LOURIVAL PEREIRA MARTINS

Análise da Dialética Ferramenta-Objeto na Construção do Conceito de Função

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2006

LOURIVAL PEREIRA MARTINS

Análise da Dialética Ferramenta-Objeto na Construção do Conceito de Função

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Saddo Ag. Almouloud***

PUC/SP

São Paulo

2006

A criação e desenvolvimento de uma atividade pelo professor deve levar em consideração as capacidades cognitivas de seus alunos. Como já destacamos anteriormente, partimos da hipótese que, uma seqüência didática em que se procure considerar os mesmos obstáculos enfrentados na elaboração desse conceito e que utilize os conhecimentos dos alunos pode ser utilizada para levá-los a perceber:

- A variação como característica comum a esses conhecimentos;
- A possibilidade de generalizar essa característica como um novo conhecimento;
- A necessidade da definição dos intervalos de validade, para uma variação particular, para tornar este conceito funcional.

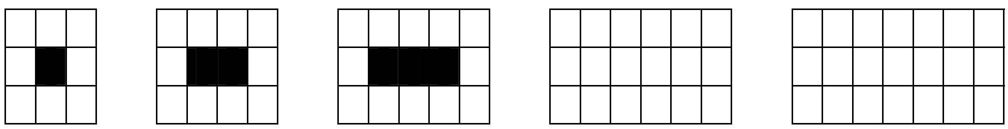
Neste sentido as escolhas do professor são fundamentais para atingir os objetivos desejados. Desenvolveremos uma análise de cada atividade subdividida em duas partes. Numa primeira, efetuaremos uma análise a prióri da atividade buscando evidenciar as escolhas realizadas, identificando quais os conhecimentos julgamos que os alunos devam possuir e mobilizar na resolução do problema proposto, quais as mudanças de quadros e quais os conhecimentos a serem desenvolvidos em cada atividade.

Na segunda, desenvolveremos uma análise a posteriori procurando descrever o comportamento dos alunos no decorrer da atividade, que observações podemos coletar tanto das discussões quanto dos registros por eles elaborados durante a realização do trabalho. Analisaremos também a participação dos alunos na segunda etapa da atividade, buscando entender como eles se posicionaram perante as discussões e quais as considerações e institucionalização devem ser realizadas pelo professor durante todo o desenrolar da mesma.

4.4 Análise das Atividades

4.4.1. Primeira atividade

Observando a seqüência complete as duas últimas figuras de maneira a manter a seqüência lógica.



1) Com o que se observa na seqüência acima complete a tabela abaixo

Número de quadradinhos coloridos	1	2	3	4	5	6	7	8	10	15	20	n
Número de quadradinhos não coloridos												

Na tabela temos os dados que relacionam o número de quadradinhos coloridos com o número de quadradinhos não coloridos.

a) Podemos dizer que o número de quadrados coloridos depende do número de quadradinhos não colorido? Por quê?

b) E o número de quadradinhos não coloridos, depende do número de quadradinhos coloridos? Por quê?

c) Se as duas dependências forem possíveis, qual a mais evidente?

d) Podemos considerar os valores acima como parte de conjuntos! Quais seriam seus elementos?

2) Represente graficamente os dados da tabela obtida no item 1:

a) Posicionado o número de quadradinhos coloridos no eixo das abscissas.

b) Posicionado o número de quadradinhos não coloridos no eixo das abscissas.

c) Faz sentido unir os pontos obtidos nos dois gráficos? Por quê?

3) Existe uma expressão algébrica que permita obter o número de quadradinho não coloridos partindo do número de quadradinhos coloridos? Se existe, qual é essa expressão?

4) Existe uma expressão algébrica que permita obter o número de quadradinhos coloridos partindo do número de quadradinhos não coloridos? Se existe, qual é essa expressão?

5) É sempre possível obter o número de quadradinhos não coloridos a partir do número de quadradinhos coloridos?

6) E o contrário é sempre possível?

4.4.1.1 Análise a priori da primeira atividade

Parte 1- Análise geral

As seqüências numéricas despertam a curiosidade da humanidade desde a antigüidade. As tentativas de se obter uma regra que permitisse a geração de todos os números primos, os números figurativos, triangulares, quadrados, pentagonais, entre outras configurações que os gregos associavam a números, as descobertas de Pitágoras sobre as notas musicais, a seqüência de Fibronacci são exemplos que demonstram o interesse despertado pelas seqüências.

- ressaltar a dependência entre as duas variáveis. Cremos que dessa forma estamos ampliando o campo conceitual relacionado com as variações.

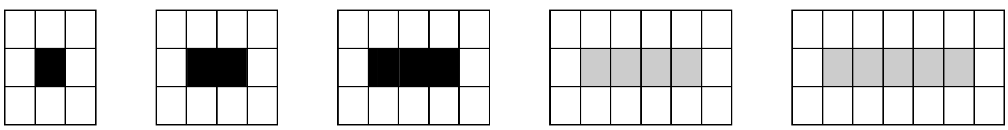
Com isto julgamos estar induzindo discussões que darão origem à segunda etapa da dialética "Pesquisa - novo implícito". A terceira etapa Explicitação-institucionalização local se definirá com as discussões entre os grupos, buscando evidenciar a percepção da dependência entre as duas grandezas envolvidas. A formalização pelo professor da dependência e a discussão sobre as representações utilizadas fechará a quarta etapa Institucionalização-estatuto de objeto.

A mudança do quadro geométrico para o quadro numérico, através da construção da tabela, procura evidenciar exatamente as relações existentes na seqüência gerada. A passagem para o quadro da geometria analítica com a elaboração dos gráficos tem a preocupação de reforçá-la, tomando o cuidado de observar a impossibilidade de unir os pontos obtidos.

Para induzir a percepção futura, por parte do aluno, da idéia de Domínio e Imagem, questiona-se qual das relações é a mais evidente e quais os conjuntos envolvidos. Com essa questão estamos colocando em discussão quais são os elementos que interferem na relação entre as duas variáveis, números naturais, procurando estabelecer as condições para uma definição do conceito de função. No pré-teste, observou-se que esses objetivos foram atingidos. Os alunos conseguiram visualizar que a relação entre o número de quadradinhos coloridos condiciona o número dos não coloridos. Nas discussões parece ter ficado evidente que a relação inversa também é possível, mas apresenta problemas práticos. Para qualquer quantidade de quadradinhos coloridos é sempre possível obter o número de quadradinhos não coloridos. Mas o inverso não é verdadeiro, para se prever quantos são os quadrados coloridos a partir dos não coloridos, estes devem estar em quantidade par maior ou igual a oito. O que restringe a previsão, observação importante para que se discuta na seqüência a noção de domínio.

Parte 2 - Resolução e análise da atividade

Observando a seqüência complete as duas últimas figuras de maneira a manter a seqüência lógica.



1) Com o que se observa na seqüência acima complete a tabela abaixo

Número de quadradinhos coloridos	1	2	3	4	5	6	7	8	10	15	20	n
Número de quadradinhos não coloridos	*8*	*10*	*12*	*14*	*16*	*18*	*20*	*22*	*26*	*36*	*46*	*2n + 6*

A situação se inicia propondo como tarefa que os alunos completem a seqüência de figuras e fazendo uso das informações dadas pela seqüência. As cinco primeiras colunas a serem completadas tem as informações contidas na própria seqüência, bastando ao aluno contar o número de quadradinhos não coloridos. As demais colunas tem por objetivo levar o aluno a prever o número de quadradinhos de forma que se obtenha a expressão que calcula o número de quadradinhos não coloridos a partir do número de quadradinhos coloridos.

Possíveis estratégias de obtenção dos dados a serem usados na tabela:

- Dentro do quadro geométrico. Construindo as demais figuras e contando o número de quadradinhos não coloridos.
- Dentro do quadro numérico. Observando que a segunda linha é formada por uma seqüência de números pares e consecutivos.
- Dentro do quadro algébrico. Observando que o número de quadradinhos não coloridos é o dobro do número de quadradinhos coloridos mais seis quadradinhos não coloridos, três em cada extremo.

A determinação da expressão gerada no quadro algébrico é um dos objetivos dessa primeira questão e que será utilizada ao longo da atividade. A resolução da tarefa dentro dos quadros geométricos e numéricos pode dificultar a obtenção dessa expressão, embora seja a estratégia esperada para a realização da tarefa.

Na tabela temos os dados que relacionam o número de quadradinhos coloridos com o número de quadradinhos não coloridos.

a) Podemos dizer que o número de quadrados coloridos depende do número de quadradinhos não coloridos? Por quê?

Resposta: Podemos, pois para acrescentar um quadradinho colorido temos que acrescentar dois não coloridos para que se mantenha a seqüência.

b) E o número de quadradinhos não coloridos, depende do número de quadradinhos coloridos? Por quê?

Resposta: Também depende, pois a cada dois quadrados não coloridos temos que acrescentar um quadrado colorido entre eles.

c) Se as duas dependências forem possíveis, qual a mais evidente?

Resposta: Embora as duas dependências sejam possíveis a mais evidente é a dos quadradinhos não coloridos dependendo dos coloridos, pois sempre podemos acrescentar um quadradinho colorido enquanto os não coloridos só poderão ser um número par maior que oito.

d) Podemos considerar os valores acima como parte de conjuntos! Quais seriam seus elementos?

Resposta: Podemos, os elementos desses conjuntos seriam:

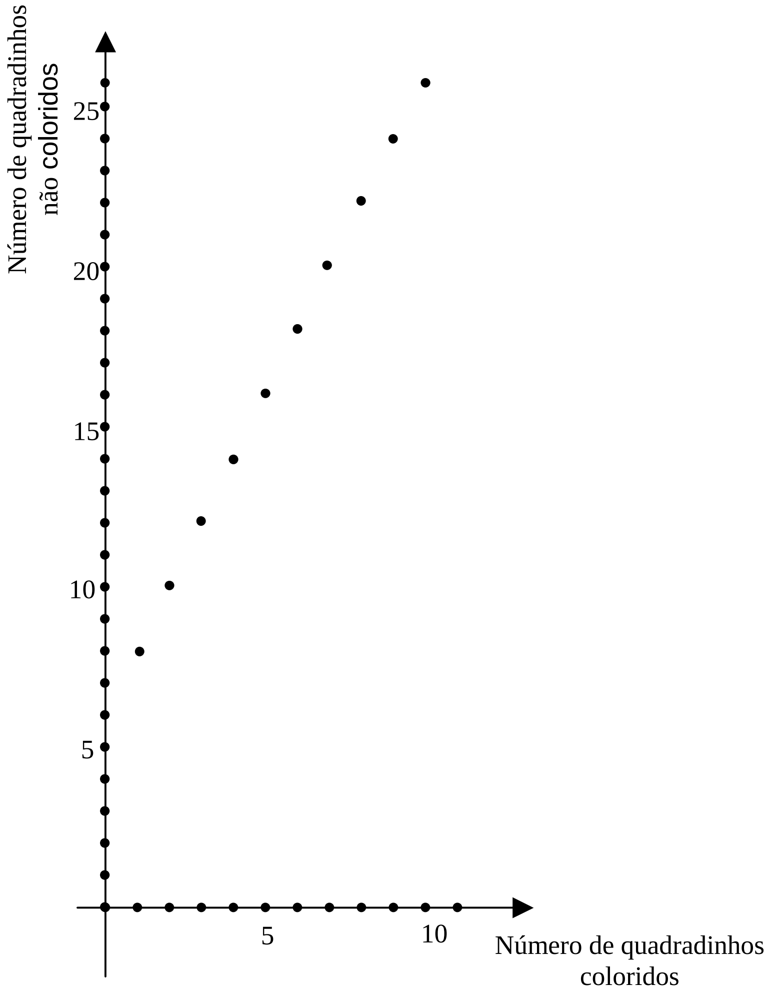
Quadradinhos coloridos = { 1, 2, 3, 4, 5, ...}

