não se restringem apenas a esses fatores, Cândido, Barufi e Monteiro (2004) também ressaltam que

> A introdução de idéias abstratas como a noção de limite, por exemplo, constitui um passo difícil porque implica em uma mudança profunda na maneira de raciocinar e obriga o aluno

a desenvolver uma sofisticada mudança do nível de reflexão na busca da compreensão do assunto.

Esses e outros trabalhos juntamente com nossa prática docente nos remetem a vislumbrarmos algumas alternativas que contribuam para o aprendizado dessa disciplina. Gomes e Vicente (2007) observaram que o uso do *software Winplot* em aulas de Cálculo pode ser muito produtivo na visualização do gráfico de uma função dada na forma explícita e das retas tangente e normal em um determinado ponto, embora a produção dos alunos usando uma ferramenta computacional revelou que é fundamental ter senso crítico na análise das atividades. O computador ou os *softwares* utilizados em sala de aula reproduzem os dados neles inseridos e não nos dizem se a atividade está correta ou errada.

Para uma maior compreensão e aprofundamento de nossos estudos que vêm sendo realizados desde 2005, produzimos e aplicamos no 2º semestre de 2007 uma atividade com alunos ingressantes do curso de Engenharia Civil da Escola de Engenharia (EE) da Universidade Presbiteriana Mackenzie (UPM) que visava à exploração do conceito de coeficiente angular de uma reta tangente ao gráfico de uma função dada tanto na forma explícita como na implícita, em um ponto $P(x_0;\ y_0)$. Para a realização dessa atividade usamos o *software Winplot*.. Nesse trabalho discutiremos os resultados apresentados pelos alunos em relação às funções dadas na forma implícita.

2 OS *SOFTWARES* USADOS COMO FERRAMENTAS DIDÁTICAS

Assim como diversas pesquisas apontam as dificuldades encontradas pelos alunos que cursam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, temos também muitos trabalhos que indicam o uso de novas tecnologias como uma maneira de superação dessas dificuldades. De acordo com Dall`Anese (2006) o computador é uma ferramenta que facilita a visualização de conteúdos abstratos trabalhados em sala de aula, sendo dessa forma uma ferramenta promitente para a discussão e aprofundamento desses conceitos.

Por iguais razões, também devemos destacar o trabalho de Bonomi, Boscaino e Nieto (2004) que apresenta a utilização de ferramentas tecnológicas possibilitando estabelecer situações que exploram não apenas a criatividade, mas, sobretudo o senso crítico, nas quais o conhecimento construído pelos estudantes é testado, valorizado, adquirindo uma dimensão mais significativa. O uso de um *software* gráfico como o Winplot propicia ao aluno a elaboração de conjecturas a partir da observação e reflexão.

2.1 Os trabalhos já realizadas com o *software Winplot* nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral

O uso do *software Winplot* nas aulas da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I das turmas de Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Presbiteriana Mackenzie tem sido feito desde 2005 e temos observado que apesar da contribuição pertinente que o uso de novas tecnologias traz para a sala de aula, é muito importante estarmos atento aos resultados apresentados pelos alunos.

No trabalho de Gomes e Vicente (2007) foi apresentada uma proposta metodológica para abordar a relação entre os sinais do gráfico da derivada de uma função f(x) e o gráfico dessa função utilizando o *software Winplot* permitindo a representação gráfica dessas funções. Nas atividades realizadas por 36 alunos ingressantes, no 1º semestre de 2005, do Curso de Engenharia Civil da EE da UPM, as autoras observaram que ao obterem o gráfico de uma função e o de sua derivada eles puderam visualizar mais facilmente a correspondência entre os sinais da função derivada e os intervalos de crescimento e decrescimento da função. No decorrer do final do semestre, os alunos apresentaram uma compreensão maior do que em semestres anteriores quando estudaram os problemas de otimização.

Em outro trabalho desenvolvido por Gomes e Vicente (2007), foi aplicada uma atividade aos alunos calouros admitidos no 1º semestre de 2007 do curso de Engenharia Civil da EE da UPM, sendo 50 alunos da turma A e 61 alunos da turma B. O objetivo da atividade foi utilizar uma ferramenta computacional, no caso o *software Winplot*, no qual os alunos pudessem visualizar o gráfico de uma função dada na forma explícita e implícita e os gráficos da reta tangente e da reta normal a um determinado ponto dessa função. Ao avaliarem os resultados apresentados pelos alunos, apenas das funções explícitas, as pesquisadoras notaram que apesar da importância do uso de uma ferramenta computacional, faz-se necessário uma análise crítica na avaliação dos resultados apresentados pelo *software*. A falta de conhecimento dos conceitos desenvolvidos em sala gera interpretações incorretas, pois a tecnologia por si só não tem a capacidade de resolver problemas.

3 AS ATIVIDADES APLICADAS AOS ALUNOS CALOUROS DO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

A atividade foi aplicada aos alunos ingressantes no curso de Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Presbiteriana Mackenzie, no 2º semestre de 2007 , sendo 54 alunos da turma A e 52 alunos da turma B. O objetivo da atividade, como o do trabalho realizado com os alunos do 1º semestre do mesmo ano, foi utilizar uma ferramenta computacional no qual os alunos pudessem visualizar o gráfico de uma função dada na forma explícita e implícita e os gráficos da reta tangente e da reta normal a um determinado ponto dessas funções. A entrega da atividade não era de caráter obrigatório, ela poderia substituir uma questão da 2ª prova semestral valendo 2,0 pontos. Essa condição foi exposta antes da realização da atividade o que acarretou um alto índice de alunos que não a entregaram.

Para a realização da atividade, os alunos primeiramente foram levados ao laboratório de informática para que pudessem conhecer o *software* Winplot e algumas de suas aplicações. A exploração do *Winplot* foi feita na aula de exercícios, pois essas aulas são dadas com as turmas divididas, o que facilita a discussão de algumas questões.

Durante as aulas de derivadas, diferentemente das atividades realizadas no 1º semestre de 2007, os alunos não precisaram criar uma função explícita, mas sim cada um sorteou, uma função dada na forma explícita e implícita, criadas pela professora. Após o sorteio, o aluno teria duas semanas para, usando o *software Winplot*, desenhar as funções, calcular o coeficiente angular das retas tangente e normal ao gráfico da função no ponto dado, encontrar as equações da reta tangente e normal, imprimir as representações gráficas e entregar juntamente com os cálculos efetuados. A primeira atividade estava relacionada a uma função dada na forma explícita e a segunda a uma função dada na forma implícita. Nesse trabalho são discutidos apenas os resultados obtidos nas funções dadas da forma implícita.

3.1 Os resultados da atividade

Dos 54 alunos da turma A, 25 entregaram a atividade relacionadas à função dada na forma explícita, ou seja 54% não a entregaram, e apenas 18 entregaram a atividade da função dada na forma implícita, ou seja 67% não a entregaram. Na turma B, a diferença não foi tão grande quanto na turma A e dos 52 alunos, 25 entregaram a da função explícita, ou seja 52% dos alunos não a entregaram, e 23 entregaram a da função implícita, ou seja 56% não a entregaram. Nos surpreendeu o baixo índice de entrega das atividades, uma vez que o aluno poderia fazer em casa, tinha duas semanas para realizar a tarefa e tirar as dúvidas com os colegas e o monitor da disciplina. Na mesma atividade realizada no semestre anterior, o índice de alunos que não realizaram a tarefa foi de 12% e 8,2% nas turmas A e B respectivamente e dos alunos que entregaram todos realizaram tanto a da função explícita como a da implícita. O baixo índice de entrega da atividade pode ter ocorrido em função do aviso de que a atividade não era obrigatória, mas sim substituiria uma questão na prova.

Nesse primeiro momento podemos observar que nem todos os alunos que realizaram as atividades conseguiram entregar a da função dada na forma implícita, o que nos sugerem que eles tiveram mais dificuldades, quer seja nos cálculos ou na própria execução da tarefa.

Na correção da atividade, relacionada às funções dadas na forma implícita, foram consideradas as que estavam corretas, parcialmente corretas e as incorretas, como apresentados na tabela 1 e no gráfico 1. O critério usado para classificar uma atividade como parcialmente correta se deu pelo fato do aluno ter apresentado algum conceito conhecido para a realização parcial da atividade.

	Correto	Parcialmente Correto	Incorreto	Não entregaram
Turma A (54 alunos)	13%	20%	0%	67%
Turma B (52 alunos)	29%	15%	0%	56%

Tabela 1: Porcentagem de acertos e erros das Turmas A e B..

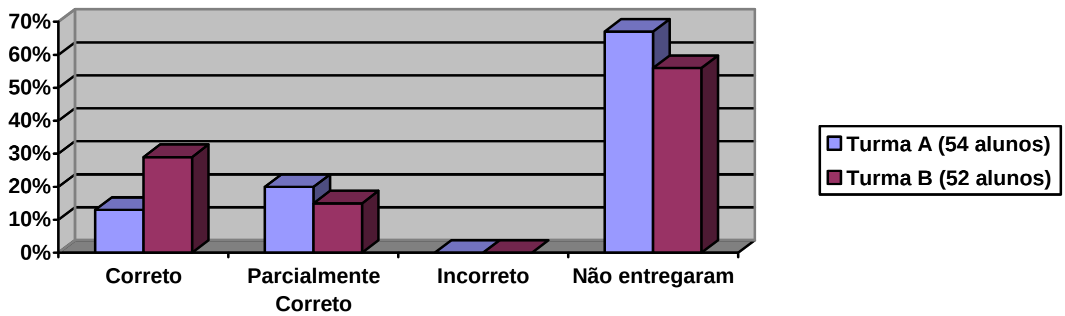


Gráfico 1: Porcentagem de acertos e erros das Turmas A e B.

Ao analisarmos as atividades que foram consideradas como parcialmente corretas encontramos alguns erros que nos apontam quais as dificuldades que os alunos apresentam. No caso do aluno 1, podemos observar que apesar de iniciar a diferenciação implícita corretamente, ele não colocou o número 100 antes dos parênteses, como ilustrado na figura 1. Esse aluno aparentemente tem noção sobre a posição relativa entre a reta tangente e a reta normal, devendo estas ser perpendiculares entre si, no entanto não apresentou a noção de reta tangente ao gráfico de uma curva em um determinado ponto considerado.

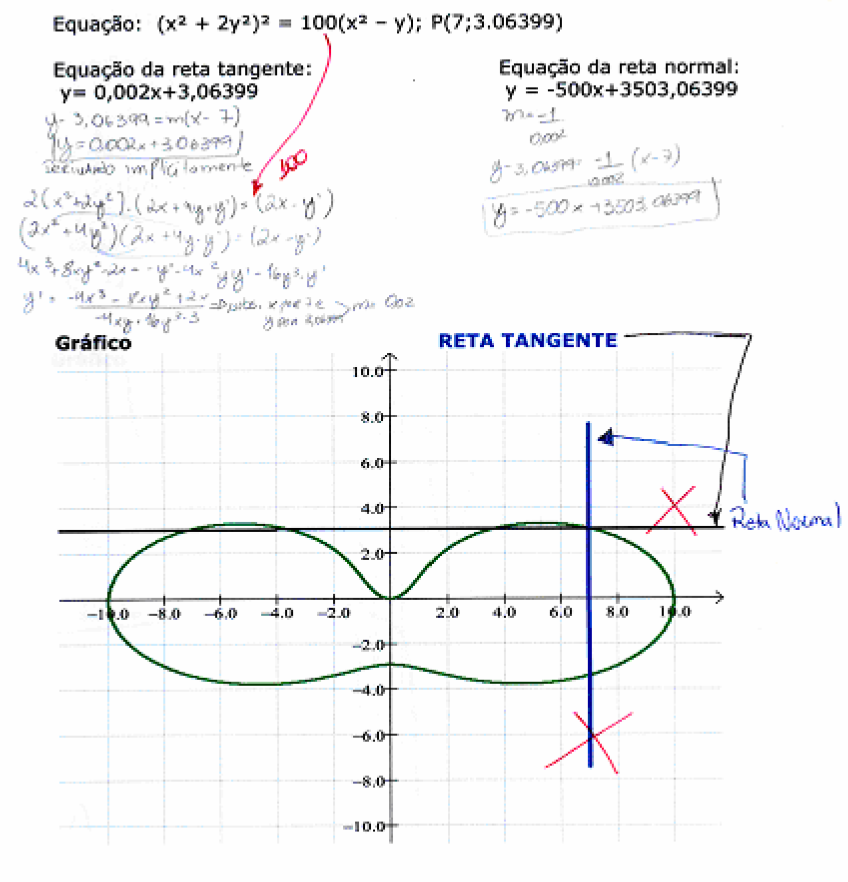


Figura 1: Gráfico e cálculos apresentados pelo aluno 1

A representação gráfica, nesse caso, não foi capaz de despertar nesse aluno uma análise crítica de que seus cálculos poderiam estar incorretos, pois a reta tangente não está tangenciando o gráfico no ponto dado.

Esse fato se repete na atividade entregue pelo aluno 2, no entanto seu erro está relacionado ao uso incorreto da regra da multiplicação, como ilustrado na figura 2.

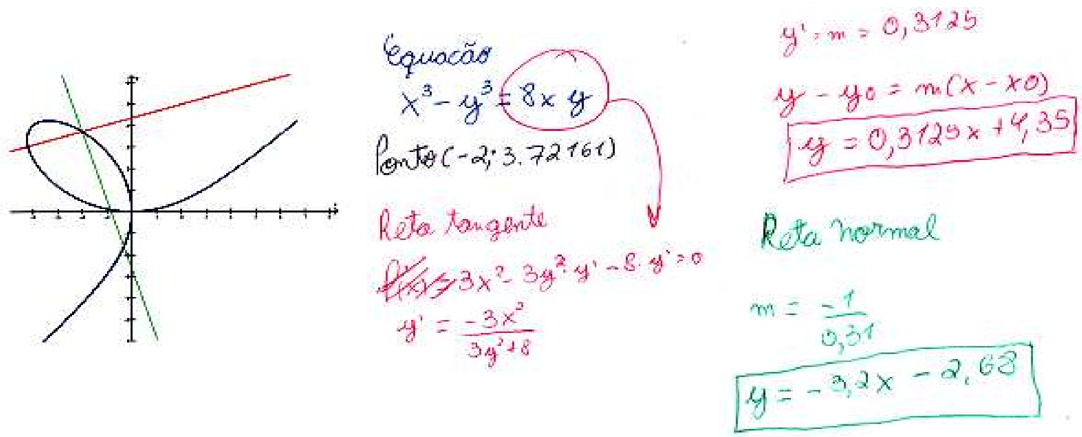


Figura 2: Gráfico e cálculos apresentados pelo aluno 2

Outro caso que nos pareceu interessante foi o caso do aluno 3 que apesar de realizar os cálculos corretamente, substituiu as coordenadas x_0 e y_0 de forma invertida nas equações das retas tangente e normal, como ilustrado na figura 3.

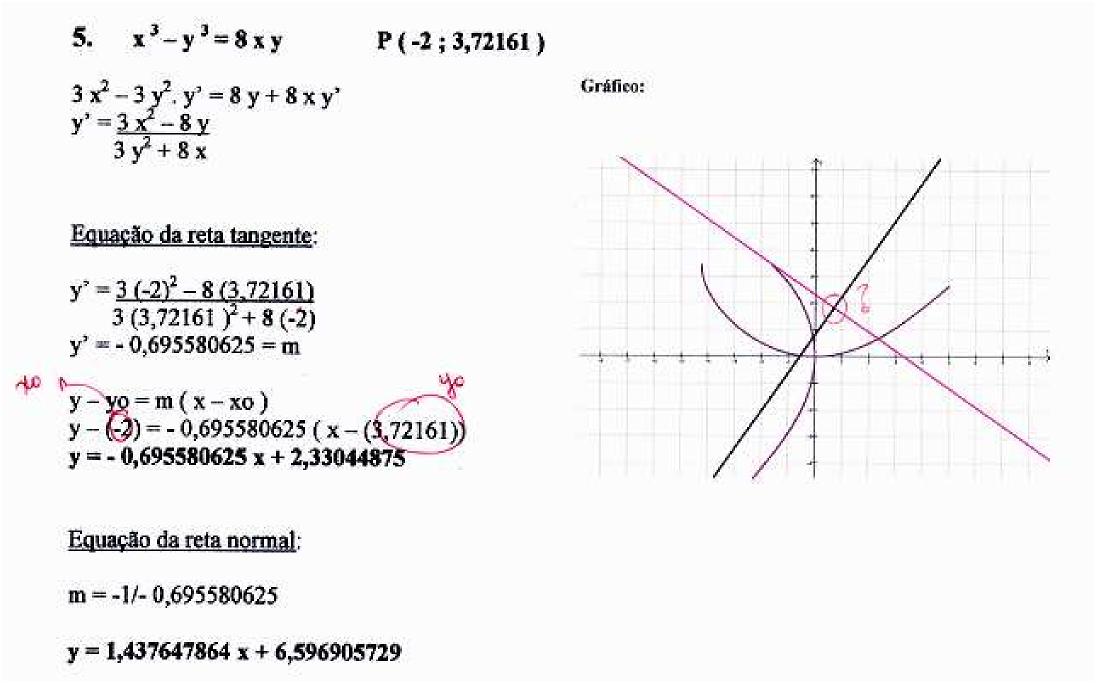


Figura 3: Gráfico e cálculos apresentados pelo aluno 3

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através dos trabalhos realizados ao longo desses anos pelas pesquisadoras Gomes e Vicente, e levando em consideração essa atividade desenvolvida pelos alunos envolvendo diferenciação implícita, podemos ainda afirmar que o uso de novas tecnologias no ensino de Cálculo Diferencial e Integral é relevante, principalmente no que diz respeito à visualização.

No entanto, até o presente momento não sabemos como encaminhar as atividades desenvolvidas em aula para propiciar aos alunos que não as realizaram corretamente e possam, com o auxílio de um *software*, analisar de forma crítica os resultados obtidos, encontrar seus erros e superar suas dificuldades. Alguns questionamentos são levantados pelas autoras do trabalho, tais como: O aluno sabe o conceito de reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto? O aluno identifica se um ponto pertence ou não a uma função? A visualização gráfica auxilia na resolução das atividades, uma vez que os alunos não possuem essa análise crítica? Quais elementos devem ser discutidos em aula para que o aluno possa ter argumentos de decisão?

Nossas pesquisas têm sido voltadas para levantar elementos que nos apontem caminhos e estratégias que permitam o aluno compreender os conceitos de cálculo, mas mais do que isso, propiciar discussões sobre a maneira como essas idéias podem ser discutidas em aula.

Referências

Barufi, M. C.; Boscaino, E. G. & Nieto, S. S. (2004). **A tecnologia no ensino da Matemática no Curso de Engenharia: não apenas como ferramenta de execução, mas de investigação.** *In: XXXII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*, Brasília. Anais do XXXII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia 2004. Brasília: Universidade de Brasília, 2004. 1 CD-ROM.

Cândido, C.. C. & Barufi, M. C. B & Monteiro, M. S. (2004). **Dificuldades no ensino/aprendizagem de Cálculo**. In VII Encontro Paulista de Educação Matemática, Anais do VII Encontro paulista de Educação Matemática. São Paulo, Brasil. 1 CD-ROM..

Dall'Anese, C. (2006). **Visual e Analítico: Argumentos e Metáforas para a Taxa de Variação.** *In: III HTEM - Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática*, São Paulo. Anais do III HTEM. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006. 1 CD-ROM.

Gomes, G. H.; Nieto, S. S. & Lopes, C. M. C. (2005). **Um projeto de experiência pedagógica com calouros nos cursos de Engenharia.** *In: III Congresso Internacional de Ensino de Matemática.* Anais do III Congresso Internacional de Ensino de Matemática. Canoas: Universidade Luterana do Brasil, 2005. 1 CD-ROM.

Gomes, G. H. & Vicente, S. A. S. (2007). **O uso do *software winplot* nas aulas de cálculo diferencial para a discussão do conceito de coeficiente angular da reta tangente.** *In XXXV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia*. Anais do XXXII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia 2007. Curitiba: UnicenP, 2007. 1 CD-ROM.

Mariani, R. C. P. (2006). **Transição da educação básica para o ensino superior: a coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de Cálculo**. (Tese de doutorado)

MATHLETS COMO AMBIENTES CORPORIFICADOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Ângela Rocha dos Santos – IM/UFRJ

Victor Paixão – Mestrando PEMAT/IM/UFRJ

O uso de novas tecnologias no ensino tem se mostrado uma real possibilidade nos dias atuais. Porém, mais do que simplesmente utilizar a tecnologia, os professores se vêem diante da questão de como utilizá-la de modo proveitoso para sua prática docente. Neste sentido, o presente trabalho visa a divulgação científica de pesquisas e experiências que vêm sendo realizadas por mestrandos do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT-UFRJ) sobre aplicativos conhecidos como mathlets (executados a partir de um navegador web). O trabalho apóia-se nas teorias de micromundos e cognição corporificada, associadas às idéias da teoria da pesquisa-ação, no sentido de transformar o professor em um "pesquisador em ação" (e não um "reprodutor de livros") e tornar o aluno personagem ativo do processo de ensino-aprendizagem.

INTRODUÇÃO

A partir da introdução do computador no dia-a-dia da sociedade - deixando de ser privilégio das grandes empresas -, alternativas para torná-lo uma ferramenta utilizável, sob diversos pontos de vista, começaram a ser pensadas e debatidas. Dentre os possíveis usos desta "nova tecnologia" está, sem dúvida, o aprimoramento da prática docente, o que acaba por conduzir professores e pesquisadores à busca de metodologias que permitam um ganho significativo com relação ao não uso destas "novas mídias". Em complemento, a proliferação da internet surge como aliada neste processo de difusão e utilização do computador. Neste sentido, estamos interessados em estudar de que forma estas novas tecnologias podem auxiliar na transformação da nossa prática educativa.

Devemos considerar que a formação da maioria dos nossos professores está relacionada com práticas que seguem a metodologia sumarizada na cadeia "definição → teorema → demonstração → corolário (aplicações)". Esta maneira de apresentação da matemática como um corpo de conhecimento pronto e acabado é resultado de um processo de filtragem que esconde os esforços criativos existentes por detrás de cada resultado obtido, oferecendo pouca margem de indagação e análise, impedindo que o aluno seja colocado diante do desafio de conduzir um processo de investigação científica ou de apreciá-lo com visão crítica. Sendo assim, concordamos com PAIS (1999, p. 29 – 30):

> "O aluno deve ser sempre estimulado a realizar um trabalho na direção de uma iniciação à 'investigação científica'... Aprender a valorizar sempre o espírito de investigação. Esse é um dos objetivos maiores da educação matemática, ou seja, despertar no aluno o hábito permanente de fazer uso de seu raciocínio e de cultivar o gosto pela resolução de problemas."

A partir desta visão de que o aluno deve ser construtor de seu próprio conhecimento, novamente nos deparamos com a questão da formação do professor: afinal, como formar um professor de modo que ele "aprenda" a estimular o aluno na construção de seu próprio conhecimento? De que modo este professor deve agir? Que recursos e metodologia utilizar?

Neste ponto, podemos vislumbrar uma oportunidade de uso da tecnologia, através das potencialidades de que a informática e a internet dispõem. Esta é uma demanda recorrente nos dias atuais. No entanto, é necessário que o professor esteja apto a incorporar estas mídias em sua prática docente e, como alertado por SANTOS, KUBRUSLY & BIANCHINI (2004), boa parte dos "materiais educativos" disponíveis em páginas web não contribui de fato para a melhoria do ensino de Matemática. Tais páginas exibem apenas textos, imagens de livros e outros acessórios que, em alguns casos, deslizam sobre a tela sob o pomposo nome de "demonstrações dinâmicas".

Apesar de ter despertado bastante atenção e suscitado muito interesse nos últimos anos em relação ao uso das novas tecnologias no ensino, no momento, temos mais perguntas do que respostas. Porém, quase todos concordam que o ensino e, particularmente, o ensino de matemática, pode e deve melhorar se soubermos explorar os variados recursos computacionais existentes ao nosso alcance.

OS MATHLETS

A fim de compreender melhor as potencialidades de utilização do computador em sala de aula, este trabalho busca na teoria dos ambientes corporificados – NÚÑEZ, EDWARDS & MATOS (1999) e TALL (2002) - embasamento para a proposta de utilização do que conhecemos como mathlets. Um mathlet, como definido pelo Journal of Online Mathematics and its Applications (JOMA), é uma pequena plataforma independente e interativa para o ensino de Matemática. No nosso caso, os mathlets são Applets Java[1] gráficos e interativos, que podem ser executados em qualquer navegador web. Cabe acrescentar que mathlet é um acrônimo para "*mathematic's applet*" (applet de matemática).

---

[1] Pequenos aplicativos em linguagem Java (portanto independentes de plataforma) que rodam diretamente de uma página web através de um navegador qualquer.

Dentre as vantagens comumente atribuídas a este tipo de ferramenta, podemos citar o fato de que os alunos podem interagir diretamente com o conteúdo (experimentação), criando uma intuição sobre determinado conceito explorado, de modo a tornar mais robusta a sua imagem de conceito sobre ele. Do ponto de vista do professor, temos ainda a vantagem de que este pode preparar uma aula com os mathlets e ministrá-la - sem qualquer alteração - num laboratório de informática ou à distância.

Destacamos ainda o fato de que o próprio professor, durante a construção de seus aplicativos e elaboração de seus roteiros didáticos, terá a sua imagem de conceito – no sentido de TALL & VINNER (1981) – melhor adequada à definição formal. Isto trará para ele um ganho em conhecimentos matemáticos, e na inter-relação de conceitos, que lhe será de grande valia em sua práxis.

OS AMBIENTES CORPORIFICADOS

A teoria de cognição corporificada (tradução nossa para o termo original, do inglês, *embodied cognition*), baseada aqui no sentido de NÚÑEZ, EDWARDS & MATOS (1999), é uma perspectiva sob a qual considera-se que o aprendizado e a prática de Matemática não são apenas atividades intelectuais, mas levam em conta fatores sociais, culturais e o contexto onde esta prática está inserida. Deste modo, o contexto social no qual o ambiente escolar está inserido não apenas influencia a prática docente mas, sobretudo, determina de que forma dar-se-á esta prática. Assim, podemos tratar da cognição corporificada como um processo situado social, econômica e geograficamente, e ambientado em torno das relações entre os atores deste processo, isto é, professores e alunos.

Indo além, pode-se dizer que o processo de aprendizagem está co-determinado pelas experiências pessoais (essencialmente físicas) às quais os alunos são submetidos. No entanto, alertam os autores, isto não significa que o ensino deva estar pautado necessariamente em contextualização, uso de exemplos e materiais concretos, manipulação física, e metodologias afins.

Utilizando-se da teoria supracitada, TALL (2002) propõe o uso da tecnologia como suporte a uma abordagem corporificada no ensino de Matemática, dando sentido às experiências e saberes *a priori* pertencentes ao aluno. Segundo o autor, os avanços tecnológicos nos permitem a interação necessária para que o aluno possa tirar suas próprias conclusões e impressões, tendo assim sua experiência uma grande contribuição no seu processo de aprendizagem. Isto faz com que um mathlet, por definição interativo, seja cabível de uso como um ambiente computacional corporificado, criando assim novas possibilidades e potencialidades dentro do ensino de Matemática.

PESQUISAS RELACIONADAS

Dentro deste contexto, duas pesquisas vêm se desenvolvendo no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT-UFRJ).

Uma destas pesquisas visa a compreensão do que é um “construtor de mathlets” em sua essência, com suas características e potencialidades, de modo que seja possível futuramente desenvolver novas bibliotecas de “mathlets configuráveis”, isto é, mathlets que possam ser criados por um professor que não possua qualquer conhecimento de programação de computadores, como relatado em SANTOS, PAIXÃO & PEREIRA (2007). Estas bibliotecas abrangerão um novo conjunto de tópicos, com a introdução de novas funcionalidades. A pesquisa pretende ainda apontar direções que mostrem como o professor poderá incorporar mathlets em suas aulas, a partir de exemplos prontos ou da utilização de um construtor, como o Descartes, financiado pelo governo da Espanha.

Por outro lado, alguns autores dissertam a respeito do “fracasso do ensino de Cálculo”, evidenciado pelas altíssimas taxas de reprovação das disciplinas de Cálculo em nossas universidades. Desta forma, a outra pesquisa supracitada procura compreender, dentre outras coisas, de que forma os mathlets podem auxiliar o aluno na compreensão dos conceitos do Cálculo e na superação dos obstáculos epistemológicos relativos a este.

CONCLUSÃO

Dadas as características dos mathlets, acreditamos que este ferramental se adequa às propostas de NÚÑEZ, EDWARDS & MATOS e de TALL, no sentido de tornar o aluno construtor de seu próprio conhecimento através de experiências corpóreas que lhe são familiares.

Isto dá à ferramenta uma grande importância dentro do contexto educacional, no sentido em que integra a sala de aula de Matemática aos avanços tecnológicos atuais, sem deixar de preocupar-se com seu objetivo maior, que é o ensino e a aprendizagem de qualidade. De todo modo, não basta apenas utilizar a tecnologia “por utilizar”; faz-se necessário que os professores saibam quando e como utilizar este ferramental de modo proveitoso e eficiente, sob risco de incorrerem nos erros e deficiências que buscamos corrigir.

Ainda como observação final, cabe referência o trabalho realizado por SANTOS no Projeto Novas Tecnologias no Ensino, no qual busca-se a disponibilidade pública de atividades didáticas que fazem uso de todo o potencial dos mathlets, visando a difusão desta tecnologia e das mídias disponíveis nas salas de aula de nosso país.

Referências

Descartes; disponível em http://descartes.cnice.mec.es; consulta realizada em agosto de 2007.

Journal of Online Mathematics and its Applications (JOMA); disponível em http://www.joma.org; consulta realizada em agosto de 2007.

Núñez, R. E., Edwards, L. D. & Matos, J. F. (1999); *Embodied Cognition as Grounding For Situatedness and Context in Mathematics Education*; Educational Studies in Mathematics, n. 39; pp. 45-65.

Pais, L. C. (1999); *Transposição Didática*; In Machado, S. D. A., et. al. Educação Matemática; EDUC; São Paulo.

Santos, A. R. dos (coord.); *Projeto Novas Tecnologias no Ensino - Introdução às Funções Reais*; Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro; disponível em http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/Atividades/index.htm; consulta realizada em agosto de 2007.

Santos, A.R. dos, Kubrusly, R. S. & Bianchini, W. (2004); *Mathlets: Applets Java para o Ensino de Matemática*; Anais do II HTEM; UERJ; Rio de Janeiro.

