

EUGÊNIO CESAR SILVEIRA

**UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA
AQUISIÇÃO/CONSTRUÇÃO DA NOÇÃO DE TAXA DE
VARIAÇÃO MÉDIA DE UMA FUNÇÃO**

Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC-SP

2001

EUGÊNIO CESAR SILVEIRA

**UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA
AQUISIÇÃO/CONSTRUÇÃO DA NOÇÃO DE TAXA DE
VARIÇÃO MÉDIA DE UMA FUNÇÃO**

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA à Comissão Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação da Professora Doutora Tânia Maria Mendonça Campos.

PUC-SP

2001

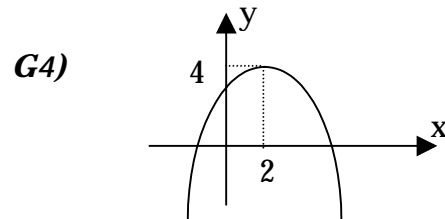
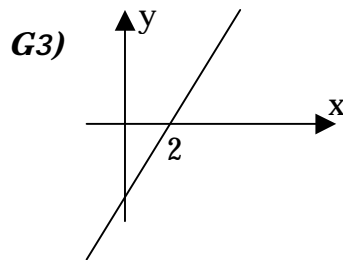
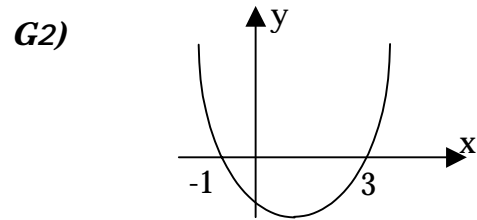
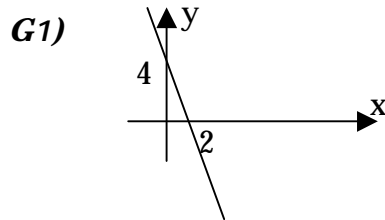
Anexo I

Teste Diagnóstico

Teste Diagnóstico

Nome _____

1) Indique qual dos gráficos abaixo representa a função $y = -2x + 4$: _____



2) Explique a razão pela qual você fez sua escolha : _____

Dadas as seguintes funções:

a) $y = 2^{2x+3}$

c) $y = 2x + 3$

e) $y = \log_2(x)$

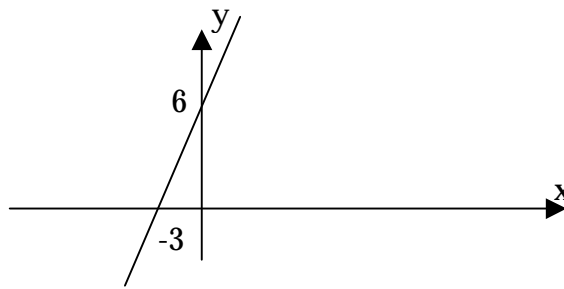
b) $y = x^2 + 3$

d) $y = x^2 - 5x + 6$

Assinale qual(is) da(s) função(ões) acima tem como gráfico uma reta: _____

Justifique sua resposta: _____

3) O gráfico da variação de y em relação a x é dado abaixo:

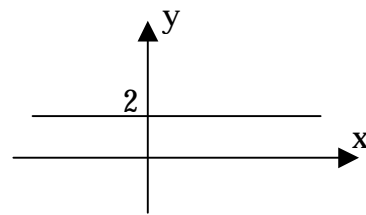
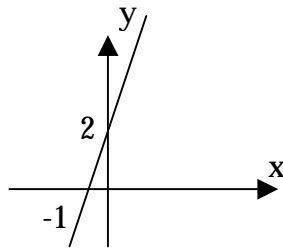
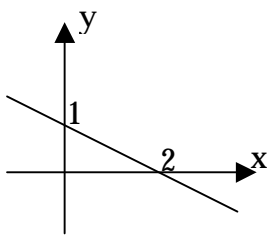