Quadradinhos não coloridos = { 8, 10, 12, 14, 16 ....}

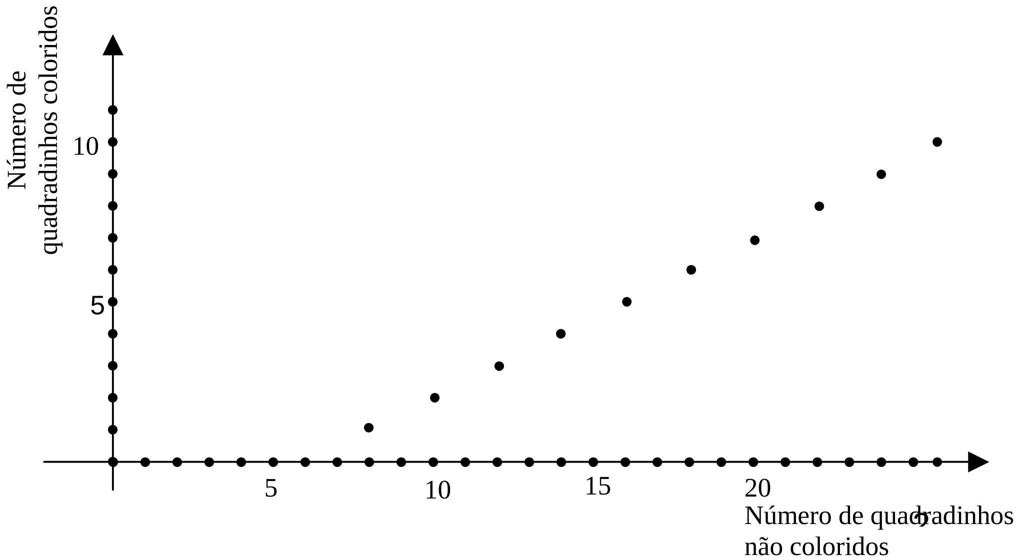
Essa primeira questão leva o aluno a realizar uma mudança de quadro passando do quadro geométrico, representado pelas figuras, para o numérico, através dos dados na tabela. Essa mudança, à primeira vista, tem por objetivo auxiliar a resolução da atividade, mas consideramos que a sua função seja muito maior que é a de construir juntamente com o aluno a forma de representação do objeto função. As questões são formuladas procurando introduzir a discussão envolvendo a dependência entre grandezas variáveis. Usamos o caso particular da variação da quantidade de quadradinhos não coloridos em relação aos quadradinhos coloridos. Mas formulamos as questões destacando a variação e não simplesmente a solução de um problema numérico em que se deseja obter uma resposta para um valor determinado. Ao mesmo tempo preparamos a noção de domínio e Imagem a ser definida futuramente, com a discussão sobre qual das dependências é mais evidente e quais os conjuntos envolvidos.

2) Represente graficamente os dados da tabela obtida no item 1:

a) posicionado o número de quadradinhos coloridos no eixo das abscissas.



b) Posicionado o número de quadradinhos não coloridos no eixo das abscissas.



c) Faz sentido unir os pontos obtidos nos dois gráficos? Por quê?

Resposta: Não, pois os dados obtidos representam quantidade de quadradinhos tanto no eixo das abscissas como no das ordenadas. A união dos pontos passaria a informação de que existem frações de quadrados o que não ocorre.

Com a segunda questão provocamos uma nova mudança na forma de ver o objeto estudado representando graficamente os dados obtidos na tabela anterior. Nosso objetivo com essa questão é reforçar o trabalho com as diversas formas de representações de um mesmo objeto matemático criando as condições para que o aluno faça distinção entre o objeto e suas representações. Solicitamos que os alunos elaborassem duas representações gráficas, uma posicionando o número de quadradinhos coloridos no eixo das abscissas e outro o número de quadradinhos não coloridos no mesmo eixo. Com essas duas representações estamos focando as futuras definições e convenções relacionados com o objeto função. Esperamos evidenciar a praticidade de se representar a variável independente no eixo das abscissas, pois isso nos permite analisar o comportamento gráfico da função tomando como referência a reta que representa os números Reais na horizontal. Esta forma de análise parece estar mais de acordo com a forma de leitura em nossa cultura, que segue esse padrão de escrita e leitura. Nossa escrita é realizada no sentido horizontal da esquerda para direita.

O item c dessa questão discute o fato de não ser possível a ligação dos pontos através de um segmento de linha uma vez que estamos representando somente com números naturais e essa ligação traria como informação a existência de valores intermediários, entre dois pontos o que não ocorre.

2) Existe uma expressão algébrica que permita obter o número de quadradinhos não coloridos partindo do número de quadradinhos coloridos? Se existe, qual é essa expressão?

Resposta: Existe. Considerando "y" o número de quadradinhos não coloridos e "n" o de quadradinhos coloridos a expressão que permite obter o número de quadradinhos não coloridos a partir dos coloridos será: $y = 2n + 6$

4) Existe uma expressão algébrica que permita obter o número de quadradinhos coloridos partindo do número de quadradinhos não coloridos? Se existe, qual é essa expressão?

Resposta: Existe. Considerando "y" o número de quadradinhos não coloridos e "n" o de quadradinhos coloridos a expressão que permite obter o número de quadradinhos coloridos a partir dos não coloridos será: $n = \frac{y-6}{2}$, com y par e maior ou igual a oito.

5) É sempre possível obter o número de quadradinhos não coloridos a partir do número de quadradinhos coloridos?

Resposta: Sim, é sempre possível, pois a cada quantidade de quadradinhos coloridos sempre teremos 2n +6 não coloridos.

6) E o contrário é sempre possível?

Resposta: Somente se a quantidade de quadradinho não colorido for par maior que oito.

As quatro questões que fecham essa atividade procuram reforçar a idéia da dependência dos quadrinhos não coloridos em relação aos coloridos ao mesmo tempo que trabalha a representação algébrica que permite prever o número de quadradinhos não coloridos dentro da seqüência. Nosso objetivo é que o aluno perceba a variação como fenômeno a ser estudado distinguindo-a das formas de representação. A distinção entre o objeto, variação entre as grandezas envolvidas, e suas formas de representação será um dos itens definidos na etapa destinada a institucionalização dessa atividade.

4.4.1.2 Análise a posteriori da primeira atividade.

Dezessete alunos foram autorizados pelos pais e participaram da primeira atividade envolvendo a pesquisa. Estes se subdividiram em seis grupos, sendo cinco de três alunos e um com dois. A formação dos grupos foi espontânea, sem a interferência do professor que apenas limitou a quantidade máxima de três componentes por grupo. Foi utilizada uma sala ampla que permitisse o posicionamento da câmera de vídeo de forma a focalizar todos os grupos.

A atividade se iniciou como planejado. O professor, no caso, o próprio pesquisador, introduziu os trabalhos com instruções gerais, entre as quais a solicitação de que os alunos explicitassem o máximo suas idéias, evitando respostas curtas do tipo sim ou não. Entre essas instruções foi definido o tempo disponível

Finalizadas as discussões o professor, institucionalizou os objetos de trabalho da atividade. Definiu as relações de dependência entre as duas variáveis como sendo o objetivo principal da mesma. Procurou evidenciar que as duas dependências são possíveis, mas como os alunos já haviam concluído, a dependência dos quadradinhos não coloridos em relação aos coloridos se destaca. Institucionalizou as formas de representações utilizadas na atividade. Enfatizou que as formas de representações, tabela, gráfico e expressão algébrica tentavam dar sentido à idéia de dependência entre os dois conjuntos de valores gerados pela seqüência, mas a idéia principal era a dependência e não as representações.

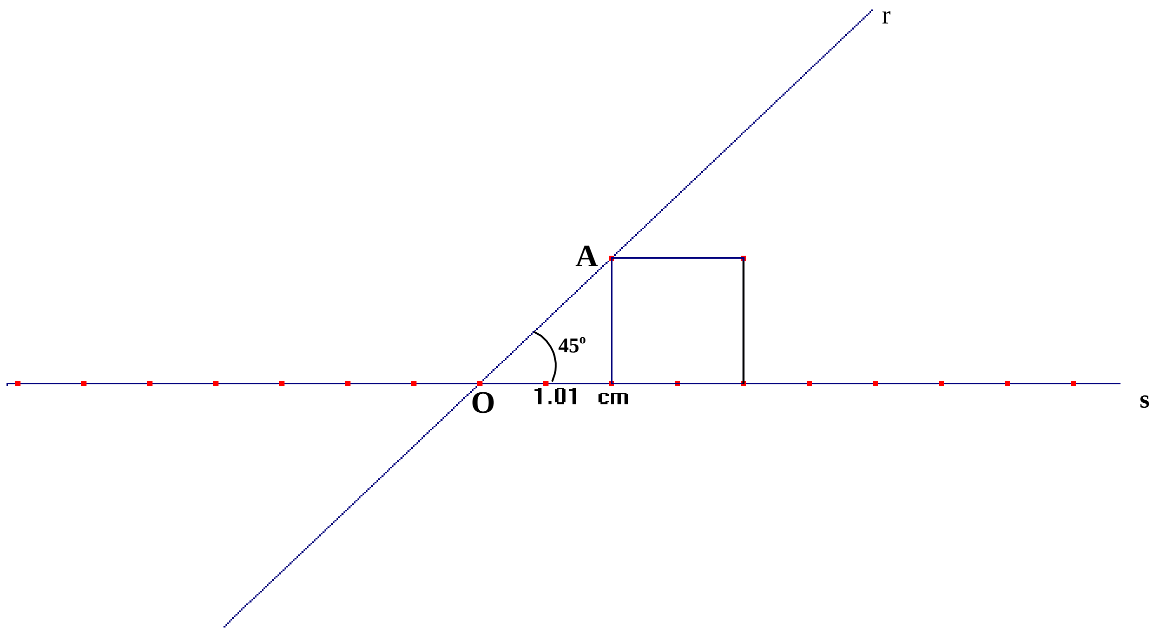
Observando o resultado do desenrolar da atividade podemos destacar:

- Os alunos parecem ter mobilizado como ferramenta os conhecimentos que permitiram a contagem dos quadradinhos, a representação dos dados nos quadros numérico, na forma de tabela e da geometria analítica, na forma da representação gráfica.
- Os alunos tiveram dificuldades em expressar algebricamente a relação apresentada, mas conseguiram representar os dados graficamente sem grandes dificuldades.
- Os alunos fizeram uso dos dados, notadamente os representados na tabela, em suas análises e discussões
- A relação de dependência entre os dois conjuntos de valores parece ter sido percebida por eles.

A relação de dependência e as distinções entre as formas de representá-la são as novas ferramentas que cremos estejam disponíveis para os alunos para serem mobilizadas nas próximas atividades.

4.4.2. Segunda atividade

São dadas as retas $\overrightarrow{Or}$ e $\overrightarrow{Os}$ que formam entre si um ângulo de 45^o. Considere $\overrightarrow{Os}$ uma reta numerada em , e um ponto A, qualquer de $\overrightarrow{Or}$. Considere o quadrado formado com um dos lados sobre $\overrightarrow{Os}$ cujo medida do lado seja a distância do ponto A a $\overrightarrow{Or}$ como o indicado na figura.



Admitindo que o ponto A se desloca na semi-reta $\overrightarrow{Or}$ e que a distância entre o ponto A e $\overrightarrow{Os}$ seja o indicado na primeira linha da tabela abaixo.

1) Calcule a área do quadrado e complete a tabela

Medida do lado em cm	1,0 cm	1,5 cm	2,0 cm	2,5 cm	3,0 cm	3,5 cm	4,0 cm	5,0 cm	quadrado de lado *l*
Área em cm^2									

Os valores da tabela acima representam uma relação entre o lado do quadrado e sua área.

a) Podemos dizer que a área do quadrado depende da medida do seu lado? Por quê?

b) E medida do lado depende da área do quadrado? Por quê?

c) Se as duas dependências forem possíveis, qual a mais evidente? Por quê?

d) Podemos considerar os valores representados na tabela acima como conjuntos? Identifique esses conjuntos. As características dos conjuntos são as mesmas dos da primeira atividade? Discuta com seu colega e justifique a resposta .

2) Represente graficamente os dados da tabela acima posicionando:

a) O lado do quadrado no eixo das abscissas.

b) A área do quadrado no eixo das abscissas.

c) Faz sentido unir os pontos obtidos nos dois gráficos? Por quê?

3) Qual a expressão algébrica que permite obter a área do quadrado a partir da medida de seus lados?

4) E a que permite obter o lado a partir de área?

5) Sendo o ponto A móvel ele poderia ser posicionado abaixo da reta s. Admitindo a figura como parte de um sistema cartesiano qual seria a medida do lado e da área do quadrado quando o ponto A tiver coordenada (-2,-2)?

6) Se tivesse que optar por uma das relações de dependência acima qual delas daria preferência? Por quê?