Santos, A. R. dos, Paixão, V. & Pereira, V. M. C. (2007); *Construindo Nosso Próprio Mathlet*; Anais Eletrônicos do IV CIEM; ULBRA; Canoas.

Tall, D. (2002); *Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics*; Anais do I HTEM; UERJ; Rio de Janeiro.

Tall, D. & Vinner, S. (1981); *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity*; Educational Studies in Mathematics, n. 12; pp.151-169.

UMA SEQÜÊNCIA DE ENSINO PARA A AQUISIÇÃO DO CONCEITO *LIMITE* PARA FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS COM O AUXÍLIO DO MAPLE

Autor: MS. Francisco Regis Vieira Alves[1]- fregis@etfce.br

Autor: Doutor Hermínio Borges Neto[2] - hermínio@ufc.br

Autor: Doutor. (a) Rosélia Costa de Castro Machado [3]– rosélia@ufc.br

Nesta investigação de caráter exploratório, pretendeu-se analisar a aquisição do conceito de limite de funções em várias variáveis reais. Dentre os motivos que influenciaram tal escolha, destaca-se: a predominância de trabalhos voltados apenas ao Cálculo em uma variável real. Desta forma, realizamos sessões de ensino na disciplina de Cálculo III, no Curso de Licenciatura em Matemática, no Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará – CEFET/CE, com a amostra de 10 alunos. Adotou-se a metodologia de ensino denominada Seqüência Fedathi, com a intenção de promover a adequada evolução do raciocínio intuitivo e lógico. Os dados quantitativos foram obtidos de situações estruturadas aplicadas na disciplina, enquanto os dados qualitativos foram extraídos de entrevistas semi-estruturadas e situações de observação. Nota-se que os livros didáticos realizam uma tênue ligação entre os conceitos do Cálculo I e III.

Palavras-Chave: Ensino de Cálculo, Aprendizagem, Limite de Funções.

---

[1] Professor do Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará – CEFET/CE.
[2] Professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará – UFC.
[3] Professora do Departamento de Educação da Universidade Federal do Ceará – UFC.

DIFICULDADES INERENTES AO APRENDIZADO DA NOÇÃO DE LIMITE

As dificuldades relativas ao ensino/aprendizagem do conceito de *limite* são há muito conhecidas (ZUCHI, 2005, pg.18). Tais problemas, porém, não podem ser vislumbrados de forma isolada no tempo. De fato, ao contemplarmos o passado, quando surgiram as idéias de homens que contribuíram para a evolução deste conceito, podemos identificar inúmeros obstáculos. Tais entraves são descritos ao longo da História da Matemática, de mais de 2500 anos, envolvendo os processos de conceitualização e instrumentalização do *limite* (*IDEM*, pg. 18).

A quantidade de pesquisas (BARUFFI, 1999; ECHEVERRY, 2001) que tratam deste tema supera o poder de síntese deste artigo. Destacamos o trabalho de Tall (1980), onde encontramos reflexões sobre o assunto, com a intenção de explicar os processos cognitivos necessários para a aquisição deste *objeto.*

Ressaltamos dois aspectos relacionados a este conceito, que podem funcionar como fatores que dificultam o seu ensino e aprendizagem. O primeiro refere-se à sua natureza epistemológica reconhecidamente complexa (CORNU, 1983). O segundo diz respeito aos processos mentais requeridos no entendimento desta noção (ARTIGUE, 2003; TALL, 2002).

O ensino de *limite* é abordado, geralmente, no primeiro ano dos cursos de Licenciatura em Matemática. Do ponto de vista epistemológico e psicológico, sua compreensão é necessária para a aquisição das noções de *derivada* e *integral*, tanto no caso de uma como no de várias variáveis. Além disso, numa perspectiva filosófica, Robinson (1969, pg. 153) sublinha D´alembert, quando este declarava que a Teoria dos Limites é a verdadeira base metafísica do *cálculo diferencial*.

Os trabalhos mencionados apresentam como objeto de investigação a idéia de *limite* em uma variável real (Cálculo I), contudo, que entraves podemos identificar na aprendizagem de *limites* de funções em mais da uma variável real (Cálculo III)? Em virtude da generalização da algumas propriedades do Cálculo em uma variável real, que passam a ser exploradas no R^3, estes obstáculos epistemológicos podem vir a se repetir? O sistema simbólico do Cálculo Diferencial em várias variáveis pode provocar algum entrave para a compreensão deste conceito? Alguns destes questionamentos serão tratados adiante, com maior atenção. Assim, passamos a discutir o papel de um elemento essencial desta noção, a saber, sua *definição formal*, que pode ser encontrada na obra de Guidorizzi (2001, pg. 748), e que apresentamos como segue.

Definição. Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de A e L um número real. Definimos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que, para todo} \\ (x,y) \in D_f, \\ 0 < \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon \end{cases}$$

Na seqüência, o livro traz a ilustração gráfica (ilustração 1), envolvendo a idéia abstrata do comportamento entre o domínio e o contra domínio de uma função $f(x,y)=z$. Curiosamente, o mesmo volume perde a oportunidade de explorar a representação do *gráfico de uma função* desta classe, o que pode ser encontrado em Stewart (2004, pg. 889).

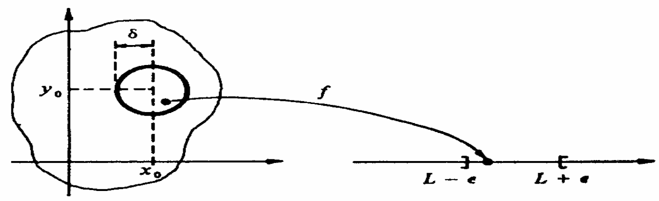


Ilustração 1

Brolezzi (2004, *apud*, ZUCHI, 2005, pg. 19) refere-se à noção de *limite* como abstração forte e que deveria ser adiada até um momento mais oportuno. Diante do argumento apresentado por ele, quando o aluno inicia o Cálculo em várias variáveis, em virtude do aumento de complexidade da linguagem na *definição*, não é natural esperarmos incompreensões por parte deste? Além disso, como os exemplos das representações apresentadas acima apresentam limitações no que se refere à compreensão desta noção, de que forma podemos potencializar tal aprendizagem com o recurso de um *software* de Matemática como o Maple?

Brolezzi reporta-se às dificuldades encontradas pelos gregos no que se refere ao domínio de uma linguagem algébrica que permitisse o tratamento da noção de *limite*. Acreditamos que barreiras como as descritas há pouco surgem não apenas como conseqüência das propriedades da *definição*. De fato, Tall (2002, pg. 17) sublinha a idéia de que um matemático, ordinariamente, toma uma idéia matemática complexa e a simplifica, quebrando-a em componentes simples e fáceis de ensinar numa seqüência lógica e, acrescentamos, não necessariamente didática.

Pensamos que um conceito não é dado somente por sua explicação formal, contudo vem equipado com uma intenção informal (KRÖMER, 2007, pg.2). Possivelmente esta intenção informal que Krömer destaca se refira ao *insight* de Wittgenstein, insofismavelmente de acerte difícil para os matemáticos e que era um argumento a defender os conceitos não completamente governados pelas regras formais (KRÖMER, 2007, pg.7).

Voltando ao nosso contexto e referendados por nossa experiência, sentimos que as simbologias como: $Lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)=L$ produzem barreiras, não apenas pelo fato de envolverem um sistema simbólico mais sofisticado, como também oriundo das regras formais e informais dos seus idealizadores. Lembramos que temos regras informais, não definidas explicitamente, contudo, aprendemos sobre elas ao longo da sua utilização (KRÖMER, 2007, pg.2).

Uma regra informal no estudo do Cálculo em várias variáveis é o caso de *limites interados*. Em sua utilização, identificamos *operações comutativas* e *não comutativas*. De fato, Hardy (1908, pg. 436) lembra que ocorrem casos como: $Lim_{x\to 0}(Lim_{y\to 0}(\frac{x-y}{x+y}))=1=-Lim_{y\to 0}(Lim_{x\to 0}(\frac{x-y}{x+y}))$.

A importância didática envolvendo a noção de *limite interado*, que apresenta *operações comutativas* e *não comutativas*, reside na ligação com outros *processos* estudados nesta disciplina, como a obtenção da *derivada parcial*, para uma função f, de classe C^2, e o *processo de integração*, para funções contínuas. Portanto, em determinadas condições, temos *processos* comutativos que poderiam ser explorados, embora esta oportunidade de promover no aluno o raciocínio por analogia, no sentido de Polya (1945, pg. 37), seja desperdiçada no caso dos *limites*.

Na perspectiva de Henriques (2006, pg. 24), assumimos a *hipótese* de que quanto maior conhecimento do funcionamento das representações do conceito de *limite*, em diversos ambientes, dentre eles, num ambiente computacional, melhor a compreensão do aluno. Sendo assim, com o objetivo de superar algumas das dificuldades resumidamente mencionadas acima, passamos a descrever a *metodologia de ensino* que compreendemos ser a mais adequada.

APLICAÇÕES DA SEQÜÊNCIA *FEDATHI* NO ENSINO DE CÁLCULO

Utilizamos *transposição didática* baseada na *Seqüência Fedathi*, com a intenção de criar um clima experimental de investigação. Dentro de nossos objetivos e orientando-nos segundo a hierarquização dos níveis constituintes da *Seqüência Fedathi*, nos deparamos com as *situações*.

- **Nível 1** <u>Tomada de posição – apresentação do problema.</u> Neste nível, o pesquisador-professor apresenta uma situação-problema aos alunos, que devem possuir meios de atacá-lo com a aplicação dos conhecimentos do Cálculo em uma variável real (Cálculo I).
- **Nível 2** <u>Maturação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema</u>. Destinado à discussão e debate envolvendo os elementos: *professor-alunos-saber*.

Comentário: estimulamos os alunos na resolução problemas apenas com os instrumentos conceituais do Cálculo em várias variáveis. No laboratório, os alunos são estimulados na exploração do *desenho-Maple* (TEREZINHA, N. B. C. & PEREIRA, R. 2004, pg. 53).

- **Nível 3** <u>Solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema</u>: aqui, os alunos, organizados em grupos, devem apresentar soluções que possam conduzir aos objetivos solicitados e convencer por intermédio de suas *argumentações*, outros colegas.
- **Nível 4** <u>Prova – apresentação e formalização do modelo matemático e ser ensinado</u>. Aqui, a didática do professor determinará em que condições ocorrerá a formalização dos argumentos utilizados nos níveis anteriores.

QUADRO TEÓRICO E METODOLÓGICO DE PESQUISA

A *pesquisa participante* teve início na disciplina Cálculo III, do Curso de Licenciatura em Matemática, no Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará – CEFET/CE, com a *amostra* de 10 alunos. Adotamos o *estudo de caso* para a observação detalhada de um acontecimento específico (BOGDAN e BIKLEN, 1994, pg. 89), que envolve a relação aluno-professor-saber matemático.

Tal relação foi observada na sala de aula e no ambiente laboratorial, onde trabalhamos com o *software* MAPLE 10. A utilização deste *software* evita cálculos fastidiosos, e permite o estudo de situações complexas, se comparado com as técnicas tradicionais (HENRIQUES, 2006, pg. 6). Com a intenção de desenvolver instrumentos de avaliação da aprendizagem e o acompanhamento da evolução das habilidades dos estudantes, fundamentamo-nos em Perminov (1988, *apud*, SILVA, 2001, pg. 45), que distingue cinco tipos de *intuição*. Passemos à caracterização e exemplificação de seu emprego para a elaboração e concepção das atividades ao longo da Seqüência *Fedathi*.

- **Intuição empírica** - baseia-se na analogia e diretamente da experiência adquirida no processo de manipulação de uma classe de *objetos* materiais ou conceituais, e que possibilita a transferência dos atributos mais freqüentes dentro de uma classe de objetos.
- **Intuição objetiva** - faculdade humana de distinguir e identificar os objetos no ambiente de suas combinações algébricas ou geométricas simples.
- **Intuição lógica** – manifesta-se primariamente nas conclusões ou *inferências* "*por definição*", bem como extraídas de modelos lógicos de *transitividade* e *contraposição*.
- **Intuição categórica** - também chamada de *geométrica* ou *espacial*, que relaciona as suposições aos conceitos de espaço e tempo.

Exemplo: Apresentamos diversas situações de investigação da *existência* por (ε, δ) e a continuidade, por meio da exploração *desenho-Maple*, como na figuras apresentadas em anexo.

- **Intuição conceptual** - acrescenta à noção de um objeto, um componente derivado da teoria da qual o *objeto matemático* é considerado em suas relações conceituais.

ALGUNS RESULTADOS E DADOS DAS ENTREVISTAS

No início das entrevistas *semi-estruturadas*, buscamos identificar os elementos presentes na disciplina Cálculo em várias variáveis que, na opinião dos alunos, exprimem um caráter semelhança, quando comparada à disciplina Cálculo em uma variável real. Uma questão observada com freqüência relaciona-se à necessidade de compreensão da *existência* de um *limite*.

O **aluno 1** declara: A maior dificuldade são as majorações. Do limite ainda to começando a entender.

O **aluno 2** percebe a mudança de suas concepções diante do Cálculo em várias variáveis e, quando requisitado sobre sua confiança com que executa e avalia os *limites* que lhe foram apresentados, explica:

Mais ou menos... No Cálculo I a gente aceita porque é a primeira idéia, mas aqui começa a modificar tudo.

Mais adiante na entrevista, o **aluno 2** avalia a própria aprendizagem no Cálculo em uma variável real acentuando que:

Eu estudava. Acreditava naquilo, mais não compreendia. Dava para acreditar pelo que o professor provava.

O **aluno 3** caracteriza as dificuldades iniciais sobre *limites* da seguinte forma:

Todas as possíveis e imagináveis...Nâo acredito no épsilon e delta.

O **aluno 4** usa a *intuição lógica*, quando resolve a questão 6, mas não sabe justificar.

Eu cancelei o ρ , mas não tenho certeza se posso cortar.

As dificuldades relacionadas à compreensão da *existência*, fornecida pela formulação epsilônica, são observadas com freqüência, como temos o exemplo do aluno 5.

O limite existe por épsilon e delta, não? Ou é a função que existe por épsilon e delta.

Em relação aos seus argumentos e dos demais estudantes, lembramos as palavras de Fischbein (1987, pg.7) quando explica que a lógica confere por si mesma não é uma certeza absoluta, porém, uma forma de aprovação convencional. Assim, em tarefas que envolviam a formulação (ε, δ), os alunos realizaram de maneira razoável, embora sem compreensão.

No que se refere à analise *quantitativa*, apresentamos 17 *limites* (em anexo) e requisitamos a análise de sua *existência* e *continuidade*, somente pela observação de suas representações. A mesma situação foi proposta no laboratório, com arrimo na exploração do *desenho-Maple*. Identificamos uma melhora de 47% nas estratégias que utilizaram o recurso computacional, enquanto observamos 35%, com a aplicação da Seqüência Fedathi, de evolução nas atividades sem o uso do computador e embora em 18% dos itens, eles tenham apresentado o mesmo aproveitamento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sentimos as dificuldades na transição dos estudantes do Cálculo em uma variável real para o Cálculo em várias variáveis. No que se refere a esta transição, no **nível 1**, usamos exemplos do tipo: $Lim_{(x,y)\to(0,0)}(\frac{2xy^2}{x^2+y^4})$. Aqui o aluno necessitava realizar duas mudanças de variáveis, a primeira: $X = x$ e Y=y^2 e, depois, $X = Cos(\theta)$ e Y=Sen(θ), o aluno pode chegar à seguinte desigualdade: $0 \le \left|\frac{2xy^2}{x^2+y^4}\right| = \frac{2|XY|}{|X^2+Y^2|} = \left|\frac{2\rho^2 Cos(\theta) sen(\theta)}{1}\right| \le 2\rho^2 \overset{(X,Y)\to(0,0)}{\to} 0$. Esta tarefa possibilita a resolução de situações do Calculo III, com estratégias do Cálculo I, fortalecendo a *intuição lógica* e *objetiva*.

Estas categorias da *intuição* foram reforçadas no **nível 4** da *Seqüência Fedathi*, em que apresentamos a *prova* dos modelos matemáticos utilizados nos níveis anteriores. A *intuição conceptual e a intuição lógica* foram avaliadas predominantemente nos níveis 3 e 4, na abordagem de situações que envolviam a utilização de contra-exemplos e *existência* de *limites interados*.

No **nível 2**, diante da utilização do *software* Maple, em virtude da possibilidade da exploração do *desenho-Maple*, promovemos a *intuição geométrica* dos estudantes. De fato, em situações do tipo $f(x,y)=\begin{cases}(xy)\cdot\dfrac{Sen(x)-y}{x-Sen(y)} \text{ se (x,y)} \neq \text{(0,0)} \\ \text{0 se (x,y)=(0,0)}\end{cases}$, temos uma tarefa complexa, de modo que a investigação da continuidade desta função, analiticamente, torna-se uma tarefa cansativa.

Após extenso *levantamento bibliográfico* (APOSTOL, 1969; MARSDEM, J. & TROMBA, A, 1996), evidenciamos um tratamento dado ao conceito de *limite* que realiza uma tênue ligação entre as disciplinas de Cálculo I e Cálculo III. Alguns resultados que necessitam ser demonstrados são utilizados como algorítmicos, em cuja maioria os estudantes não compreendem a origem. Além disso, a tônica dos exercícios envolve a aplicação dos *teoremas* relacionados ao conceito de *limite*, em detrimento do emprego da idéia da *demonstração*.

Finalmente, a importância de promover a *intuição* é sublinhada por Fischbein (1987, pg. 8), uma vez que um dos efeitos da busca pela cientificidade é o aumento crescente do rigor, malgrado o conhecimento intuitivo tenha sido sempre revelado e descrito. No caso particular de *limites*, identificamos alguns elementos ligados à intuição que podem potencializar a aprendizagem com o auxílio de *softwares* como o MAPLE. Parafraseando Kline (1985, pg. 21), a importância para o professor, da distinção entre a terra e o mar pode ser comparada com a compreensão entre a natureza do raciocínio intuitivo e do raciocínio lógico necessários para aprendizagem desta noção.

REFERÊNCIAS

Apostol, T. M. (1969) Multi Variable Calculus and Linear Álgebra, with applications to Differential Equations and Probability, Vol. II, 2ª edição, New York :John Wiley and Sons.

Artigue, M. (2003) *Qué se pude aprender de la Investigation* Educativa en el nível universitário?, Boletin de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, Nº 2,, 117-134.

Baruffi, M. C. B. (1999) A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Calculo Diferencial e Integral. (Tese de doutorado), USP.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994) *Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*, Porto: Editora Porto.

Cornu, B. (1983) *Apprentissage de la notion de limite*: conceptions et obstacle (thèse), Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

Echeverry, N. (2001) *La ensenãnza del concepto de limite*: continuidad y rupturas entre los niveles médio y universitário (tesis), Universidad Nacional de Rio Cuarto, Córdoba.

Fischbein, E. (1987) *Intuition in science and mathematics*: an educational approach, Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library.

Guidorizzi, H. L. (2001) *Um curso de Cálculo*, vol. 3, 5ª edição, Rio de Janeiro: Editora LTC.

Robson, A. *The metaphysics of the Calculus*. In: Hintikka, J. *The Philosophy of Mathematics*, London: Oxford University Press, 1969.

Henriques, A. (2006) L´enseignement et l´apprentissage des integrales multiples: analyse didactique integrant l´usage du logiciel maple (Thèse de Doctorat), Grenoble, Université Joseph Fourier, IMAG.

Hardy, G. H. (1908) A course of Pure Mathematics, Cambridge – University Press, London.

Kromer, R. (2007) *Tool and Object*: a history and Philosophy of Category Theory, Berlin: Birkhäuser Verlag.

Kline, M. *Mathematics and the search for the knowledged*, London: Oxford University Press, 1985.

Marsdem, J. & Tromba, AA. (1996) *Vector Calculus*, New York: W.H. Freeman and Company.

Polya, G. (1945) *How to solve it*, Second edition, Princeton: University Press.

Silva, F. R. (2001) A tensão entre o rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros, Tese de doutorado, UNICAMP, Campinas.

Stewart, J. (2004) *Cálculo*, Vol. II São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 4ª edição.

Tall, D. (1980) *Mathematical Intuition*: with special reference to limit processes, Proceedings of the Fourth International Conference of the Psychology of Mathematical Education, Berkeley, 170-176.

Tall, D. (2002) *Advanced Mathematic Thinking*, Mathematics Educational Library, New York: Klumer Academic Publishers, Vol. 11.

Terezinha, N. B. C. & Pereira, R. (2004) *O software "Maple" no estudo de funções de várias variáveis*, In: Educação Matemática em Revista, Nº 17, 52-60.

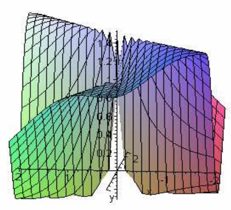
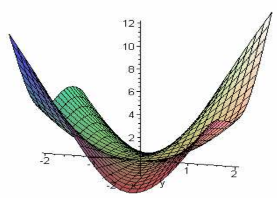
Zuchi, I. (2005) A abordagem do conceito de limite via seqüência didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional (tese de doutorado), UFSC.

ANEXO: EXEMPLOS DAS SITUAÇÕES TRABALHADAS AO LONGO DA SEQUENCIA FEDATHI

Comentário: Freqüentemente estimulamos a comparação dos resultados obtidos analiticamente e numericamente, com os resultados mostrados pelo software Maple 10, como podemos observar abaixo.

Questão um: Analise e compare geometricamente o comportamento (se existirem) dos seguintes *limites*:

$$(I)\,Lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)}\right) \text{ e } (II)\,Lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

Comentário: Evidenciamos nos livros de Cálculo, o tratamento breve ou até mesmo inexistente sobre a noção de *Limites Interados*. Acreditamos que esta noção pode fortalecer a *intuição lógica*, uma vez que pode estabelecer a relação com os processos de *derivação* e *integração*. Apresentamos parte das situações usadas no **nível 4**, da *Seqüência Fedathi*.

Questão dois: Marque (V) ou (F) e justifique.

a) Quando sabemos que o limite $Lim_{(x,y)\to(0,0)}(f(x,y))=L$ existe, então, necessariamente, existirão $Lim_{x\to0}(Lim_{y\to0}f(x,y)))=L=Lim_{y\to0}(Lim_{x\to0}f(x,y)))$. ( )

b) Sabendo que $Lim_{x\to0}(Lim_{y\to0}f(x,y)))=L=Lim_{y\to0}(Lim_{x\to0}f(x,y)))$, podemos afirmar que $Lim_{(x,y)\to(0,0)}(f(x,y))=L$. ( ).

c) Sabendo que $Lim_{x\to0}(Lim_{y\to0}f(x,y)))=\infty=Lim_{y\to0}(Lim_{x\to0}f(x,y)))$, podemos afirmar que $Lim_{(x,y)\to(0,0)}(f(x,y))=L$. ( )

Comentário: Alguns resultados, como regras operatórias para *limites* de funções de várias variáveis não foram demonstrados. Os mesmos resultados podem ser verificados no Cálculo em uma variável real. Sendo assim, na questão três, requisitamos o emprego da *intuição lógica*, quando o aluno necessitava empregar propriedades semelhantes na resolução do limite de funções como mostramos abaixo.

Questão três: Decida sobre a continuidade de $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{Sen(\theta)x^2+yz^2Cos(\theta)}{x^2+y^2+z^2} & \text{se (x,y,z)} \neq \text{(0,0,0)}\\ \text{0 se (x,y,z)=(0,0,0)}\end{cases}$

Comentário: Algumas situações foram abordadas com a intenção de mostrar aos alunos que a maioria das funções apresentam características que dificilmente podem ser compreendidas com o uso limitado do tratamento de (ε,δ)

Questão quatro: É possível resolver o seguinte limite por *épsilon* e *delta* $Lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{x^4y^3}{x^4+y^8}\right)$?

TECNOLOGIAS INFORMÁTICAS E PROJETOS EM GEOMETRIA ANALÍTICA: UMA EXPERIÊNCIA NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Adriana Richit
Doutoranda em Educação Matemática - Unesp / Rio Claro, SP
Membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM)
Bolsista CNPq

RESUMO

Este texto visa a apresentar as possibilidades emergentes do trabalho com projetos, usando software de geometria dinâmica, ao aprofundamento do conhecimento matemático, tendo por contexto a disciplina de Geometria Analítica, bem como a aquisição de saberes de uso pedagógico das tecnologias informáticas. O relato aqui apresentado baseia-se nos resultados de um estudo, realizado em nível de mestrado, o qual buscou analisar e descrever como trabalhar com projetos, usando software de geometria dinâmica, visando a contribuir com a formação de futuros professores de Matemática. Com base nesse estudo foi possível mostrar as possibilidades que emergem do trabalho pedagógico envolvendo o uso das mídias informáticas, na perspectiva do construcionismo, para a formação pedagógico, tecnológica e específica do futuro professor de matemática.
Palavras-chave: Tecnologias Informáticas, Educação Matemática, Projetos.

INTRODUÇÃO

A pesquisa aqui apresentada foi desenvolvida com seis alunos do primeiro ano da licenciatura em Matemática da Unesp de Rio Claro, SP, os quais estavam em Regime Especial de Recuperação (RER) na disciplina de Geometria Analítica. Esses estudantes foram selecionados de acordo com o interesse demonstrado pelo trabalho que estaria sendo desenvolvido. Posterior a seleção, os licenciandos, divididos em duplas, engajaram-se no desenvolvimento de projetos em Geometria Analítica. Tais projetos constituíam-se de atividades didáticas focando conteúdos diversos da disciplina supracitada, privilegiando o uso do software Geometricks. A criação do ambiente de aprendizagem que permeou o desenvolvimento dos projetos foi norteada pelos princípios do Construcionismo.

O estudo realizado pautou-se na implementação de uma intervenção pedagógica, constituída de nove encontros de duas horas cada, a qual coaduna o trabalho com projetos e o uso de software de geometria dinâmica, em consonância com os preceitos teóricos do Construcionismo. A estratégia adotada na referida pesquisa se constitui numa forma de entrelaçar o uso das mídias informáticas às experiências educacionais de futuros professores de Matemática, por meio de atividades que concedem aos alunos autonomia para pesquisar, explorar representações e elaborar projetos sobre conceitos matemáticos, partindo do interesse de cada dupla.

REFLEXÕES SOBRE A FORMAÇÃO DOCENTE

A formação de professores, entendida na abordagem de Ferreira (2003) como o processo pelo qual o sujeito aprende a ensinar, é resultante da inter-relação entre teorias, modelos, princípios extraídos de investigações experimentais e regras procedentes da prática que possibilitam o desenvolvimento profissional do professor. Devido a sua abrangência e relevância, este tema tem sido foco de muitas discussões nos meios acadêmicos nas últimas três décadas.

Fazendo uma análise das pesquisas voltadas à formação de professores, é possível constatar que o foco das mesmas mudou muito com o passar dos anos. Segundo estudos realizados por Ferreira (2003), entre os anos de 70 e 80, tais pesquisas dedicavam-se a investigar o papel e as contribuições da prática de ensino à formação docente, tanto em cursos de licenciatura quanto em cursos de magistério, enquanto que na década de 90 o objetivo das mesmas passou a ser a identificação de problemas e obstáculos pertinentes a este processo, bem como a avaliação dos programas institucionais destinados à formação inicial.

No que se refere à formação continuada, ainda segundo a mesma autora, estudos mostram que nas décadas de 70 e 80 os estudos realizados tinham o objetivo principal de analisar o impacto que o uso das tecnologias (materiais didáticos como videoteipes, jogos etc.) propiciava à formação docente. Porém, estes estudos desapareceram na década de 90 cedendo lugar a pesquisas voltadas ao uso do computador. Outro tipo de estudo apontado refere-se a pesquisas que investigam a implantação de metodologias para ensino de Matemática, a reflexão na formação de professores, as perspectivas dos professores e os processos de produção de conhecimento.

O estudo de Sztajn (2002) sobre os saberes necessários a um professor de Matemática, baseado nos resultados de pesquisas realizadas na área de formação de professores a partir dos anos 80, revela que o objetivo da maioria das pesquisas feitas nessa década tinham como objetivo identificar ou apontar os saberes necessários à profissão docente, os quais deveriam ser adquiridos na formação inicial, enquanto que na década de 90 os estudos focam a formação continuada. Esta modalidade de formação tinha por objetivo articular saberes acadêmicos com saberes oriundos da prática do professor.

Numa perspectiva diferente, Contreras (2002) mostra que dentre as reivindicações dos professores, com relação ao seu profissionalismo destaca-se, a exigência pela facilidade de atualização (formação continuada), como profissionais que se reconhecem em formação permanente, considerando a relevância da função social que cumprem.

Em contrapartida Cury (2001) comenta que a desatualização dos professores com relação às novas tecnologias parece ser mais um problema da capacitação destes docentes na licenciatura. Isto é, a raiz do problema da utilização desses recursos na prática docente está na formação inicial, cujo currículo não propicia a interação e investigação dos mesmos de forma profunda e crítica.

Confrontando as colocações de Cury e Contreras, pode-se perceber que, por um lado os próprios professores têm consciência da necessidade de estarem em formação contínua, entretanto, não há como investir neste tipo de formação se eles não receberam o embasamento teórico e metodológico necessários à sua formação inicial.

Retomando a reflexão sobre as deficiências nos processos de formação inicial docente, é muito comum em escolas e instituições, segundo Linhares (2001), que o professor defronte-se com imposições profissionais para as quais não teve formação adequada, incluindo-se o uso das tecnologias como forma de construir conhecimento.

Tecnologias informáticas redefinindo a formação inicial docente

As tecnologias informáticas como softwares, planilhas de cálculo, jogos educacionais, simuladores, modeladores, tutoriais, *applets,* Internet etc., hoje fazem parte de muitos setores da sociedade e, de modo expressivo, tem modificado as formas de se transmitir e armazenar informações, de produzir e reproduzir conhecimento e ao mesmo tempo redefinem os papéis dos atores na sala de aula.

Desde o surgimento dos primeiros computadores entre as décadas de 40 e 50 e dos primeiros programas e softwares, nas décadas de 50 e 60, começou-se a pensar e investigar as contribuições, possibilidades e desafios que estes recursos trariam aos processos de ensino e aprendizagem.

Com isso, entre os anos de 80 e 90, o grande desafio foi inserir o computador nos ambientes educacionais e para isto, as instituições contaram com o apoio das secretarias educacionais e das ações dos órgãos governamentais. Porém, depois que muitas destas escolas e instituições foram equipadas com laboratórios, muitos deles foram subutilizados.