Determine:

a) O coeficiente angular da reta: _____

b) A expressão que relaciona y com x _____

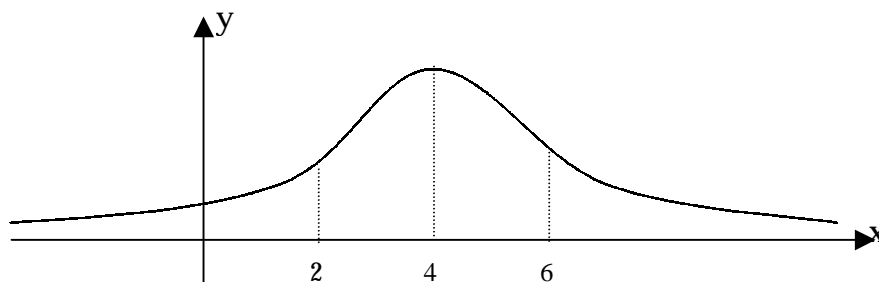
4) Determine o coeficiente angular de cada uma das retas abaixo e escreva a expressão que relaciona y com x :



coef. angular _____ coef. angular _____ coef. angular _____

expressão _____ expressão _____ expressão _____

5) Dado o gráfico da função, responda às questões abaixo:



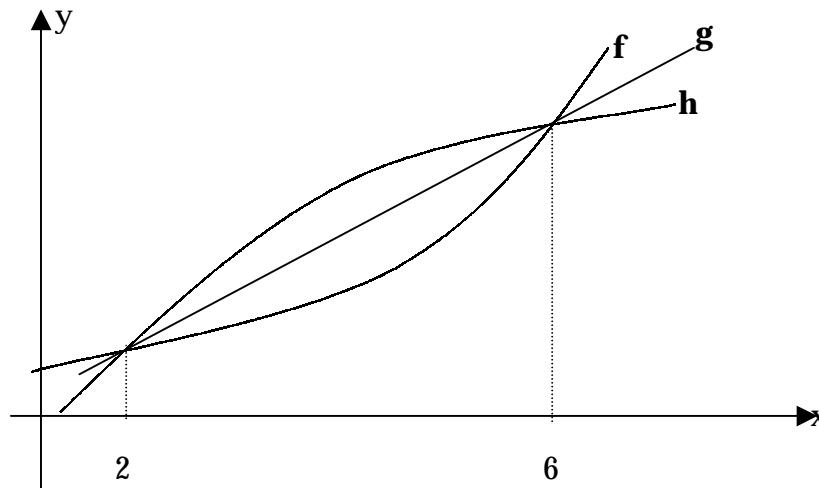
a) no intervalo de $2 \leq x \leq 4$ a função é crescente, decrescente ou constante?

Justifique sua resposta: _____

b) No intervalo de $4 \leq x \leq 6$ a função é crescente, decrescente ou constante?

Justifique sua resposta: _____

6) Considere os gráficos abaixo, que representam as funções f , g e h . Observe que no intervalo $x \geq 2$, as funções f , g e h são crescentes. Responda às seguintes questões:



a) Qual dessas funções você acha que cresce cada vez mais rapidamente?

Justifique sua resposta: _____

b) Qual dessas funções cresce cada vez mais lentamente? _____

Justifique sua resposta: _____

c) Alguma delas cresce com uma rapidez constante? Qual? _____

Justifique sua resposta: _____

Caso você não tenha compreendido algum termo da questão, indique qual:

7) Dada a função $y = 12x + 251$, determine:

a) A variação no valor de y quando x passa de 10 para 11: _____

b) A variação no valor de y quando x passa de 1325 para 1326: _____

c) A variação no valor de y quando x passa de 20 para 22: _____

d) A variação no valor de y quando x passa de 8 para 11: _____

Caso você não tenha compreendido a questão, indique qual foi o problema:

8) Em uma corrida de taxi, é cobrada uma quantia fixa de R\$ 5,00 mais R\$ 2,00 por quilômetro rodado.