4.4.2.1 Análise a prióri da segunda atividade

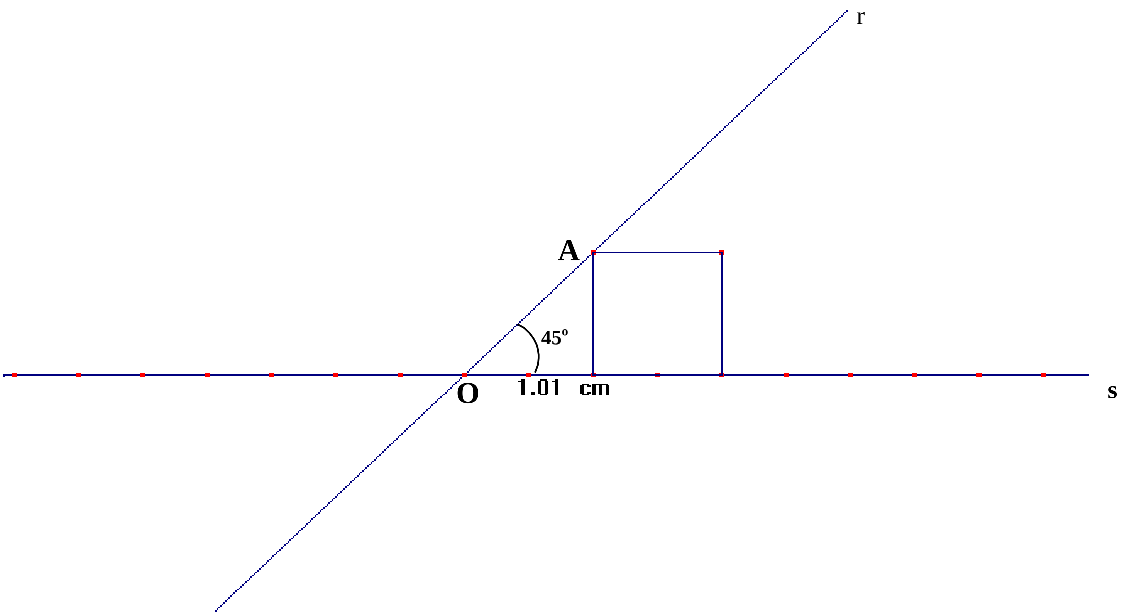
Parte 1 - Análise geral

A atividade proposta é uma escolha didática para facilitar a passagem entre as grandezas discretas e as contínuas. Essa escolha leva em consideração o fato da área ser uma das relações de dependência mais antiga na história da matemática e que podemos mobilizar os conhecimentos envolvendo o cálculo com área como ferramenta. Estamos levando em conta também o fato dessa ser uma das relações funcionais mais utilizadas dentro do ensino da matemática, sem que este aspecto seja considerado. Nas coleções analisadas é comum a utilização do cálculo de área das figuras geométricas em exercícios propostos para o aprofundamento de conceitos, como o de operações com polinômios, ou resolução de equações.

Na situação elaborada utilizaremos duas retas, $\overrightarrow{Or}$ e $\overrightarrow{Os}$, concorrentes entre si formando 45°. A reta $\overrightarrow{Or}$ é admitida como numerada em e servirá de suporte para um quadrado com vértice num ponto A qualquer de $\overrightarrow{Os}$. Como o ângulo entre elas é de 45°, a distância de A a $\overrightarrow{Or}$ eqüivale ao módulo da abscissa de A definindo a medida do lado do quadrado. Sendo A como um ponto móvel sobre $\overrightarrow{Os}$, a mudança de sua posição, leva a variação na medida do lado do quadrado, fato que esperamos seja observado pelos alunos, uma vez que pretendemos explorar a noção de continuidade. A tarefa será a de calcular a área do quadrado assim formado registrando na tabela correspondente. Pelo exposto acima, são vários os campos conceituais que parecem estar sendo mobilizados nessa atividade, dentre os quais, destacamos os campos conceituais relacionados com a continuidade, ao movimento de um objeto, à variação no comprimento de um segmento; à medida que o ponto A se move sobre $\overrightarrow{Os}$ e o próprio campo conceitual relacionado com a diferentes das analisadas na primeira atividade, visto que como salienta Sierpinska (1992), um dos obstáculos epistemológicos importante à aquisição do conceito função é a tendência de concentrar o estudo nas variáveis que estão sofrendo a variação e não na variação como fenômeno. Nosso objetivo é destacar a variação e a correspondência como ponto central na atividade não apenas a dependência criando as condições para a futura definição do objeto função.

Parte 2 - Resolução e análise da atividade

São dadas as retas $\overrightarrow{Or}$ e $\overrightarrow{Os}$ que formam entre si um ângulo de 45^o. Considere $\overrightarrow{Os}$ uma reta numerada em , e um ponto A, qualquer de $\overrightarrow{Or}$. Considere o quadrado formado com um dos lados sobre $\overrightarrow{Os}$ cujo medida do lado seja a distância do ponto A a $\overrightarrow{Or}$ como o indicado na figura.



Admitindo que o ponto A se desloca na semi-reta $\overrightarrow{Or}$ e que a distância entre o ponto A e $\overrightarrow{Os}$ seja o indicado na primeira linha da tabela abaixo.

1) Calcule a área do quadrado e complete a tabela

Medida do lado em cm	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	quadrado de lado l
Área em cm^2	*1,00*	*1,25*	*4,00*	*6,25*	*9,00*	*12,25*	*16,00*	*25,00*	l^2

Os valores da tabela acima representam uma relação entre o lado do quadrado e sua área.

a) Podemos dizer que a área do quadrado depende da medida do seu lado? Por quê?

Resposta: Sim, a medida da área do quadrado depende da medida de seu lado pois variando a medida do lado a área também sofre variação.

b) E medida do lado depende da área do quadrado? Por quê?

Resposta: Também depende uma vez que a variação na medida da área do quadrado implica na variação da medida do seu lado.

c) Se as duas dependências forem possíveis, qual a mais evidente? Por quê?

Resposta: A dependência da área em relação ao lado, pois para que ocorra variação na medida da área temos que fazer variar a medida do seu lado.

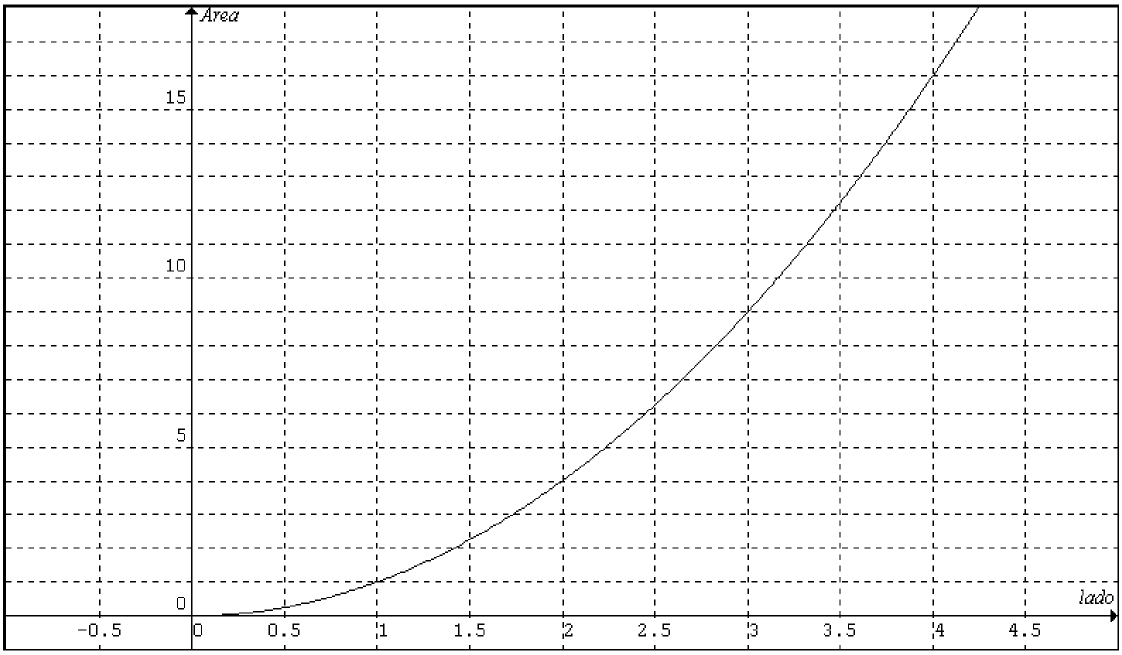
d) Podemos considerar os valores representados na tabela acima como conjuntos? Identifique esses conjuntos. As características dos conjuntos são as mesmas dos da primeira atividade? Discuta com seu colega e justifique a resposta .

Resposta: Sim, tanto a medida dos lados quanto a medida da área são expressas por número Reais positivos. Entretanto as características não são as mesmas pois os elementos dos conjuntos da primeira atividade eram formados por número Naturais enquanto dessa atividade são número Reais.

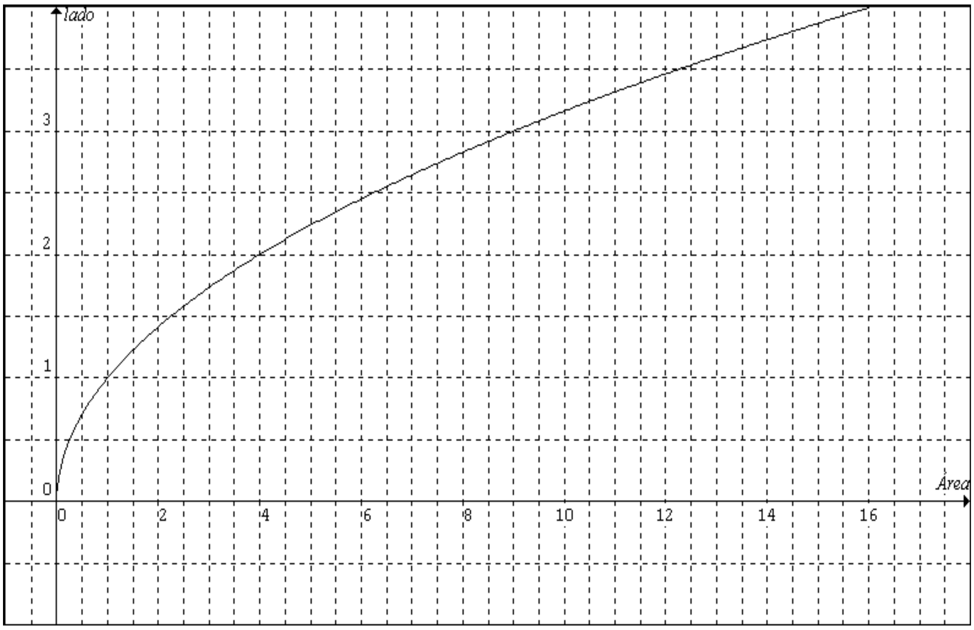
A situação proposta induz o aluno a realizar uma mudança do registro geométrico para o numérico com o preenchimento dos dados na tabela como solicitado. A forma com que a atividade foi elaborada procura dar ênfase na variação do lado do quadrado, que ocorre com a mudança na posição do ponto A. Esperamos como estratégia de solução a aplicação da fórmula da área de um quadrado, visto que sua aplicação é relativamente comum em nosso meio escolar. Nos itens a, b e c da primeira questão procuramos enfatizar a dependência como objeto de estudo ressaltando que a área depender do lado é de mais fácil compreensão que a dependência inversa. Novamente colocamos em discussão a idéia dos valores obtidos como elementos de um conjunto visando à futura institucionalização do conceito função.

2) Represente graficamente os dados da tabela acima posicionando:

a) O lado do quadrado no eixo das abscissas.



b) A área do quadrado no eixo das abscissas.



c) Faz sentido unir os pontos obtidos nos dois gráficos? Por quê?

Reposta: Sim, uma vez que a medida dos lados do quadrado e da área são grandezas contínuas.

3) Qual a expressão algébrica que permite obter a área do quadrado a partir da medida de seus lados?

Resposta: $A = l^2$

4) E a que permite obter o lado a partir de área?

Resposta: $l = \sqrt{x}$

As três questões acima tem por objetivo levar o aluno a representar a situação proposta no registro gráfico, questão dois e no registro algébrico, questão 3 da primeira atividade, colocando em discussão o fato dos conjuntos envolvidos serem formados por grandezas contínuas o que implica na necessidade da ligação dos pontos representados para expressar essa continuidade.

5) Sendo o ponto A móvel ele poderia ser posicionado abaixo da reta s. Admitindo a figura como parte de um sistema cartesiano qual seria a medida do lado e da área do quadrado quando o ponto A tiver coordenada (-2,-2)?

Resposta: A medida do lado do quadrado será 2 u e da área 4 u^2.

Com essa questão, utilizamos a variação do ponto A como estratégia para variar a medida do lado do quadrado e dessa forma discutir a variação como objeto de estudo. A variação do ponto sobre a reta, como formulado nas atividades possui atributos, como:

- O ponto A pode assumir qualquer posição, logo podemos pôr em discussão a continuidade.
- O ponto A pode assumir, no plano cartesiano, a posição (-2, -2), mas a grandeza, medida do lado de polígonos, no caso, o quadrado, é expressa apenas por valores positivos.