Em contrapartida, nesse mesmo período foram desenvolvidas inúmeras pesquisas propondo formas de uso para as mídias informáticas na prática pedagógica nos mais diversos níveis de ensino. Com isso, esse tema passou a ser muito discutido em encontros de professores e pesquisadores, eventos esses que contribuíram para impulsionar a produção de softwares educativos.

Em conseqüência disso, os professores passaram a enfrentar novos desafios. Primeiro, eles precisam conhecer esses recursos e aprender formas de explorá-los com objetivos específicos. Segundo, para usá-los de forma investigativa precisam de suporte teórico, metodológico e técnico.

Essa problemática, revelada no meio educacional, reforça a necessidade de haver uma aproximação entre os programas de formação docente (inicial e continuada) e as iniciativas de utilização destas tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem, além de haver convergência entre os objetivos de ambos.

Almeida (2000, p.111), discutindo os elementos necessários à composição dos currículos de cursos de formação docente, argumenta que nestes

> devem ser considerados os novos recursos informáticos e incluir como conteúdo a análise sobre as potencialidades pedagógicas de tais recursos. Os estudos podem ser estruturados em disciplinas organizadas por módulos, preferencialmente com intervalos de tempo entre cada um deles.

Neste sentido, acredito que o profissional da educação precisa interagir com os mais diversos recursos oferecidos pelas tecnologias informáticas e aprender a explorá-los de forma crítica na sua formação inicial e também na formação continuada, levando-o a refletir sobre este uso e sobre as possibilidades e desafios que emergem desta iniciativa.

Segundo Valente (2002, p.3), para preparar o professor para usar os recursos tecnológicos e informáticos na prática de sala de aula, a sua formação

> deve oferecer condições para o professor construir conhecimento sobre técnicas computacionais e entender por que e como integrar o computador em sua prática pedagógica. Além disso, essa formação deve acontecer no local de trabalho e utilizar a própria prática do professor como objeto de reflexão e de aprimoramento, servindo contexto para a construção de novos conhecimentos.

A colocação de Valente sugere que o docente precisa estar em formação continuamente e, além disso, que esta formação esteja apoiada na sua ação. Ou seja, a medida ele se propõe a interagir com estes instrumentos na sua própria prática ele tem a possibilidade de refletir sobre a mesma e, também, refletir *sobre sua ação* e *na sua ação*. Porém vale lembrar que este processo deve ser iniciado na formação inicial, pois é nesta etapa que o futuro professor busca construir o embasamento teórico e metodológico que guiará sua prática em sala de aula.

Nesta perspectiva, destaco a relevância de permitirmos que futuros docentes, em particular de matemática, desenvolvam a habilidade de usar e investigar criticamente as mídias informáticas ao longo do processo de formação inicial, contribuindo para o seu desenvolvimento pessoal e tornando-se aptos a promoverem mudanças no contexto educacional em que atuarão. Um dos possíveis modos de favorecer o uso investigativo destes recursos, investigado na pesquisa ora apresenta, consiste na realização de atividades formativas que articulem a abordagem de conteúdos matemáticos e softwares educativos, atendendo aos princípios do Construcionismo, o qual será abordado a seguir.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS SOBRE O CONSTRUCIONISMO

O construcionismo, proposto por Seymour Papert entre as décadas de 60 e 70, é uma teoria educacional que sugere uma forma de aprendizagem baseada na interação do aluno com o computador. Nesta interação o indivíduo deve assumir o comando da sua aprendizagem, isto é, é ele quem determina os procedimentos e as atividades que são realizadas. Além disso, ele tem autonomia para executar suas ações, quer sejam mentais ou físicas.

Esta teoria propõe que na medida em que o aprendiz interage com o computador ele é instigado a investigar, pesquisar e refletir sobre o objeto da sua investigação ou criação. Papert (1994, p.114) acrescenta que "o computador contribui para tornar a descoberta mais provável e também torná-la mais rica". Também enfatiza a interação do aluno com o computador como meio eficiente de aprendizagem, por fomentar a iniciativa pessoal do sujeito de buscar novas informações que o levem a uma reorganização cognitiva construindo o próprio conhecimento.

A aprendizagem construcionista foi explicada por Valente (1993) por meio de uma seqüência de estágios pela qual uma tarefa sugerida é desempenhada pelo indivíduo. O desenvolvimento seqüencial desses estágios compõe a espiral *descrição – execução – reflexão – depuração – descrição,* que se estabelece na interação entre aluno e computador. Nessa interação, o uso do computador propicia a descrição da ação do sujeito, que a partir do *feedback* pode refletir e depurar a sua própria ação pensamento.

Ainda, na visão construcionista, o processo de ensino precisa ser revisado constantemente para que permita ao aluno atingir novos patamares de compreensão, levando em conta as necessidades e interesses dos alunos e permitindo que eles sejam os responsáveis pela sua aprendizagem. Uma das formas de colocar o aluno à frente do seu aprendizado e desenvolvimento é por meio da realização de situações educacionais que incorporem à prática do professor o trabalho com projetos e usando os recursos das mídias informáticas.

Desenvolver projetos na prática pedagógica é, de acordo com Valente (1999, p.108), uma atividade que pode trazer contribuições significativas à aprendizagem do indivíduo, pois

> aprender um determinado assunto deve ser o produto de um processo de construção do conhecimento realizado pelo aprendiz e por intermédio do desenvolvimento de projetos, que usam o computador como uma fonte de informação ou recurso para resolver problemas significativos para o aprendiz.

Em resumo, no Construcionismo a aprendizagem pode ser favorecida se o conceito ou assunto abordado possuir significado pessoal para o aluno, isto é, precisa estar voltado aos interesses, aspirações e idéias do mesmo, bem como ser fruto de sua construção. Porém, para que este propósito seja alcançado, de acordo com Papert (1994), o fazer pedagógico deve permitir que o aluno assuma o comando do seu processo de desenvolvimento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A questão central desta discussão deriva da necessidade de se proporcionar aos alunos em geral o acesso às mídias informáticas, as quais integram grande parte dos contextos sociais e profissionais atualmente e que mobilizam pesquisadores e professores a buscarem formas distintas de promover esse acesso, contribuindo para o desenvolvimento pessoal e profissional do aluno.

Além disso, baseada nas considerações apresentadas no decorrer do texto de que é possível auxiliar a construção do conhecimento matemático, promovendo um ambiente de aprendizagem propício à participação e investigação, de acordo com os pressupostos do Construcionismo, e adotando estratégias de trabalho com tecnologias informáticas, que conferem ao aluno autonomia para criar suas próprias atividades ou projetos, avalio que promovendo experiências educacionais dentro destes moldes, é possível contribuir para a promoção de mudanças nos processos cognitivos em matemática, principalmente no que se refere à formação inicial docente.

Na experiência realizada, apresentada nesse texto, foi possível mostrar que o trabalho com projetos e com tecnologias informáticas é uma estratégia pedagógica que favorece a formação de futuros professores de matemática, no que se refere à construção e aprofundamento do conhecimento específico e ao desenvolvimento de saberes de uso pedagógico das mídias informáticas. Com isso, acredito que se as práticas pedagógicas desenvolvidas durante a formação inicial estiverem impregnadas de tecnologias informáticas, os futuros professores estarão desenvolvendo habilidades de uso investigativo das mesmas e desta forma, as almejadas inclusão tecnológica e democratização da qualidade da educação podem vir a acontecer.

Referências

ALMEIDA, M.E.B. *Informática e formação professores.* Coleção Informática para a mudança na Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2000.

CONTRERAS, J. *A autonomia de professores.* São Paulo: Cortez, 2002.

CURY, H.N. (Org.). *Formação de professores de Matemática: uma visão multifacetada.* Porto Alegre: Edipucrs, 2001.

FERREIRA, A.C. Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.). *Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares.* Campinas, SP: Mercado das Letras, 2003.

LINHARES, C. *Os professores e a reinvenção da escola.* São Paulo: Cortez, 2001.

PAPERT, S. *A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática.*Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre, RS: Artes Médicas, 1994.

RICHIT, A. *Projetos em Geometria Analítica Usando Software de Geometria Dinâmica*: repensando a Formação Inicial Docente em Matemática. 2005. 215 f. Dissertação (Mestrado em

Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

SZTAJN, P. *O que precisa saber um professor de matemática? uma revisão da literatura americana dos anos 90.* In: Educação Matemática em Revista. SBEM, ano 9, n. 11 A, p. 17-28, 2002.

TORRES, R.M. Tendências da formação docente nos anos 90. In: *II Seminário Internacional Novas Políticas Educacionais: Criticas e perspectivas.* SP/PUC, p. 173-192, 1998.

VALENTE, J.A. (Org.). *Formação de educadores para o uso da informática na escola.*Campinas, SP: Unicamp/Nied, 2003.

VALENTE, J.A. A Espiral da Aprendizagem e as Tecnologias da Informação e Comunicação: repensando conceitos In: JOLY, M. C. R. A. (Org.). *A Tecnologia no Ensino: Implicações para a aprendizagem*. SP: Casa do Psicólogo, 2002.

VALENTE, J.A. Por que o computador na educação? In: VALENTE, J.A. (Org.). *Computadores e Conhecimento: repensando a educação*. Campinas: Unicamp/Nied, 1993.

TABULOGO – UMA IMPLANTAÇÃO DE LOGO COMO LINGUAGEM DE MACRO EM PROGRAMA DE GEOMETRIA DINÂMICA

Alexandre Sardinha - DCC/LabMA – IM-UFRJ- alexandre.sardinha@gmail.com

Luiz Carlos Guimarães - LIMC – IM-UFRJ – lcg@labma.ufrj.br

Rafael Garcia Barbastefano - CEFET/RJ – MEPCM/DEPRO – rgb@cefet-rj.br

Renato Campos Mauro - CEFET/RJ – renato.mauro@gmail.com

Macro-construções são elementos importantes em qualquer programa de geometria dinâmica. Através delas, é possível encapsular diversas etapas de uma construção em um único comando, facilitando o processo de construções mais complexas e, por conseguinte, enriquecendo a lista de construções disponíveis aos usuários. Apresentamos neste trabalho uma implementação de macro baseada na linguagem de programação LOGO. Esta abordagem permite desenvolver macros com grande flexibilidade, gerando construções difíceis de serem obtidas pelas implementações usuais. Três destas construções são apresentadas em um estudo exploratório.

1. INTRODUÇÃO

Macro-construções são elementos importantes em qualquer programa de geometria dinâmica. Através delas, é possível encapsular diversas etapas de uma construção em um único comando (Pratt, 1997), facilitando o processo de construções mais complexas e, por conseguinte, enriquecendo a lista de construções disponíveis aos usuários (Bellemain, 1992). Seus usos variam desde o ensino de figuras geométricas elementares para crianças (Ainley, 2006) até a ilustração de conceitos mais complexos como a geometria em espaços de Minkowski (Felsager, 2004). Alguns programas de geometria dinâmica como o Cabri possibilitam a mudança de elementos de interface através de macros, podendo-se restringir funcionalidades com fins didáticos específicos, como usado por Cabariti e Jahn (2006) no ensino de geometria hiperbólica.

Neste trabalho, apresentamos uma implementação de macro em um programa de geometria dinâmica na forma de programa na linguagem LOGO. Ao invés do registro e reutilização de pedaços de construções, elabora-se uma construção a partir de instruções elaboradas em uma linguagem de programação estruturada. Este tipo de implementação permite uma grande flexibilidade na elaboração de construções, além do estabelecimento de estruturas de controle e da utilização de elementos de interface gráfica com o usuário.

O presente artigo incialmente apresenta o programa Tabulæ, em seguida, mostra-se como a implantação do TABULOGO (nome adotado) foi realizada em seguida, apresenta-se um estudo exploratório de possibilidades de construção com o software.

2. O TABULÆ

A geometria dinâmica é um conceito computacional que representa uma classe de programas usados como tecnologia educacional para o ensino de matemática (Schuman, 1989). O Tabulæ (Figura 1, Guimarães et al. 2001) é um software de Geometria Dinâmica plana que foi desenvolvido no Projeto Enibam do IM/UFRJ há pouco mais de cinco anos. Estão envolvidos no projeto alunos de graduação dos cursos de engenharia, bacharelado em matemática, informática, licenciatura em matemática e desenho industrial, além de alunos de mestrado e doutorado. A versão atual do Tabulæ contém funcionalidades geométricas e vetoriais, além de calculadora. O objetivo principal do programa é proporcionar uma alternativa brasileira, de classe mundial, aos softwares encontrados no mercado hoje em dia.

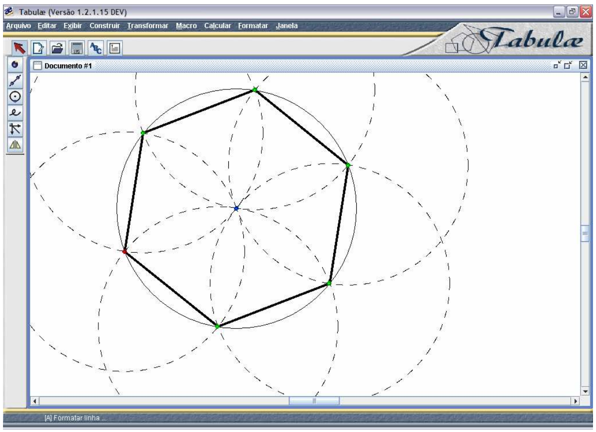


Figura 1. Um hexágono feito no Tabulæ.

3. A IMPLANTAÇÃO DA MACRO EM LOGO

LOGO é uma linguagem de programação usada há algumas décadas e muitas crianças tiveram seu primeiro contato com um computador ou uma linguagem de programação através de alguma implementação da linguagem. Seu uso foi disseminado, com milhões de usuários por todo o mundo (Papert, 1993). Uma das principais aplicações didáticas do LOGO é justamente no ensino de geometria, através de um conceito computacional que Papert define como “Geometria da Tartaruga”, na qual o usuário comanda o computador para elaborar construções geométricas traduzidas em um programa da linguagem.

As construções geométricas elaboradas nas implementações da linguagem não possuem o caráter de manutenção de propriedades dos programas de geometria dinâmica. A “tartaruga” do LOGO faz, na verdade, um desenho e não uma construção, já que os objetos gerados não possuem propriedades geométricas associadas a eles nem tão pouco essas propriedades se mantém quando os objetos são manipulados.

Usar o LOGO como linguagem de macro em um programa de geometria dinâmica traz grande sinergia entre as possibilidades didáticas das duas ferramentas. Para os usuários de LOGO traz a possibilidade de elaborar construções nas quais as propriedades geométricas se mantenham quando elementos são manipulados, além de uma enorme quantidade de métodos e comandos típicos da GD. Para os usuários de GD, por sua vez, o uso de uma linguagem de programação expande as possibilidades de criação de macros mais flexíveis, poderosas e com maior interação com os usuários. Além disso, a reunião de duas poderosas ferramentas de ensino facilita a interação e troca de experiências didáticas entre profissionais que utilizem esta ou aquela ferramenta.

Para implementar a macro em LOGO, foi necessário, primeiramente, escolher quais primitivas e métodos do programa Tabulæ seriam utilizadas na macro. Foi feito um encapsulamento das principais funções básicas do software Tabulæ. Dessa forma, o programa poderia utilizar livremente estas funções já em funcionamento sem se preocupar com sua implementação. Por exemplo, não é necessário saber como o Tabulæ cria um ponto e sim saber qual função encapsulada que cria um ponto. Denominamos essa implantação de TABULOGO.

Depois disto feito, o próximo passo foi conceber como seria a linguagem dessa macro. Ela deveria obedecer aos princípios básicos do LOGO e primar pela simplicidade. Características como a tipagem fraca, isto é, não é necessário declarar explicitamente o tipo de uma variável e este tipo pode mudar durante o programa, foram mantidas (Sebesta, 2005). Além disso, foi preciso estender a linguagem para utilizar as possibilidades da geometria dinâmica. Essa é uma grande diferença de nosso trabalho, já que o LOGO tradicional trata os pontos e os objetos geométricos desenhados como apenas pixels. Na nossa implementação, os objetos geométricos preservam suas propriedades e podem ser manipulados através de nossa linguagem.

Para implementar uma linguagem de programação, como a do TABULOGO, é necessário descrever uma linguagem livre de contexto, ou seja, definida através de uma gramática, que descreve as regras sintáticas de como a linguagem se comporta (Sebesta, 2005). Em outras palavras, é a gramática que define a sintaxe dos comandos de uma linguagem de programação. Então essa gramática foi escrita baseada nas especificações da linguagem e nos comandos que gostaríamos de implementar.

Outra questão é, como a partir de um texto identificar quais são os comandos contidos neles para depois executá-los. Por exemplo, como reconhecer que a palavra Reta corresponde ao comando que cria uma reta? Um parser é um programa que tem justamente a finalidade de transformar essas palavras em objetos (ou entidades) que são entendidas pelo computador. Utilizamos um programa chamado Javacc, que a partir da nossa gramática gerou esse parser escrito na linguagem Java. Restava agora associar aos objetos às ações que gostaríamos que realizassem.

Freqüentemente em programação, utilizamos padrões de projeto. Padrões de projeto descrevem soluções clássicas para problemas usuais (Gamma et al., 1995). No nosso caso, o problema era trabalhar com objetos que eram comandos e para isso existe um padrão chamado Command. Este padrão sugere uma estrutura na qual cada objeto saiba se executar e por isso todos objetos de sua classe compartilham uma mesma função de execução. Este padrão ainda tem uma vantagem de ser de fácil integração com o programa Javacc e por isso foi utilizado com sucesso. Assim, finalizou-se o processo de implementação da linguagem.

Foram implementados todos elementos presentes em uma linguagem de programação, como comandos de controle (Se), repetição (Repita n Vezes) e chamadas de subrotinas. Também estão presentes os comandos clássicos de LOGO, como Direita, Esquerda, Anda, mantendo a metáfora da Tartaruga. Completam a lista os comandos derivados do Tabulæ, como Reta, Vetor, Translacao e etc. A entrada e saída de dados dos programas são feitas com componentes gráficos do próprio Java e pode ser vista em LeNumero.

Posteriormente, foi acrescida a linguagem a possibilidade do uso de ouvintes. Eles são úteis em uma situação em que se escreve um programa e deseja-se que ele se comporte de uma maneira em função dessa condição. No entanto, como estamos lidando com geometria dinâmica, estas condições variam de acordo com a vontade do usuário, a qualquer momento que ele desejar e não somente no momento da execução do programa de macro. Então, se registra essa condição em um ouvinte e os comandos que devem ser executados caso ela seja verdadeira ou falsa. A cada mudança do estado do programa, testa-se novamente a condição e o ouvinte recebe o resultado. De acordo com este resultado comandos são executados ou não. Isto pode ser feito para uma ou mais condições.

4. POSSIBILIDADES DE CONSTRUÇÃO

Passamos a apresentar um estudo com três casos de construções possíveis de serem feitas com o TABULOGO: construção de uma tangente comum a dois círculos; uma Curva de Koch e uma Rosácea

4.1 Tangente comum a dois círculos

A construção da tangente comum a dois círculos dados, C1 e C2 (figura 2) é muito difícil de ser executada com as macros usuais, já que são poucos os programas de geometria dinâmica apresentam a possibilidade de construções condicionais.. Isto ocorre em razão da construção demandar o conhecimento de qual dos dois círculos possui o menor diâmetro e esta informação poder mudar conforme o usuário manipule um dos dois círculos envolvidos.

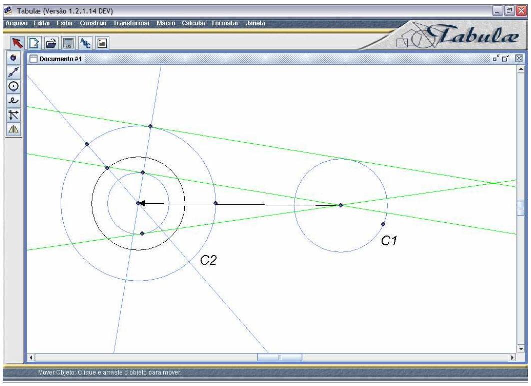


Figura 2: Uma tangente comum a dois círculos dados depende da determinação daquele que possui o menor raio.

Para resolver este problema, utiliza-se um ouvinte que fica monitorando os diâmetros dos dois círculos. Toda vez em que ocorre uma mudança no círculo de maior tamanho, o programa redesenha a construção.

4.2 Curva de Koch

A Curva de Koch, concebida em 1904, é um exemplo de curva contínua sem derivada em nenhum ponto que pode ser construída de maneira elementar (Figura 3).

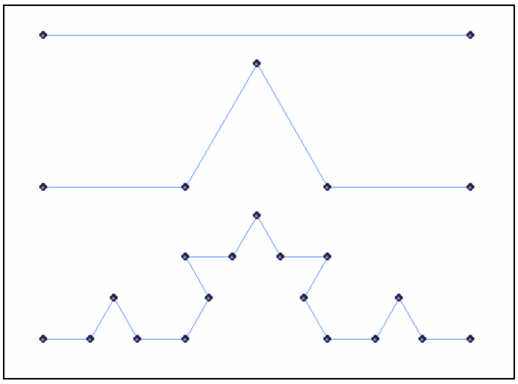


Figura 3: Os primeiros passos para elaboração da Curva de Koch

A sua elaboração depende do uso de ferramentas que possibilitem a construção recursiva de triângulos equiláteros no terço central de um lado construído na etapa anterior.

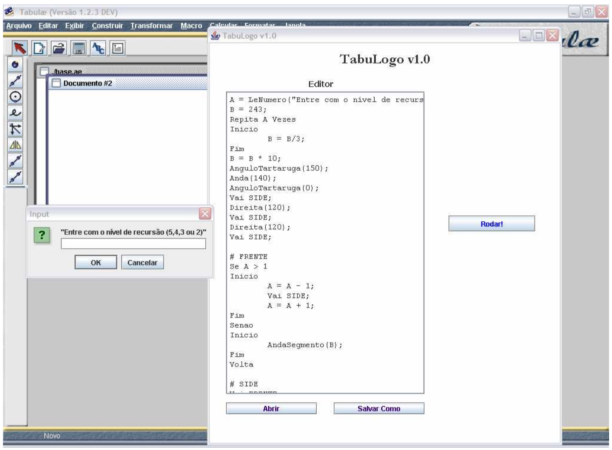


Figura 4: Editor LOGO com o programa gerador de uma Curva de Koch e uma caixa de diálogo pedindo o nível de recursão para geração da curva.

O processo de construção da Curva de Koch com o Tabulogo demanda apenas a inserção do nível de recursão por parte do usuário em uma caixa de diálogo (Figura 4). A partir daí, as iterações são controladas pelo próprio programa, gerando-se a curva que vemos na figura 5:

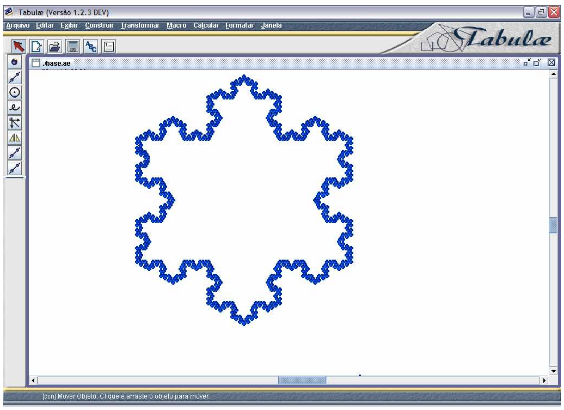


Figura 5: A Curva de Koch gerada pelo programa em LOGO.

A utilização da ferramenta de geometria dinâmica permite expandir e contrair a figura se ela depender de um segmento, por exemplo. Além disso, a manipulação da construção mantém as propriedades da figura.

4.3 Rosácea

Rosáceas e espirais são construções simples e belas de serem feitas em linguagem LOGO. Sua construção em programas de geometria dinâmica, por sua vez é muito complicada e exige o conhecimento de conceitos mais avançados como funções parametrizadas e coordenadas polares. Para geração da rosácea da figura 6, buscamos adaptar o código de exemplos de um concurso de figuras elaboradas na linguagem [1].

Da mesma forma que a Curva de Koch do exemplo anterior, a Rosácea da figura 6 também pode ser manipulada com manutenção das suas propriedades geométricas. Uma pequena modificação no programa permite que o comprimento de um segmento seja usado como parâmetro de tamanho da figura.

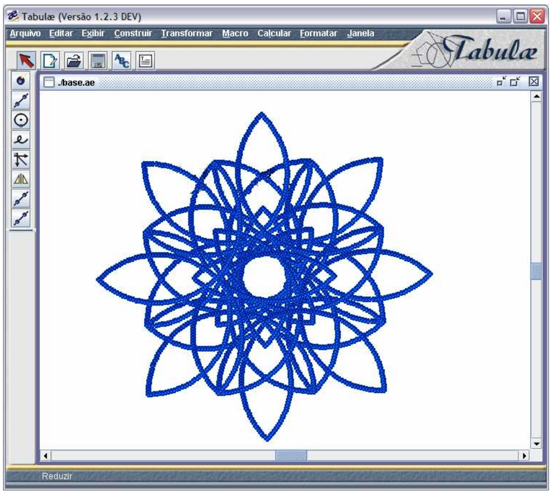


Figura 6: Rosácea

5. CONCLUSÃO

Apresentamos neste trabalho uma implementação de LOGO como linguagem de macro de um programa de geometria dinâmica. A utilização da linguagem permite a elaboração de macros mais flexíveis e de construções com maior complexidade. Por outro lado, os usuários da linguagem LOGO passam a poder gerar construções com dependência geométrica entre os objetos produzidos. No momento, estamos realizando outros estudos para determinar mais possibilidades didáticas de uso e fazendo testes com usuários.

[1] No endereço: http://www.mathcats.com/gallery/15wordcontest.html

Referências

Ainley, J., Pratt, D., Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design, *British Educational Research Journal*. 32.1, 21-36.

Bellemain, F. (1992) *Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie Cabri-géomètre* Tese de Doutorado. Obtida em http://bibliotheque.imag.fr/publications/theses/1992/Bellemain.Franck/these.dir/these.pdf Acesso em 27/02/2007.

Cabariti, E., Jahn, A. P. (2006). A Geometria Hiperbólica na Formação Docente: possibilidades de uma proposta com o auxílio do Cabri-géomètre. *In: III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEM, 2006*, Águas de Lindóia. Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo : SBEM, v. 1. p. 18-28

Felsager, B., Gymnasium H., Denmark HF (2004), Introducing Minkowski-geometry using Dynamic Geometry Programs *In. ICME-10,* Copenhagen. Obtido em http://descartes.ajusco.upn.mx/varios/tsg10/articulos/Felsager_2_re_revised_paper__2_.doc Acesso em 27/02/2007.

Gamma, E.; Helm, R.; Johnson, R.; Vlissides, J. (1995) *Design Patterns: Elements of Reusable Object-Oriented Software* Addison-Wesley, New York.

Guimarães, L. C., Barbastefano, R. G., Carvalho, D.(2001) Tabulæ, Registro INPI n.0039192.

Papert, S. (1993) *Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas 2ed.* Perseus Books, New York.

Pratt, D., Ainley, J. (1997). The Construction of Meanings for Geometric Construction : Two Contrasting Cases, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1.3, 293-322.

Sebesta, R.W. (2005) *Concepts of Programming Languages 7th edition.* Addison Wesley, New York.

Schuman, H. (1989). The influence of interactive tools in geometry learning. *In: Intelligent learning enviroments, the case of geometry*, Berlim, Springer-Verlag.

SIMULAÇÕES PARA ESTRATÉGIAS DIDÁTICAS RELACIONADAS À COLABORAÇÃO MATEMÁTICA COM O TABULÆ COLABORATIVO

Francisco Mattos [b], Luiz Carlos Guimarães [a], Rafael Barbastefano [c], Thiago Moraes [d],

[a] LIMC-IM - UFRJ, luizguima@gmail.com. [b] CAP-UERJ – francisco.mattos@gmail.com.
[c] MPECM-DEPRO-CEFET/RJ – rgb@cefet-rj.br. [d] PESC-COPPE-UFRJ – thiago@cos.ufrj.br.

Resumo: Encontramos na literatura referências a modelos de estratégias didáticas baseadas na Aprendizagem Colaborativa e aplicadas no ensino presencial. Simulamos alguns dos modelos aplicando-os ao ensino a distância por meio do software de Geometria Dinâmica - Tabulæ Colaborativo. As estratégias didáticas apresentadas neste poster são baseadas em compartilhamento de construções geométricas e na comunicação via Chat. As atividades têm como base a resolução de problemas, e definimos as características de cada uma pelo Roteiro de Colaboração aplicado em cada estratégia. As características do software permitiram simular as estratégias didáticas no ambiente computacional. Apresentamos neste trabalho experimentos realizados com diferenciados grupos de estudantes e que simulam as estratégias.

1. INTRODUÇÃO

O Tabulæ Colaborativo - TC foi concebido como uma ferramenta para Aprendizado Colaborativo Apoiado por Computador (CSCL), com características de Geometria Dinâmica e compartilhamento de construções geométricas através da Internet, ou utilizando redes locais (Guimaraes et al. (2005), Moraes (2006)). A partir da inclusão de novas funcionalidades, o software permite a aplicação de estratégias didáticas colaborativas em cursos à distância ou em atividades realizadas em aulas em laboratório (Mattos et al.(2006)).

Tendo como referência o Aprendizado Colaborativo em Matemática, e as estratégias de ensino presentes na literatura, neste trabalho apresentamos a simulação de algumas destas estratégias através do software – recriando-as num Ambiente Colaborativo Apoiado por Computadores (CSCL). As estratégias de Aprendizagem Colaborativa são aplicadas à resolução de problemas de Geometria e baseadas na comunicação escrita entre os estudantes, trabalhando em grupo, e compartilhando construções geométricas durante a solução dos problemas. Os procedimentos são roteirizados de modo a estabelecerem um diálogo, baseados no trinômio *ler-pensar-redigir*, acrescidos da comunicação dos resultados.

Os estudantes são distribuídos em grupos denominados mini-sessões colaborativas, Moraes (2006). Para cada atividade desenvolvida em uma mini-sessão são gerados registros criados a partir dos "logs" da interação. As mini-sessões "gravadas" podem ser acessadas por review passo-a-passo. Estas funcionalidades permitem a simulação de estratégias didáticas fundamentadas na metacognição.

A modelagem das diversas estratégias foi possível pela introdução de ferramentas que objetivam diminuir as limitações dos sistemas CSCL, relatadas por Nason & Woodruff (2004) e Misfeldt (2004).