a) Qual a diferença no total a pagar em 2 corridas, uma de 21 km e a outra de 27 km ?

b) Escreva a expressão de tal situação, onde y é o valor a pagar para o taxista ao final da corrida e x é o quilômetro percorrido: _____

c) Com a expressão encontrada no item anterior, faça uma representação gráfica dessa situação de até 8 km percorridos pelo taxista.

d) Qual a variação de y quando x passa de 7 para 8 km : _____

e) Qual a variação de y quando x passa de 15 para 16 km : _____

f) Determine a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo de $x = 21$ a $x = 27$ _____

Caso você não tenha compreendido algum termo, indique qual :

9) Seja a função $y = x^2$

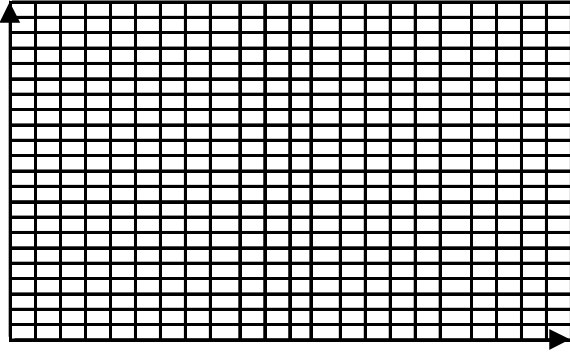
a) Construir o gráfico cartesiano de y em função de x

b) Determine a variação de y quando x passa de 2 para 6 : _____

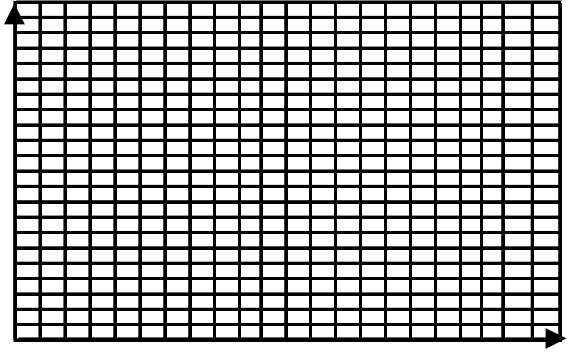
c) Determine a taxa de variação média de y quando x passa de 2 para 6:

Espaço para resolver os itens das questões:

8 - c



9 - a



Anexo II

Atividades da seqüência didática

Ficha 1 - Atividade 1

Natalie está crescendo. A tabela abaixo indica a altura de Natalie no dia em que nasceu e em cada um de seus quatorze aniversários.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|----------|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Idade (anos) | 0 (nasc) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| Altura (cm) | 47 | 70 | 83 | 90 | 98 | 105 | 110 | 118 | 125 | 132 | 138 | 144 | 149 | 154 | 159 |

- 1) Qual foi a variação da altura de Natalie durante os três primeiros anos de sua vida?
- 2) Qual foi a variação da altura de Natalie entre as idades de 3 a 6 anos?
- 3) Em qual desses dois períodos Natalie mais cresceu: de 0 a 3 ou de 3 a 6 anos?
- 4) Natalie cresceu mais nos sete primeiros anos de vida ou nos sete anos seguintes?
- 5) Quantos centímetros por ano (cm/ano) Natalie cresceu, em média, nesses quatorze anos de vida?
- 6) Houve algum período de um ano em que o crescimento de Natalie tenha sido exatamente igual à média obtida no item anterior?
- 7) A altura de Natalie, ano a ano, do nascimento até 14 anos sempre aumentou?
- 8) O acréscimo da altura de Natalie, ano a ano, sempre aumentou? Explique.
- 9) Natalie estava crescendo mais depressa durante seus primeiros 4 anos de vida ou nos 10 anos seguintes? Justifique sua resposta.