Esperamos que esses atributos sejam colocados em discussão, pelos alunos, na segunda etapa da atividade, caso isto não ocorra a questão deverá ser levantada pelo professor.

6) Se tivesse que optar por uma das relações de dependência acima qual delas daria preferência? Por quê?

Resposta: A dependência da área em relação ao lado do quadrado, pois para variar a medida da área temos que variar o tamanho do lado.

Com essa questão, fechamos a atividade, reforçando a dependência da área em relação ao lado do quadrado, que terá grande influência na futura

Aproveitando-se dessa facilidade, o professor introduz a notação *A(l)* = l^2 , definindo as convenções relativa à representação.

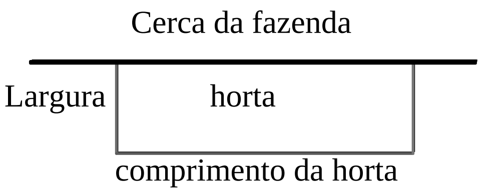
Na terceira etapa da atividade, relativa à institucionalização, o professor definiu a variação entre o lado quadrado e a área como a idéia central da mesma. Destacou o fato de que só podemos fazer uso de números positivos quando trabalhamos com grandezas envolvendo lado e área de figuras planas. Procurou mostrar as formas de representações envolvidas na atividade. Ressaltou a distinção entre as representações e a idéia relacionada à variação.

Da análise do que foi exposto acima podemos inferir que os alunos, além dos conhecimentos mobilizados na atividade anterior parecem ter:

- Utilizado como ferramenta os conhecimentos envolvendo o cálculo da área de um quadrado.
- Expressado corretamente na forma algébrica a relação entre o lado e a área.
- Percebido a relação de dependência da área em relação ao lado.
- Percebido que a dependência do lado em relação a área envolve dificuldades maiores que a anterior.

4.4.3. Terceira Atividade

Dispondo de 28 m de tela para cercar uma área, um fazendeiro pretende construir para sua horta e querendo ganhar espaço irá fazer uso de uma das cercas de sua fazenda obtendo uma horta como o modelo abaixo



1) Complete a tabela abaixo

Largura (em m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
comprimento (em m)														
Área da horta (A)														

Os valores da tabela acima representam uma relação entre largura e a área da horta.

a) Podemos dizer que a área da horta depende da largura? Por quê?
b) E a largura, depende da área da horta? Por quê?
c) Se as duas dependências forem possíveis, qual a mais evidente?
d) Qualquer que seja a medida da largura a medida da área é única?

e) Qualquer que seja a medida da área a medida da largura é única?
f) Para que não se fique com dúvida sobre qual o resultado a ser obtido é melhor calcular a área conhecendo-se a medida da largura da horta ou calcular a largura conhecendo-se a área? Por quê?[6]
g) Quais são os conjuntos envolvidos nesta atividade? Identifique seus elementos.

2) Represente graficamente os dados da tabela acima, que relacionam largura e área.
a) Posicionado a largura no eixo das abscissas.
b) Posicionado a largura no eixo das ordenadas.
c) Faz sentido unir os pontos obtidos no gráfico
d) Em qual dos dois gráficos, elaborados acima, a análise é mais simples? Por quê?
e) Na sua opinião numa relação entre duas variáveis, a unicidade (resposta única) para qualquer valor de uma delas é fundamental para que não haja dúvida quanto a validade do resultado encontrado?
f) Poderíamos ter certeza da medida escolhida numa relação em que a variável pode apresentar dois valores distintos para uma mesma correspondência?

3) Qual a expressão algébrica que permite calcular a área da horta?

4) A atividade foi apresentada através de um texto e uma figura e os dados obtidos representados em forma de tabela, gráfico e uma expressão matemática. Podemos dizer que todas essas representações eqüivalem ao mesmo problema (objeto de trabalho). Qual ou quais, os mais indicados para responder as questões abaixo.
a) Existem valores que se repetem?
b) Existe um valor máximo?
c) Qual a área para uma largura de 4,5 m na cerca da horta?
d) A que se refere o problema?

4.4.3.1 Análise a priori da terceira atividade

Parte 1- Análise geral

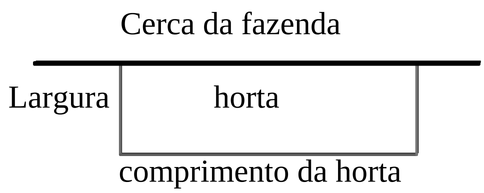
A questão proposta é tradicionalmente encontrada nos livros didáticos como aplicação do estudo dos pontos críticos de uma função do segundo grau. O

[6] A questão foi reformulada considerando as observações tanto do orientador, como da banca de qualificação, sobre a subjetividade da expressão "confiável". Originalmente a questão era a seguinte: Para se estabelecer uma relação "confiável", qual das duas é a mais indicada?

acrescentada com a introdução, durante a institucionalização da notação $A(l)=28.l - l^2$ para expressar a área do horta em função de seu lado, que se espera irá facilitar a introdução futura das notações envolvendo o novo conceito.

Segunda parte – Resolução e análise da atividade

Dispondo de 28 m de tela para cercar uma área, um fazendeiro pretende construir para sua horta e querendo ganhar espaço irá fazer uso de uma das cercas de sua fazenda obtendo uma horta como o modelo abaixo



1) Complete a tabela abaixo

Largura (em m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
comprimento (em m)	*26*	*24*	*22*	*20*	*18*	*16*	*14*	*12*	*10*	*8*	*6*	*4*	*2*	*0*
Área da horta (A)	*26*	*48*	*66*	*80*	*90*	*96*	*98*	*96*	*90*	*80*	*66*	*48*	*26*	*0*

O problema é apresentado em linguagem natural ocorrendo a primeira mudança na representação fazendo uso de uma figura geométrica. Justificamos essa “ajuda” tomando como base os mesmos argumentos utilizados na segunda atividade. Em seguida induz-se a uma nova mudança na forma de representação pedindo aos alunos que completem a tabela que já apresenta os valores para medida da largura, cabendo ao aluno obter a medida do comprimento e da área da horta. Da forma que foi proposta a tabela induzimos a estratégia a ser utilizada pelo aluno dentro do quadro numérico fazendo uso das seguintes etapas:

- calcular a medida do comprimento subtraindo do comprimento da tela duas vezes a largura.
- calcular a medida da área aplicando a fórmula da área do retângulo.

A mesma situação poderia ser resolvida dentro do quadro algébrico (funcional) , com o aluno obtendo a expressão para a área $A = l.(28 - l)$ cuja solução estaria mais coerente com o estudo envolvendo funções. Entretanto esta estratégia não é esperada uma vez que nosso objetivo é exatamente disponibilizar essa nova ferramenta, portanto consideramos que essa não seja de domínio de público alvo, alunos da oitava série do Ensino Fundamental.

Os valores da tabela acima representam uma relação entre largura e a área da horta.

a) Podemos dizer que a área da horta depende da largura? Por quê?

Resposta: Sim, variando a largura da horta a área também varia.

b) E a largura, depende da área da horta? Por quê?

Resposta: Também depende, pois só consigo alterar a área da hortas se também alterar a sua largura, uma vez que o tamanho da tela é sempre o mesmo.

c) Se as duas dependências forem possíveis, qual a mais evidente?

Resposta: A mais evidente é a área dependendo da largura.

d) Qualquer que seja a medida da largura a medida da área é única?

Resposta: Sim, para cada valor da largura temos uma única medida para a área.

e) Qualquer que seja a medida da área a medida da largura é única?

Resposta: Não, Existe medida de área, como a de 60 m^2, que apresenta dois valores diferentes para a medida da largura.

f) Para que não se fique com dúvida sobre qual o resultado a ser obtido é melhor calcular a área conhecendo-se a medida da largura da horta ou calcular a largura conhecendo-se a área? Por quê?

Resposta: Calcular a medida da área conhecendo-se a largura da horta pois a medida da área obtido é única.

g) Quais são os conjuntos envolvidos nesta atividade? Identifique seus elementos.

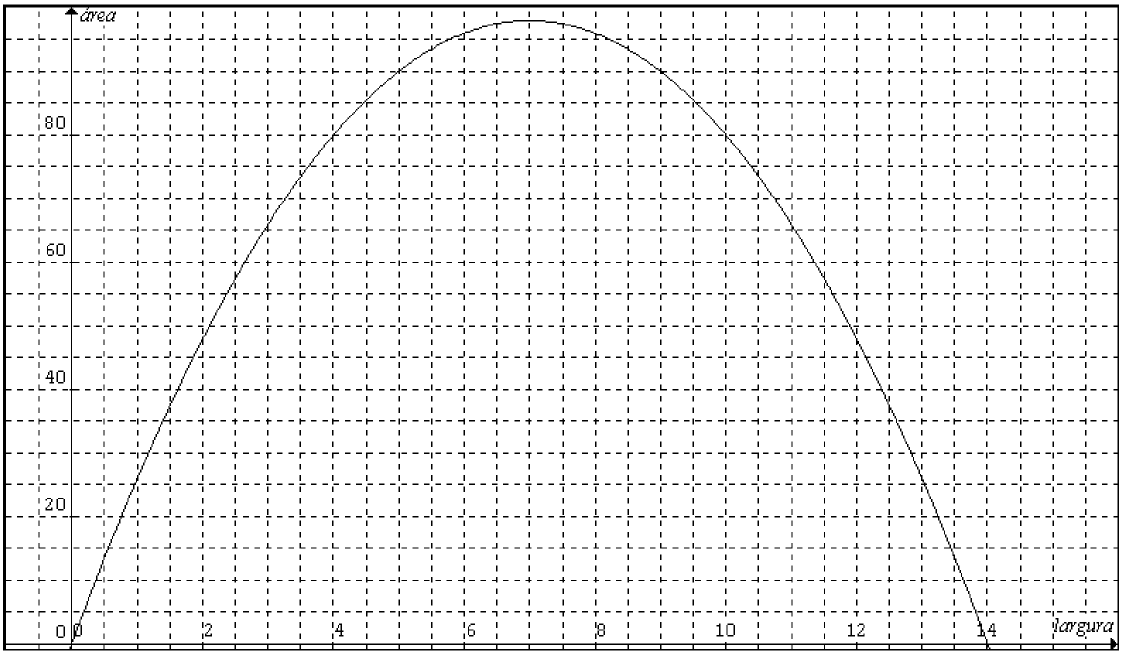
Resposta: $largura = \{l \in \quad / \ 0 \leq l \leq 14\}$

$Área = \{A \in \quad / \ 0 \leq A \leq 98\}$

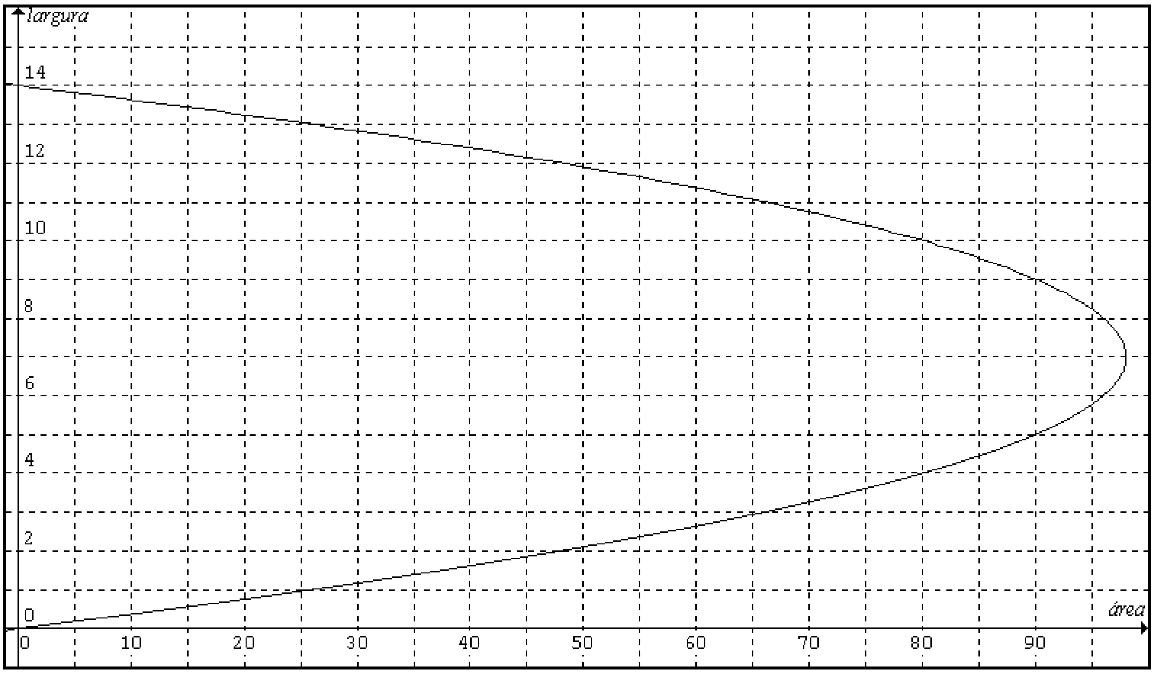
Como nas atividades anteriores, a primeira questão procura pôr em discussão à dependência como fenômeno a ser estudado, e não a variação da área em relação a largura da horta. Entretanto esse problema apresenta um dado novo que é o da repetição de medidas na grandeza área do retângulo. Nosso objetivo é o de induzir o aluno a perceber a importância de uma única correspondências para qualquer que seja o valor assumido pelos elementos do conjunto que será definido como domínio da função. Estamos tentando por em evidência a unicidade no domínio como condição básica para a futura formulação do conceito de função.