2. APRENDIZADO COLABORATIVO

A Aprendizagem Colaborativa - AC envolve diferentes atividades de ensino e aprendizagem em que os estudantes trabalham em grupos. Segundo Panitz (2006), AC tem como premissa básica a construção do consenso através de processos de cooperação entre os membros do grupo, destacando as habilidades e contribuições individuais de cada membro. MacGregor (1997) destaca que as raízes da Aprendizagem Colaborativa estão na psicologia social e na utilização de pequenos grupos. A teoria de pequenos grupos acoplada à psicologia educacional foi, segundo MacGregor, o que fundamentou as teorias do Aprendizado Cooperativo desenvolvidas por David Johnson e Roger Johnson na Universidade de Minnesota, e por Robert Slavin na Universidade Johns Hopkins. As principais referências teóricas para os primeiros trabalhos sobre AC foram o filósofo americano John Dewey e os estudos sobre psicologia cognitiva de Piaget e Vygotsky.

A estrutura das atividades propostas para o *Aprendizado Colaborativo* é baseada em situações nas quais dois ou mais estudantes são incentivados a trabalharem juntos em alguma tarefa, coordenando os procedimentos para completá-la. Os estudantes participam diretamente do aprendizado dos colegas, de modo que o aprendizado de um estudante pode contribuir para o aprendizado de outros estudantes do grupo. Os processos de avaliação das atividades podem estar sujeitos a diferentes critérios, porém o mais comum é a avaliação individual do que foi agregado ao estudante mediante o processo de colaboração. Segundo Slavin (1997), Johnson&Johnson (1990) (1997) os possíveis efeitos benéficos do estudo em grupo dependem do uso de algum tipo de incentivo estruturado.

O Aprendizado Colaborativo possibilita o envolvimento dos estudantes em atividades que exploram a compreensão de conceitos e o compartilhamento de idéias. Os componentes são incentivados na elaboração de questionamentos, que podem gerar conflitos resolvidos por meio de discussões, comparando e avaliando explanações feitas pelos membros do grupo.

3. APRENDIZAGEM COLABORATIVA EM MATEMÁTICA

Técnicas de ensino baseadas em pequenos grupos são estudadas desde os anos sessenta. Nos anos oitenta, Johnson&Johnson (1990) (1997) divulgou uma meta-análise a partir de mais de 120 pesquisadores, esta indicava que os trabalhos em grupo para aprendizagem foram considerados mais eficazes que outras estruturas com objetivos competitivos ou individualistas.

Davidson (1990) argumenta que apesar do aprendizado de matemática ser freqüentemente visto como atividade isolada e que ocorre de maneira individualista, a partir dos anos 1990, matemáticos publicam relatos de casos em que o aprendizado colaborativo é introduzido em classes presenciais de matemática em cursos de graduação. Em Davidson (1990) são apresentadas várias estratégias para aprendizagem cooperativa em matemática, com pequenos grupos. As estratégias presentes em Davidson (1990) Davidson at al. (2001), Hagelgans at al. (1995) são propostas como alternativas didáticas às aulas expositivas e à aprendizagem individual. Segundo Swan (2005), o *Aprendizado Colaborativo* representa a contraposição entre uma *`cultura' colaborativa* e a *`cultura' de transmissão*. Nesta última a matemática é vista como um corpo de conhecimentos e procedimentos a serem assimilados em atividades individuais baseados na *`escuta'* e na reprodução. Esta implica em um ensino orientado por uma estrutura linear de currículo, em atividades expositivas, e avaliações através da prática de exercícios e correções de erros. Enquanto a *`cultura' colaborativa* pretende apresentar a Matemática através de uma rede de idéias, através de que se constrói o conhecimento em conjunto. O Aprendizado é visto como uma atividade social, em que os estudantes, são colocados frente a desafios e atingem a compreensão através da discussão. Neste enfoque o ensino é visto como um diálogo não linear com foco no processo e nas conexões entre os conhecimentos, dando importância ao reconhecimento dos erros, explicitando-os e aprendendo com eles.

Davidson et al (2001) destacam algumas vantagens relacionadas com aprendizagem em grupo em matemática:

> •Os problemas em matemática, muitas vezes apresentam mais de uma forma de resolução. A aprendizagem em grupo possibilita a verificação destas soluções.
>
> •A possibilidade para explorar problemas mais sofisticados, que não seriam adequados às restrições de uma sala de aula tradicional.
>
> •A discussão de conjecturas propostas pelos estudantes, e o trabalho em grupo, para verificá-las e resolvê-la..
>
> •Os estudantes, em geral, ficariam mais à vontade para fazerem perguntas aos seus pares quando estão em pequenos grupos, mais do que quando estão diante do professor na sala de aula tradicional ou participando em discussões que envolvem toda a classe.
>
> •Problemas de matemática são apropriados para discussões em grupo, pois as soluções podem ser discutidas e demonstradas através de raciocínio lógico.
>
> •Quando os estudantes trabalham em pequenos grupos são maiores as possibilidades para visualizarem abordagens alternativas do que quando assistem às resoluções do professor, que geralmente são considerados como autoridade no objeto de ensino.
>
> •Quando estudantes trabalham em pequenos grupos são maiores as possibilidades de diferentes grupos apresentarem soluções distintas para o mesmo problema.

Vários autores em Davidson (1990), Davidson at al. (2001), Hagelgans at al. (1995), Dubinsky at al. (1997), defendem a utilização de pequenos grupos para o *Aprendizado Colaborativo* em Matemática, uma vez que aumenta as possibilidades de participação de cada estudante, reduzindo o isolamento individual que ocorre muitas vezes nas classes tradicionais.

A comunicação dos conceitos abstratos em matemática é, muitas vezes, dependente da linguagem que os constrói, e se esta não é compreendida, o desenvolvimento do pensamento matemático torna-se mais difícil. Alguns estudos sobre cognição em matemática mostram que o aprendizado ocorre quando os estudantes são submetidos a algum tipo de elaboração sobre o objeto de estudo. Segundo Kramarski & Mevarech (2003), um processo de elaboração ocorre através da explicação do que se faz ao outro. De acordo com os padrões estabelecidos pela NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics-USA), o raciocínio matemático requer habilidades para a construção de conjecturas, avaliação de argumentos e escolha de representações. Visando atingir estes padrões a NCTM enfatiza a importância do discurso matemático em sala de aula. Segundo o mesmo estudo os alunos devem ser apresentados a estratégias didáticas fundamentadas na discussão dos conteúdos com seus pares, tendo como base o raciocínio matemático desenvolvido por cada um, formalizado através do discurso matemático.

4. APRENDIZAGEM COLABORATIVA EM MATEMÁTICA NO ENSINO PRESENCIAL

Em 1995, a MAA - Mathematical Association of America realizou uma série de atividades com objetivo de estudar e acompanhar o desenvolvimento de experiências sobre o Aprendizado Cooperativo em diversas universidades americanas, o projeto CLUME - Cooperative Learning in Undergraduate Mathematics Education.

Segundo Rogers et al. (2001), aproximadamente 150 professores universitários participaram de workshops no Projeto CLUME. O projeto apresentou e discutiu diversas experiências em Aprendizagem Colaborativa em universidades americanas, incluindo o desenvolvimento de sistemas para suporte às estratégias de Aprendizagem Colaborativa e a apresentação de relatos de parte dos participantes de como implementaram e quais foram os resultados obtidos.

Rogers et al (2001) o descrevem os resultados obtidos como no mínimo tão eficaz quanto estratégias tradicionais no que diz respeito ao sucesso do aprendizado em matemática. Como resultado os autores tem se dedicado às pesquisas que procuram responder a duas questões: Porque o aprendizado colaborativo funciona e como torná-lo ainda mais eficiente?

4.1 Roteiros de Colaboração

Em relação ao aprendizado colaborativo o suporte ocorre em duas linhas: o instrucional oferecido pelo roteiro didático, em cada atividade; e aquele que define a estratégia de colaboração aplicada. Em relação a este último propomos modelos para o ensino de matemática, e apresentaremos alguns exemplos neste trabalho.

Os roteiros têm por objetivo o suporte aos estudantes em atividades colaborativas à distância ou realizadas em laboratórios conectados às redes internas. O roteiro deve fornecer aos estudantes as informações necessárias para a realização da atividade. Em particular deve encaminhar o grupo para o melhor aproveitamento do objeto de ensino, criando artifícios através de discussões.

Kollar at al. (2006) apontam as principais características dos roteiros de colaboração: objetivos específicos, coordenando as atividades em uma situação particular; engajamento em atividades específicas, de acordo com os objetivos pré-definidos do roteiro; seqüência de ações para orientar o processo colaborativo durante as atividades; mecanismos de gerenciamento das funções de cada estudante enquanto trabalha em grupo; e as formas de representação.

5. ESTRATÉGIAS SIMULADAS COM O TABULÆ COLABORATIVO

As estratégias propostas foram aplicadas a pequenos grupos. Neste estudo observamos um grupo alunos do Mestrado em Ensino de Matemática – IM/UFRJ. A seguir descrevemos uma das estratégias simuladas: Jigsaw-grupos de especialistas.

Esta estratégia pode ser usada em problemas com múltiplos componentes, ou com diferentes abordagens. Dependendo das características dos problemas, os estudantes podem ser organizados em pares, em grupos de três, ou quatro componentes.

5.1 Descrição

Um problema com múltiplos itens é proposto aos grupos. Nos grupos, cada estudante fica responsável por estudar um componente do problema, tornando-se especialista naquele item. Os especialistas de cada item participam de uma sessão colaborativa para estudar o componente. Havendo muitos especialistas para cada item, cada especialidade é organizada em grupos de até quatro estudantes. Após os especialistas discutirem os seus tópicos, volta a conectar-se com seus colegas de grupo para construir a solução do problema completo. Cada especialista *ensinará* aos demais colegas de grupo, o que discutiram nas sessões. Assim, cada um é responsável por orientar os demais em relação ao seu tópico.

5.2 Aplicações

Trabalhos extra classe. Examinar problemas grandes, ou com diferentes abordagens. Estudar vários casos em uma prova de teoremas. Investigar diferentes estratégias para resolver o mesmo problema. Desenvolvimento de tópicos do curso, através de projetos de grupo. Estudo de problemas mais sofisticados, envolvendo conhecimentos diversos, não possíveis de serem apresentados em aula. Resolução de um conjunto de problemas preliminares antes de abordar o problema principal.

No projeto das atividades, os roteiros orientam as discussões nos grupos especialistas, destacando aspectos relevantes para o problema. Os roteiros para a conclusão dos trabalhos nos grupos originais devem priorizar questionamentos, que orientem os estudantes a utilizarem a experiência adquirida nos grupos especialistas.

5.3 Caso observado

Neste pôster apresentamos detalhes do procedimento de resolução seguindo o Roteiro Jigsaw. Foram formados grupos de três estudantes para resolver o problema: “*Dado um pentágono encontrar um quadrado cuja área seja equivalente à área do pentágono*”.

Os grupos recebem o problema, se desconectam do grupo inicial e em seguida acessam os *grupos especialistas*. Cada componente do grupo inicial é conectado a uma especialidade diferente. (Mattos (2007))

A estratégia Jigsaw - Grupos Especialistas pressupõe o rearranjo em grupos que estudam um determinado tópico ou conceito, que faz parte do problema tratado pelo grupo inicial. Para este experimento, dividimos o problema em três tópicos especiais: 1. "*Como transformar um triângulo ABC qualquer num retângulo PQRS, de mesma área?*" 2. "*Como transformar um retângulo PQRS em um quadrado XYZW de mesma área?*" 3. "*Como transformar dois quadrados XYZW e MNOP num terceiro de mesma área que a soma dos dois?*"

6. CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta algumas características e funcionalidades agregadas a um software de Geometria Dinâmica, o Tabulæ Colaborativo. Estas implementações foram testadas no desenvolvimento da viabilidade da formulação de estratégias de ensino baseadas nos modelos de Aprendizagem Colaborativa, compondo *roteiros de colaboração*. As possíveis aplicações destas ferramentas podem possibilitar diversos modelos e abrem caminhos para diversas pesquisas e reflexões no campo da *Educação Matemática*.

Referências

BARBASTEFANO, R.G. (2002) Ferramentas síncronas de ensino de matemática a distância. Tese de doutorado, PEP-COPPE

BONK, C., CUNNINGHAM, D. (1998), ``Searching for constructivist, learner-centered and socio cultural components for collaborative educational learning tools". In C. Bonk, C., King, K., editors, Electronic Collaborators: Learner-Centered Technologies for Literacy, Apprenticeship, and Discourse, pages 25-50. Lawrence Erlbaum.

COHEN, E. G. (1996), *``A sociologist looks at talking and working together in the mathematics classroom"*, American Educational Research Association, New York.

DAVIDSON, N. (1990), Cooperative Learning in Mathematics. Addison-Wesley, Menlo Park.

DAVIDSON, N.A., REYNOLDS, B. E., ROGERS, E. C. (2001), ``Introdution to Cooperative Learning in Undergraduate Mathematics", Cooperative Learning in Undergraduate Mathematics: Issues that Matter and Strategies that Work. Rogers, E. C., Reynolds, B. E., Davidson, N.A., Thomas, A. D. (eds), MAA notes 55, pp. 1-11, The Mathematical Association of America.

DUBINSKY, E., MATHEWS, D. REYNOLDS, B. E.(eds) (1997), Cooperative Learning for Undergraduate Mathematics. MAA 44, The Mathematical Association of America, Washington.

DILLENBOURG, P. (1999), ``What do you mean by collaborative learning?'' In P. Dillenbourg (Ed) Collaborative-learning: Cognitive and Computational Approaches. (pp.1-19). Oxford: Elsevier.

FENTON, W. E., REYNOLDS, B. E., DAVIDSON, N. A., et al. (2001), ``Classroom Strategies for Cooperative Learning'', in *Cooperative Learning In Undergraduate Mathematics*, pp. 23-53, The Mathematical Association of America, USA.

GIRALDO, V., CARVALHO, L.M., TALL, D. O., (2002) ``Conflitos Teórico-Computacionais e a Imagem Conceitual de Derivada''. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães, IHTEM, vol. 1, pp. 153-164, Rio de Janeiro, Brasil.

GOOS, M. (2002), ``Understanding metacognitive failure'', The Journal of Mathematical Behavior, Elsevier, Volume 21, Issue 3, pages 283-302.

GUIMARAES, L.C., MORAES, T. G., MATTOS, F. R. P. (2005), ``Cooperative Distance Learning in Mathematics'', *US-China Education Review*, Volume 2, No.9, p. 42-45.

HAGELGANS, N. L., REYNOLDS, B. E., SCHWINGENDORF, K.E., et al. (1995) A practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics}, MAA 37, The Mathematical Association of America

HRON, A., FRIEDRICH H. F. (2003), ``A review of web-based collaborative learning: factors beyond technology''. Journal of Computer Assisted Learning, 19, pp 70-79.

JOHNSON, D.W., JOHNSON, R.T. (1990), ``Using Cooperative Learning in Math'', Cooperative Learning in Mathematics: a handbook for teachers}. Neil Davidson Editor, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, pp 103-124.

JOHNSON, D.W., JOHNSON, R.T. (1997), ``Social Skills for Successful Group Work''. Cooperative Learning for Undergraduate Mathematics. Dubinsky, E., Mathews, D. Reynolds, B. E.(eds), MAA notes 44, pp.201-204, The Mathematical Association of America, Washington,

KOLLAR, I., FISCHER, F., HESSE, F. (2006), ``Collaboration Scripts - A Conceptual Analysis'', Educational Psychology Review, 18, pp 159-185.

KRAMARSKI, B., MEVARECH, Z.M. (2003), Enhancing Mathematical Reasoning in the Classroom: The E_ects of Cooperative Learning and Metacognitive Training, American Educational Research Journal,, vol. 40, n.1, pp. 281-310.

MACGREGOR, J. (1997), ``Collaborative Learning: Shared Inquiry as a Process of Reform''. In Cooperative Learning for Undergraduate Mathematics. Dubinsky, E., Mathews, D. Reynolds, B. E.(eds), MAA notes 44, pp.27-33, The Mathematical Association of America, Washington.

MATTOS, F. R. P. , BARBASTEFANO, R G , GUIMARÃES, L. C. , MORAES, T. G. (2006), Aprendizagem Cooperativa à Distância em Matemática, In: III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Águas de Lindóia. v. único.

MATTOS, F. R. P. (2007), Roteiros de Colaboração para o Software Tabulæ: Estratégias Didáticas para um Modelo de Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador à Distância em Geometria. Tese de doutorado, COS-COPPE/UFRJ.

MISFELDT, M. (2004), ``Mathematicians Writing: Tensions Between Personal Thinking and Distributed Collaboration". Coop, the 6th international conference on the design of cooperative systems}, Nice.

MORAES, T.G. (2006), Um Modelo para Colaboração Síncrona em Geometria Dinâmica, Dissertação M.Sc. IM/ NCE – UFRJ.

NASON, R., WOODRUFF, E. (2004) Online Collaborative Learning in Mathematics: Some necessary innovations. In T.Roberts (Ed.), Online Collaborative Learning:Theory and Practice, pp.103-131, London.

PANITZ, T. (2006), ``Collaborative Versus Cooperative Learning - A Comparison of the Two Concepts Which Will Help Us Understand the Underlying Nature of Interactive Learning", disponível em http://capecod.net/\verb!~!tpanitz/tedsarticles/coopdefinition.htm, acessada em 15/12/2006.

PEA, R. D. (2004), ``The Social and Technological Dimensions of Scaffolding and Related Theoretical Concepts for Learning, Education, and Human Activity". The Journal of the Learning Sciences, 13, pp 423-451, Lawrence Erlbaum Associates.

ROGERS, E. C., REYNOLDS, B. E., DAVIDSON, N.A., THOMAS, A. D. (eds), (2001) *Cooperative Learning in Undergraduate Mathematics: Issues that Matter and Strategies that Work*. MAA notes 55, The Mathematical Association of America, Washington.

SCARDAMALIA, M., BEREITER, C. (2003), ``Knowledge building environments: Extending the limits of the possible in education and knowledge work". In A. DiStefano, K.E. Rudestam, & R.Silverman (Eds.), Encyclopedia of distributed learning. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

SCHOENFELD, A. (1992), ``Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making inmathematics". Chapter 15, pp. 334-370, of the Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (D. Grouws, Ed.). New York: MacMillan.

SLAVIN, R.E. (1996), ``Research on Cooperative Learning and Achievement: What We Know, What We Need to Know", \textit{Contemporary Educational Psycology}, vol. 21, pp. 43-69.

SLAVIN, R.E. (1997), ``When Does Cooperative Learning Increase Student Achievement?" In Dubinsky, E., Mathews, D. Reynolds, B. E.(eds), Cooperative Learning for Undergraduate Mathematics. MAA notes 44, pp.71-84,The Mathematical Association of America, Washington.

SWAN, M.B. (2005), ``Improving Learning in Mathematics: Challenges and Strategies". Department for Education and Skills Standards Unit., University of Nottingham.

VYGOTSKY, L.S. (1995), *Pensamento e Linguagem*, São Paulo, Martins Fontes.

WEBB, N. M., MASTERGEORGE, A. M. (2003), ``The development of students' learning in peer-directed small groups''. \textit{Cognition and Instruction}, 21, pp. 361-428.

MATHCHAT – UM MÓDULO DE CHAT MATEMÁTICO INTEGRADO AO MOODLE

Francisco Mattos [b], Luiz Carlos Guimarães [a], Rafael Barbastefano [c], Rodrigo Devolder [a], Ulisses Dias[a]

[a] LIMC-IM - UFRJ, luizguima@gmail.com., rodrigogd@ufrj.br, ulisses@im.ufrj.br [b] CAP-UERJ – francisco.mattos@gmail.com [c]MPECM-DEPRO-CEFET/RJ – rgb@cefet-rj.br.

Resumo: Salas de bate-papo em ambientes computacionais projetados para aprendizagem possibilitam interação síncrona entre alunos e professores em cursos de educação à distância. Desenvolvemos o MathChat integrado a uma plataforma de ensino à distância que agrega funcionalidades de geração de textos, expressões matemáticas, gráficos e cálculos algébricos, com o objetivo de facilitar a comunicação matemática em ambientes de colaboração à distância. Apresentamos neste pôster exemplos em cursos de graduação em disciplinas de matemática, para futuras pesquisas em implementações de modelos que simulam estratégias de Aprendizagem Colaborativa em Matemática.

1. INTRODUÇÃO

O MathChat é um bate-papo munido de ferramentas que permitem a integração de textos com objetos matemáticos, como figuras e fórmulas. Ele está sendo desenvolvido pelo Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências da UFRJ - LIMC/UFRJ.

Em sua primeira versão, o MathChat foi implementado em Java, tendo o Maple[1] como sistema de computação algébrica (CAS da sigla em inglês). Os CAS's são sistemas manipuladores de expressões algébricas que, entre outras coisas, permitem cálculo de limites e derivadas, exibem gráficos de funções e solução de sistemas lineares. O Maple é um programa padrão, utilizado por diversas universidades no Brasil e no mundo. Porém, como é um programa privado, sua utilização na Internet é dificultada, pois depende do pagamento de direitos autorais e tem o código fechado.

Na versão em desenvolvimento, optou-se por utilizar o Maxima[2], que é um CAS de livre distribuição e com código-fonte aberto (sob licença GNU-GPL[3]) e que possui boa parte das

---

[1] http://www.maplesoft.com/

[2] http://maxima.sourceforge.net/

funcionalidades do Maple. Além disso, ele permite anexar novas funções escritas em LISP, possibilitando a criação de novos pacotes para suprir eventuais deficiências. Esta versatilidade é interessante para os desenvolvedores do MathChat, pois faz com que seja possível aumentar ou diminuir o número de comandos lidos, o que pode ser desejável de acordo com a aplicação pedagógica a ser desenvolvida. Na verdade, a proposta da segunda versão é ser compatível, de um modo geral, a qualquer sistema de manipulação algébrica que utiliza linha de comando, como são o Maple e o Máxima, funcionando como uma interface remota o CAS.

Os Chats são simples de serem utilizados e possuem baixo custo operacional, e de um modo geral permitem a comunicação através de textos. Com o objetivo de superar dificuldades de comunicação síncrona de objetos matemáticos, desenvolvemos uma ferramenta de Chat que possibilita a comunicação de objetos matemáticos utilizando a Internet, além da usual comunicação de texto: o MathChat.

O MathChat se apresenta como uma ferramenta para ensino à distância integrado a um sistema de gerenciamento de cursos – o Moodle[4] – e a um Sistema de Computação Algébrica (CAS) – o Maxima3.

O Moodle é uma ferramenta CSCL[5] escrita em php[6] habilitada a promover aprendizado colaborativo na internet. O Maxima é um software livre (sob licença GNU-GPL) com funcionalidades semelhantes ao Maple, adequadas aos conteúdos de matemática nos ciclos básicos de engenharia, matemática e ciências da computação.

O MathChat, portanto, funciona como uma interface para uma aplicação localizada remotamente e na qual o estudante pode ter acesso nos laboratórios das universidades, em casa ou em qualquer outro lugar através da Internet.

O editor de mensagens do MathChat exibe texto com as expressões matemáticas e o resultado do comando do Maxima logo abaixo da área de digitação, permitindo uma análise antes de enviar aos demais participantes. Este mesmo sistema pode ser aplicado em ferramentas assíncronas presentes em plataformas para ensino à distância como por exemplo os fóruns e questionários do Moodle.

---

[3] http://www.gnu.org/copyleft/gpl.html

[4] http://www.moodle.org/

[5] Computer Supported Collaborative Learning

[6] http://www.php.net/

Apresentamos o conceito de Computação Algébrica e o Maxima, em particular. Discutimos aspectos da implementação do MathChat, fazendo considerações sobre sua aplicação em ambientes colaborativos. Por fim, apresentamos uma simulação de uso para ilustrar possibilidades didáticas.

As características funcionais e de interface propostas, têm por finalidade criar um ambiente favorável ao aprendizado de matemática visando diminuir dificuldades relatadas na literatura devido às limitações presentes nas representações matemáticas dos ambientes CSCL em geral. Para implementar melhorias ao ambiente de ensino/aprendizagem propomos a adequação do gerenciamento do conhecimento proveniente do uso da ferramenta integrando-a a uma plataforma para ensino à distância – Moodle.

2. APRENDIZADO COLABORATIVO

As novas tecnologias aplicadas ao ensino em conjunto com a ampliação de acesso à Internet têm permitido o desenvolvimento de softwares que pretendem ampliar o alcance do ensino, aumentando e melhorando o acesso e, em outras situações intervindo num processo de isolamento vivenciado pelos sujeitos que atuam e ensino e aprendizagem. Estas possibilidades propiciam a abertura de canais alternativos de acesso aos alunos, possibilitando a superação de dificuldades e limitações. O conceito de Aprendizado Colaborativo, aplicado ao ensino de Matemática, incentiva a interatividade entre os estudantes estimulando a participação coletiva na construção do conhecimento matemático. Davidson (1990) enumera algumas vantagens da aprendizagem em grupo, por exemplo,quando exploram soluções alternativas para tarefas e problemas propostos.

Resultados de programas baseados no Aprendizado Colaborativo e aplicados em universidades americanas para o ensino de matemática são apresentados por Rogers, et al (2001), Hagelgans, et al (1995), Davidson (1990). Estes autores observam que técnicas de aprendizado colaborativo permitem que os estudantes melhorem suas possibilidades de aprendizado, como subproduto do processo de interação interno ao grupo e com os professores, principalmente através das discussões sobre as atividades que estão realizando.

O processo de discussão e interação pode aumentar sua abrangência e eficácia quando utilizam ferramentas computacionais, principalmente aquelas projetadas como CSCL. No entanto, quando se trata de aprendizado colaborativo em matemática, encontramos muitas dificuldades, principalmente no que se refere à comunicação matemática à distância. Nason&Woodruff (2004) e diversas fontes ali citadas relacionam como uma das principais causas das dificuldades de implementação de Aprendizagem Colaborativa em Matemática as limitações presentes nas representações matemáticas dos ambientes CSCL e as dificuldades para promover um discurso matemático quando da execução de uma atividade que necessita desta representação.

O MathChat permite a comunicação de fórmulas, expressões matemáticas e imagens de curvas e superfícies, associados a uma ferramenta de Chat. Estas funcionalidades têm como objetivos superar algumas das dificuldades relatadas em Nason & Woodruff (2004).

2.1 Aprendizagem Colaborativa em Matemática

Muitos estudos tem sido desenvolvidos para o desenvolvimento estratégias eficazes para ambientes CSCL. Especialmente em matemática, ocorrem muitas dificuldades para a implementação de atividades colaborativas, como coloca Nason & Woodruff (2004). Criar e manter comunidades de aprendizagem em matemática tem sido um problema difícil.

Estas dificuldades, relacionadas em Nason & Woodruff (2004) e outras fontes ali citadas, seriam relacionadas à promoção discuss~oes durante e após os processos de resolução de problemas. Outro problema que deve ser tratado diz respeito às limitações presentes nos ambientes CSCL, que dificultam a representação matemática e construção do discurso matemático.

Nason & Woodruff propõem em atividades com problemas matemáticos que envolvam os estudantes na produção de modelos matemáticos que possam ser discutidos, criticados e melhorados, ao mesmo tempo em que as ferramentas desenvolvidas para dar suporte à procedimentos que envolvem Aprendizado Colaborativo permitam a representação de problemas matem_aticos e facilitem a comunicação entre os participantes. Estas proposições têm por objetivos promover e dar suporte ao discurso matemático em ambientes CSCL.

3. Programas de Computação Algébrica e o Maxima

Historicamente o termo "computação" se refere a "realizar operações com números" (Heck, 2003). Desde meados da década de 70, o desenvolvimento de aplicações computacionais deixou de realizar apenas operações com números para operar símbolos que representam, além de números, objetos matemáticos como: polinômios, funções e estruturas algébricas como grupo e anéis. Estas aplicações receberam adenominação de computação simbólica ou algébrica.

Nos primeiros anos a computação algébrica foi utilizada por programas específicos para áreas de ciências como física e engenharia. Gradativamente, tais programas foram substituídos por pacotes integrados a CAS[7] de uso geral, especialmente aplicados ao ensino como o Mathematica1 e o Maple.

Um destes sistemas é o Maxima originalmente denominado MacSyma, desenvolvido a partir de 1968 no MIT (Massachusetts Institute of Technology), um produto interativo, com linguagem fácil de ser aprendida e com a possibilidade de ser usado em conjunto com outros programas.

O Maxima possui fácil integração a novas funções, possibilitando a criação e utilização de pacotes de funções algébricas específicas à determinada necessidade de um curso.

Nos últimos anos, acompanhamos o desenvolvimento de diversas aplicações de sistemas de computação algébrica ao ensino de ciências, engenharia e matemática. Um exemplo recente é o desenvolvimento de uma interface para um CAS realizar cálculos algébricos de construções geradas em programas de geometria dinâmica (Botana e Valcarce, 2002). Dentre outras funcionalidades, o MathChat funciona como uma interface remota para o Maxima.

4. O funcionamento do MathChat

Com o objetivo de viabilizar a plena comunicação matemática ao ensino de educação à distância, desenvolvemos um Chat, denominado MathChat (Figura 2), integrando textos, objetos

---

[7] Computer Algebra Systems

matemáticos e um sistema de manipulação algébrica a um sistema de gerenciamento de curso (Moodle) utilizando a Internet.

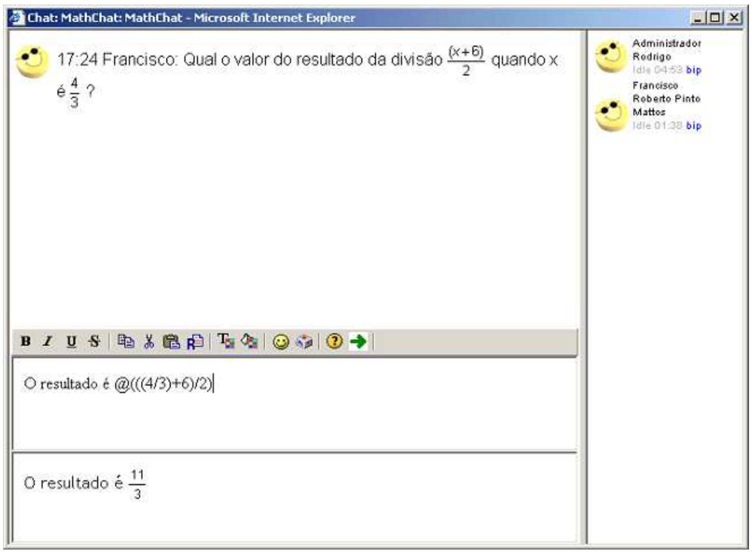


Figura 1: MathChat

A velocidade de digitação, transmissão e exibição da informação trafegada pelo MathChat é imediata, uma vez que a comunicação em um Chat se dá de forma síncrona.