Ficha 1 – Atividade 2

Considere novamente a tabela das alturas de Natalie.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|----------|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Idade (anos) | 0 (nasc) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| Altura (cm) | 47 | 70 | 83 | 90 | 98 | 105 | 110 | 118 | 125 | 132 | 138 | 144 | 149 | 154 | 159 |

Se chamarmos de h a altura de Natalie, podemos escrever Δh para indicar a variação da altura. Do mesmo modo, se t é a idade, podemos indicar Δt como a variação de sua idade.

- 1) No intervalo de $t = 2$ anos a $t = 5$ anos, qual é o Δt ?
- 2) Calcule Δh no intervalo de $t = 2$ anos a $t = 5$ anos.
- 3) Qual o é o valor da razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ para o intervalo de $t = 2$ a $t = 5$ anos?
- 4) Qual é a unidade do número obtido no item anterior?
- 5) Calcule a razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ no intervalo de 0 a 4 anos e no intervalo de 4 a 8 anos.
- 6) Você saberia dizer o significado da razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$?
- 7) Nos cálculos que fez, você verificou que a razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$, apesar de não ser constante, é sempre positiva em qualquer intervalo da tabela que se considere. Procure uma explicação para esse fato.
- 8) No decorrer da vida de Natalie (após 14 anos) a razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ poderá ser nula para diversos intervalos de tempo que se considere? Essa razão poderá ser negativa? Explique.
- 9) A tabela do problema da altura de Natalie nos mostra que a altura h depende do tempo t . A relação existente entre h e t é função? Explique.

Ficha 1 – Atividade 3

Por meio da leitura das alturas de Natalie mostradas na tabela, pelos cálculos feitos e pelas discussões das duplas no desenvolvimento das atividades anteriores, podemos tirar algumas conclusões antes de aplicarmos esta atividade. São elas:

- a altura de Natalie sempre cresceu com o decorrer do tempo;
- o aumento da altura de Natalie, ano a ano, não foi constante;
- Natalie cresceu mais rapidamente no início do período observado do que no fim dele;
- a razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ no período observado é sempre positiva, pois Natalie sempre cresceu;
- a relação de interdependência entre as grandezas envolvidas é uma função;
- a razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ pode dar informações da "rapidez" com que varia a altura em relação ao tempo (o quanto cresce ou decresce);
- $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ é denominada taxa de variação média da função.

a) Calcule a taxa de variação média da altura de Natalie no intervalo $t = 1$ a $t = 3$ anos. Interprete o resultado obtido.

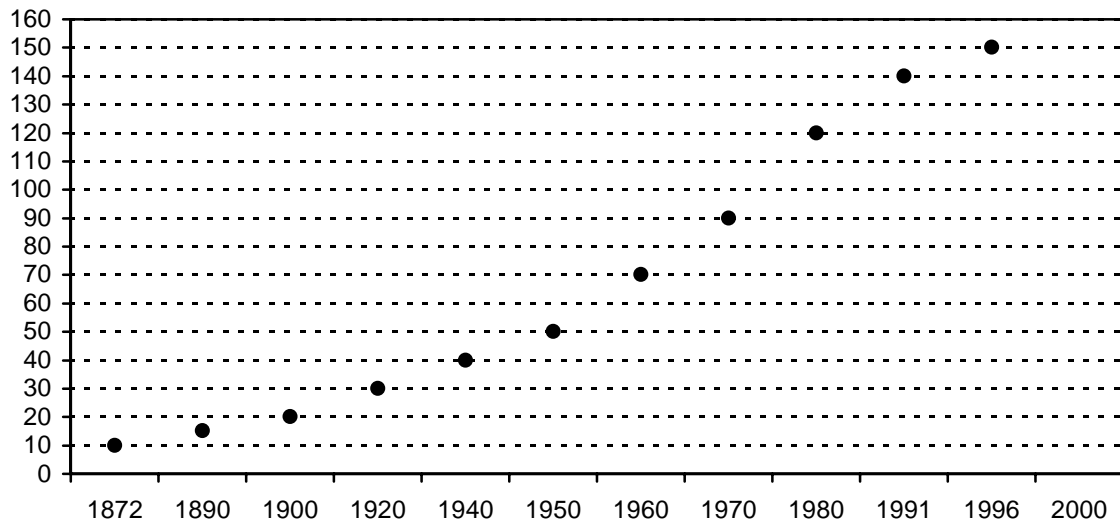
b) Em qual intervalo Natalie cresceu mais depressa: de $t = 0$ a $t = 3$ anos ou de $t = 3$ a $t = 9$ anos?

c) A altura de Natalie até os 14 anos é sempre crescente?

d) Represente a relação de interdependência entre h e t no plano cartesiano.

