

**DIANA MAIA**

**FUNÇÃO QUADRÁTICA:**

**UM ESTUDO DIDÁTICO DE UMA ABORDAGEM COMPUTACIONAL**

**MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**PUC/SP**

**São Paulo**

**2007**

**DIANA MAIA**

**FUNÇÃO QUADRÁTICA:**

**UM ESTUDO DIDÁTICO DE UMA ABORDAGEM COMPUTACIONAL**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud*

**PUC/SP**

**São Paulo**

**2007**

### 4.1.1 ANÁLISE DO MILIEU DA PARTE 1:

O objetivo das quatro primeiras atividades da seqüência didática é proporcionar ao aluno condições de construir a forma canônica da função polinomial do 2º grau, e perceber que modificações na escrita algébrica da função acarretam mudanças na representação gráfica e vice-versa.

As três primeiras atividades são divididas em duas partes, a primeira parte é destinada à construção de gráficos de funções do 2º grau, utilizando o *Winplot* e, a segunda parte reservada à análise dos gráficos obtidos. Partimos sempre da função descrita por  $f(x) = x^2$ , por ser a representação mais “simples” da função de 2º grau, para que o aluno a perceba quais modificações ocorrem em seu gráfico quando alteramos o valor de **a** quando consideramos somente representações na forma  $f(x) = ax^2$ ; o valor de **n** quando  $f(x) = x^2 + n$  e o valor de **m** quando  $f(x) = (x + m)^2$ .

É importante salientar que as quatro primeiras atividades visam também à construção do meio material das duas últimas atividades.

#### Atividade 1

1. Num mesmo par de eixos cartesianos desenhe, utilizando o *Winplot*, o gráfico de:

a.  $f_1(x) = x^2$

f.  $f_6(x) = -x^2$

b.  $f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$

g.  $f_7(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2$

c.  $f_3(x) = 3 \cdot x^2$

h.  $f_8(x) = -3 \cdot x^2$

d.  $f_4(x) = 10 \cdot x^2$

i.  $f_9(x) = -10 \cdot x^2$

e.  $f_5(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2$

j.  $f_{10}(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2$

2. Analisando os gráficos:

- a) O que é possível concluir a respeito do coeficiente de  $x^2$  ser um número maior que zero.

- b) O que é possível concluir a respeito do coeficiente de  $x^2$  ser um número menor que zero.
- c) Os gráficos possuem algum ponto em comum? Por quê?
- d) O que garante em termos do gráfico de cada função, o fato do coeficiente de  $x^2$  ser um número positivo? E de ser um número negativo?
- e) Comparando os gráficos do item **a** e **f** o que se pode concluir?

O quadro 4.1 esquematiza as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas.

DIALÉTICAS	MEIO <sup>8</sup> (M)	ALUNO (E)	PROFESSOR (P)	SITUAÇÃO (S)
Institucionalização	M0: aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Sistematização da propriedade do parâmetro <b>a</b> .
Validação	M-1: referência	E-1: aprendiz Identificação de novos saberes	P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos.	S-1: aprendizagem Como utilizar o parâmetro <b>a</b> .
Formulação	M-2: objetivo	E-2: ativo Parte 2 da atividade Hipóteses		S-2: referência Conjecturas sobre o coeficiente de $x^2$
Ação	M-3: material Software, parte 1 da atividade.	E-3: objetivo Utilização do <i>software</i> e representação gráfica da função quadrática.	Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos	S-3: objetiva Interação com representação gráfica de $f(x) = ax^2$

adidática

**Quadro 4.1** – Análise ascendente do *milieu* da atividade 1

Para a determinação da situação objetiva (S-3) temos o meio material do aluno (M-3), no qual está disponível o *software Winplot* e as representações gráficas da função quadrática. Nesse momento o professor espera que o aluno utilize esses conhecimentos como ferramentas para começar a desenvolver a atividade. Os conhecimentos sobre a utilização do *software* gráfico *Winplot* que o aluno (E-3) possui permitem a interação com o meio material, pois aqui o aluno tem o registro algébrico da função na forma  $f(x) = ax^2$  e ao digitá-lo no programa ele utiliza o registro  $f(x) = ax^2$ . A situação objetiva permite que o aluno construa com o auxílio do *software* os gráficos das funções desejadas.

<sup>8</sup> Tradução de “*milieu*”.

Para a obtenção da situação de aprendizagem (S-1), temos o meio de referência (M-1) formado pelas representações gráficas das funções definidas por  $f(x) = ax^2$  e pelas conjecturas levantadas pelos alunos ao responderem as questões propostas. O aluno aprendiz (E-1) tentará identificar como utilizar o parâmetro **a**. Estamos na fase de validação, na qual o professor observador (P-1) espera que o aluno empregue seus conhecimentos para justificar e provar os resultados a fim de corrigir ou fazer evoluir sua produção, e isto se dará por meio da socialização dos saberes envolvidos.

Nessa socialização verificaremos as estratégias utilizadas pelos alunos ao tentarem responder as questões, ou seja, se atribuíram outros valores para o coeficiente de  $x^2$  para tentar validar suas respostas, em caso afirmativo, quais registros numéricos (decimais, fracionários, irracionais), e também se atribuíram o valor zero e quais conclusões chegaram.