O Moodle possui diversos módulos que são disponibilizados para a composição de cursos, como fórum, Chat, avaliações, pesquisa de opinião, gerenciador de arquivos e outros, permitindo a aplicação de modelos de aprendizado colaborativo e o ensino à distância. O MathChat foi desenvolvido como um novo módulo para o Moodle.

A integração com o CAS Maxima é feita a partir de linhas de comandos em qualquer parte da mensagem que são substituídas pelo resultado do comando. O mesmo acontece com as expressões matemáticas, que utiliza as funcionalidades no formato LaTeX1 para serem substituídas pela estrutura MathML2 através do sistema ASCIIMathML3.

Portanto, o MathChat permite o envio de três tipos de informações: texto comum, expressões matemáticas e comandos do Maxima. Para que o usuário possa analisar o texto digitado com as expressões matemáticas e visualizar os resultados dos comandos do Maxima antes de enviar a mensagem, o editor do MathChat possui dois campos: um destinado à digitação do texto a ser enviado – a área de digitação, e outro reservado a exibição do texto da maneira na qual será enviada ao Chat – a área de exibição.

A introdução do módulo MathChat em um curso segue os mesmos procedimentos já utilizados no Moodle para acrescentar uma atividade (Figuras 2 e 3).

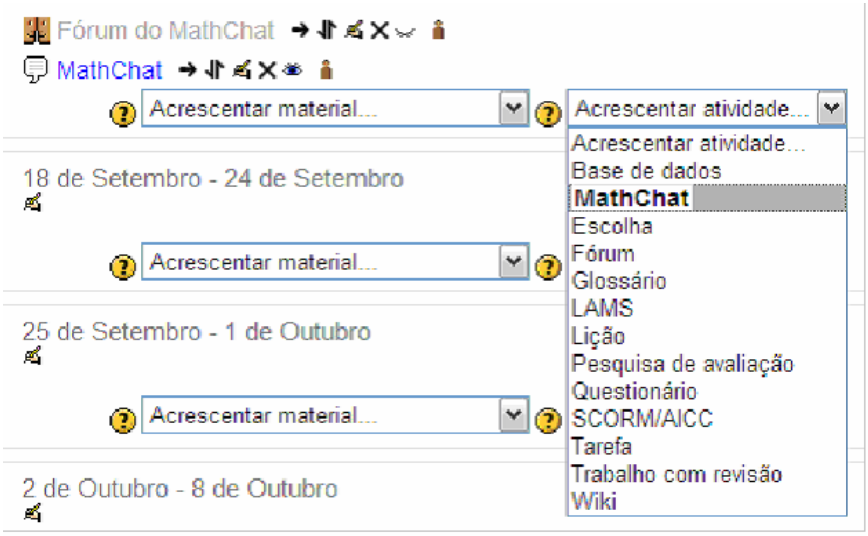


Figura 2

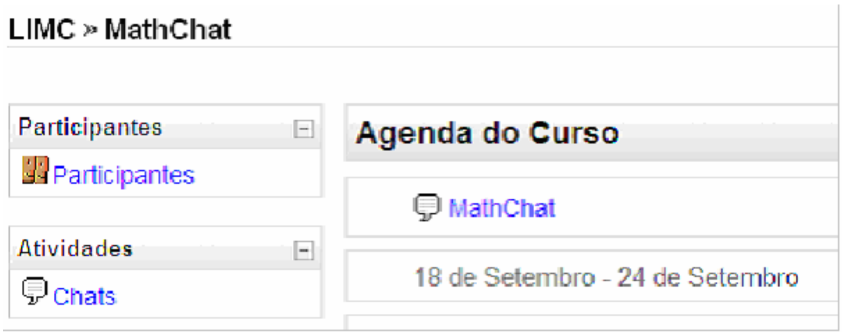


Figura 3

5. Exemplo de uma sessão do MathChat

Nesta simulação usamos o MathChat para apresentar um problema de mínimo de uma função, com um professor e dois alunos. Nela, os três elementos do MathChat são apresentados - Chat de texto, edição de fórmulas e uso de comandos do Maxima:

Professor: Olá. Vamos resolver um problema que pede para encontrarmos o mínimo de uma função?

Aluno 1: ok

Aluno 2: ok

Professor: Vamos tentar descobrir o ponto de mínimo da seguinte função polinomial:

p(x) = x^4+2x^3-5x^2-4x+6

Aluno 1: vou desenhar a função

Aluno 1: @grafico(x^4+2*x^3-5*x^2-4*x+6,[x,-5,5])

Professor: Desenhar com x variando entre -5 e 5 não nos diz muita coisa

Professor: Vamos tentar obter os pontos de derivada nula. Aluno 2, vc poderia fazê-lo?

Aluno 2: ok

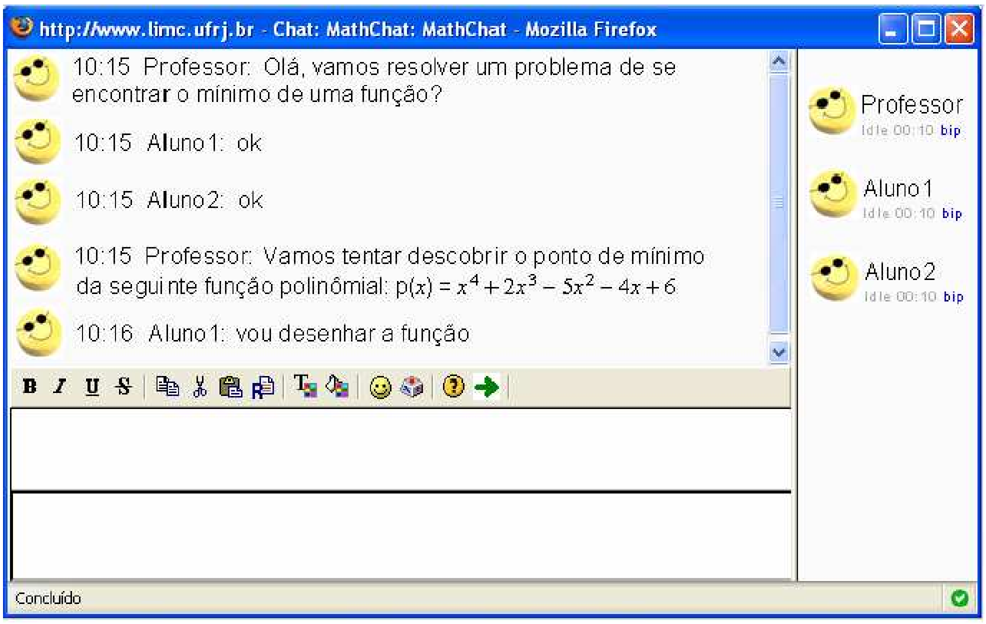


Figura 4: MathChat em uso

6. Conclusão

A incorporação dos recursos de Sistemas de Manipulação Algébrica, a uma ferramenta para a criação de expressões matemáticas associados a um ambiente de comunicação síncrona representa a possibilidade de salas virtuais para Ensino de Matemática à Distância. Este ambiente agregado a outros módulos de ensino do Moodle tem propiciado a simulação de ambientes de ensino de variadas orientações didáticas e que utilizam a linguagem matemática aliada a componentes textuais. Esta ferramenta pode ainda, quando associada com as demais funcionalidades do Moodle, criar efetivas condições para a simulação de modelos para Aprendizagem Colaborativa em Matemática, segundo modelos já testados e apresentados na literatura para o ensino presencial.

Os nossos resultados iniciais indicam que a ferramenta MathMoodle pode viabilizar a simulação de estratégias didáticas para o Aprendizado Colaborativo em Matemática, desenvolvidas para o ensino presencial, e apresentadas na literatura, para um Aprendizado Colaborativo Apoiado por Computador.

Pretendemos, na fase seguinte da pesquisa, mostrar que as novas funcionalidades agregadas ao Moodle, através do MathChat têm por objetivo de torná-lo um ambiente viável para tais implementações no aprendizado de matemática. E em conseqüência verificar a possibilidade de potencializar os aspectos positivos do Aprendizado Cooperativo quando aplicados em sala de aula e relatados na literatura.

A partir destas experiências iniciais pretendemos aplicá-los em diversos níveis de ensino que utilizam a linguagem matemática e para tal desenvolver pesquisas que venham explorar as possibilidades didáticas que esta ferramenta pode agregar na construção do conhecimento matemático dos alunos.

Referências

Botana, F.; Valcarce, J.F. (2002) A dynamic–symbolic interface for geometric theorem discovery. Computers & Education v. 38, p. 21-35.

Davidson, N. (1990) Cooperative Learning in Mathematics. Addison-Wesley, Menlo Park.

Hagelgans, N. L., Reynolds, B. E., Schwingendorf, K.E., Vidakovic, D., Dubinsky, E., Shahin, M., Wimbish Jr, G. J., (1995) A practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics, MAA notes 37, The Mathematical Association of America, Washington.

Heck, A. (2003) Introduction to Maple 3rd ed. Springer-Verlag, Berlin.

Nason, R., & Woodruff, E. (2004). Online collaborative learning in mathematics: Some necessary innovations. In T. Roberts (Ed.), Online collaborative learning: Theory and practice (pp. 103-131). London: Infosci.

Rogers, E. C., Reynolds, B. E., Davidson, N.A., Thomas, A. D., (2001) Cooperative Learning in Undergraduate Mathematics: Issues that matter and strategies that work. Project CLUME (Cooperative Learning in Undergraduate Mathematics Education), MAA notes 55, The Mathematical Association of America,Washington.

SOFTWARE WINGEOM E GEOMETRIA ESPACIAL: EXPLORANDO CONCEITOS E PROPRIEDADES

Adriana Richit
Doutoranda em Educação Matemática - Unesp / Rio Claro, SP
Membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM)
Bolsista CNPq

Mauri Luís Tomkelski
Docente do IABRB - Erechim, RS
Mestrando em Ensino de Física - UFRGS / Porto Alegre, RS

Andriceli Richit
Mestranda em Educação Matemática - Unesp / Rio Claro, SP
Membro do grupo de Pesquisa em Formação de Professores

RESUMO

A presente oficina tem por objetivo explorar algumas das possibilidades de uso do Software Wingeom no estudo de conceitos de Geometria Espacial. Além disso, tecemos algumas considerações acerca das peculiaridades da geometria dinâmica, destacando as potencialidades que os softwares de geometria dinâmica propiciam à abordagem de conteúdos matemático-geométricos. Em seguida comentamos alguns aspectos relacionados aos recursos do software Wingeom, propondo exemplos de atividades de Geometria Espacial que podem ser desenvolvidas nesse ambiente e por fim, explicitamos fatores relevantes que precisam ser levados em conta ao incorporarmos as tecnologias informáticas à prática pedagógica em Matemática. Por último detalhamos alguns elementos metodológicos da oficina que estamos propondo aqui.
Palavras-chave: Software de Geometria Dinâmica, Geometria Espacial, Educação Matemática.

CONSIDERAÇÕES INTRODUTÓRIAS

Levando em conta que o uso das tecnologias informáticas está se tornando cada vez mais necessário e comum nos espaços educacionais, em particular nas aulas de Matemática, e que a Geometria Espacial é uma área carente de recursos que ampliem o aspecto da visualização, o qual é necessário à compreensão de conceitos e propriedades dessa área do conhecimento, sugerimos uma sessão de trabalho pedagógico focando conteúdos dessa disciplina, na modalidade de oficina, baseada no uso do software Wingeom.

Além disso, sabemos que, assim como os autores do presente trabalho, muitos outros se dedicam à realização de estudos e experiências educativas, desenvolvidas em ambientes informatizados de aprendizagem, com o propósito de investigar novas metodologias de ensino e aprendizagem, que enfatizem o uso de softwares livres, visando a favorecer os processos educacionais em Matemática, incluindo-se a Geometria Plana, Espacial e Analítica, as quais são fortemente caracterizadas pelo aspecto visual.

Dentre as características mais salientes dos softwares destinados ao estudo de Geometria, nas suas diversas manifestações, destaca-se a dinâmica dos mesmos. Com isso, surgiu uma nova denominação para a Geometria abordada por meio desses recursos: a Geometria Dinâmica. Esse termo é utilizado para definir a Geometria implementada em um ambiente informatizado de aprendizagem, o qual permite que objetos sejam modificados e animados, preservando-se as propriedades estabelecidas inicialmente numa construção realizada.

GEOMETRIA DINÂMICA: FAVORECENDO O ESTUDO DE GEOMETRIA ESPACIAL

A utilização de softwares de Geometria Dinâmica constitui-se numa nova e interessante possibilidade de modificar o caráter das aulas de Geometria e de contribuirmos para a superação de algumas dificuldades de compreensão de conceitos dessa área, em particular em Geometria Espacial, que por tratar de construções geométricas com três dimensões, é fortemente favorecida pela visualização oferecida por estes recursos e pela possibilidade de animar essas construções, evidenciando propriedades específicas e relações entre parâmetros variáveis.

Sabemos que muitos elementos e propriedades inerentes a Geometria Espacial deixam de ser compreendidos em função da abordagem desse conteúdo basear-se em representações estáticas, como aquelas usadas em livros didáticos. Essa deficiência da Geometria Espacial vem sendo gradativamente superada, à medida que softwares de Geometria Dinâmica são desenvolvidos e incorporados à prática de sala de aula.

Além disso, sabemos que o uso de ambientes informatizados de aprendizagem pode propiciar distintas perspectivas no processo de elaboração e apropriação do conhecimento matemático, pois o aluno assume o papel de investigador de conceitos e propriedades, bem como é incentivado a construir seu próprio conhecimento por meio de situações problema que lhe permitam experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e demonstrar.

Tendo em vista as suas potencialidades, um ambiente de Geometria Dinâmica se constitui num recurso que favorece a aprendizagem, pois a manipulação dos elementos básicos de uma dada construção, visto sob diversos ângulos, pode levar o aluno a uma compreensão efetiva das propriedades envolvidas nessa construção (RICHIT, 2005).

Do mesmo modo, a manipulação (animação), a experimentação e a visualização dos diversos elementos construídos a partir de um elemento geométrico básico, pode favorecer a abordagem mais abrangente desse conteúdo (BORBA; VILLARREAL, 2005), pois as diversas etapas desse problema (ou conceito) podem ser exploradas separamente ou conjuntamente, aspecto este que permite um melhor entendimento da Geometria Espacial.

Partindo das considerações expostas nessa seção, sugerimos atividades didáticas de Geometria Espacial, baseadas no ambiente interativo do software Wingeom, que exponham os alunos a situações de investigação e experimentação.

SOFTWARE WINGEOM: APRESENTANDO ALGUNS RECURSOS

O Wingeom é um software freeware (de domínio público) que permite a construção de figuras bidimensionais e tridimensionais. Foi desenvolvido por Richard Parris da Phillips Exeter Academy. Este recurso roda em sistema operacional Windows e ocupa apenas 144 KB de memória do disco rígido. As versões disponíveis para Windows são 95, 98, ME e XP, compilados em 2005. O Wingeom é distribuído em 10 idiomas, incluindo o Português do Brasil, sendo que esta versão foi desenvolvida com o apoio de Franciele Cristine Mielke. Para obter uma versão grátis acesse o endereço <http://math.exeter.edu/rparris/wingeom.html> e faça download do mesmo.

É importante informar que cada menu do Wingeom tem seu próprio arquivo de ajuda. Além disso, o usuário tem bastante controle sobre as construções que são feitas, pois esse software permite a modificação de diversas características da uma dada figura (cor, espessura de segmento, dimensão ou legenda). Por exemplo, a posição padrão da legenda é em cima do ponto, porém as legendas podem ser mudadas ou movidas a critério do usuário. Para tanto, deve-se colocar o mouse no modo texto (menu botões), arrastando a legenda para o lugar desejado.

Quando alguma das opções contidas em um dos menus é selecionada, uma nova caixa de diálogo é aberta, porém somente algumas delas podem permanecer visíveis na tela por tempo indefinido. A maioria dessas caixas precisa ser fechada para que outros recursos sejam ativados. Elas podem ser fechadas clicando-se no botão X no canto superior direito da tela, clicando o botão "fechar" ou pressionando a tecla Esc. Quando uma janela ou caixa de diálogo está aberta, a barra de título correspondente permanece realçada.

Outro recurso bastante útil é o menu *Medidas*. O Wingeom reconhece expressões tais como AB+BC, 2.5PQ, (AB)^2 ou AC/BC, assim como medidas de ângulos podem ser obtidas por meio da inserção de expressões como <ABC, que leva o programa a copiar o ângulo ABC em ambos os sentidos e tamanhos. Há também seis parâmetros dinâmicos representados pelos símbolos #, $ @, &, %, e ?, que podem ser usados na implementação de fórmulas ou para fazer variar algum elemento de uma construção. Por exemplo, para marcar um ponto C variável em um segmento AB,

adote # para representar o valor da coordenada desse ponto. Com isso, o ponto C pode ser movido ao longo do segmento AB, fazendo-se o parâmetro # variar (menu Animação, selecione a opção *Variação de #* e arraste o botão da caixa de diálogo que se abre).

Do mesmo modo, você pode interromper alguma ordem de animação pressionando a tecla “S” (sair), ou pressionando “R” para animar mais rápido ou “L” para mover lentamente. A barra de títulos ativada lembrará você disto. Para desfazer as construções mais recentes, pressione Ctrl+Z, mas se desejar reconstruir alguma construção pressione Ctrl+Y. Ainda, um ponto não pode ser excluído de uma construção se ele é necessário à construção da mesma. Se isso for feito toda a construção será excluída.

Para inserir elementos lineares na janela 3D, clique em *Linear*. Com isso, uma nova caixa de diálogo abrirá, na qual você poderá editar (inserir) os elementos lineares que desejar (segmento, altitude, altura). Para manipular legendas clique em *Ver* e selecione a opção *Legendas* para colocá-las ou tirá-las, ou pressione Ctrl+ L para ativar e desativar legendas. Para alterar a cor de elementos lineares ou curvos, selecione a opção *Elementos Lineares* ou *Elementos Curvos* no menu **Editar**. Para colocar uma construção na posição original pressione Ctrl+W.

Clique *espessura do* segmento no menu **Ver** para alterar a cor ou a espessura do segmento. Clique na cor desejada para adicioná-la ao item selecionado. Clique transparente para fazer a face clara (ou fazê-la opaca). Isto não muda a cor selecionada, que é temporariamente desativada. Se o modo de apresentação é *Mostrar Tudo*, as faces são ignoradas e não há efeito imediato.

A caixa de diálogo *coordenadas* exibe as coordenadas de um vértice ou ponto selecionado. Você pode editar estas coordenadas se a definição do vértice permiti-la. Você pode digitar uma nova coordenada na caixa de edição e pressionar Enter, ou você pode mover a barra de rolagem. O que acontece a seguir depende do vértice; pode ser que toda a unidade ao qual o vértice pertença se moverá (tente mover o circuncentro de um tetraedro, por exemplo), ou pode ser que nada aconteça (se a unidade inclui um ponto cujas coordenadas foram determinadas como imóveis). A coordenada que estiver selecionada é que pode ser controlada ou movimentada pela barra de rolagem.

A opção *Casas Decimais* no menu **Editar** altera a quantidade de casas decimais mostradas em uma mediação do menu **Medidas**, por exemplo. A opção *Funções*, no menu **Editar** é útil para se definir longas fórmulas, quando as caixas de edição comportam uma quantidade pequena de caracteres. Esta caixa de diálogo aceita nomes de até nove caracteres e fórmulas de até sessenta, que devem ser escritas usando a variável fictícia x.

Em síntese, o Wingeom permite a construção de figuras geométricas bastante precisas em duas ou três dimensões, as quais podem ser modificadas e animadas. Além disso, ele é um programa de fácil utilização, de modo que pode atender as necessidades tanto de professores na elaboração de suas propostas de trabalho pedagógico, quanto de alunos no aprofundamento de conteúdos abordados em sala de aula ou na realização de atividades educativas complementares.

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS DA OFICINA

A presente oficina será totalmente conduzida em laboratório de informática. Inicialmente, serão apresentados e comentados, em detalhes, cada um dos menus do software Wingeom (janela 3D), explorando-se as suas funções por meio de construções. Essa primeira atividade tem como objetivo familiarizar os participantes com os recursos do referido software.

Após a familiarização dos participantes da oficina com o software, serão desenvolvidas algumas atividades enfocando conteúdos diversos de Geometria Espacial (prismas, poliedros regulares, superfícies esféricas, esferas, área, volume, seções de corte etc), baseando-se no uso do software Wingeom. Tais atividades serão previamente elaboradas pelos responsáveis dessa oficina. Num terceiro momento, serão distribuídas atividades variadas de Geometria Espacial, que serão realizadas pelos participantes, auxiliados individualmente pelos ministrantes da referida oficina.

EXEMPLOS DE ATIVIDADES QUE PODEM SER DESENVOLVIDAS COM O SOFTWARE WINGEOM

As atividades apresentadas a seguir foram desenvolvidas pelos autores desse texto e podem ser utilizadas com alunos da Educação Básica ou do Ensino Superior. Além disso, não restringimos o uso das mesmas por quem tiver interesse.

1. Vamos construir um cone circular reto e uma esfera inscrita nele e explorar as propriedades e relações que se estabelecem entre ambos quando variamos a abertura do cone (raio da base do cone).

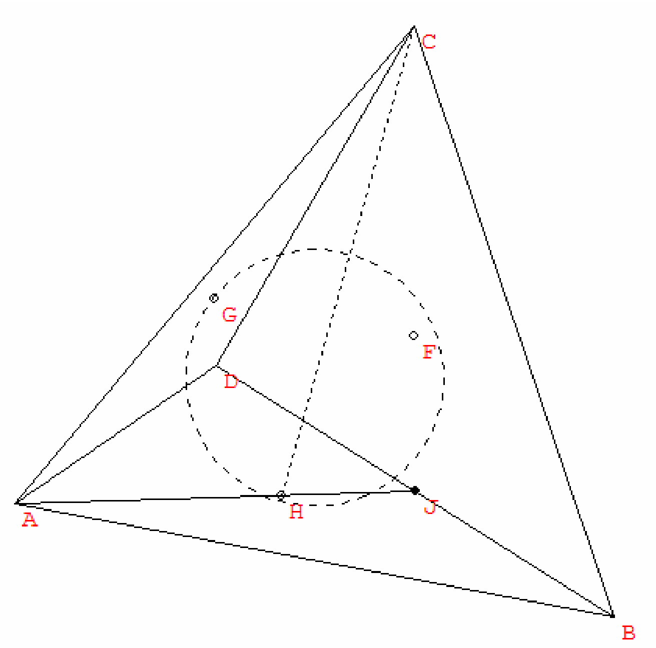
   COMO CONSTRUIR

Insira um cone de raio da base medindo # (o símbolo sustenido é a notação usada pelo Wingeom para representar elementos variáveis de uma dada figura representada, como raio, altura, aresta, por exemplo) e altura medindo 3 (menu *Unidades/superfície/cone*). Construa uma esfera inscrita no cone de raio #, com centro da base em A, vértice em B e raio não informado (menu *Curvo/Esfera/inscrita no cone*). Meça o raio da base do cone e o raio da esfera (Menu *Medidas*), indicando os segmentos AC e AD. Faça variar o parâmetro # (Menu *Animação/Variação de #*). No menu *Animação/Variação de #*, digite 0 na janela que se abre e clique em fixar L, em seguida digite 2 e clique em fixar R (os valores digitados e fixados determinam o intervalo de variação do raio da base do cone). O que se pode notar com relação aos raios medidos? Existe alguma relação matemática entre os elementos geométricos que constituem o cone e aqueles que constituem a esfera inscrita nele? Em que momento o centro da esfera coincide com o centro da base do cone? Compare os volumes dos sólidos construídos.

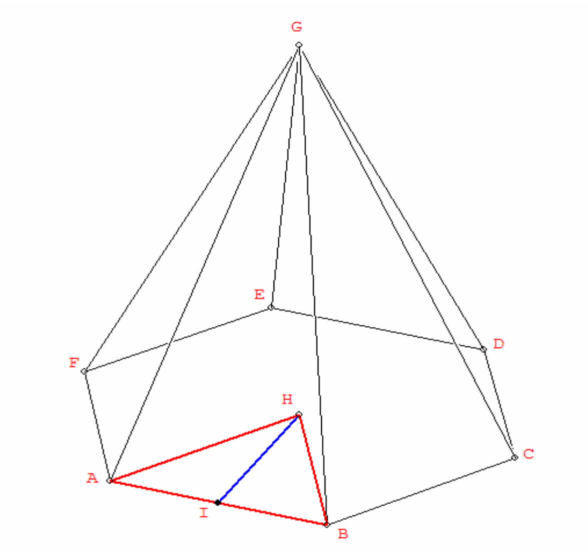
2. Representar um tetraedro regular de aresta 1 e inserir nele uma esfera. Estudar as relações que se estabelecem entre os volumes de ambos os sólidos e achar a área total do tetraedro. Qual a relação entre a altura do tetraedro e o raio da esfera inscrita?

   COMO CONSTRUIR

   Insira um tetraedro regular de aresta 1 (menu *Unidades/Poliedro/Tetraedro*). Inscreva no tetraedro uma esfera inscrita (menu *Curvo/Esfera/inscrita no Tetraedro*). Determine a área total do tetraedro. Ache o volume de ambos os sólidos. Existe alguma relação matemática (razão) entre os valores obtidos para os volumes? Comente.



3. Construa uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 4 cm e uma aresta da base mede 3 cm. Ache o apótema da base, o apótema da pirâmide. Qual a medida do apótema da base e do apótema da face lateral? Calcule a área lateral e a área total dessa pirâmide. Calcule ainda o volume da pirâmide. (Para determinar o ponto médio use o menu *Pontos/1coordenadas relativas* indicando o segmento AB). Como podemos calcular graficamente e algebricamente o apótema da pirâmide?



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Levando em conta a diversidade de trabalhos realizados que envolvem o uso de softwares de geometria dinâmica, entre eles Santos (2006), pode-se observar que a geometria é uma das áreas da Matemática que mais tem se beneficiado com o uso dos recursos das tecnologias informáticas. Tal afirmação pode ser assegurada se levarmos em conta que os softwares de Geometria Dinâmica permitem que o indivíduo faça construções, representações e experimentações usando sua criatividade e procedimentos de contrução próprios (LOURENÇO, 2002, BORBA;VILLARREAL, 2005, GRAVINA, 1996).

Desse modo, à medida que ele envolve-se nas atividades propostas pelo professor, inventando, criando, construindo e reconstruindo uma dada representação geométrica, ele tem a possibilidade de construir seu conhecimento, ao invés de apenas repetir algoritmos comumente desenvolvidos em sala de aula. Na perspectiva do trabalho aqui proposto, a concretização da aprendizagem implica fazer com que o aluno experimente e descubra por si só, relações, que elabore e teste suas próprias conjecturas. Ou seja, que ele construa seu conhecimento por meio de atividades que promovam um maior engajamento dele nesse processo. E as tecnologias informáticas propiciam esse envolvimento, além de favorecer a aprendizagem matemática, pricipalmente no que se refere a Geometria Espacial, cuja abordagem e entendimento dependem do aspecto visual e da animação para que suas propriedades sejam evidenciadas e compreendidas.

REFERÊNCIAS

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization Mathematical. New York, USA: Springer, 2005. (Education Library; v 39).

GRAVINA, M. A. 1996: Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação - CBIE, 7, Belo Horizonte, MG, *Anais do VII CBIE*, 1996.

LOURENÇO, M. L. A Demonstração com Informática Aplicada a Educação. In: *Boletim de Educação Matemática* (BOLEMA), Rio Claro, v. 15, n. 18, p. 100-111, set. 2002.

ROLKOUSKI, E. *Demonstrações em Geometria*: uma descrição dos processos de formação utilizados por alunos de Licenciatura em Matemática em ambiente informatizado. 2002. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2002.

RICHIT, A. *Projetos em Geometria Analítica Usando Software de Geometria Dinâmica*: repensando a Formação Inicial Docente em Matemática. 2005. 215 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro,2005.

SANTOS, S.C. *A Produção Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem*: o caso da Geometria Euclidiana Espacial 2006. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

TÓPICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO O SOFTWARE *GEOGEBRA*

Filipe Hasche
hasche@pg.im.ufrj.br
Universidade Federal do Rio de Janeiro

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, muitos estudos exploraram aplicações de tecnologias computacionais para o ensino de matemática. Em uma revisão bibliográfica sobre esse assunto, Giraldo & Carvalho (2004) comentam que muitas vezes era delegado à maquina o *sucesso* ou *fracasso* do experimento (p. 31). Estes autores, entendendo que a máquina não encerra em si nenhum atributo intrínseco à qualidade de sua utilização no ensino, também destacam uma observação sobre o trabalho de Laudares & Lachini (2000) onde vemos (p. 12):

> [...] o uso de tecnologia pode se constituir em uma importante alternativa para o modelo tradicional da aula de matemática. No entanto, [...] os autores afirmam que isso não depende do fato de se usar computadores por si só: tal perspectiva só pode ser concretizada por meio do planejamento cuidadoso de atividades de laboratório que estimulem a formação de uma postura investigativa por parte dos alunos e da preparação e motivação dos professores para conduzi-las.

Nesta mesma direção, na área de formação de professores, Belfort & Guimarães (1998) alertam para algumas falhas nas práticas docentes ao analisar professores lidando com softwares de Geometria Dinâmica (GD). Os autores apontam para o fato de os professores não adotarem uma postura de análise crítica perante os resultados emitidos pela máquina. Diante disso, demanda-se uma necessidade na formação docente que capacite o futuro professor a saber lidar com ferramentas computacionais no sentido de saber criar tarefas apropriadas para esta nova possibilidade de situações de ensino e que também o possibilite a assumir um papel de guia de aprendizagem dos seus alunos neste ambiente.

Neste curso pretende-se explorar abordagens de ensino de Construções Geométricas, Geometria Euclidiana e Funções Reais em ambiente dinâmico; relacionando o uso de novas tecnologias com teorias acerca de saberes docentes e de aprendizagem em matemática.

APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA COM FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS: POSSSIBILIDADES E CUIDADOS

A estratégia de utilizar Novas Tecnologias no ensino pode ser efetiva por ter respaldo na motivação dos aprendizes em lidar com novas situações para a construção de seu conhecimento. Mas manipular entes matemáticos abstratos em uma representação à sua frente não deve ter a intenção de “poupar” o desenvolvimento teórico para o aprendizado. Ao contrário, a intenção presente deve ser gerar situações que demandem revisitar a teoria (ou criar motivação para novos desenvolvimentos teóricos) nas quais o aprendiz possa ser verdadeiramente confrontado com dificuldades intrínsecas da matéria.