2) Represente graficamente os dados da tabela acima, que relacionam largura e área.

a) Posicionado a largura no eixo das abscissas.



a) Posicionado a largura no eixo das ordenadas.



b) Faz sentido unir os pontos obtidos no gráfico?

Resposta: Sim, pois tanto a largura quanto a área são grandezas contínuas

c) Em qual dos dois gráficos, elaborados acima, a análise é mais simples? Por quê?

Resposta: No gráfico em que a largura está na horizontal, pois qualquer valor da abscissa apresenta área única e podemos observar que a área aumenta até atingir a largura 7 m e depois diminui.

d) Na sua opinião, numa relação entre duas variáveis, a unicidade (resposta única) para qualquer valor de uma delas é fundamental para que não haja dúvida quanto a validade do resultado encontrado?

Resposta: Sim, pois se a relação apresentar mais de um valor se correspondendo com uma mesma variável teremos dificuldade em qual delas escolher para fazer uso como resposta.

e) Poderíamos ter certeza da medida escolhida numa relação em que a variável pode apresentar dois valores distintos para uma mesma correspondência?

Resposta: Não.

Como nas atividades anteriores a segunda questão têm por objetivo trabalhar as representações do objeto função criando as condições para o estabelecimento do quadro funcional. Nessa atividade esperamos estabelecer as bases para as futuras convenções relativas a essa representação, elementos do conjunto Domínio posicionados no eixo das abscissas. Para induzir o raciocínio do aluno formulamos a questão "*Em qual dos dois gráficos, elaborados acima, a análise é mais simples? Por quê?*" no item "d". Com ela estamos fechando um trabalho iniciado na primeira atividade, em que procurava mostrar que a leitura dos dados na representação gráfica fica facilitado se a análise da variação ocorrer na mesma direção e sentido de nossa escrita, horizontal e da esquerda para a direita.

As perguntas formuladas nos itens "e" e "f" procura reforçar essa futura convenção. Esperamos que os alunos percebam que o gráfico que apresenta a medida da largura no eixo das abscissas mostram as propriedades da variação à medida que deslocamos o olho da esquerda para a direita acompanhando o eixo Real. Percebe-se nesse movimento que a função é crescente até atingir um valor máximo, para a largura $l = 7\ m$, passando a ser decrescente a partir desse ponto.

1) Qual a expressão algébrica que permite calcular a área da horta?

Resposta: $A(l) = l\,(28 - 2l)$

Com essa questão estamos solicitando que os alunos realizem uma mudança na forma de representação expressando algebricamente a área da horta. A estratégia que esperamos seja utilizada pelos alunos é a da composição da fórmula da área do retângulo com a relação que esses consigam estabelecer entre o tamanho da tela, a largura e o comprimento da horta, assim:

Considerando por “*A*”, a área da horta. “*l*” sua largura e “*c*” seu comprimento, temos que: $A = l \cdot c$

Como $c = 28 - 2l$, temos: $A = l \cdot (28 - 2l)$, definindo assim a expressão desejada. Procurando construir as condições para o estabelecimento de um novo quadro, o quadro funcional será introduzido na terceira etapa dessa atividade, relativa a institucionalização, a representação $A(l) = l \cdot (28 - 2l)$.

4) A atividade foi apresentada através de um texto e uma figura e os dados obtidos representados em forma de tabela, gráfico e uma expressão matemática. Podemos dizer que todas essas representações eqüivalem ao mesmo problema (objeto de trabalho). Qual ou quais, os mais indicados para responder as questões abaixo.

a) Existem valores que se repetem?

Resposta: A tabela e o gráfico.

b) Existe um valor máximo?

Resposta: O gráfico

c) Qual a área para uma largura de 4,5 m na cerca da horta?

Resposta: A expressão algébrica.

d) A que se refere o problema?

Resposta: A apresentação do problema em linguagem natural.

Com essa questão, fechamos a atividade, pondo em discussão os atributos de cada representação do objeto estudado. Esperamos que essa questão leve os alunos a refletirem sobre essas representações e o papel que cada uma delas desempenham na compreensão do objeto estudado. O desenvolvimento de estratégias de representações que permitissem a manipulação do objeto função foi um dos grandes obstáculos epistemológicos à construção desse conceito. Temos consciência de que não será essa questão que evitará o surgimento desses obstáculos, mas cremos que ela será o ponto de partida para o enfrentamento que esperamos ser capazes de propor aos alunos com o objetivo de buscar sua superação. Buscando a superação, pelo menos parcial desses obstáculos, retomaremos esses tipos de questões nas próximas atividades.

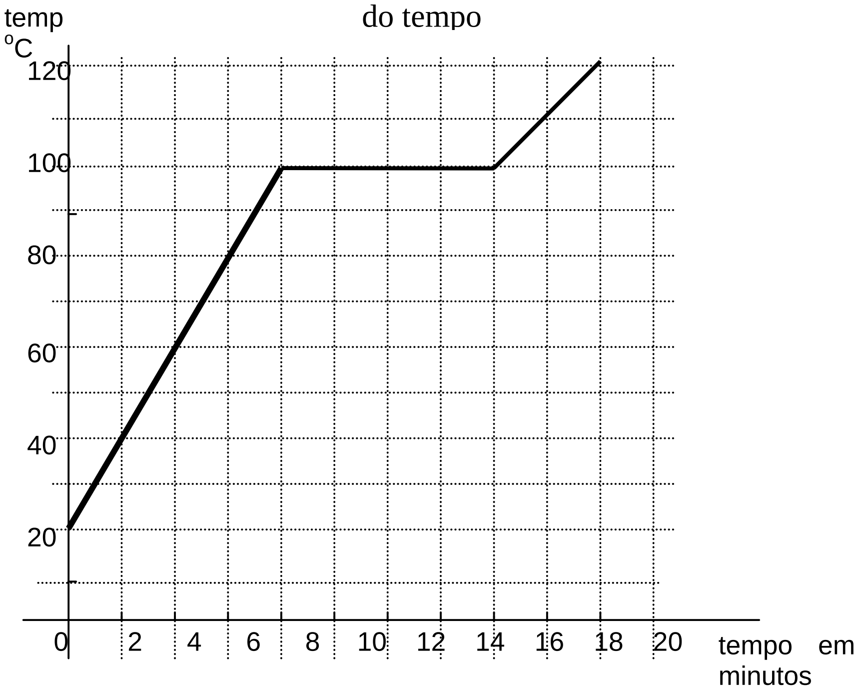
- Mobilizado como ferramenta os conhecimentos envolvendo o cálculo da área de um retângulo, embora não de forma plena, visto que boa parte dos grupos não obtiveram a expressão geral que definisse a área da horta;
- Percebido a relação de dependência da área em relação ao lado;
- Percebido que a dependência do lado em relação à área envolve dificuldades maiores que as da atividade anterior, visto que apresenta duplicidade de resposta para a maioria das áreas da horta;
- Compreendido a necessidade de que qualquer que seja o valor que se deseja definir, a correspondência deva existir e seja única.

A unicidade na correspondência e a distinção entre esta e as formas de representação da dependência são as ferramentas que procuramos enfatizar nesta atividade. Procuramos fazer uso de uma variação em que uma das variáveis apresentava dupla correspondência, uma mesma área correspondendo a dois valores para a largura da horta. Desta forma procuramos pôr em discussão a falta de "confiança" em se determinar a medida do lado a partir da área.

4.4.4 Quarta atividade

Uma amostra de água é aquecida em recipiente hermeticamente fechado tendo a variação representada no gráfico abaixo.

Variação da temperatura de uma amostra de água no decorrer do tempo



1) Com base nos dados representados no gráfico acima, complete a tabela.

tempo (min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
temperatura ^{o}C											

2) Analisando os dados apresentados, tanto na tabela quanto no gráfico, responda as questões abaixo.

a) Qual a temperatura da água após 3 minutos do início do aquecimento?
b) Qual a temperatura da água após 7 minutos do início do aquecimento?
c) Qual a temperatura da água após 13 minutos do início do aquecimento?
d) Qual a temperatura da água após 17 minutos do início do aquecimento?
e) Para qualquer valor que você escolher do tempo, a temperatura será única?
f) E se você escolher uma temperatura o tempo sempre será único?
g) Existe dependência entre as variáveis tempo e temperatura?
h) O tempo de aquecimento, sempre interfere na temperatura?
i) A temperatura, sempre, interfere no tempo de aquecimento?
j) Poderíamos dizer que a variação da temperatura é sempre proporcional ao tempo?
k) E o tempo é sempre proporcional à variação da temperatura?
l) Se você fosse definir uma relação de dependência, por qual das duas você optaria?
m) Quais são os conjuntos envolvidos nesta atividade? Liste seus elementos.

3) É possível definir uma única expressão algébrica para representar a variação acima?

4) Encontre as expressões algébricas que permitam obter a temperatura da água, indicando qual a faixa do conjunto que esta é válida.

5) Para ter um valor aproximado no instante 5,5 minutos, qual das representações você consultaria? Qual seria esta temperatura?

6) Para obter a temperatura exata no instante 5,5 minutos, qual das representações é a mais indicada? Qual seria esta temperatura?

7) Liste as características em comum entre relações das quatro atividades últimas até aqui desenvolvidas.

8) Destaque quais destas características seriam as mais importantes.

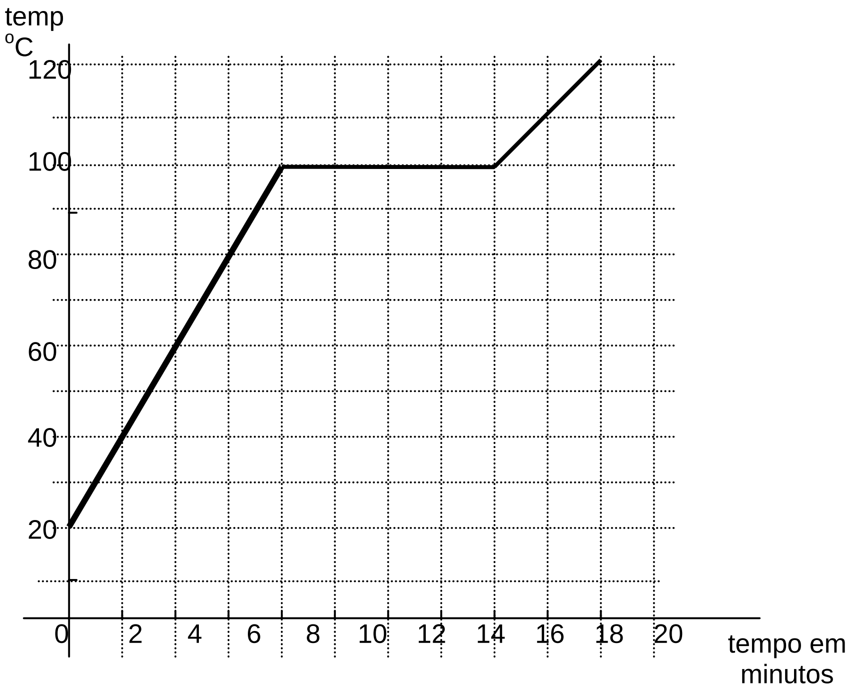
9) Existe alguma característica que poderia ser estudada independente do problema envolvido? Qual?

domínio e imagem a serem definidos posteriormente. A necessidade da definição do intervalo de validade da relação será fundamental para definirmos o conceito de função

Parte 2 - Resolução e análise da atividade

Uma amostra de água é aquecida em recipiente hermeticamente fechado tendo a variação representada no gráfico abaixo.