Ficha 2

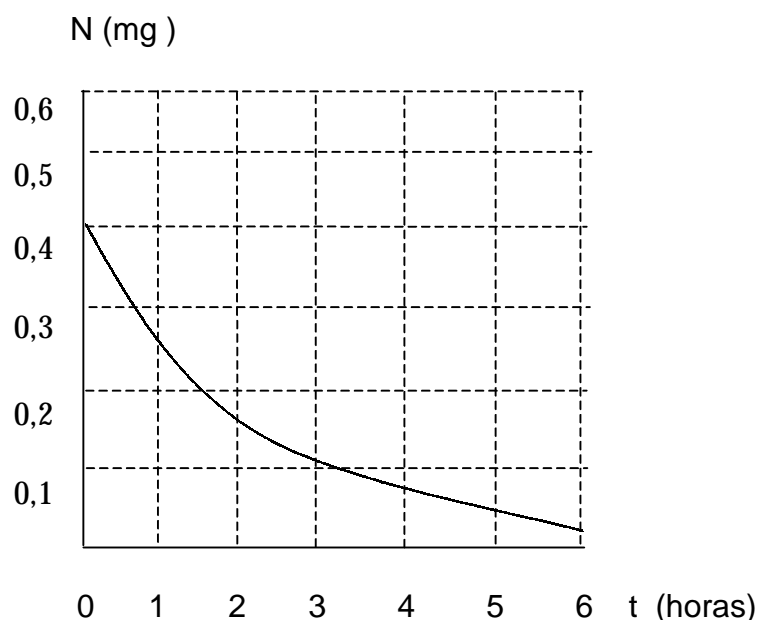
O gráfico abaixo mostra o número de habitantes no Brasil, em valores aproximados, utilizando os resultados dos censos realizados:



- 1) qual era aproximadamente a população do Brasil em 1872? E em 1970?
- 2) qual foi a variação da população no Brasil nesses quase 100 anos?
- 3) qual foi a taxa de variação média da população brasileira de 1872 a 1996? Dê unidades com sua resposta e interprete o significado dessa taxa.
- 4) em qual intervalo o número de habitantes no Brasil cresceu mais rapidamente: de 1872 a 1920 ou de 1920 a 1970? Justifique sua resposta.
- 5) em qual intervalo de dois censos consecutivos ocorreu a maior taxa de variação média da população brasileira?
- 6) se no intervalo de 1996 a 2000 a taxa de variação média do número de habitantes no Brasil fosse 2,5 milhões/ano, qual deveria ser o total de habitantes em 2000?
- 7) se o número de habitantes aumentasse de 1996 a 2000 na mesma razão da maior taxa média que houve no Brasil entre dois censos consecutivos, qual deveria ser o número de habitantes em 2000?
- 8) qual é sua estimativa para a população do Brasil no ano 2000?
- 9) construa uma tabela com os dados do gráfico.

Ficha 3

O gráfico a seguir mostra a quantidade de nicotina em miligramas (mg) na corrente sanguínea de uma pessoa como função do tempo t , em horas (h), depois que uma pessoa acabou de fumar.