As atividades que veremos a seguir têm por objetivo buscar um aprendizado em matemática que permita ao estudante desenvolver capacidades que caracterizam atos próprios do “fazer matemático” como experimentar, representar, analisar e concluir. Com base nessas reflexões, as atividades com GD devem ser preparadas para que o aluno tenha a oportunidade de manipular os objetos na tela a fim de conjecturar, descobrir e formalizar as relações pertinentes ao assunto em estudo.

Devemos também superar desafios na utilização de Novas Tecnologias ensino de matemática visto que *a questão mais desafiadora não é <u>o que</u> o uso da máquina pode acrescentar nos modelos atuais de ensino, mas <u>que novos modelos</u> de ensino podem ser inaugurados pelo uso da máquina* (Giraldo, 2004, p. 1).

Trabalhos como os de Giraldo (2004) e Abrahão (1998) nos despertam para o risco de os alunos atribuírem ao computador o papel de estabelecer verdades matemáticas absolutas, em detrimento do seu próprio conhecimento. Temendo o risco de que uma maior intimidade com o manuseio do software possa tolher o conhecimento da teoria que preconiza as construções, faz-se necessária a atenção para a elaboração de atividades onde uma análise meramente visual na tela do computador leve a conclusões equivocadas. Nesse sentido, gera-se uma situação de *conflito teórico-computacional* (ver Giraldo, 2004) no intuito de evocar conhecimentos teóricos para uma análise matematicamente formal.

Assim, a figura do professor nunca poderá ser substituída pelo uso de ferramentas computacionais, pois os alunos não aprendem com o mero arrastar de objetos na tela. A elaboração de tarefas adequadas e as intervenções do professor ao conduzi-las desempenham um papel fundamental para sucesso da utilização de tecnologias interativas (Lagrange et al., 2001).

ORGANIZAÇÃO DO MINI-CURSO

Etapa I: Ferramentas elementares do software e propriedades básicas de Construções Geométricas

Ao manusear ferramentas básicas de construções geométricas do programa, será explorado e analisado alguns dos princípios básicos de construções geométricas e alguns axiomas da Geometria Euclidiana.

Esta etapa tem por objetivos específicos:

- Desenvolver uma visão dinâmica do conceito de *construção* geométrica.
- Familiarizar os cursistas com ferramentas básicas do software.
- Investigar e discutir crenças e conceitos a respeito de tópicos elementares de Geometria Euclidiana no Ensino Básico.

→ Estimativa de duração da Etapa I: 20 min.

Etapa II: Construções com “Régua-e-Compasso” e Geometria Euclidiana

Com base em alguns dos objetivos fundamentais do ensino de geometria do Ensino Básico, o ensino de Desenho Geométrico aqui também será explorado no sentido de levantar questões sobre seu papel para o aprendizado de matemática e a forma com que pode ser conduzido em ambiente dinâmico.

Aqui se destacam como principais objetivos:

- Exploração de propriedades e formalização de definições de Lugares Geométricos elementares; como mediatriz, bissetriz etc.
- Discussão a respeito do ensino de construções geométricas no Ensino Médio.

→ Estimativa de duração da Etapa II: 30 min.

Etapa III: Funções Reais

Sierpinska (1992) aponta para cuidados em lidar com a interpretação de um gráfico. Destaca que ele é uma representação estática que esconde o dinamismo das funções, uma vez que um único ponto (x,y) é o símbolo que encerra em si o argumento, o valor e a lei de correspondência da função; formando, assim, um obstáculo epistemológico em potencial. Assim, nesta etapa, serão abordados como tópicos principais:

- Investigação de obstáculos epistemológicos e possíveis saltos epistemológicos com a elaboração de tarefas em ambiente dinâmico neste tema.
- Detectar elementos geométricos na construção dinâmica de gráficos no sentido de tornar difusas algumas fronteiras entre álgebra e geometria.
- Discussões de pesquisas e teorias do Ensino de Matemática sobre aplicações de atividades de GD no Ensino Médio.

→ Estimativa de duração da Etapa III: 40 min.

ROTEIRO DE ATIVIDADES

Etapa I: Ferramentas elementares do software e propriedades básicas de Construções Geométricas

Fazendo jus a seu nome (GEOmetria + álGEBRA), o programa abre a prancha inicial com um eixo de coordenadas cartesianas e uma malha de pontos. Mas, como trabalharemos inicialmente com a parte de geometria sintética, esconda estes objetos clicando em: *"Exibir – Eixo"* e *"Exibir – Malha"*.

1) Construa um ponto na prancha.

2) Mova este ponto.

3) Repare que o programa rotula automaticamente os objetos construídos. Para cancelar a rotulação automática, selecione: *"Opção – Rotular – Nenhum objetos novos"*.

4) Construa uma reta qualquer na prancha.

5) Mova esta reta.

6) Suponha que você tem desenhada esta mesma figura da tela em uma folha de papel. Como você faria para medir a distância do ponto à reta?

Etapa II: Construções com “Régua-e-Compasso” e Geometria Euclidiana

1) Com o item *“Inserir texto”*, enuncie uma definição de mediatriz.

2) Construa um segmento qualquer. Em seguida, construa sua mediatriz.

3) Construa uma reta e um ponto móvel sobre ela. Arraste este ponto móvel. Em seguida, construa uma perpendicular por este ponto.

4) Construa uma reta e um ponto fora dela. Em seguida, construa uma perpendicular por este ponto.

5) Construa uma reta e um ponto fora dela. Em seguida, construa uma paralela por este ponto.

6) Dado um ângulo qualquer por 3 pontos, construa sua bissetriz.

7) Dado um segmento, divida-o em 3 partes iguais.

8) Dado um segmento AB, encontrar nele um ponto P tal que: PA / PB = 2/3.

Etapa III: Funções Reais

<u>Atividade I:</u> Construção do gráfico da função definida pela sentença:

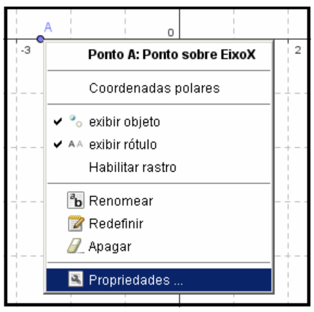
$$\mathbf{y = -\,0{,}9.x^3 + 0{,}2.x^2 + 3.x - 1}$$

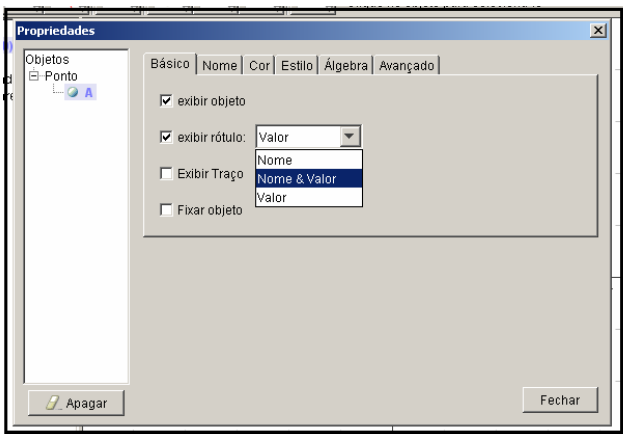
1) Digite a sentença da função na tela

2) Para criar uma variável independente:

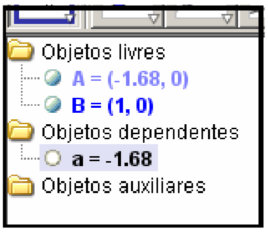
2.1) Construa um ponto no **Eixo X**. Arraste este ponto.

Para exibir as coordenadas deste ponto, clique nele com o botão direito do mouse, selecione *“Propriedades”* e configure seu rótulo, como visto na próxima imagem:



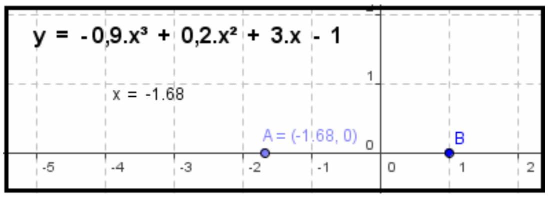


2.2) Para tomarmos apenas o valor da abscissa deste ponto, faremos um Produto Escalar dele com o ponto (1,0). Para realizar o Produto Escalar, basta digitarmos na barra "Entrada" a operação com os rótulos dos objetos a serem calculados.



OBS: Sempre atente à coluna da esquerda, onde aparece o rótulo e a definição analítica de cada objeto geométrico construído.

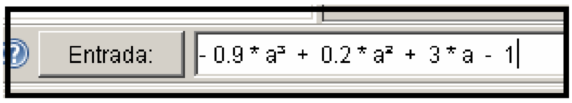
2.4) De posse da nossa variável dependente (o **"a"** da imagem anterior), podemos estampá-la na janela principal com a ferramenta *"Inserir texto"*.

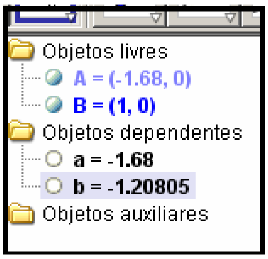


Arraste o ponto **A** e confira o comportamento da sua construção.

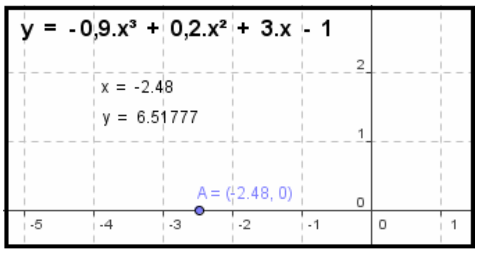
3) Para criar o ponto imagem do valor de **"x"**:

3.1) Digite, na barra de Entrada, a expressão a ser calculada e, em seguida, pressione *"Enter"*.

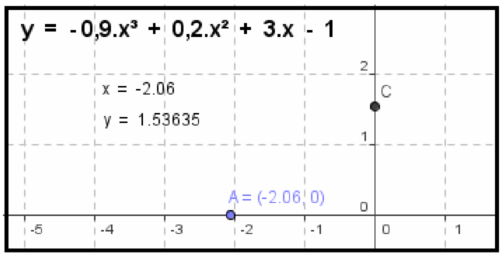




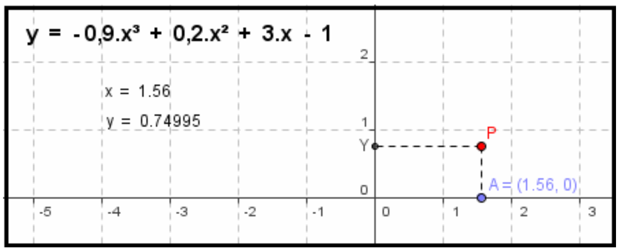
3.2) Estampe o texto do valor de **"y"** na tela principal.



3.3) Para representar este valor de **“y”** como um ponto no eixo vertical, basta digitar suas coordenadas (obedecendo o rótulo dado pelo programa) na barra Entrada:



4) Construa o ponto cartesiano P = (x,y)



Para mudar o aspecto de um objeto (cor, rótulo, tamanho, etc.), clique com o botão direito nele, selecione *“Propriedades”* e divirta-se com a avalanche de opções oferecidas pelo software.

Mova os objetos livres na tela e observe o comportamento da construção.

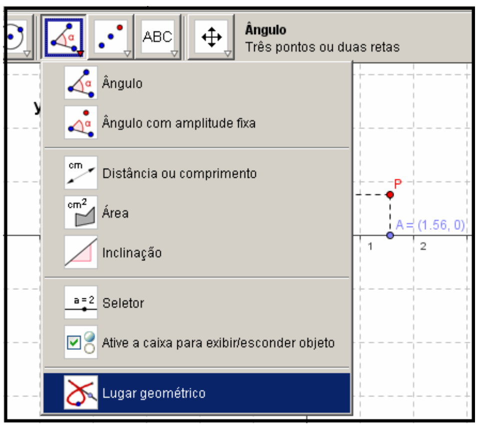
5) Habilite o rastro do ponto **P** (na opção *“Propriedades”*) e volte a arrastar o ponto **A**.

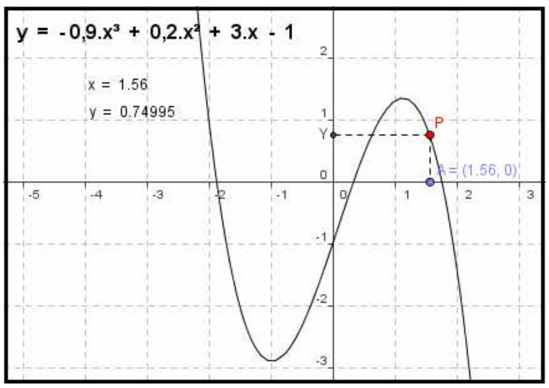
Repare que o *Lugar Geométrico* descrito pelo ponto P à medida que variamos o ponto A, gera o gráfico da função.

6) Traçar o gráfico da função:

6.1) “Desligue” o rastro ligado anteriormente.

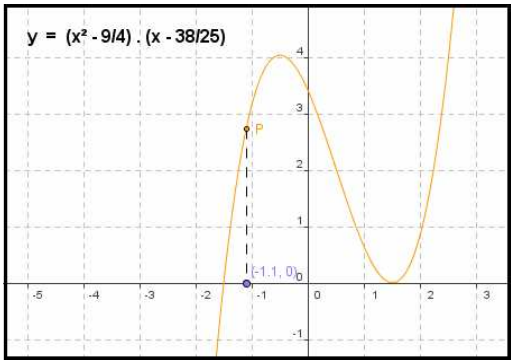
6.2) Selecione o subitem *“Lugar Geométrico”*. Em seguida, selecione o objeto imagem (no caso: **“P”**) e o objeto gerador (no caso: **“A”**).





Atividade II: Construa o gráfico da função: **y = (x² - 9/4) . (x - 5/3)** e responda:

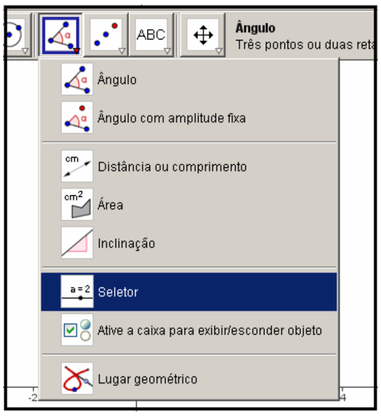
1) Em quantos pontos ela intercepta o eixo das abscissas?
2) Quantas raízes têm essa função?



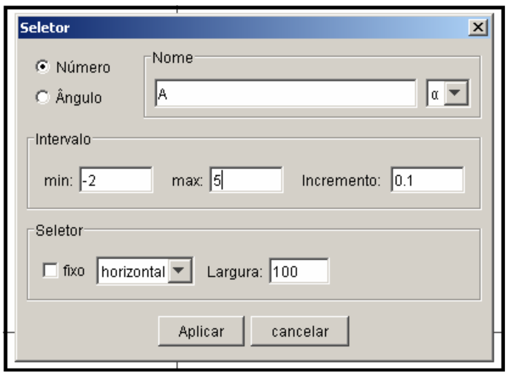
Atividade III: Seja **f(x) = x²**. Construa o gráfico das funções:

III.1) **f(x) + m**

1) Para construir o parâmetro variável **"m"**, utilizaremos o subitem *"Seletor"*.



2) Clique em algum lugar vazio na prancha e configure o parâmetro.



3) Proceda passos análogos aos da atividade anterior até a construção do gráfico e, em seguida, responda: qual a influência do parâmetro **“m”** no gráfico da função?

III.2) **f(x + n)**

Qual a influência do parâmetro **“n”** no gráfico da função?

Atividade IV: Construa o gráfico da função: **y = a . sen(b.x + c) + d**

a) Conjecture a influência da variação do parâmetro “a” no comportamento do gráfico.
b) Conjecture a influência da variação do parâmetro “b” no comportamento do gráfico.
c) Conjecture a influência da variação do parâmetro “c” no comportamento do gráfico.
d) Conjecture a influência da variação do parâmetro “d” no comportamento do gráfico.

Referências

Abrahão, A. M. C. (1998). *O Comportamento de Professores Frente a Alguns Gráficos de Funções f:R $\rightarrow$ R Obtidos Com Novas Tecnologias.*. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1998.

Belfort, E. & Guimarães, L.C. (1998). O papel do software educativo na formação continuada de professores de matemática. In: *Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática, volume 2*, pp. 104-107. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1998.

Giraldo, V. (2004). *Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada*. 221 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.

Giraldo, V. & Carvalho, L.M. (2004). Breve bibliografia comentada sobre o uso de tecnologias computacionais no ensino de matemática avançada. In: *Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática*, pp. 1 – 17. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2001). Meta study on IC technologies in education. Towards multidimensional framework to tackle their integration into the teaching of mathematics. In : M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of international group for psychology of mathematics education*. (Vol.1, pp.111-122), Utrecht, Pays Bas: Freudenthal Institute, Utrecht University.

Laudares, J. & Lachini, J. (2000). O uso do computador no ensino de matemática na graduação. In: *23ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*, volume eletrônico, 2000.

Piaget, J. (1978). *Fazer e compreender*. São Paulo: Melhoramentos, Edusp.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In: Dubinsky, E.; Harel, G. (Org.). *The concept of function: Elements of Pedagogy and Epistemology***.** New York: Notes And Reports Series Of The Mathematical Association Of America. v. 25, p. 25-58.

Software de referência

GeoGebra 3.0 - Dynamic Mathematics for Schools: Markus Hohenwarter, 2001-2007 http://www.geogebra.org

FUNÇÕES REAIS: POSSIBILIDADES EM UM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA

Maria Lucia Muruci (Mestrado em Ensino de Matemática – UFRJ) – muruci@pg.im.ufrj.br
Victor Augusto Giraldo (IM-UFRJ) – victor.giraldo@ufrj.br
Luiz Carlos Guimarães (IM-UFRJ) – lcg@labma.ufrj.com

Este mini-curso tem por objetivo central a exploração de propriedades gráficas de diversas classes de funções reais (polinomiais, trigonométricas, modulares e racionais) através dos recursos vetoriais e de construções geométricas disponíveis no ambiente de geometria dinâmica de Tabulæ. As atividades visam motivar o desenvolvimento de conexões múltiplas entre diversas representações para funções reais (algébricas, gráficas e numéricas) utilizando como recursos pedagógicos a interatividade e a dinâmica características do ambiente. Após a apresentação inicial da interface, as atividades serão organizadas de forma que os participantes trabalhem com gráficos de funções previamente construídos, explorando o efeito da variação de parâmetros algébricos e da aplicação de transformações geométricas no aspecto gráfico, como também atividades de construção de gráficos das funções exploradas.

1. INTRODUÇÃO

Sabemos que ambientes de geometria dinâmica (GD) podem ser usados como ferramentas pedagógicas que permitem ao aluno experimentar um grande número de exemplos, verificar propriedades, formular e testar conjecturas. A literatura de Educação Matemática tem enfocado largamente o uso de GD no ensino de geometria (e.g. Belfort et al, 1999; Belfort et al, 2003; Hadas et al, 2000), apontando também, alguns estudos sobre a aplicação desses ambientes ao ensino de funções (Hazzan & Goldenberg, 1997).

Utilizaremos nesse trabalho o software *Tabulæ*. O *Tabulæ* é um software de geometria dinâmica desenvolvido no Instituto de Matemática da UFRJ, com recursos geométricos e vetoriais, além de uma calculadora, munida das operações das operações elementares, além de funções trigonométricas, logarítmicas e exponenciais. Estes recursos permitem ao usuário fazer construções geométricas planas, mover elementos e observar os aspectos e propriedades que mudam e aqueles que permanecem invariantes. Os recursos vetoriais permitem ainda a utilização de parâmetros, que, quando manipulados pelo usuário, produzem movimentos e transformações planas. Assim, o usuário pode observar o efeito dessas transformações em objetos geométricos construídos. Com os recursos disponíveis no *Tabulæ*, é possível construir gráficos de diversas classes de funções elementares, tais como polinomiais, modulares, trigonométricas, logarítmicas e exponenciais. Por meio dos recursos citados acima, é possível ainda visualizar classes de funções dependendo de um parâmetro, mudar o valor do parâmetro e observar em tempo real as mudanças nos gráficos.

2. OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO MINI-CURSO

Neste mini-curso, exploraremos o comportamento do gráfico de funções polinomiais (sem nos restringirmos às de primeiro e segundo graus, como é usualmente feito nos livros didáticos para o ensino médio), funções trigonométricas, funções modulares e de funções racionais (isto é, aquelas que podem ser escritas como quociente de funções polinomiais). Após a apresentação inicial da interface do software Tabulae, sua barra de ferramentas, com seus principais ícones e suas funcionalidades, o mini-curso será organizado de modo a intercalar atividades em que o cursista manipulará gráficos previamente construídos no ambiente, bem como atividades que os levem a entender de que forma esses gráficos são construídos. Nesse processo de construção serão explorados os vários conceitos matemáticos envolvidos e discutiremos as várias escolhas que se tem no processo de determinação de um sistema de coordenadas.

2.1. Considerações sobre atividades de manipulação de gráficos previamente construídos no ambiente

Num primeiro momento os participantes, trabalharão com gráficos de funções previamente construídos. Será explorado o efeito da variação de parâmetros algébricos no aspecto gráfico, motivando a conexão entre representações algébricas e gráficas de forma dinâmica. Além disso, serão explorados dois tipos de transformações:

- Translações horizontais e verticais, dadas respectivamente por $y = f(x+c)$ e $y = f(x)+c$, sendo c uma constante real.
- Dilatações e compressões horizontais e verticais, dadas respectivamente por $y = f(c \cdot x)$ e $y = c \cdot f(x)$, sendo c uma constante real.

Utilizando como recurso pedagógico a característica dinâmica e interativa do ambiente, serão sugeridas algumas conjecturas, que deverão ser testadas e discutidas pelo grupo. Em seguida, estas conjecturas serão formalizadas com base na conexão com as expressões algébricas das funções.

Essas atividades têm como principais objetivos específicos:

- Desenvolver uma visão dinâmica do conceito de função.
- Explorar o conceito de função, integrando os aspectos algébricos, gráfico-geométricos e numéricos.

2.2 Considerações sobre as atividades relacionadas ao processo de construção de gráficos no ambiente

Ao longo dessas atividades os participantes serão levados à compreensão do processo de construção do gráfico de funções, sendo capazes de construir os seus próprios gráficos, utilizando as funcionalidades do ambiente. Esta construção envolve vários conceitos matemáticos, como translações e rotações, vetores, produto de escalar por vetor, lugar geométrico, parâmetros e variáveis, o que efetivamente contribuirá para um entendimento mais abrangente e aprofundado de diversos aspectos e propriedades relacionadas a sistema de coordenadas, funções e seus gráficos.

Destacamos como objetivos específicos destas atividades:

- Aprofundar a visão dinâmica do conceito de função desenvolvida nas atividades de exploração de telas previamente construídas.
- Apresentar e discutir as potencialidades de um ambiente de geometria dinâmica para a construção e a análise de gráfico de funções reais.
- Conscientizar os professores sobre as possibilidades de aprofundamento no estudo de funções, utilizando-se de novas tecnologias.
- Aprofundar a compreensão sobre o conceito de vetor, o produto de escalar por vetor e sua aplicação na construção de gráficos de funções no ambiente e nas transformações geométricas ocorridas nos mesmos.
- Explorar o gráfico de função como lugar geométrico.

É importante destacar ainda que o processo de construção de telas deva capacitar os participantes para o uso efetivo do ambiente como ferramenta pedagógica para o ensino de funções. Entendendo o processo de construção para uma determinada função, o usuário será capaz de construir qualquer outra, com o enfoque que lhe for mais apropriado no momento.

3. DESCRIÇÃO DE ALGUMAS ATIVIDADES

Atividade 1

Abra a tela 1. Nela você encontrará o gráfico da função definida algebricamente por $y = ax + b$.

a) Sobre a curva que representa geometricamente a função, vemos um ponto genérico $P(x, y)$. Arraste o ponto x, localizado sobre o eixo das abscissas e observe a movimentação do ponto P e as respectivas variações nos valores de x e y.

b) Varie o parâmetro b, mantendo a fixo e observe o que acontece ao gráfico. Descreva o que acontece. Atente para os casos em que $b > 0$, $b < 0$ e $b = 0$.

c) Você consegue visualizar o parâmetro b no gráfico?

d) Agora faça a variação do parâmetro a, mantendo b fixo. Observe e descreva o que acontece ao gráfico, observando os casos em que $a > 0$, $a < 0$ e $a = 0$.

e) Você consegue visualizar o parâmetro a no gráfico?

f) Com base na expressão algébrica $y = ax + b$ e na observação do gráfico, interprete geometricamente o coeficiente a.

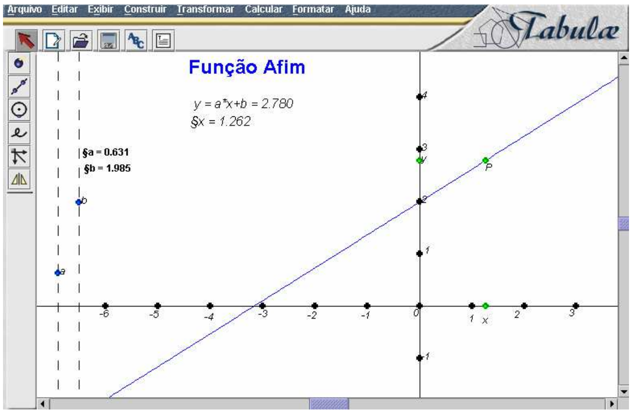


Figura 1. Tela do *Tabulæ* representando funções afins na forma $y = ax + b$.

Atividade 2

Abra a tela 2. Nessa tela encontraremos o gráfico da função $f(x) = x^2$ (em preto) e também o gráfico da função $f(x) = a(x-h)^2 + k$ (em azul), de forma que poderemos manipular a, h e k.

a) Faça $h = 0$ e $k = 0$. Neste caso teremos a função $f(x) = ax^2$. Faça agora variar o parâmetro a, observe e explicite as transformações ocorridas no gráfico da função g em relação ao gráfico da função f.

b) Faça $a = 1$ e $k = 0$. Neste caso teremos a função $f(x) = (x-h)^2$. Faça agora variar o parâmetro h, observe e explicite as transformações ocorridas no gráfico da função g em relação ao gráfico da função f.

c) Faça $a = 1$ e $h = 0$. Nesse caso teremos a função $f(x) = x^2 + k$. Faça variar o parâmetro k, observe as transformações ocorridas no gráfico da função g em relação ao gráfico de f.

d) Varie livremente os parâmetros observando as transformações ocorridas. Você vê alguma vantagem na forma de representação canônica da função quadrática?

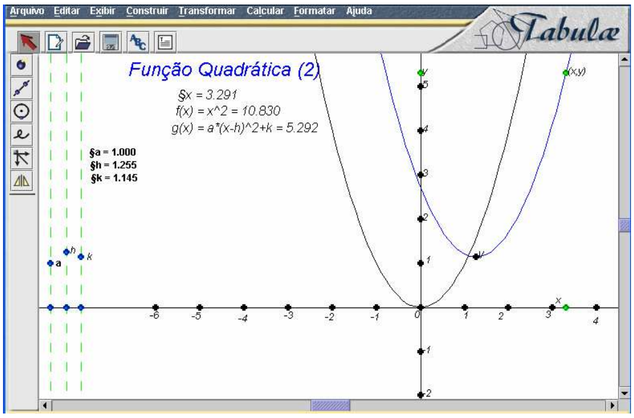


Figura 2. Tela representando funções quadráticas na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ **.**

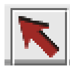
Atividade 3

Vamos começar a entender de que forma construímos as telas anteriores. Abra a tela 3. Nela você encontrará um plano cartesiano, com um ponto P(x,y), tal que y = $2x^2$ + 1 e os respectivos valores numéricos de x e y localizados no canto esquerdo superior da tela

a) Arraste o ponto x, localizado sobre o eixo OX e observe a trajetória do ponto P, e a conseqüente variação no valor de x e de y.

b) Selecione o ponto P, clique no menu **Exibir**, no alto de sua tela. Clique sobre a opção **"Rastro de objetos"** e movimente livremente o ponto x sobre o eixo das abscissas. Observe.

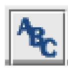
c) Clique sobre o ícone  (criar lugar geométrico). Selecione o ponto P(x,y) e em seguida o ponto x (no eixo OX). Descreva o que aconteceu.

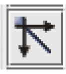
Sempre que ativar um dos comandos volte ao ícone  (repita sempre esse procedimento, que desativa o comando ativado anteriormente).

Atividade 4

Nessa atividade vamos entender de que forma construímos o ponto P(x,y) da atividade anterior. Seguiríamos o mesmo raciocínio para qualquer outra função.

a) Abra a tela 4. Nela você encontrará um plano cartesiano, com um vetor unitário(y1) sobre o eixo OY, com origem em O e um ponto x em OX que você pode arrastar livremente, observando sua variação numérica no canto superior esquerdo da tela.

b) Vamos agora construir o valor numérico de y = $2x^2$ + 1. Clique no menu **Calcular**, opção **"Calculadora"** e digite a seguinte seqüência 2*(clique sobre o valor de x)^2 + 1. Aparecerá no visor da calculadora a expressão 2*x^2+1. Clique em Ok. Na tela ficará registrado o valor numérico da expressão $2x^2$+1. Selecione-o e em seguida clique sobre o ícone  no alto de sua tela, nomeando esse valor por y. Arraste o ponto x e observe a variação de x e y. O que podemos afirmar a respeito dessas variáveis? De que forma poderíamos transferir esse valor "y" encontrado para o eixo vertical OY?

c) Clique sobre o ícone (criar vetor)e, em seguida, sobre o ícone(criar produto de vetor por escalar) . Selecione o vetor y1 e o valor de "y" calculado no item b. O que aconteceu? Arraste o ponto x e visualize o novo vetor criado sobre o eixo OY. Nomeie-o por y.

d) Tente responder de que forma podemos criar o ponto cartesiano P(x,y) tal que $y= 2x^2 + 1$?

e) Vamos então criar esse ponto. Clique sobre o ícone (criar reflexão)e, em seguida, sobre o ícone  (criar translação). Selecione o vetor y e em seguida o ponto x (no eixo OX). O que aconteceu? Arraste o ponto x e observe o novo ponto criado. Nomeie-o por P.

f) Movimente o ponto x no eixo das abscissas, observando a trajetória do ponto P na sua tela. Pense em todos os passos dados até aqui para representar esse ponto P. Que informações estão encerradas nesse ponto?