Variação da temperatura de uma amostra de água no decorrer do tempo



1) Com base nos dados representados no gráfico acima, complete a tabela.

tempo (min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
temperatura °C	*20*	*40*	*60*	*80*	*100*	*100*	*100*	*100*	*100*	*110*	*120*

A atividade é proposta partindo da representação gráfica procurando diversificar as formas de apresentação dos problemas. Na primeira questão solicitamos aos alunos para que completem a tabela constante da atividade induzindo dessa forma uma mudança de quadro, passando da representação gráfica para a numérica. A escolha dos valores posicionados na primeira linha, referente ao tempo de aquecimento, em minutos, facilita a leitura dos dados para a temperatura uma vez que as informações estão perfeitamente definidas pelas linhas tracejadas que identificam as coordenadas. Basta ao aluno aplicar seus conhecimentos sobre representação cartesiana de um ponto.

2) Analisando os dados apresentados, tanto na tabela quanto no gráfico, responda as questões abaixo.

a) Qual a temperatura da água após 3 minutos do início do aquecimento?

Resposta: 30 graus Celsius.

b) Qual a temperatura da água após 7 minutos do início do aquecimento?

Resposta: 90 graus Celsius.

c) Qual a temperatura da água após 13 minutos do início do aquecimento?

Resposta: 100 graus Celsius.

d) Qual a temperatura da água após 17 minutos do início do aquecimento?

Resposta: 105 graus Celsius.

e) Para qualquer valor que você escolher do tempo, a temperatura será única?

Resposta: Sim. Qualquer que seja o instante escolhido a temperatura será única.

f) E se você escolher uma temperatura o tempo sempre será único?

Resposta: Não. A temperatura de 100 ^{o}C. é a mesma entre os instantes 8 e 16 segundos.

g) Existe dependência entre as variáveis tempo de aquecimento e temperatura?

Reposta: Sim. Quanto maior o tempo de aquecimento maior a variação da temperatura.

h) O tempo de aquecimento, sempre interfere na temperatura?

Resposta: Sim. Mesmo no intervalo de 8 a 16 segundos em que a temperatura mantém-se constante podemos considerar que o tempo de aquecimento interfere na temperatura.

i) A temperatura, sempre interfere no tempo de aquecimento?

Resposta: Não. O tempo de aquecimento não depende da temperatura.

j) Poderíamos dizer que a variação da temperatura é sempre proporcional ao tempo?

Resposta: De acordo com o representado no gráfico sim mas mudança no comportamento de acordo com a faixa de tempo considerado.

k) E o tempo é sempre proporcional à variação da temperatura?

Resposta: Não, o tempo varia de forma contínua independente da variação ou não da temperatura.

l) Se você fosse definir uma relação de dependência, por qual das duas você optaria?

Resposta: Pela relação temperatura dependendo do tempo.

m) Quais são os conjuntos envolvidos nesta atividade? Liste seus elementos.

Resposta: considerando T o conjunto que representa as medidas do tempo de aquecimento, t, em minutos, o instante de aquecimento, U, o conjunto das temperaturas e u, em graus Celsius, a temperatura num certo instante t temos:
T = { t ™ / 0 < t < 20}
U = { u ™ / 20 < u< 120}

Na segunda questão, levantamos uma série de perguntas procurando induzir o aluno a realizar uma análise dos dados representados, tanto no gráfico como na tabela. Com esse objetivo pedimos que identifique temperaturas em instantes que não constem da tabela, como a 3 minutos de aquecimento. A obtenção dessa informação pode ser feita das seguintes formas:

- Por estimativa. Observando no gráfico a posição "aproximada" da coordenada temperatura no instante três minutos. Cremos que essa será a estratégia utilizada pelos grupos.
- Aplicando a proporcionalidade direta. Como o tempo indicado está na metade de 2 e 4, a temperatura será a metade entre 40^o e 60^o logo 50^o
- Utilizando segmentos proporcionais: $\frac{u-40}{3-2} = \frac{60-40}{4-2}$, logo $u = 50^o$, onde *u* é a temperatura no instante 3 minutos.

A análise da seqüência com a formulação de uma série de questões que procuram explorar a variação como objeto de estudo da mesma forma que nas atividades anteriores.

3) É possível definir uma única expressão algébrica para representar a variação acima?

Não. A temperatura sofre variação de três formas diferentes ao longo do tempo de aquecimento.

4) Encontre as expressões algébricas que permita obter a temperatura da água, indicando qual a faixa do conjunto que esta é válida.

Resposta: $u(t) = \begin{cases} 20^o + 10^o t, \text{ se } 0 < t < 8 \\ 100^o, \text{se } 8 < t < 16 \\ 20^o + 5^o t, \text{ se } 16 < t < 20 \end{cases}$

Com a terceira e quarta questões colocamos em discussão o fato da variação não ocorrer de forma constante em todo intervalo analisado, mas possuindo três comportamentos claramente definidos pela linha que descreve a variação da temperatura em função do tempo. As expressões podem ser obtidas das seguintes formas:

No intervalo de 0 a 8 minutos:

- Interpretação imediata da leitura dos dados no gráfico. Como a temperatura no instante $t = 0$ eqüivale a 20^o e sofre variação de 10^o a cada minutos temos a expressão: $u(t) = 20^o + 10^o\, t$, sendo essa a estratégia esperada.
- Utilizando segmentos proporcionais. $\frac{u-40}{t-2} = \frac{60-40}{4-2}$, logo $u(t) = 10^o t + 20$

No intervalo de 8 a 16 minutos:

- Leitura imediata da temperatura constante $u = 100^o$

No intervalo de 16 a 20:

- Interpretação imediata da leitura dos dados no gráfico. Como a temperatura no instante $t = 16$ eqüivale a 100^o e sofre variação de 5^o a cada minutos temos a expressão: $u = 100^o + 5^o\,(t - 16)$, logo $u(t) = 20^o + 5^o\, t$, sendo essa a estratégia esperada.
- Utilizando segmentos proporcionais. $\frac{u-100}{t-16} = \frac{120-100}{20-16}$, logo $u(t) = 5^o t + 20^o$

A definição das três expressões que determinam o comportamento da variação da temperatura nos permite colocar em discussão o fato de elas representarem um único fenômeno que não sofre interrupção ao longo do tempo de observação. Portanto podemos considerar que as três sentenças representam única relação de dependência, logo, uma única função. As funções definidas por mais de uma sentença foram alvo de intensos debates, constituindo um dos obstáculos epistemológicos relativo à formulação de uma definição ao conceito de função, principalmente no que se refere à noção continuidade. Embora não discutiremos com nossos alunos os problemas envolvendo a continuidade, esperamos criar as condições para compreensão por parte dos alunos da possibilidade de se definir uma única função a partir de duas ou mais expressões algébricas, desde que se identifique corretamente o domínio de validade de cada uma delas, dentro de um domínio maior de validade para toda função.

5) Para ter um valor aproximado, para a temperatura, no instante 5,5 minutos, qual das representações você consultaria? Qual seria esta temperatura?

Resposta. Para se obter um valor aproximado podemos fazer uso tanto da representação gráfica quanto da expressão algébrica. A temperatura seria 75 ^oC.

6) Para obter a temperatura exata, da temperatura, no instante 5,5 minutos, qual das representações é a mais indicada? Qual seria esta temperatura?

Resposta. Para obter o valor exato temos que fazer uso da expressão algébrica, sendo a temperatura dada por:

$u(5,5) = 20^o + 10^o \cdot (5,5) = 75^oC$

Com a quinta e sexta questões damos seguimento a análise dos atributos das representações, da mesma forma que nas atividades anteriores.

7) Liste as características em comum entre relações das quatro atividades últimas até aqui desenvolvidas.

Resposta: Em todas as quatro atividades temos:

- *dois conjuntos de grandezas dependentes entre si;*
- *variação entre grandezas;*
- *a variação pode ser representada graficamente, em forma de tabela, por expressões algébricas e expressa pela linguagem natural.*

8) Destaque quais destas características seriam as mais importantes.

Resposta: Todas são importantes, mas para nosso estudo a variação de uma grandeza em função da outra é a mais importante.

9) Existe alguma característica que poderia ser estudada independente do problema envolvido? Qual?

Resposta: A variação, a dependência de uma grandeza em relação a outra e a correspondência entre seus valores são as idéias comuns a todos os problemas podendo ser estudado de forma independente

Com essas três últimas questões, cremos estar criando as condições para a superação do obstáculo epistemológico relacionado com o foco nas coisas que variam ampliando assim o campo conceitual relacionado as variações de forma a permitir a futura formalização e definição do conceito de função. Nelas procuramos dar ênfase na variação e na dependência como sendo as características comuns a todas as situações apresentadas. Não esperamos que as respostas já indiquem a

Da análise da atividade, podemos concluir que os alunos mobilizaram como ferramenta:

- A leitura e interpretação de uma representação gráfica.
- Perceber a necessidade de uma única correspondência para caracterizar a dependência.
- A influência da ação do aquecimento da água no decorrer do tempo.

Elaborando como conhecimento de forma implícita as noções de:

- Dependência da variação da temperatura em relação ao tempo de aquecimento,
- A necessidade da definição de Intervalo de validade da expressão algébrica que descreve o fenômeno,

A necessidade da definição de intervalos de validade para a expressão algébrica e a dependência da variação da temperatura em função do tempo de aquecimento são as ferramentas que procuramos enfatizar nessa atividade. Utilizamos um fenômeno em que uma das variáveis, a temperatura, não interfere o comportamento da outra, o tempo. A escolha dessas variáveis teve como objetivo pôr em questão o papel da dependência de uma variável em relação à outra. Introduzimos a expressão “em função de” como uma analogia à expressão na sua forma usual dentro da linguagem natural, embora saibamos que esta não parece ter sido a origem do termo função dentro da matemática.

4.4.5 Quinta Atividade

Acompanhando e registrando a sombra de uma pequena haste durante o período de um dia obtivemos figura em anexo (anexo 3). Considerando por sombra, em nossa atividade, apenas a figura gerada sobre uma superfície pela sua luz do sol quando incide sobre um objeto.

1) Meça o comprimento da sombra registrando na tabela abaixo a hora e o comprimento encontrados.

hora											
comprimento da sombra											

2) Represente graficamente o tempo em horas e o comprimento da sombra da haste.

3) Discuta com seu colega de grupo e responda as questões abaixo:

a) O comprimento da sombra depende da hora em que foi feita a medida?

b) E a hora em que foi feita a medida depende do comprimento da sombra?

c) Na representação gráfica, qual variável você colocou no eixo das abscissas? Por quê?
d) A inversão dos eixos não poderia resultar num gráfico mais compreensível? Por quê?
e) Podemos efetuar previsões únicas sobre o tamanho da sombra em determinado instante?
f) E previsões sobre o instante em que a sombra terá um determinado tamanho serão únicas.
g) É sempre possível determinar o tamanho da sombra? Por quê?
h) Qual seria, em nossa região, o tamanho desta sombra às 3 horas (da madrugada)? e às 22 horas (10 horas da noite)?
h) Como poderíamos garantir a previsão do tamanho da sombra, em nossa região?
4) Considerando que alem do comprimento o ângulo em relação à direção leste–oeste também sofre variação, discuta com seu colega de grupo e responda as questões abaixo:
a) O ângulo formado pela sombra na direção leste - oeste, depende da hora em que foi feita a medida?
b) E a hora em que foi feita a medida depende do ângulo formado pela sombra?
c) Podemos efetuar previsões únicas sobre do ângulo formado pela sombra em determinado instante?
f) E previsões sobre o instante em que a sombra terá um determinado ângulo formado pela sombra serão únicas?
g) Seria possível determinar o ângulo formado pela sombra em qualquer instante? Por quê?
h) Como poderíamos garantir a previsão do ângulo da sombra?
5) Na atividade anterior, procuramos destacar as características em comum das relações envolvidas. Estas características continuam presentes?
6) Qual a idéia central em todas as seis atividades analisadas até agora?
7) Como garantir com segurança que a previsão efetuada a partir desta idéia não possa ser questionada?

4.4.5.1 Análise a priori da quinta atividade

Parte 1 – Análise geral

Como na atividade anterior, procuramos trabalhar com um fenômeno físico observável cujo comportamento tem seu interesse despertado desde a antigüidade. A forma com que a sombra de um objeto se projeta no decorrer do dia apresenta uma excelente oportunidade, tanto no aspecto físico como no matemático, para o desenvolvimento de atividades envolvendo outras áreas, não só da matemática,

Parte 2 – Resolução e análise da atividade.