Na situação didática (S0) que é a fase da institucionalização o aluno (E0) apropria-se do saber aprendido na situação de aprendizagem (S-1) como objeto de estudo. E, então o professor sistematiza as propriedades envolvidas nesta atividade, ou seja, concavidade da parábola, reflexão e simetria.

A segunda atividade tem o propósito verificar a translação vertical que ocorre com o gráfico da função  $f(x) = x^2$  quando somamos ou subtraímos uma constante. É esperado que o aluno substitua outros valores a essa constante, e também que ele consiga compreender que esse resultado – translação vertical – também se aplica ao gráfico da função  $f(x) = -x^2$ . E, ainda que ele compreenda o significado de vértice da parábola, mostrando as coordenadas deste ponto.

### Atividade 2

1. Num mesmo par de eixos cartesianos desenhe, utilizando o *Winplot*, o gráfico de:

a)  $f_1(x) = x^2$

d)  $f_4(x) = x^2 - 1$

b)  $f_2(x) = x^2 + 1$

e)  $f_5(x) = x^2 - 2$

c)  $f_3(x) = x^2 + 2$

2. O que acontece com o gráfico da função inicial  $f_1(x) = x^2$  quando se soma ou subtrai uma constante, para obter uma nova função.

### 3. Quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada um dos casos?

O quadro 4.2 esquematiza as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas.

DIALÉTICAS	MEIO (M)	ALUNO (E)	PROFESSOR (P)	SITUAÇÃO (S)
Institucionalização	M0: aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Sistematização da propriedade do parâmetro $n$ .
Validação	M-1: referência	E-1: aprendiz Identificação de novos saberes	P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos.	S-1: aprendizagem Como utilizar o parâmetro $n$ . S-2: referência Conjecturas sobre o parâmetro $n$ e sobre o vértice da parábola.
Formulação	M-2: objetivo	E-2: ativo Parte 2 da atividade Hipóteses		
Ação	M-3: material <i>Software</i> e parte 1 da atividade	E-3: objetivo Plano cartesiano; coordenadas de um ponto no plano; simetria; reflexão; translação; representação da função no plano; noção de coeficiente e utilização do <i>software</i> .	Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos	S-3: objetiva Interação com representação gráfica de $f(x) = x^2 + n$

adidática

**Quadro 4.2** – Análise ascendente do *milieu* da atividade 2

Para a determinação da situação objetiva (S-3) temos o meio material do aluno (M-3) no qual o aluno possui como conhecimentos prévios a representação de funções quadráticas no plano, a noção de coeficiente e utilização do *software Winplot*. Neste momento o professor espera que o aluno utilize esses conhecimentos como ferramentas para começar a desenvolver a atividade. Esses conhecimentos do aluno (E-3) permitem a interação com o meio material (M-3), a fim de construir e analisar os gráficos pedidos.

coordenada  $y$  varia, pois estamos transladando o gráfico de  $f_1(x) = x^2$  sobre o eixo das ordenadas.

Para a obtenção da situação de aprendizagem (S-1), temos o meio de referência (M-1) formado pelas representações gráficas do tipo  $f(x) = x^2 + n$  e pelas conjecturas levantadas pelos alunos ao responderem as questões propostas. O aluno (E-1) tentará identificar como utilizar o parâmetro  $n$ . Estamos na fase de validação, na qual o professor observador (P-1) espera que o aluno empenhe seus conhecimentos para justificar e provar os seus resultados por meio da socialização dos saberes envolvidos.

Nessa socialização verificaremos as estratégias utilizadas pelos alunos, ou seja, se atribuíram outros valores para o parâmetro  $n$  para tentar validar suas respostas e, também se eles utilizaram a função do tipo  $f(x) = -x^2 + n$ .

Na situação didática (S0) que se refere a fase da institucionalização, o aluno (E0) apropria-se do saber aprendido na situação de aprendizagem (S-1) como objeto de estudo. E, então o professor sistematiza as propriedades envolvidas nesta atividade, ou seja, translação vertical do vértice da parábola.

A terceira atividade também tem uma parte destinada à construção de gráficos utilizando o *Winplot* e outra dedicada à análise desses gráficos.

O propósito dessa atividade é perceber a translação horizontal do gráfico da função  $f(x) = x^2$  quando adicionamos uma constante  $m$  à variável independente  $x$ . Acreditamos que o aluno perceberá que o mesmo ocorre para o gráfico da função  $f(x) = -x^2$ .

### Atividade 3

1. Num mesmo par de eixos cartesianos desenhe, utilizando o *Winplot*, o gráfico de:

a)  $f_1(x) = x^2$

d)  $f_4(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

b)  $f_2(x) = (x + 1)^2$

e)  $f_5(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

c)  $f_3(x) = (x - 1)^2$

2. Compare os gráficos a partir da função inicial  $f_1(x) = x^2$ , o que acontece com o gráfico, conforme somamos ou subtraímos uma constante positiva da variável independente  $x$ ?
3. Quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada um dos casos?