Caso queira utilize **"Rastro de objetos"** para visualizar melhor a trajetória e/ou complete o gráfico utilizando o ícone  (criar lugar geométrico).

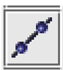
Atividade 5

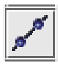
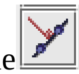
Nas duas últimas atividades utilizamos telas previamente preparadas. Em cada uma delas disponibilizamos um sistema de coordenadas cartesianas. No ambiente do Tabulae esse sistema de coordenadas não se encontra disponível e deve ser construído de acordo com os critérios e particularidades desejados. Devido ao grau de liberdade na sua construção e aos conceitos envolvidos se constitui num interessante processo.

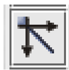
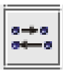
Primeiramente pense sobre que elementos seriam necessários e fundamentais para que um sistema de coordenadas funcione de maneira eficiente?

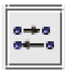
Vamos então à construção de um sistema de coordenadas cartesianas.

a) Abra uma tela em branco.

b) Clique sobre o ícone (criar reta) e construa uma reta, mantendo-a na posição horizontal. Volte ao ícone  (repita sempre esse procedimento, pois ele desativa o comando ativado anteriormente). Essa reta será o eixo OX. Sobre essa reta estão localizados dois pontos através dos quais podemos movimentar a reta. Temos a opção de escondê-los. Para isso clique no menu **Exibir** e escolha a opção **"Esconder objetos."**

c) Clique sobre o ícone  (criar reta) e, em seguida, sobre o ícone (criar reta perpendicular). Clique sobre o eixo OX. Uma reta perpendicular ao eixo OX será criada e o seu mouse estará posicionado sobre um ponto nessa reta, que pode mover-se livremente. Clique sobre o eixo OX e a reta se fixará num ponto do mesmo. Está criado o eixo OY e a origem do sistema de coordenadas (interseção das retas). Nomeie-o por O. Temos então construídos o sistema de eixos e a origem.

d) Vamos agora criar uma escala para os eixos. Clique sobre o ícone  e crie um ponto sobre eixo OX. Nomeie-o por 1. Essa será a unidade do eixo das abscissas. Vamos agora criar uma razão orientada sobre o eixo OX. Clique sobre o ícone (criar vetor) e, em seguida, sobre o ícone(criar razão por 3 pontos). Selecione o ponto 0, em seguida o ponto 1, e enfim clique sobre um ponto qualquer do eixo OX. Está criada uma razão e um ponto correspondente.

e) Nomeie ambos (o novo ponto e a razão numérica correspondente) por x. Desloque o valor da razão para o canto esquerdo superior da sua tela. Mova livremente o ponto 1 e o ponto x e observe a variação numérica da razão criada. O programa nos informa que o ícone  cria uma "razão por 3 pontos". Faz sentido calcular uma razão entre pontos? Na verdade, esta razão é feita entre dois exemplares de que grandeza?

f) Você acha que um sistema de coordenadas no qual a unidade está à esquerda da origem no eixo horizontal está matematicamente correto? Como poderíamos fixar a unidade à direita da origem em nossa construção, se essa for nossa opção?

g) Da mesma forma que fizemos anteriormente para o eixo das abscissas, podemos criar uma escala para o eixo das ordenadas, que pode ser a mesma utilizada no eixo das abscissas ou não. Faça a sua escolha e crie uma escala para o eixo das ordenadas.

h) Poderíamos pensar num sistema de coordenadas não ortogonais?

Se você chegou até aqui está apto a construir gráfico de funções no ambiente, pois basta construir o plano cartesiano conforme desenvolvido nessa atividade, fazendo as escolhas de acordo com seu interesse, e seguir os passos desenvolvidos nas atividades 3 e 4.

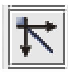
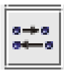
Atividade 6

Nas atividades 1 e 2 tivemos a oportunidade de trabalhar com funções com parâmetros variáveis, e essa possibilidade é o que torna relevante a utilização do ambiente de GD para a construção de gráficos de funções. A sua construção segue os mesmos passos das atividades 3 e 4, porém precisamos de um eixo auxiliar para a representação desse parâmetro.

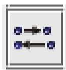
Vamos construir o gráfico da função y = asenx, de forma que a seja um parâmetro variável.

a) Abra a tela 4, onde temos um plano cartesiano já construído ou utilize a tela que acabou de construir.

b) Vamos construir o parâmetro a. Trace uma reta perpendicular ao eixo OX, fixando-a num ponto desse eixo a esquerda da sua tela. Selecione a mesma, clique no menu **“Formatar**”, **“Linha”** e escolha a opção **“Pontilhado”.** Sobre essa reta construiremos o parâmetro a.

c) Vamos criar uma razão orientada sobre essa última reta. Clique sobre o ícone (criar vetor) e, em seguida, sobre o ícone(criar razão por 3 pontos). Clique agora sobre o ponto de interseção da reta com o eixo OX, e em seguida sobre dois outros pontos quaisquer da reta, acima do eixo das abscissas. Está criada uma razão e, um ponto livre correspondente que podemos arrastar. Selecione esse último ponto e a razão nomeando a ambos por a. Se quiser esconda os dois primeiros pontos utilizados.

d) Podemos agora calcular a expressão y = a.senx. Clique no menu **Calcular**, opção **“Calculadora”** e digite na seqüência **(clique sobre o valor de a)*sen(clique sobre o valor de x)**. Aparecerá no visor da calculadora a expressão **a*sen(x).** Clique em Ok. Aparecerá na tela o valor numérico da expressão a.sen(x). Construa o gráfico normalmente, como na atividade 4 e varie o parâmetro a, observando as transformações ocorridas no gráfico.

Se for construir o gráfico de uma função com mais de um parâmetro variável, utilize um eixo auxiliar para cada um, construindo o parâmetro através do comando (criar razão por 3 pontos).

BIBLIOGRAFIA

[1] BELFORT, E.; CARVALHO, L.M.; GIRALDO, V. Conflitos teórico-computacionais em geometria dinâmica. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO, 3., 2003, Vassouras: SBEMRJ, 2003. p. 1-10.

[2] BELFORT, E.; GUIMARÃES, L.C.; BARBASTEFANO, R. Geometria Dinâmica e Demonstrações na formação continuada de professores. In: CABRI WORLD 99., 1999, São Paulo. São Paulo: PUCSP, 1999. p. 1 - 10. CD-ROM.

[3] HADAS, H.; HERSHKOWITZ, R.; SCHWARZ, B. The Role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies In Mathematics,* v. 44, n. , p.127-150, 2000.

[4] STEWART, J. *Cálculo I*. 4. ed. São Paulo: Thomson, 2005. v. 1, p. 88, 113, 122.

[5] HAZZAN, O. & GOLDENBERG, E. Student's understanding of the notion of function in dynamic geometry environments. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1:263-291,1997

EXPLORAÇÕES EM GEOMETRIA ESPACIAL COM O SOFTWARE *CABRI 3D*

Ana Paula Jahn, UNIBAN/SP

Vincenzo Bongiovanni, UNIBAN/SP

Este mini-curso tem por objetivo explorar situações espaciais no ambiente de geometria dinâmica Cabri 3D. Algumas pesquisas em Educação Matemática assinalam dificuldades dos alunos na resolução de problemas de posição, referindo-se às relações entre os objetos geométricos tridimensionais e suas representações planas. De fato, os alunos tendem a considerar as propriedades do desenho como aquelas do próprio objeto geométrico. Formulamos a hipótese que os recursos disponíveis nesse tipo de ambiente podem auxiliar no tratamento e visualização de propriedades dos objetos espaciais, oferecendo meios para desqualificar algumas interpretações ilícitas do desenho. As atividades propostas inserem-se em uma perspectiva investigativa para o ensino de Geometria Espacial, compreendendo fases de experimentação, simulação e modelização.

Cabri 3D é um software de geometria dinâmica que, além de preservar as propriedades de objetos geométricos tridimensionais quando manipulados, permite também *mudar o ponto de vista* em relação ao objeto representado. Ele foi apresentado oficialmente no Congresso Internacional Cabriworld, realizado em Roma, em setembro de 2004. É um software de *manipulação direta* em três dimensões, isto significa que, o usuário age diretamente sobre a representação gráfica dos objetos que estão na tela ao invés de agir sobre a sua representação interna (o código).

Pesquisas realizadas ao longo de seis anos pelos educadores espanhóis Ildefonso Mazas e José Maria Arias, que incluem 400 professores e 15000 alunos, atestam que o uso de um software de geometria dinâmica provoca uma melhora significativa no rendimento dos alunos em Geometria[1].

Em relação ao ensino e aprendizagem da Geometria Espacial – desenvolvida tradicionalmente no ambiente papel e lápis – o desenho tem um importante papel, pois relaciona o espaço sensível com a

---

[1] Para mais detalhes ver: http://www.elpais.com/articulo/educacion/nuevas/tecnologias/mejoran/rendimiento/matematicas/25/elpedupor/20060109elpepiedu_5/Tes

teoria. Por outro lado, para os alunos em situação de resolução dos problemas, ele cria uma problemática ligada à representação gráfica dos objetos. Quando passamos do objeto espacial à sua representação em um suporte bidimensional (uma folha de papel, por exemplo), há necessariamente perda de informações. Neste caso, problemas podem surgir quando se trata de identificar, com base no desenho, as propriedades do objeto tridimensional. O questionamento de Rommevaux (1999, p. 14) – *pode-se ensinar os alunos a verem no espaço?* – ilustra essa questão de representação e da visualização de figuras 3D, uma vez que, segundo a autora, é necessário "enxergar" três dimensões em um desenho que tem apenas duas.

Alguns trabalhos (Bkouche 1983; Bessot, 1983) mostram que essa dificuldade pode ser minimizada com uma aprendizagem das regras da representação ou técnicas de perspectiva. Outras pesquisas (Parsysz, 1989) sugerem que o ensino da Geometria Espacial deve integrar não somente o auxílio das representações dos objetos espaciais, mas também o uso de maquetes tridimensionais, qualquer que seja a idade dos alunos implicados.

Trabalhos recentes investigam a influência de ambientes informáticos tanto na *elaboração da representação gráfica* (codificação) quanto na *interpretação de uma representação gráfica* (decodificação). Alguns resultados destacam o interesse particular de uma abordagem de investigação para a Geometria, apoiada em fases de experimentação, de simulação e de modelização. É nesse sentido que estamos valorizando a difusão e uso de um ambiente de geometria dinâmica para o espaço.

O objetivo da oficina é introduzir os participantes no ambiente informatizado de *geometria dinâmica* Cabri 3D. Para tanto, apresentamos algumas atividades representativas das inúmeras possibilidades que este software oferece no estudo de situações espaciais. Particularmente, estamos interessados em discutir em que medida uma abordagem do espaço com o Cabri 3D pode modificar as difíceis relações que geralmente professores e alunos têm com este tema de estudo.

Consideramos que a simplicidade do Cabri 3D permite uma familiarização rápida com as principais ferramentas de construção. Além disso, a impressão de agir sobre os objetos de forma direta permite tratar rapidamente alguns temas que, no ambiente papel&lápis, necessitariam conhecimentos abstratos e relativamente complexos.

Esta oficina organiza-se em três momentos, a saber:

1. Familiarização com as funcionalidades básicas do ambiente;
2. Construção, secção e decomposição de sólidos, em particular, de poliedros arquimedianos;
3. Construções com animações e algumas modelizações matemáticas.

Apresentamos abaixo, de forma ilustrativa, algumas propostas de atividades em cada uma das fases acima citadas.

Na fase de familiarização, serão propostas atividades visando a exploração das principais ferramentas do ambiente, dando-se especial atenção aos atributos para a criação e manipulação de variados objetos geométricos tais como poliedros e corpos redondos, secções e planificações (Figuras 1a e 1b).

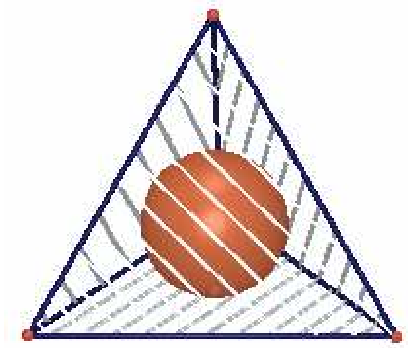


Figura 1a: Esfera inscrita em um tetraedro regular

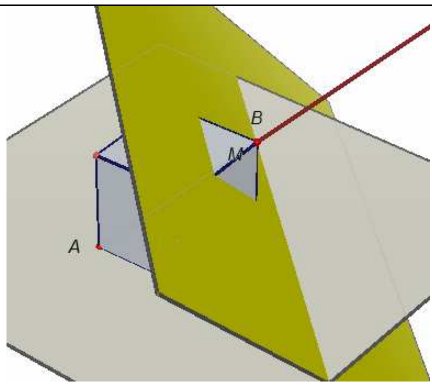


Figura 1b: Secções de um cubo

Na seqüência, partindo-se de poliedros regulares (tetraedro regular, cubo, icosaedro regular...), dividindo-se cada aresta em partes iguais e com o auxilio da ferramenta "Recorte de poliedro", serão propostas algumas construções de sólidos arquimedianos (cf. Figuras 2a e 2b). Estão previstas ainda, explorações a partir da composição ou decomposição de sólidos e relações entre volumes (Figura 3a e 3b). Em tais atividades, além da ferramenta "Volume", pode-se aprofundar o estudo passando-se a situações mais gerais, graças à função "Redefinir".

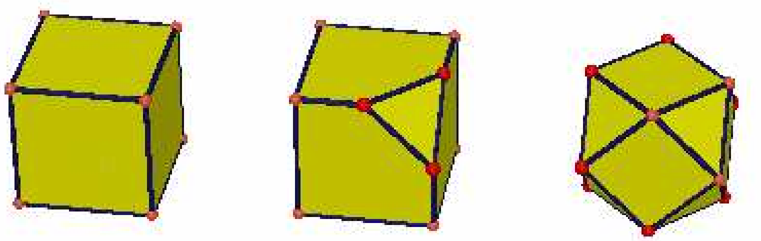


Figura 2a: Construção de um Cuboctaedro

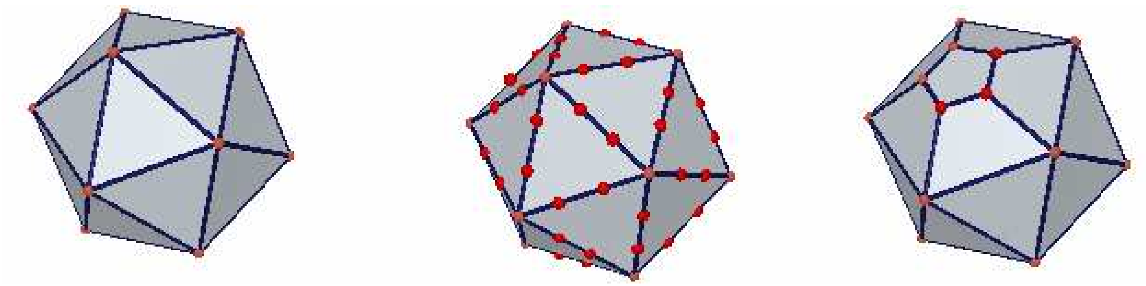


Figura 2b: Construção de uma “Bola de Futebol”

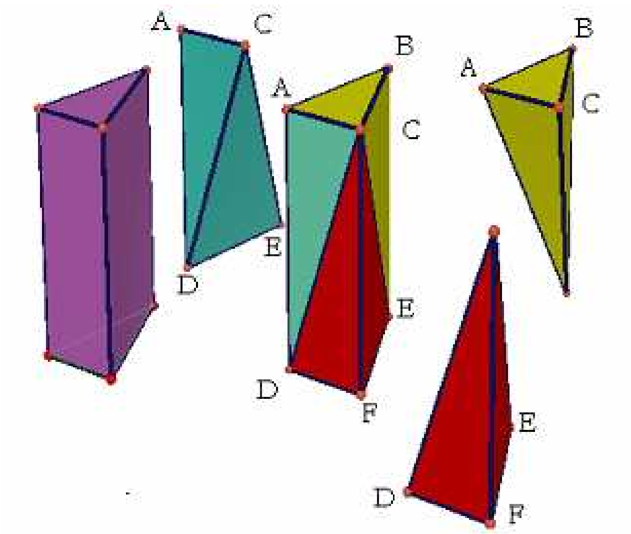


Figura 3a: Decomposição de um prisma em 3 pirâmides

(1) ABCDE é uma pirâmide regular sendo as faces laterais triângulos eqüiláteros.
(2) MNPQ é um tetraedro regular com MNP congruente a ABE
Qual é o número de faces do poliedro obtido sobrepondo a face MNP à face ABE?

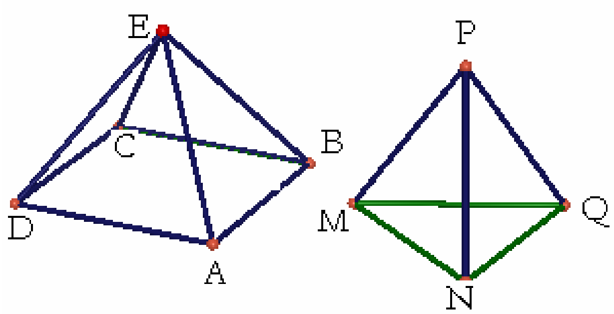


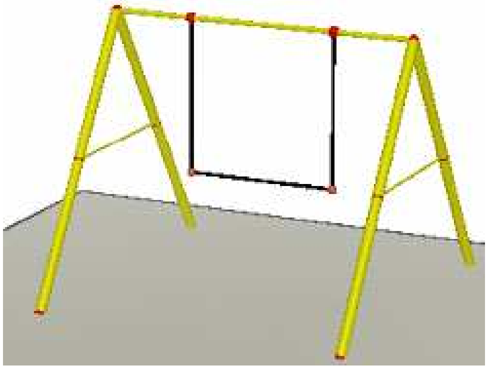
Figura 3b: Composição de dois poliedros[2]

Serão ainda discutidas algumas atividades do tipo “Caixa-preta”[3]. No espaço, tais atividades podem ser potencializadas com a integração de recursos de animação, a partir de relações de dependência previamente estabelecidas (ver Figura 4).

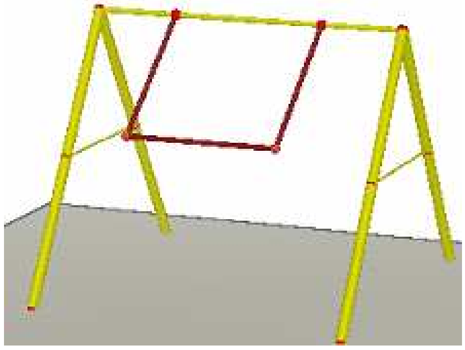
---

[2] Problema extraído do artigo do professor Geraldo Ávila, proposto na RPM, nº 3 (1983, p. 25).

[3] Tarefa que corresponde a fornecer um arquivo com uma figura que deve ser reconstruída, a partir dos mesmos elementos e cujo comportamento deve ser análogo ao da figura dada.



Dado um balanço animado...



construir um novo balanço.

Figura 4: Caixa-preta "Balanço"

Por fim, um ambiente como o Cabri 3D pode ser utilizado como ferramenta de modelização, permitindo a discussão de diferentes situações. Ao longo do processo em si de elaboração de modelos, bem como em sua exploração, diversas observações e verificações experimentais de conjecturas são possíveis graças às funcionalidades do ambiente, incluindo as de medidas (comprimento, área, volume, ângulo etc.). As figuras abaixo ilustram algumas dessas atividades que correspondem terceira e última fase da oficina.

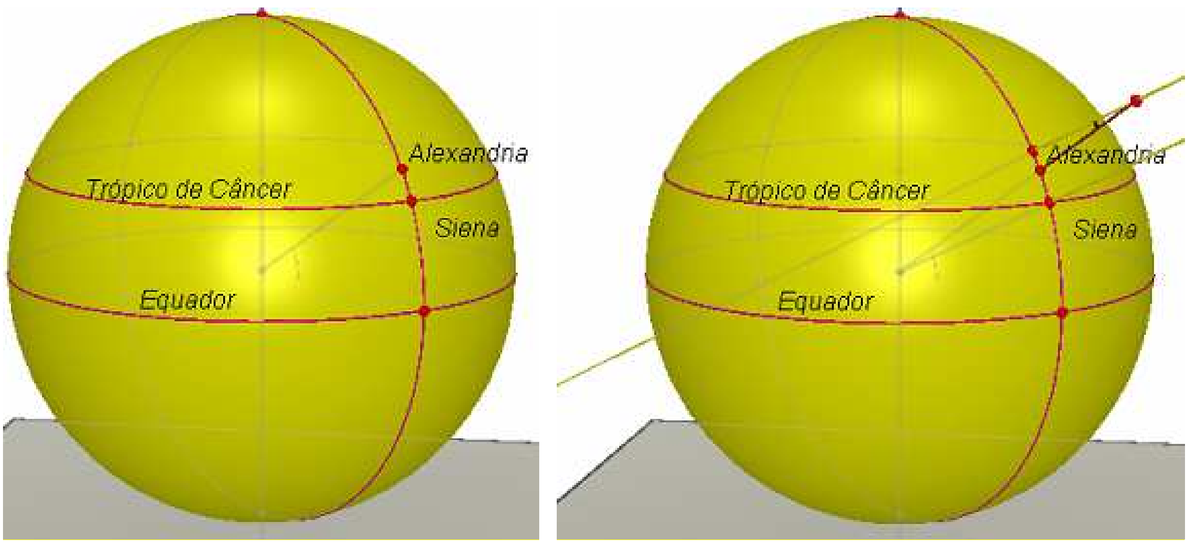


Figura 5: Como Eratóstenes calculou o raio da Terra?

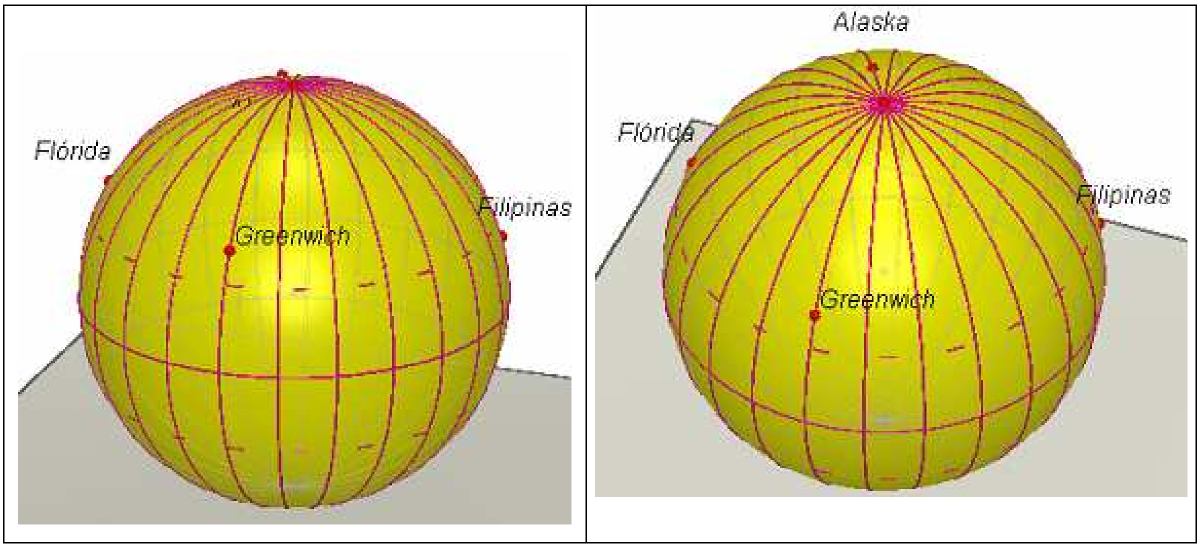


Figura 6: Qual o menor caminho entre a Flórida e as Filipinas?

Referências Bibliográficas

ÁVILA, G. (1983) *Geometria e Imaginação*. *Revista do Professor de Matemática* (RPM), n^{o} 3, pp. 25-28.

BESSOT, D. (1983) Problèmes de représentation de l'espace. In *Enseignement de la géométrie*, Bulletin Inter-IREM, Ed. IREM de Lyon, n^{o} 23, pp.33-40.

BKOUCHE R., SOUFLET M. (1983) Axiomatique, formalisme, théorie. *Enseignement de la géométrie* – Bulletin Inter-IREM, Ed. IREM de Lyon, n^{o} 23, pp.3-24.

PARSYSZ, B. (1989) *Representations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au Lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir*. Thèse de Doctorat, Université Paris VII.

ROMMEVAUX, M. P. (1999) Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle. *Educação Matemática Pesquisa* – Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, n. 1, pp. 13-65.

EXPLORANDO TÓPICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO ATRAVÉS DO GEOGEBRA

Luís Cláudio Lopes de Araújo – UniCEUB – DF

Jorge Cássio Costa Nóbriga - FAJESU–DF e FAST–DF

Nos últimos anos vêm se destacando um tipo de ferramenta de ensino e aprendizagem que pode agilizar e, de certa forma, otimizar o aprendizado em matemática, desde que trabalhado de maneira adequada. A proposta deste trabalho é mostrar aos professores do Ensino Básico como usar, em particular, uma destas ferramentas: o GeoGebra. Trata-se de um software livre de fácil uso e muito intuitivo que permite fazer o que um software de Geometria Dinâmica faz, além de trabalhar com a parte algébrica e também com assuntos relacionados ao cálculo diferencial. O que se pretende é apresentar o software aos cursistas num laboratório de informática, dando instruções de uso de ferramentas acessadas via botões e comando escrito e também discutindo sobre o uso desta ferramenta associados aos textos especialmente escritos para o desenvolvimento das atividades.

JUSTIFICATIVA

É comum ver professores que defendem a idéia que tudo deve ser feito a mão, sem uso de recurso nenhum. Uma discussão antiga é a questão do uso de calculadoras em escolas. Acredita-se que depois do aluno dominar as operações aritméticas com números inteiros e com frações ordinárias e decimais não há motivo para inibir o uso de tal ferramenta.

> O surgimento das calculadoras eletrônicas representa um enorme progresso na direção da eficiência, precisão e rapidez nas contas, em quase todos os segmentos da sociedade moderna. Seria impossível negar, ou mesmo tentar diminuir a ênfase desta afirmação, pois o sucesso comercial de tais máquinas prova eloqüentemente sua utilidade. (LIMA 1985)

Tal afirmação foi feita há mais de 17 anos em resposta a um outro professor que perguntara sobre o uso de calculadoras em cursos de Ensino Fundamental e Médio. De lá para cá muito se fez no que diz respeito ao desenvolvimento de ferramentas que poderiam ser usadas por professores em sala de aula. As próprias calculadoras evoluíram com relação à simplicidade de uso. Os softwares também evoluíram em diversos aspectos, inclusive quanto à facilidade de uso.

Dentre os diversos softwares que podem ser utilizados no ensino de matemática, destacamos os de Geometria Dinâmica. Bellemain (2001) afirma que “A Geometria Dinâmica permite considerar e conceber uma representação de objetos matemáticos abstratos em várias configurações, podendo modificar suas posições relativas” (p.1314). Assim, os programas de Geometria Dinâmica podem contribuir em diversos aspectos:

- A Geometria Dinâmica permite construir. Como observa Brandão e Isotani (2003, p.1487), num antigo ditado atribuído a Confúsio: “*O aluno ouve e esquece, vê e se lembra, mas só compreende quando faz*”;
- A partir da construção, o aluno pode visualizar e manipular: a Geometria Dinâmica possibilita visualizar uma mesma construção de diversas formas, e dessa maneira, facilita a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos (Rodrigues 2002). Isso faz ressaltar aos olhos as propriedades variantes e as invariantes a partir dos movimentos rotacionais e translacionais dos objetos geométricos;
- O aluno pode experimentar e conjecturar: a Geometria Dinâmica evidencia uma nova abordagem ao aprendizado geométrico, onde conjecturas são feitas a partir da experimentação e criação de objetos geométricos. Desse modo, podemos introduzir o conceito matemático dos objetos a partir do retorno gráfico oferecido pelo programa de Geometria Dinâmica, surgindo naturalmente daí o processo de argumentação e dedução (Gravina 1996);
- Auxilia na elaboração de idéias mudando a função do desenho de representante de objetos materiais para representação de noções abstratas;
- Possibilita registrar os procedimentos para serem revisitados tanto pelo próprio aluno/autor como pelo professor/pesquisador.

No caso do software GeoGebra, ressalta-se que é um programa que vai além da Geometria Dinâmica e é classificado como um software de Matemática Dinâmica. Em particular, se pode evidenciar o seguinte fato: é que ele mostra tanto a representação geométrica, como um software de Geometria Dinâmica, quanto a representação algébrica mostrando as equações de retas, circunferências, e qualquer objeto que esteja em sua Janela de Visualização (Veja a Figura 1). Um professor preparado para usar estas ferramentas poderá explorar diversos conceitos, desde os mais simples até os mais complexos.

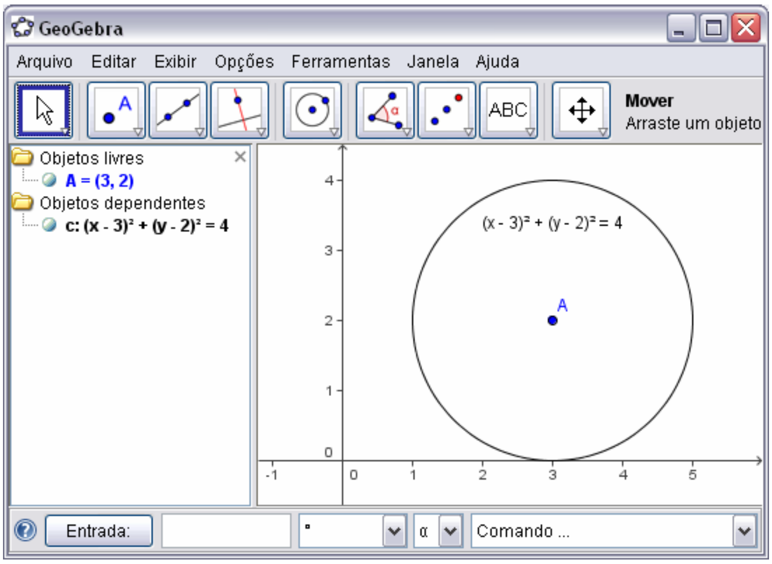


Figura 1: Uma tela do GeoGebra com uma circunferência e sua equação

Por que usar softwares como o GeoGebra em sala ou laboratórios?