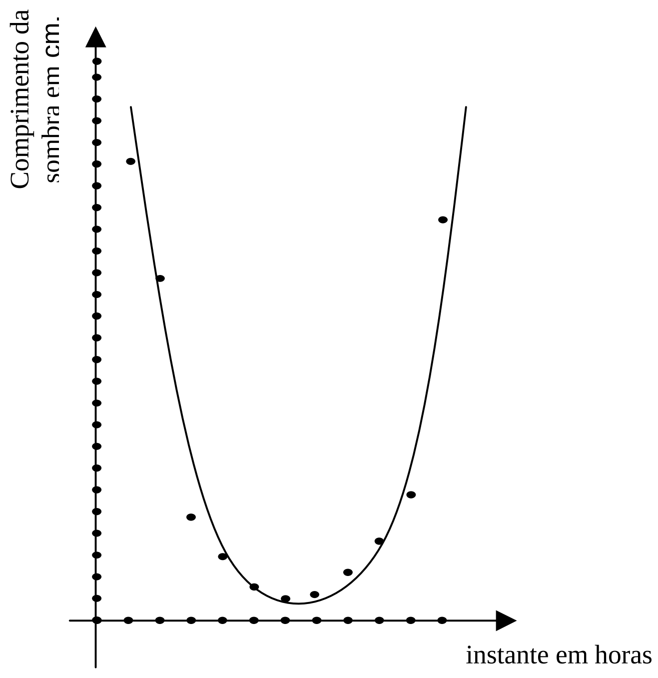
Acompanhando e registrando a sombra de uma pequena haste durante o período de um dia obtivemos a figura em anexo (anexo 3). Considerando por sombra, em nossa atividade, apenas a figura gerada sobre uma superfície pela sua luz do sol quando incide sobre um objeto.

1) Meça o comprimento da sombra registrando na tabela abaixo a hora e o comprimento encontrado.

hora	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*
comprimento da sombra (cm)	*42,5*	*31,5*	*9,5*	*6,0*	*3,5*	*2*	*2,5*	*4,5*	*7,5*	*11,5*	*36,5*

Obs. Dados foram obtidos em 09 de fevereiro de 2005 em Santo André São Paulo, fazendo uso de uma haste de 8,5 cm de altura.

2) Represente graficamente o tempo em horas e o comprimento da sombra da haste.



A situação proposta segue o mesmo princípio das outras atividades, trabalhar a variação envolvendo um conjunto de grandezas diferentes das utilizadas anteriormente. Os dados usados nessa resolução tomam por base o registro obtido pelo professor pesquisador em dia e hora indicadas na solução. A tarefa dos alunos será a de medir e registrar na tabela indicada a hora e o comprimento da sombra e representá-la graficamente. Esperamos que nessa representação os alunos posicionem a grandeza tempo no eixo das abscissas. Essa informação servirá de base para a definição das futuras convenções envolvendo esse tipo de representação.

3) Discuta com seu colega de grupo e responda as questões abaixo:

a) O comprimento da sombra depende da hora em que foi feita a medida?

Resposta: Sim. O comprimento da sombra sofre variação, tendo medida diferente em instantes diferentes.

b) E a hora em que foi feita a medida depende do comprimento da sombra?

Resposta: Não O instante em que foi realizado o registro não sofre interferência do comprimento da sombra, é só mudar o tamanho da haste para que a sombra tenha o comprimento diferente no mesmo instante.

c) Na representação gráfica, qual variável você colocou no eixo das abscissas? Por quê?

Resposta: O instante de registro. Esta disposição facilita observar que o comprimento da sombra diminui até por volta da metade do dia e volta a aumentar.

d) A inversão dos eixos não poderia resultar num gráfico mais compreensível? Por quê?

Resposta: Não, pois a figura gerada seria uma curva que apresenta duplicidade de valores, nas grandezas comprimento, para um mesmo instante.

e) Podemos efetuar previsões únicas sobre o tamanho da sombra em determinado instante?

Resposta. Podemos, pois a cada instante a sombra para essa haste será única.

f) E previsões sobre o instante em que a sombra terá um determinado tamanho serão únicas?

Resposta: Não, pois temos sombra que apresenta o mesmo comprimento no período da manhã e no período da tarde.

g) É sempre possível determinar o tamanho da sombra? Por quê?

Resposta: Se tivermos os registros de seu comportamento sim.

h) Qual seria, em nossa região, o tamanho desta sombra às 3 horas (da madrugada)? e às 22 horas (10 horas da noite)?

Resposta: Nesses instantes, o sol não incide sobre os objetos em nossa região, logo não forma sombra como convencionado em nossa atividade. Podemos convencionar esse comprimento como zero.[8]

i) Como poderíamos garantir a previsão do tamanho da sombra, em nossa região?

---

[8] A definição do comprimento da sombra sendo zero é uma mera convenção e dependerá das conclusões dos alunos ao longo da atividade.

Resposta: Restringindo a validade dos dados no intervalo de iluminação da haste pelo Sol e convencionando um comprimento nos momentos em que essa iluminação não ocorre.

4) Considerando que além do comprimento o ângulo em relação à direção leste–oeste também sofre variação, discuta com seu colega de grupo e responda as questões abaixo:

a) O ângulo formado pela sombra na direção leste-oeste depende da hora em que foi feita a medida?

Resposta: Sim. Da mesma forma que o comprimento, o ângulo definido pela sombra em relação será único.

a) E a hora em que foi feita a medida depende do ângulo formado pela sombra?

Resposta: O instante não depende da existência da sombra, logo não depende do ângulo formado.

c) Podemos efetuar previsões únicas sobre o ângulo formado pela sombra em determinado instante?

Resposta: Sim.

f) E previsões sobre o instante em que a sombra terá um determinado ângulo formado pela sombra serão únicas?

Resposta: Sim

g) Seria possível determinar o ângulo formado pela sombra em qualquer instante? Por quê?

Resposta: Sim, desde que se tenha os registros da sombra em diversos instantes em que foi gerada.

h) Como poderíamos garantir a previsão do ângulo da sombra?

Resposta: Definindo o intervalo de existência dos registros e uma medida e uma convenção, para o intervalo em que esses registros não são válidos, desde que coerente com esses registros.

Os dois conjuntos das questões acima mantêm a mesma estrutura das atividades anteriores, que é o de discutir a atividade focalizando na variação como fenômeno e as condições que nos permitirão definir o conceito de função. As grandezas envolvidas na atividade possuem um comportamento que nos auxiliará na definição da relação de dependência. Tanto o comprimento da sombra quanto o ângulo por ela definido na direção leste - oeste dependem do instante do registro, mas o contrário não é verdadeiro. Este atributo é discutido na questão quatro item b, quando questionamos “se a hora em que foi feito o registro depende do ângulo formado pela sombra?”. É evidente que a grandeza hora não depende da existência início e finalizando o dia. Levar em consideração essas variáveis e novas ferramentas que só estarão disponíveis no futuro permitiria a definição das expressões, como fazem os astrônomos.

Prevendo que a próxima sessão será destinada para o fechamento da seqüência o professor deixou questões como quais as características comuns e qual a idéia central para serem aprofundadas no penúltimo encontro. Entretanto da análise acima já podemos observar que o grupo formado pelos alunos AD, já perceberam que as grandezas comprimento e ângulo formado pela sombra dependem da grandeza tempo, sendo essa a grandeza que define a relação. Essa informação será fundamental para a futura definição de domínio e imagem de uma função, mas cremos que possui aspectos cognitivos mais profundos na compreensão do conceito de função.

4.4.6 Sexta atividade

Leia com atenção o texto abaixo, discuta com seu colega as questões propostas, redigindo as respostas de forma mais clara possível.

As relações de dependência que analisamos nas atividades anteriores desenvolvidas anteriores demonstram que, apesar de trabalharmos com a relação entre grandezas de natureza, diversas como, quantidades, comprimento e área, tempo e temperatura, tempo e sombra ou ângulo formado pela sombra, existe um princípio comum a todas elas.

1) Discuta com seu grupo e procure responder:

a) Qual seria este princípio?

b) Qual o papel da unicidade nesse princípio?

c) Qual o papel do intervalo de definição da relação nesse princípio?

d) Como poderíamos formular uma definição que tornasse claro esse princípio?

A definição:

> “*Dizemos que uma variável y está em função de uma variável x quando cada valor de x do intervalo de definição, possui um único correspondente em y*”

Está de acordo com este princípio?

2) Considerando a definição acima podemos dizer que o lado do quadrado da terceira atividade é função da área desse quadrado? E a área do quadrado é função do seu lado?

3) Na primeira atividade, poderíamos definir uma função? Em caso afirmativo, qual seria a relação funcional, número de quadradinhos coloridos x número de quadradinhos sem colorir ou o inverso?

4) Na quinta atividade "a variação da temperatura da água no decorrer do tempo" existe alguma função? Em caso afirmativo qual?

5) E na sexta atividade, a sombra projetada pela haste durante o dia?

Função é uma das ferramentas da matemática que apresenta grande diversidade de aplicação, ao analisar o preço da gasolina, por exemplo, temos uma relação que nos permite calcular o valor a pagar em função do volume de gasolina adquirida. Esta função pode ser obtida por uma lei matemática expressa por:

Valor a pagar = (valor de um litro). (quantidade adquirida), tal expressão em matemática é dada por $V(l) = P.\ l$, onde P é o preço de um litro de gasolina, portanto se em um determinado posto o preço da gasolina é de R$ 1,95 teremos a expressão.

$V(l) = 1{,}95\ .l$, assim se o consumidor adquirir 3 litros de gasolina o valor a pagar $V(l)$ será V(3) = 1,95 . 3 = 5,85 Reais. Observe que a expressão não tem significado para valores negativos de l, sendo lógico definir que a expressão assume significado quando $l > 0$

A este conjunto denominamos de domínio da função e o valor a pagar chama de imagem de l, assim representar V(3) = 5, 85, estamos indicado que a imagem de $l = 3$ é 5,85.

Assim o Domínio desta função pode ser indicada por $D_{(V)} =\ _{+}$ e a imagem $I_{(V)} =\ _{+}$

Com base no que foi definido acima responda:

a) Qual o valor a pagar se forem consumidos 8 litros de combustível?

b) Na segunda atividade o numero de quadradinhos não coloridos é dado pela fórmula

NC = 2 c + 6, o que poderia ser expresso pela lei f (c) = 2c + 6. Quantos são os quadradinhos não coloridos quando nossa figura tiver 18 coloridos. Ou seja, qual é f(18) e quando a figura tiver 32 coloridos.

c) Na quarta atividade a área da horta é dada pela fórmula $A(l) = l\ (28 - 2\ l)$, onde l é a largura da horta em m. Logo podemos escrever $f(l) = l\ (28 - 2l)$. Qual a área da horta quando a largura for de 3 m?

d) Qual a área da horta quando l for 10 m?

e) Qual a largura da horta para que esta tenha 98 m^2 de área?

atividade apresentando uma série de situações em que a nova notação é utilizada. Com esses exercícios estaremos procurando fixar as convenções definidas na atividade permitindo ao aluno se familiarizar–reutilizando em novas situações, o que caracteriza a quinta fase da dialética ferramenta objeto. São propostas questões que trabalham com as expressões algébricas estudadas ao longo da seqüência. Como por exemplo nos item c, onde apresentamos a seguinte situação "*Na quarta atividade a área da horta é dada pela fórmula A(l) = l (28 – 2 l), onde l é a largura da horta em m. Logo podemos escrever f(l) = l (28 – 2l). Qual a área da horta quando a largura for de 3 m?"* ou no item d *"Qual a área da horta quando l for 10 m"* A compreensão e manipulação destas notações são fundamentais na compreensão do conceito de função. Julgamos que o aluno esteja apto ao final desta atividade a perceber que *f(3)* significa o valor da função quando *l* = 3, logo a área da horta será dado por *f(3).*

Segunda parte – Resolução e análise da atividade.