- 1) Esse gráfico revela que o teor da nicotina N é uma função do tempo t , ou seja, $N = f(t)$. Comente sobre esta relação.
- 2) A função é crescente ou decrescente? Explique.
- 3) Avalie o teor da nicotina no instante $t = 3h$, ou seja, aproxime um valor para $f(3)$.
- 4) Determine a variação do teor da nicotina no intervalo de $t = 1h$ e $t = 4h$, ou seja, o ΔN nesse intervalo.
- 5) Quantas horas depois de ter fumado um cigarro, o teor da nicotina em uma pessoa passa a ser $0,08mg$?
- 6) Qual é o significado do ponto em que a curva intercepta o eixo das ordenadas?
- 7) Se o gráfico interceptasse o eixo das abscissas, qual seria o significado desse ponto?
- 8) Em qual intervalo é mais rápida a diminuição da nicotina de $t = 0$ a $t = 2h$ ou de $t = 3h$ a $t = 6h$?
- 9) Determine a taxa de variação média da nicotina no intervalo de 0 a 6 horas. Dê as unidades e interprete o resultado.

Ficha 4 – Atividade 1

A posição “s” de um corpo que se movimenta sobre uma trajetória retilínea em relação à origem pode ser determinada em dado instante “t”, por meio da expressão $s(t) = t^2 + 1$. As unidades “s” e “t” são dadas, respectivamente, em metros e em segundos.

- 1) Determine o valor de $s(4)$ e interprete seu significado neste contexto.
- 2) Determine a posição do corpo no instante $t = 3s$.
- 3) Determine a variação da posição do corpo nos 3 primeiros segundos e a variação no intervalo de $t = 3s$ a $t = 5s$.
- 4) Determine o instante em que o móvel passa pela posição $s = 26m$.
- 5) Determine a taxa de variação média da posição do móvel em relação ao tempo no intervalo de $t = 0$ a $t = 3s$. Dê as unidades de sua resposta e interprete o resultado.
- 6) A taxa de variação média, nesse caso, tem um nome especial? Qual é esse nome?
- 7) Esboçar o gráfico de s em função de t .
- 8) A função $s(t)$ é crescente? Explique.
- 9) Em qual intervalo o corpo se desloca mais depressa, de $t = 0$ a $t = 3s$ ou de $t = 3s$ a $t = 6s$? Explique sua resposta.
- 10) Em qual intervalo o corpo se desloca mais depressa, de $t = 1s$ a $t = 3s$ ou de $t = 3s$ a $t = 4s$? Explique sua resposta.

Ficha 4 – Atividade 2

A relação entre duas grandezas x e y pode ser representada por $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$.

- 1) Justifique por que a relação descrita é uma função. Coloque $y = f(x)$.
- 2) Qual tipo de curva representa graficamente os pontos do plano cartesiano que satisfazem a essa relação?
- 3) Determine a variação de y no intervalo de $x = 1$ a $x = 3$.
- 4) Determine a taxa de variação média de y no intervalo de $x = 1$ a $x = 3$.
- 5) Calcule Δy e $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no intervalo de $x = 2$ a $x = 5$.
- 6) Calcule a taxa de variação média de y no intervalo $x = -3$ e $x = 10$.
- 7) Calcule a taxa de variação média de y no intervalo $x = 1$ e $x = 1,01$.
- 8) O que você pode dizer, neste problema, a respeito da taxa de variação média de y em relação a x ?
- 9) Determine uma função que permite calcular a taxa de variação média de y em relação a x .

Ficha 4 – Atividade 3

Considere a função $y = 2^x$.

- 1) Determine a variação de y no intervalo:
 - a) $x = -1$ a $x = 1$
 - b) $x = -4$ a $x = 2$

- 2) Determine a taxa de variação média de y nos seguintes intervalos:
 - a) $x = -1$ a $x = 1$
 - b) $x = -4$ a $x = 2$
 - c) $x = 0$ a $x = 3$

- 3) Determine uma expressão que permite calcular a taxa de variação média de y em relação a x , em qualquer intervalo de seu domínio.

- 4) Em qual intervalo de x a "rapidez" de y é maior (o quanto ela cresce) de $x = -5$ a $x = 0$ ou de $x = 4$ a $x = 5$?

- 5) Represente graficamente a função.