O quadro 4.3 esquematiza as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas.

DIALÉTICAS	MEIO (M)	ALUNO (E)	PROFESSOR (P)	SITUAÇÃO (S)
Institucionalização	M0: aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Sistematização da propriedade do parâmetro $m$ .
Validação	M-1: referência	E-1: aprendiz Identificação de novos saberes	P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos.	S-1: aprendizagem Como utilizar o parâmetro $m$ .
Formulação	M-2: objetivo	E-2: ativo Parte 2 da atividade, Hipóteses		S-2: referência Conjecturas sobre o parâmetro $m$ e sobre o vértice da parábola.
Ação	M-3: material <i>Software</i> , parte 1 da atividade.	E-3: objetivo Plano cartesiano; coordenadas de um ponto no plano; simetria; reflexão; translação; representação da função no plano; noção de coeficiente e utilização do <i>software</i> .	Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos	S-3: objetiva Interação com representação gráfica de $f(x) = (x + m)^2$

adicática

**Quadro 4.3** – Análise ascendente do *milieu* da atividade 3

Para a determinação da situação objetiva (S-3) temos o meio material do aluno (M-3), no qual estão disponíveis as noções de plano cartesiano, coordenadas de um ponto no plano, simetria, reflexão, translação; representação de funções quadráticas no plano, noção de coeficiente e conhecimento do *software Winplot*. Estes conhecimentos do aluno (E-3) permitem a interação com o meio material (M-3), observando o comportamento para as ordenadas  $y = f(x)$  correspondentes; concavidade da parábola; noção de vértice da parábola. A situação S-3 permite que o aluno E-3 construa com o auxílio do *software* os gráficos das funções desejadas.

### Atividade 4

1. Sem utilizar o *Winplot* descreva a partir da função inicial  $f_1(x) = x^2$ , como ficará o gráfico das funções abaixo? E responda quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada caso?
  - a)  $f_2(x) = 2(x+3)^2 - 4$
  - b)  $f_3(x) = -3\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}$
2. Desenhe o gráfico de  $f(x) = (x+3)^2 - 5$  (utilize o *Winplot*)
3. Você consegue prever o gráfico de  $g(x) = x^2 + 6x + 4$ ? Explique.
4. Escreva uma função do segundo grau genérica em função dos parâmetros **a**, **m** e **n**, de modo que seja fácil a visualização de seu gráfico.
5. O que cada um dos parâmetros (**a**, **m** e **n**) faz com o gráfico da função inicial?
6. Relacione os parâmetros da função que vocês encontraram no item 4 com os parâmetros da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Quais conclusões vocês chegaram?

O quadro 4.4 esquematiza as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas.

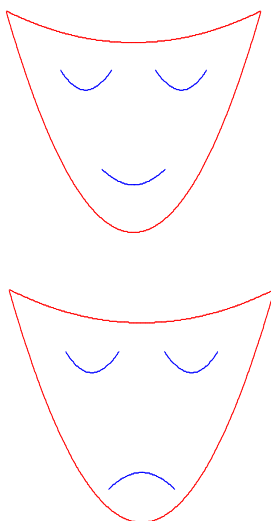
DIALÉTICAS	MEIO (M)	ALUNO (E)	PROFESSOR (P)	SITUAÇÃO (S)
Institucionalização	M0: aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Tratamento da forma algébrica da função quadrática
Validação	M-1: referência	E-1: aprendiz Identificação de novos saberes	P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos.	S-1: aprendizagem Forma canônica da função quadrática.
Formulação	M-2: objetivo	E-2: ativo Forma desenvolvida Hipóteses		S-2: referência Conjecturas sobre o uma "nova" forma de representação da função quadrática.
Ação	M-3: material Atividades 1, 2 e 3.	E-3: objetivo Conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores.	Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos	S-3: objetiva Interação com as propriedades dos parâmetros <b>a</b> , <b>m</b> e <b>n</b>

didática

**Quadro 4.4** – Análise ascendente do *milieu* da atividade 4

### Atividade 5

Com o auxílio do *Winplot* desenhe as figuras abaixo, e descreva como vocês realizaram esta tarefa.



O quadro 4.5 esquematiza as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas.

DIALÉTICAS	MEIO (M)	ALUNO (E)	PROFESSOR (P)	SITUAÇÃO (S)
Institucionalização	M0: aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Sistematização das propriedades.
Validação	M-1: referência	E-1: aprendiz Identificação de novos saberes	P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos.	S-1: aprendizagem Como utilizar partes do gráfico. S-2: referência Conjecturas sobre como construir as "máscaras".
Formulação	M-2: objetivo	E-2: ativo Hipóteses		
Ação	M-3: material	E-3: objetivo Conhecimentos adquiridos com as atividades anteriores. Utilização do <i>software</i> .	Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos	S-3: objetiva Interação com a forma canônica.

Adidática

**Quadro 4.5** – Análise ascendente do *milieu* da atividade 5

Para a determinação da situação objetiva (S-3) temos o meio material (M-3) no qual o aluno possui os conhecimentos adquiridos com as atividades anteriores, ou seja, a