De um modo geral, um software de Geometria Dinâmica permite movimentos interativos que possibilitam ao professor fazer coisas que seria muito difícil apenas com quadro e giz. Poderíamos exemplificar isso através da seguinte situação: Para ensinar alguns conceitos de trigonometria, um professor desenha no quadro algo parecido com o que esta na Figura 2.

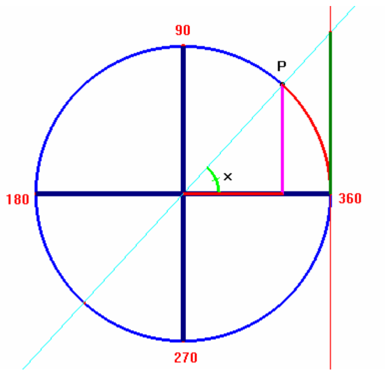


Figura 2: Desenho feito pelo professor: estático.

Após isso, pede-se para os alunos imaginarem o ponto P se movendo sobre a circunferência e observarem a abscissa e a ordenada desse ponto. O que ele queria era que os alunos percebessem algumas propriedades do seno e co-seno no ciclo-trigonométrico. No entanto, ele pode não alcançar seu objetivo se seus alunos não conseguirem imaginar o movimento. O GeoGebra permite criar este ambiente sem dificuldades (vide figura 3).

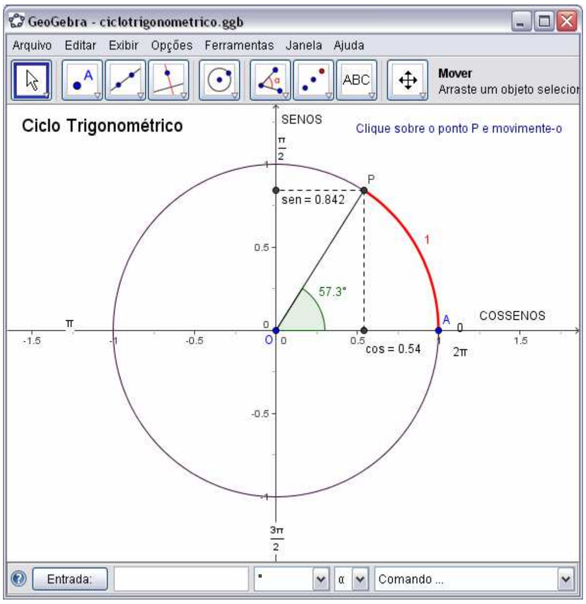


Figura 3: Informações dinâmicas que podem ser usadas no GeoGebra Acesse em
http://www.luisclaudio.mat.br/coloquio2008/ciclotrigonometrico.html

Além de trigonometria, há diversas situações onde o uso de um software como o GeoGebra poderia facilitar o aprendizado dos alunos. O trabalho para o professor pode ser bem menor. Não é difícil construir um ambiente em que se mostrem propriedades envolvendo o estudo da função afim, por exemplo, zeros, inclinação, estudo de sinal e interseções com os eixos (Figura 4). Com as funções quadráticas é possível ilustrar sem dificuldades a relação entre existência de raízes e o sinal do discriminante delta ($\Delta = b^2 - 4ac$ para $f : \Re \to \Re$ onde $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \Re$, $a \neq 0$) e a existência ou não de raízes reais. Na Figura 3 está um exemplo de ambiente dinâmico criado com o GeoGebra .

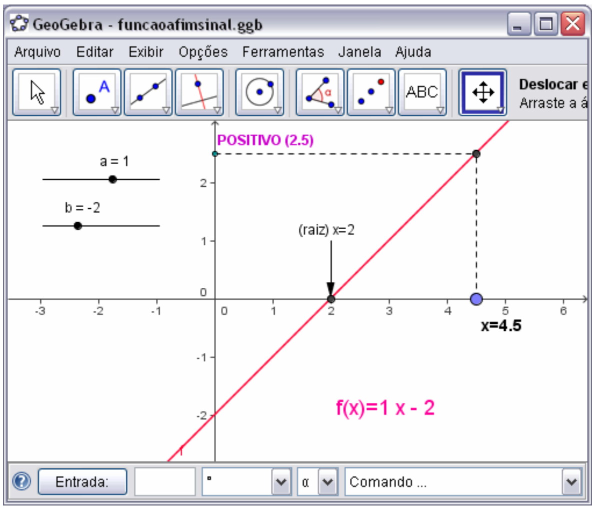


Figura 4: Ambiente dinâmico criado com o GeoGebra para estudo de funções afins. Acesse em http://www.luisclaudio.mat.br/coloquio2008/funcaoafimsinal.html

É possível ilustrar com relativa facilidade, por exemplo, a lei dos senos, dos co-senos, e praticamente qualquer um dos tópicos de Geometria Analítica (veja Figura 5).

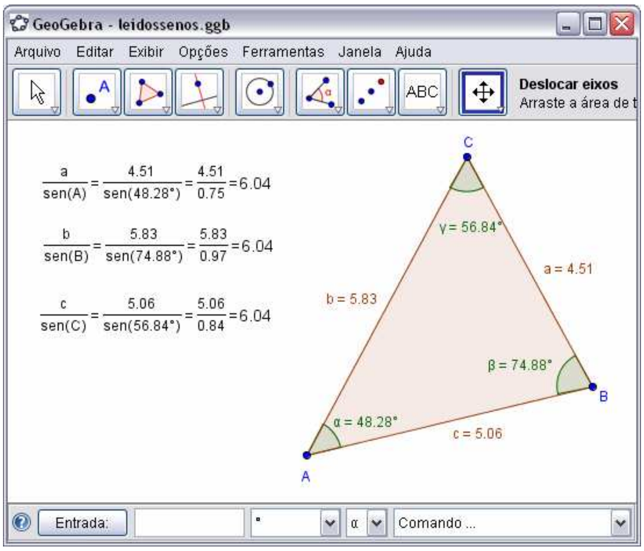


Figura 5: Ilustração sobre a Lei dos Senos. Acesse em
http://www.luisclaudio.mat.br/coloquio2008/leidossenos.html

Além das contribuições cognitivas, existem também as que estão associadas às motivacionais, principalmente para os alunos. No entanto, é preciso que o professor esteja bem preparado para desenvolver aulas com este recurso. De acordo com Saint (1995),

> Assim como um bom livro-texto não é, por si só, garantia de um bom curso, também um bom software precisa ser bem explorado por mestre e alunos para dar bons resultados. Ao contrário do que esperam muitos administradores educacionais, o computador não faz milagres.

É possível explorar diversos outros assuntos, ganhando-se tempo e aumentando-se o nível de compreensão dos alunos. No entanto, apenas os softwares de Geometria Dinâmica não podem ensinar coisa alguma. Para que o ensino com esse recurso possa ser efetivo é preciso que o professor esteja preparado para usar tais programas. Além disso, é preciso que haja material didático de apoio a essas aulas.

OBJETIVOS

1. Explorar, utilizando o Geogebra, alguns assuntos do Ensino Fundamental e Médio, tais como Funções, Geometria Plana e Trigonometria;
2. Apresentar algumas possibilidades de aulas de matemática através do GeoGebra;
3. Preparar os professores cursistas para explorar algumas possibilidades do GeoGebra.

CONTEÚDO

O minicurso proposto será dividido em três módulos, cada um ministrado em duas horas.

Módulo 1: Explorando a BARRA DE FERRAMENTAS do GeoGebra .

1) Discussão sobre ambiente propício para aprendizado.
2) Conhecimento do ambiente
3) Principais funções acessadas por meio da Barra de Ferramentas.
4) Modificando as propriedades de objetos
5) Atividades com triângulos
6) Atividades diversas.

Módulo 2: Explorando o CAMPO ENTRADA do GeoGebra.

1) Como acessar as principais funções vistas no Módulo 1 via comando escrito.
2) Conhecimento do ambiente
3) Principais funções acessadas por meio do Campo Entrada.
4) Atividades com funções diversas e trigonometria.

Módulo 3: Resolvendo problemas interessantes usando o GeoGebra

Os enunciados dos problemas foram retirados das referidas revistas sem alterações.

Problema 1 (proposto por Sanches e Carneiro - RPM 47)

Era uma vez dois irmãos aventureiros que encontraram, no baú das lembranças de seu bisavô, o mapa de um tesouro, juntamente com as instruções para localizá-lo. O tesouro estava numa ilha, cuja localização estava descrita de forma clara; encontrada a ilha, deveriam procurar um campo aberto com um grande espaço arenoso, perfeitamente circular. No exterior do dito círculo encontrariam numerosas palmeiras alinhadas ao longo de uma reta. Deveriam, então, procurar a palmeira com um desenho geométrico no seu tronco e, partindo de sua base, traçar as tangentes à pista circular, chamando de T_1 *e* T_2 *os pontos de tangência. A seguir, deveriam traçar também o diâmetro,* AM*, da circunferência fronteira da clareira, perpendicular à reta das palmeiras. Encontrariam o tesouro enterrado exatamente no ponto de intersecção de* AM *com* T_1T_2.

Problema 2 (proposto por Sanches e Carneiro (2001) - RPM 47)

Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram segundo um ângulo de 90º, à direita e caminha o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo de 90º, e caminha o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas.

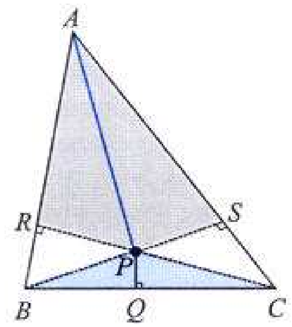
Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais (o vento, a chuva e os depredadores a haviam arrancado). Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: "Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui." Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro. A pergunta é: esse pirata era sortudo ou um matemático?

Problema 3 (proposto por Reínaldo Gen Hishiro Arakaki - RPM 51)

Em um triângulo qualquer, ABC:

1. *P é o ponto de encontro da bissetriz do ângulo BAC com a mediatriz do lado BC;* ***Q*** *é o ponto de encontro dessa mediatriz com o lado BC.*

2. ***R*** *é o ponto de encontro, com o lado AB, da perpendicular a esse lado traçada por* ***P****; a perpendicular ao lado AC, a partir do ponto* ***P****, cruza esse lado no ponto* ***S****. A figura ilustra a construção.*



A partir desse desenho simples, é possível obter um resultado matemático surpreendente: o triângulo é isósceles e finalmente o triângulo é eqüilátero. Onde está o erro?

Problema 4 (por Lenimar Nunes de Andrade - RPM 53)

Na RPM 53 Andrade (2002) mostra como se pode estudar Geometria Analítica com o Maple, um software proprietário excelente. A proposta aqui será resolver os exercícios lá contidos usando o GeoGebra.

MÉTODO DE ESTUDO E RECURSOS DIDÁTICOS

O mini-curso será oferecido para 20 cursistas em laboratório equipado com, pelo menos, 10 computadores. O software usado será o GeoGebra. Pede-se que o laboratório esteja equipado com um projetor multimídia (canhão, data-show). Os cursistas receberão material impresso com objetivo de auxiliá-los durante o desenvolvimento das atividades. Estas serão feitas em duplas e com auxílio de um dos ministrantes.

AVALIAÇÃO

Os cursistas serão avaliados no decorrer do mini-curso. Serão levados em consideração o comprometimento na realização das atividades e a criatividade na elaboração de situações para a sala de aula. Ao final, será distribuída uma ficha para identificar os conhecimentos construídos e coletar impressões sobre o mini-curso.

Referências

Andrade, L. (2002) *Usando o Maple em Geomegria Analítica*, **RPM** 53 , pp.40–45.

Bellemain F. (2001) *Geometria Dinâmica: diferentes implementações, papel da manipulação direta e usos na aprendizagem*. In: International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design. 4., 2001, São Paulo: **Anais...**São Paulo: Usp, pp. 1314-1329.

Brandão, L.O.; Isotani, S. (2003) *Uma ferramenta para ensino de geometria dinâmica na internet: iGeom*. In: Workshop de informática na educação, 9., 2003, Campinas: **Anais** Campinas:UNICAMP, pp.1476-1487.

Gravina, M. A. (1996) *Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria*. In : Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 7., Belo Horizonte: **Anais** Belo Horizonte: SBC, pp. 1-13.

Lima E. (1985) C*onceitos e Controvérsias – Deve-se usar máquina calculadora na escola?*, **RPM**07, pp.20–22.

Saint, J *O "Cabri Geomètre"*, **RPM** 29 (1995), pp.36–40.

Sánchez, J. e Carneiro, (2001) *A Ilha do Tesouro: Dois Problemas e Duas Soluções,* **RPM** 47, pp.1– 4.

Rodrigues, D. W. L. (2002) *Uma Avaliação Comparativa de Interfaces Homem-Computador em Programas de Geometria Dinâmica.* Dissertação (Dissertação de Mestrado em Ergonomia) - Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina..

GEOMETRIA DINÂMICA: ABORDAGENS INTERLIGADAS PARA O ESTUDO DE CÔNICAS

Francisco Quaranta - Universidade Federal do Rio de Janeiro - fquaranta@ig.com.br

Luciana Felix da Costa - Universidade Federal do Rio de Janeiro - lulufelix@gmail.com

Luiz Carlos Guimarães - Universidade Federal do Rio de Janeiro - luizguima@gmail.com

RESUMO:

O estudo de cônicas no Ensino Médio no Brasil muitas vezes se reduz a uma abordagem através da Geometria Analítica. O tempo reduzido a elas dedicado faz com que poucas propriedades sejam exploradas pelo professor e quando o são, não se estabelece qualquer relação entre elas. Este mini-curso se propõe a ilustrar a integração entre as diversas propriedades das curvas cônicas.

A estratégia que buscamos é de interligação de abordagens, partindo da Geometria Dinâmica e chegando a provas matemáticas. O objetivo é despertar o sentimento de prazer e evidenciar o verdadeiro significado de "fazer matemática": tornar real, concreto e mais simples para alunos e professores o caminho explorar-conjecturar-demonstrar, base da construção do conhecimento científico.

1. INTRODUÇÃO:

1.1 Constatações, Implicações Educacionais e Objetivos Gerais

Podemos dizer que as curvas cônicas estão entre as mais exaustivamente estudadas desde a antiguidade. Não é de se estranhar que esse interesse seja tão antigo. Suas propriedades, muitas já conhecidas pelos gregos na Antiguidade, desempenham um papel importante em vários domínios da Física, como Astronomia, Ótica e Acústica, da Engenharia e da Arquitetura, e atualmente exercem um papel de primordial importância no desenvolvimento da tecnologia moderna (ver, por exemplo, GOODSTEIN & GOODSTEIN [3], HADAMARD [5] e HARTSHORNE [6]).

Apesar de toda a sua importância histórica e de seu relevante papel no desenvolvimento tecnológico moderno, o estudo das cônicas na escola básica brasileira acabou ficando restrito ao Ensino Médio, muitas vezes a mercê de uma única abordagem a partir da Geometria Analítica, reduzindo-se a simples manipulação e/ou memorização de fórmulas. O tempo reduzido a elas dedicado faz com que poucas propriedades sejam exploradas pelo professor e, quando o são, na maior parte das vezes não se estabelece qualquer relação entre elas. Torna-se, portanto, mais difícil transmitir aos seus alunos a beleza, a importância e a utilidade desses conceitos em aplicações reais.

Uma vez que cada aplicação real das propriedades destas curvas possui diferentes dados iniciais, fica evidenciada a necessidade de propor outros enfoques para o estudo destas curvas.

Partimos do ponto de vista de que a principal dificuldade para que se comece a pensar em reverter esta situação reside, principalmente, nas deficiências na formação básica do professor de Matemática, dificuldade esta aliada à falta de acesso a bibliografia de apoio adequada ao seu nível e a uma desvalorização dos aspectos geométricos que embasam determinado objeto e/ou conceito matemáticos.

Tentando, então, contribuir para a reversão deste quadro preocupante, ilustraremos neste trabalho a integração entre as diversas propriedades das curvas cônicas, propondo um material de apoio para o estudo dessas curvas e suas principais propriedades, variando os dados iniciais necessários para a resolução de problemas.

Acreditamos que, modificando e aprofundando as concepções dos professores e mostrando outras abordagens possíveis para o tema, estaremos certamente atingindo, em médio prazo, seus alunos.

O objetivo é, portanto, despertar o sentimento de prazer e evidenciar o verdadeiro significado da expressão "fazer matemática": tornar real, concreto e mais simples para alunos e professores o caminho explorar-conjecturar-demonstrar, base da construção do conhecimento científico.

Assim, pode-se dizer de modo geral que este trabalho tem por objetivo discutir algumas das definições, propriedades e problemas que se referem ao estudo das curvas chamadas cônicas a partir de algumas abordagens possíveis, além de apresentar e explorar algumas construções, discutindo suas particularidades através do uso das funcionalidades do software de Geometria Dinâmica Tabulæ, desenvolvido pelo Projeto ENIBAM no Instituto da Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Por ter sido desenvolvido no Brasil, o Tabulæ acaba por ser muito mais acessível aos professores brasileiros do que outros que se apresentam no mercado em todos os aspectos: forma de aquisição, aspecto financeiro, etc.

As construções geométricas selecionadas para esse trabalho, os problemas nos quais estão inseridas e os diversos métodos sugeridos para suas respectivas soluções podem vir a contribuir significativamente para a formação do professor, ampliando sua intuição e seus conhecimentos em Geometria, e fazendo compreender a importância e as conseqüências da escolha de um corpo axiomático ou outro na construção de uma determinada teoria baseada no pensamento lógico-dedutivo.

1.2 Por que fazer uso da Geometria Dinâmica?

Enquanto educadores, devemos sempre nos perguntar: “Como e em que medida nossa prática pedagógica está contribuindo para a formação do indivíduo?”. Muitas vezes não percebemos que uma simples mudança de abordagem pode nos fazer capazes de potencializar o aprendizado de nossos alunos.

Muitas vezes acabamos por expor qualquer conteúdo de Matemática, mais especificamente de Geometria, de forma rígida através apenas da organização axiomática das definições, dos axiomas e postulados, das proposições, etc., o que pode tornar-se uma barreira na construção de significados para um determinado conceito.

Buscando então uma abordagem que seja atual e significativa no processo de ensino e aprendizagem em Geometria é que recorremos às chamadas novas tecnologias de ensino, ligadas ao advento da informática. A esse respeito, MISKULIN [9] afirma:

> A introdução e a disseminação da informática na sociedade e na educação implicam um cenário tecnológico que apresenta a existência de uma nova lógica, uma nova linguagem, novos conhecimentos e novas maneiras de compreender e de se situar no mundo em que se vive, exigindo desse ser em formação [futuro professor] uma nova cultura profissional.
>
> Uma questão que se impõe a nós, educadores matemáticos, preocupados em tornar nossas ações pedagógicas condizentes com o desenvolvimento tecnológico da sociedade, traduz-se por: como compatibilizar essa nova concepção de mundo, essa nova cultura profissional, com uma concepção de ensino que transcende o paradigma tradicional, pontuado pela instrução programada, pela transmissão de informações e pelo treinamento do pensamento algorítmico e mecânico?

Atrevemo-nos a apresentar aqui uma resposta para a questão levantada por MISKULIN neste trecho. Acreditamos que o uso da Geometria Dinâmica como plataforma para a viabilização do processo de ensino e aprendizagem em Geometria, através da metodologia de Resolução de Problemas, seja uma das maneiras de compatibilizar a nova concepção de mundo e cultura profissional com uma nova concepção de ensino capaz de levar o indivíduo à compreensão real e à atribuição de significados aos conceitos por ele adquiridos.

Entendemos que a verdadeira aprendizagem em Matemática, particularmente em Geometria, deve passar necessariamente pelas etapas de exploração concreta, experimentação, resolução de problemas, elaboração de conjecturas, justificativas informais e provas. Segundo GUIMARÃES et al. [4], estas etapas não são facilmente assimiladas pelos alunos, embora pareçam muito naturais do ponto de vista de quem já as superou.

Nesse sentido, a Geometria Dinâmica funciona como de elemento facilitador na superação de cada uma destas etapas, de modo que nas simulações das diversas construções no ambiente computacional podemos fazer uso dos objetos traçados na tela como ferramenta no estabelecimento de conjecturas e justificativas, como podemos concluir a partir de LABORDE & CAPPONI em [7]. E esta é uma parte considerável da tarefa de ensinar geometria, para a qual a Geometria Dinâmica pode contribuir efetivamente.

A Geometria Dinâmica possibilita reproduzir, em figuras que se movem, as conseqüências das propriedades geométricas presentes em uma determinada construção, o que pode permitir modelagem no ambiente computacional de construções concretas e alteração delas para explorar diversos casos e possibilidades. Permite ainda identificar padrões que aumentem seus conhecimentos sobre diversos aspectos geométricos, alicerçar conjecturas e indicar possíveis caminhos para demonstrações. Desta forma, podemos dizer que as representações neste ambiente fornecem a base experimental necessária às abstrações inerentes à prova matemática.

Assim, a abordagem computacional empregada neste mini-curso será um auxiliar na exploração e fixação das propriedades das curvas cônicas no plano e, a partir delas, a dedução das propriedades e equações canônicas que as descrevam no plano cartesiano.

Por outro lado, não podemos deixar de comentar que mesmo com o uso competente dessas tecnologias, mesmo sendo estes softwares de Geometria Dinâmica um instrumento poderoso em nossa ação pedagógica, não é possível garantir necessariamente o sucesso que desejamos em sala de aula como mostra o recente artigo de VILLIERS [10].

Outros fatores devem ser levados em consideração no momento em que desejamos escolher uma abordagem/metodologia pedagógica para introduzir e fixar um determinado conteúdo: recursos pedagógicos disponíveis, o contexto sócio-cultural no qual estão inseridos os alunos, entre outros fatores. O uso de tecnologias, no caso a Geometria Dinâmica, é apenas uma das várias opções de abordagem que podem servir como facilitadoras do processo de ensino e aprendizagem.

Todavia é claro que, enquanto educadores, devemos estar a par do maior número possível de abordagens distintas para que, em cada caso, saibamos a partir de quais delas podemos oportunizar a aquisição de conhecimento por parte dos nossos alunos.

2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS, PÚBLICO ALVO E PRÉ-REQUISITOS

Este mini-curso, destinado a professores do Ensino Médio e Superior e a Licenciandos em Matemática, tem como objetivo sanar parte das dificuldades citadas anteriormente, fornecendo ao professor um material que, ao mesmo tempo, supra as deficiências que possam existir na sua formação e sirva de ponto de apoio para suas aulas. Dessa maneira, visamos:

- Aprofundar conhecimentos específicos à cerca das cônicas em Matemática.
- Verificar diferentes abordagens possíveis para um estudo mais profundo e rico desses objetos matemáticos integrando diversos aspectos geométricos do plano com aspectos analíticos, desvendando a beleza e despertando o gosto pela matemática.
- Integrar os conteúdos abordados com tópicos da Matemática do Ensino Médio.
- Conscientizar os professores participantes sobre as diversas possibilidades do uso de programas computacionais de geometria dinâmica como recurso educacional em sua disciplina.

Os pré-requisitos necessários para um acompanhamento pleno dos tópicos desse curso serão conceitos básicos de geometria plana, tais como: mediatriz, congruência de triângulos, lugar geométrico, trigonometria, coordenadas de pontos e distância entre pontos e retas no plano.

No que se segue, descreveremos algumas construções usadas neste trabalho e colocaremos algumas questões a serem exploradas e respondidas no decorrer do curso.

3. INVESTIGANDO AS PROPRIEDADES DAS SECÇÕES CÕNICAS

Depois de reconhecer o traçado histórico no qual o tema se insere e de refletir sobre as diversas formas possíveis de abordar pedagogicamente o assunto, passaremos ao estudo um pouco mais específico destas curvas.

Neste mini-curso vamos apresentar diversas definições, teoremas e problemas a respeito das secções cônicas tomando como base a proposição de várias atividades organizadas em quatro Roteiros Didáticos que pressupõem a resolução de problemas a partir do uso do software de Geometria Dinâmica, Tabulæ.

Pretendemos então apresentar três abordagens geométricas usuais - todas três explorando características dessas curvas no plano - para um estudo mais dinâmico e interativo de modo que cada roteiro explorado terá seus diversos questionamentos respondidos, comentados e formalmente justificados. A seguir comentaremos brevemente os objetivos gerais de cada um dos Roteiros Didáticos que serão propostos por nós durante o curso.

3.1 Roteiro Didático Introdutório – Conhecendo o Tabulæ

Sabemos que nem todos os participantes que, porventura, se inscreverão para este mini-curso, conhecem e/ou já trabalharam com o Tabulæ. Por essa razão, achamos prudente incluir um Roteiro Didático que pudesse apresentar de forma breve as principais funcionalidades deste software.

Assim, esse roteiro tem por objetivo apresentar, através da proposição de construções geométricas simples, algumas das ferramentas oferecidas pelo software que utilizaremos como base para a exploração das construções geométricas das curvas cônicas que serão propostas no decorrer do mini-curso.

3.2 Roteiro Didático 1 - Uma Proposta de Phillipe de La Hire

Em sua obra "Novos Elementos das Seções Cônicas" [8], LA HIRE propõe uma abordagem para o reconhecimento e definição das curvas cônicas onde as apresenta isoladamente. Em sua obra, LA HIRE apresenta: dezessete proposições que se referem ao estudo da curva que hoje conhecemos por Parábola (parte I); vinte proposições que se referem ao estudo da curva que hoje conhecemos por Elipse (parte II); vinte e quatro proposições que se referem ao estudo da curva que hoje conhecemos por Hipérbole (parte III); e cinco problemas que sugerem uma unificação para as três cônicas (parte IV).

Perceba, portanto, que mesmo apresentando e propondo um estudo em que cada uma das curvas - elipse, hipérbole e parábola - são examinadas separadamente, LA HIRE compreende que estas possuem uma origem comum. Talvez, seu objetivo ao observá-las uma de cada vez seja a busca da facilitação na compreensão e fixação das principais propriedades que estas curvas possuem. Este roteiro tem por objetivo a exploração das considerações iniciais apresentadas para cada uma das curvas como apresentadas no livro [8] de modo que, após a essa exploração, serão propostas algumas questões a seu respeito a serem respondidas pelos participantes com nossa orientação.

3.3 Roteiro Didático 2 - Construções Unificadoras das Cônicas

As secções cônicas, embora possam ser definidas separadamente, como veremos no Roteiro 1, são originadas a partir das seções de um mesmo cone por planos distintos segundo a definição de Apolônio. De alguma forma, essa origem comum, viabiliza a unificação de suas definições.

Apresentaremos nesta seção duas abordagens que permitem a obtenção das três cônicas - elipse, hipérbole e parábola - numa mesma construção. São elas:

Primeira - Dados os focos da cônica e um círculo de centro em um dos focos e raio igual a *2a* (este círculo é denominado Círculo Diretor), construiremos, de forma detalhada, uma cônica que poderá se caracterizar como qualquer uma das três curvas (Elipse, Parábola ou Hipérbole) dependendo unicamente da posição que um dos focos assume em relação ao círculo diretor;

Segunda - Dado um foco da cônica, a sua reta diretriz e a sua excentricidade, construiremos, de forma detalhada, uma cônica que poderá se caracterizar como qualquer uma das três curvas (Elipse, Parábola e Hipérbole) dependendo unicamente da posição de um de seus focos em relação a uma reta que chamaremos de diretriz e do valor da razão $\frac{c}{a}$ chamada excentricidade.

Para obter cada uma das secções cônicas em particular, basta modificar os parâmetros pressupostos pela construção de acordo com as propriedades que cada uma delas possui. Este roteiro tem por objetivo a exploração das considerações iniciais apresentadas para cada uma das curvas como apresentadas no livro [1] de modo que, após a essa exploração, serão propostas algumas questões a seu respeito a serem respondidas pelos participantes com nossa orientação.

3.4 Roteiro Didático 3 - Parametrizações e Equações Cartesianas das Cônicas

Neste roteiro, temos por objetivo principal uma maior integração entre os diversos elementos e propriedades das curvas cônicas e suas expressões analíticas mostrando construções geométricas que podem evidenciar, através de relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, as parametrizações e/ou equações dessas curvas tentando contrapor à abordagem usual que parte da expressão analítica da distância entre dois pontos no plano e das definições "bifocais" já apresentadas para cada curva de modo que, após a essa exploração, serão propostas algumas questões a seu respeito a serem respondidas pelos participantes com nossa orientação.

4. COM O QUE ESPERAMOS CONSTRIBUIR

Esperamos que as sugestões e os modelos propostos neste mini-curso possam ser usados como material complementar para formação de professores e alunos além de servir como motivação adicional para integração e utilização de ferramentas computacionais no ensino.

Acreditamos que a exploração de um determinado assunto através de múltiplos enfoques tem maior probabilidade de despertar uma motivação legítima no aluno, além de tornar o estudo do tema em questão mais abrangente e aumentando a compreensão das definições e dos conceitos geométricos envolvidos neste estudo. Além disso, a construção de modelos usando Geometria Dinâmica permite o exame de uma ampla variedade de exemplos, favorecendo o estabelecimento de conjecturas razoáveis e mostrando caminhos a serem seguidos para a obtenção da necessária prova matemática dessas suposições.

No que diz respeito à formação continuada de professores, trabalhar e compreender uma conexão clara entre propriedades geométricas inerentes às secções cônicas, permite uma melhor visualização e aprofundamento no estudo destas curvas.

Referências

[1] Comberousse, C. & Rouché, E (1931). *Traité de Geometrie*; vol. 2. Paris.

[2] F.I.C. (1954). *Elementos de Geometria*. Rio de Janeiro.

[3] Goodstein, D. L. & Goodstein, R. (1996). *Feynman's Lost Lecture*. Nova York.

[4] Guimarães, L.C., Belfort, E. & Bellemain, F (2002).; Geometry: Back to the Future?, *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics*; Creta.

[5] Hadamard, J. (1932). *Leçons de Géométrie Elementaire*. vol. 2 ; Paris.

[6] Hartshorne, R. (2000); *Geometry: Euclid and Beyond*. Londres.

[7] Laborde, C. & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* ; vol 14, n° 1.2 ; pp 165-210.

[8] La Hire, P. (1723); Nouvelle Éléments pour les Sections des Superficies Coniques (Paris - 1679); Tradução do francês para o inglês de Brian Robinson; New Elements of Conics Sections; Londres.

[9] Miskulin, R. G. S. (2003). As Possibilidades Didático-Pedagógicas de Ambientes Computacionais na Formação Colaborativa de Professores de Matemática. *Formação de Professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares*. pp. 217-248. São Paulo.

[10] Villiers, M. (2007). Some pitfalls of dynamic geometry software Teaching & Learning Mathematics; *A journal of the Association of Mathematics Education (AMESA)*, 4 , 46-52.