Leia com atenção o texto abaixo, discuta com seu colega as questões propostas, redigindo as respostas de forma mais clara possível. As relações de dependência que analisamos nas atividades anteriores desenvolvidas anteriores demonstram que, apesar de trabalharmos com a relação entre grandezas de natureza, diversas como, quantidades, comprimento e área, tempo e temperatura, tempo e sombra ou ângulo formado pela sombra, existe um princípio comum a todas elas. 1) Discuta com seu grupo e procure responder. a) Qual seria este princípio? *Resposta: A variação entre duas grandezas* b) Qual o papel da unicidade nesse princípio? *Resposta: Ela garante que não haverá mais que uma correspondência para um mesmo valor do domínio.* c) Qual o papel do intervalo de definição da relação nesse princípio? *Resposta: Ele nos informa quais valores podemos utilizar em nossos cálculos evitando resultados absurdos ou incorretos.* d) Como poderíamos formular uma definição que tornasse claro este princípio? *Resposta vide definição abaixo* A definição:

"Dizemos que uma variável y está em função de uma variável x quando cada valor de x do intervalo de definição, possui um único correspondente em y"

Está de acordo com esses princípios?
Resposta: Sim, pois garante a existência da correspondência para todo x que pertença ao intervalo de definição do domínio e essa correspondência deve ser única.

A primeira questão coloca em discussão os princípios básicos para a definição do conceito de função. Todas a questões já foram trabalhadas em algum momento na seqüência e nosso objetivo é o de institucionalizar o conceito sem que uma definição seja dada pelo professor. Esperamos que no momento da discussão sejamos capazes de construir essa definição com os alunos. A definição, que consta da questão, não fará parte da mesma sendo entregue aos alunos somente após uma definição, pelo parcial, seja construída a partir da contribuição dos alunos.

2) Considerando a definição acima podemos dizer que o lado do quadrado da segunda atividade é função da área desse quadrado? E a área do quadrado é função do seu lado?
Resposta: Tanto a área do quadrado é função de seu lado como o lado do quadrado é função de sua área, uma vez que ambas são grandezas que só admitem valores positivos .
3) Na primeira atividade, poderíamos definir uma função? Em caso afirmativo, qual seria a relação funcional, número de quadradinhos coloridos x número de quadradinhos sem colorir ou o inverso?
Resposta: Sim, o número de quadradinhos não coloridos é função do número de quadradinhos coloridos.
4) Na quarta atividade "a variação da temperatura da água no decorrer do tempo" existe alguma função? Em caso afirmativo qual?
Resposta: A variação da temperatura é função do tempo de aquecimento, embora o comportamento dessa função não seja o mesmo durante todo o período de tempo estudado.
5) E na quinta atividade, o comprimento da sombra projetada pela haste durante o dia é função do instante em que foi realizado o registro?
Resposta: o comprimento da sombra é função do instante em que o registro foi realizado, uma vez que a cada instante temos apenas uma medida para esse comprimento em todo período do registro.

Essas quatro questões tem por objetivo ver a definição tomando como base as situações trabalhadas nas seqüências. Com ele iniciamos o fechamento das quatro etapas inicias da dialética ferramenta-objeto, com a intitucionalização do conceito e sua fixação fazendo uso das situações já conhecidas. Dessa forma estamos formalizando essas situações parte do conjunto das situações S que dão significado ao conceito de função em seu campo conceitual. As convenções e definições que complementam a quarta etapa será realizada na seqüência da atividade com o texto proposto abaixo.

Função é uma das ferramentas da matemática que apresentam grande diversidade de aplicação, ao analisar o preço da gasolina, por exemplo, temos uma relação que nos permite calcular o valor a pagar em função do volume de gasolina adquirida. Esta função pode ser obtida por uma lei matemática expressa por:

Valor a pagar = (valor de um litro).(quantidade adquirida), tal expressão em matemática é dada por $V(l) = P.\ l$, onde P é o preço de um litro de gasolina, portanto se em um determinado posto o preço da gasolina é de R$ 1,95 teremos a expressão.

$V(l) = 1{,}95\ .l$, assim se o consumidor adquirir 3 litros de gasolina o valor a pagar $V(l)$ será V(3) = 1,95 . 3 = 5,85 Reais. Observe que a expressão não tem significado para valores negativos de l, sendo lógico definir que a expressão assume significado quando $l > 0$

A este conjunto denominamos de domínio da função e o valor a pagar chama de imagem de l, assim representar V(3) = 5, 85, estamos indicado que a imagem de $l = 3$ é 5,85.

Assim o Domínio desta função pode ser indicada por $D_{(V)} = {}_+$ e a imagem $I_{(V)} = {}_+$

Com base no que foi definido acima responda.

a) Qual o valor a pagar se forem consumidos 8 litros de combustível?

Resposta: V(8) = 1,95 . 8 = 15, 60 Reais.

b) Na segunda atividade o número de quadradinho não colorido é dado pela fórmula NC = 2 c + 6, o que poderia ser expresso pela lei $f(c) = 2c + 6$. Quanto são os quadradinhos não coloridos quando nossa figura tiver 18 coloridos. Ou seja qual é $f(18)$ e quando a figura tiver 32 coloridos?

Respostas:

f(18) = 2 . 18 + 6 = 42 quadradinhos sem colorir

Se a figura tiver 32 quadradinhos coloridos representamos por f(32) = 2 . 32 + 6 = 70 quadradinhos sem colorir.

b) Na terceira atividade a área da horta é dada pela fórmula *A(l) = l (28 – 2 l)*, onde l é a largura da horta em m. Logo podemos escrever *f(l) = l(28 – 2l)*. Qual a área da horta quando a largura for de 3 m?

Resposta: Se a largura da horta for de 3 m temos f(3) = 3 (28 – 2 . 3) = 66 m^2 *de horta.*

d) Qual a área da horta quando *l* for 10 m?

Resposta: Se a largura da horta for de 10 m temos f(10) = 10 (28 – 2 . 10) = 80 m^2 *de horta*

e) Qual a largura da horta para que esta tenha 98 m^2 de área?

Resposta: Se a área for de 90 m^2*, temos f(x) = 98, logo*

98 = l (28 – 2l), portanto l = 7 m

Com essas questões, fechamos a quarta etapa da dialética e iniciamos o trabalho dentro da quinta etapa, com a reutilização em situações novas já aplicando as convenções envolvendo o conceito de função. Para a elaboração das questões continuamos fazendo uso das situações propostas na seqüência, ao mesmo tempo que formalizamos uma nova representação para a imagem de um elemento do domínio. Essa nova representação, juntamente com as representações já trabalhadas na seqüência formam o conjunto de representações R desse campo conceitual.

4.4.6.2 Análise a posteriori da sexta atividade

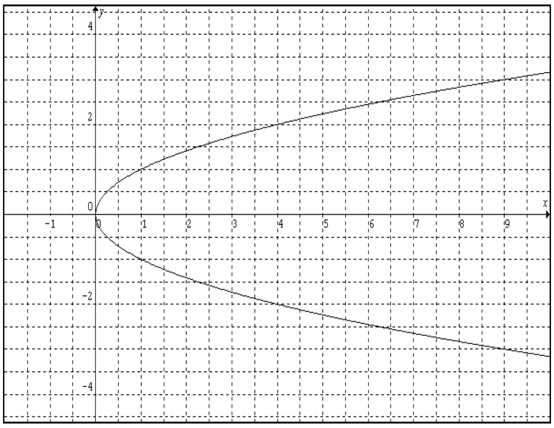
Ao contrário das duas seções anteriores, em que tivemos uma grande ausência, nessa todos os alunos participantes do projeto estavam presentes. Como planejado, o professor distribuiu a folha constando a primeira parte da atividade e definiu o tempo de vinte minutos para discussão da mesma. Apesar de ter sido solicitado a formação de grupos com no máximo três alunos observou-se a interação entre eles que culminou com a fusão de dois deles. Dois grupos apresentaram relatórios separados, mas com conclusões idênticas. A variação não apareceu inicialmente como sendo a idéia central desenvolvida nas atividades. Nas anotações referente à pergunta, "Qual seria o princípio comum às atividades?", as respostas giraram em torno das estratégias utilizadas na resolução das situações propostas. Um dos grupos respondeu que o princípio era o de "*Mostrar diversas formas de resolver e representar um problema*" , dois grupos apresentaram a mesma resposta "*Tentar resolver os problemas de uma forma mais prática. Juntar todos os pontos* forma a fixar o conceito disponibilizando como ferramenta para solução de novos problemas.

4.4.7 Sétima atividade

1) Uma função definida com domínio no conjunto dos Reais sobre os Reais é dada pela expressão matemática $f(x) = -3x + 4$. Determine as imagens da função para valores de x ={-2,1,3,4}.

Dizemos que uma função é crescente quando a medida que aumenta o valor de x, aumenta também o valor de f(x), se o aumento de x leva a diminuição de f(x) dizemos que a função é decrescente. A função acima é crescente ou decrescente?

2) O gráfico abaixo representa a equação $x - y^2 = 0$

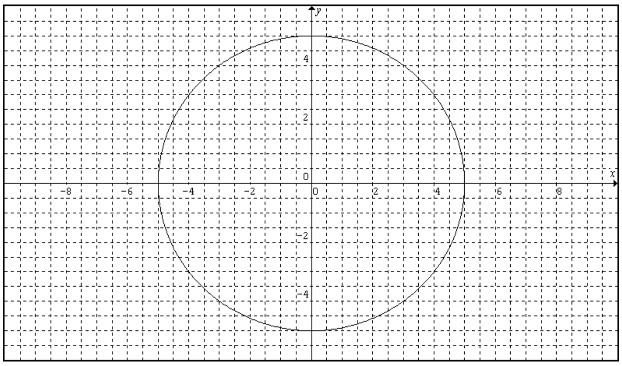


a) Na expressão temos uma relação de dependência entre x e y! Poderíamos dizer que y está em função de x? Por quê?

b) E x está em função de y? Por quê?

c) Se em uma das opções a expressão representa uma função para que valores ela é crescente ou decrescente?

3) O gráfico abaixo representa a equação $x^2 + y^2 = 25$



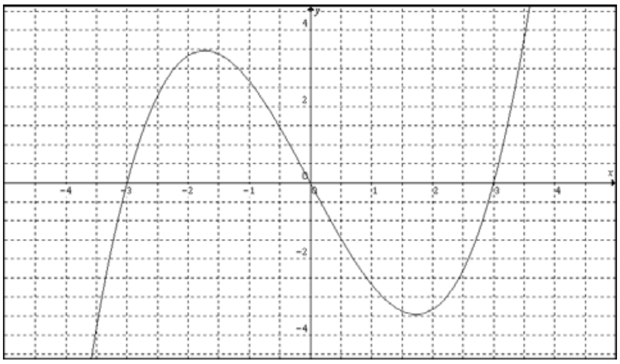
a) Na expressão temos uma relação de dependência entre x e y! Poderíamos dizer que y está em função de x? Por quê?

b) E x está em função de y? Por quê?

d) Se em uma das opções a expressão representa uma função para que valores ela é crescente ou decrescente?

d) Se em nenhuma das opções temos uma função, haveria uma faixa de valores que tornaria equação uma função?

4) O gráfico abaixo representa a equação $x^3 - 9x - 3y = 0$



a) Na expressão temos uma relação de dependência entre x e y! Poderíamos dizer que y está em função de x? Por quê?

b) E x está em função de y? Por quê?

c) Se em uma das opções a expressão representa uma função para que valores ela é crescente ou decrescente?

d) Se em nenhuma das opções não temos uma função, haveria uma faixa de valores que tornaria a equação uma função?

5) Em física o movimento de um corpo em lançamento de um corpo é dado pela expressão $h = 40\,t - 5\,t^2$ onde a altura h é dado em metros e t, tempo decorrido após o lançamento em segundos.

a) Identifique o instante em que o corpo atinge a altura máxima.

b) Identifique a altura máxima

4.4.7.1 Análise a prióri da sétima atividade**.**

Esta última atividade tem por objetivo continuar a familiarização e avaliar a eficiência de nossa proposta através da proposição de situação nova em forma de problema. Com o último problema trabalharemos a etapa final da dialética ferramenta–objeto, a complexificação, uma vez que sua solução faz uso do conceito

Em física o movimento de um corpo em lançamento de um corpo é dado pela expressão h = 40 t – 5 t^2 onde a altura h é dado em metros e t, tempo decorrido após o lançamento em segundos.

a) *Identifique o instante em que o corpo atinge a altura máxima.*

b) *Identifique a altura máxima*

A questão envolve a variação da altura do corpo em função do tempo. Em sua solução esperamos que os alunos calculem qual será a altura do corpo em diversos instantes, representem graficamente esses dados analisando e identificando o instante e altura solicitados. Cremos que agindo dessa forma estarão aplicando o novo conhecimento como ferramenta explícita, dando a ele o estatuto de conhecimento antigo. Essa convicção se baseia na distinção entre as noções de quantidades desconhecidas e variáveis propostas por Sierpinska (1992), ao analisar as condições para que se entender o conceito de função. "Discrição entre os dois modos de pensamento matemático: um em termos de quantidade conhecida e quantidade desconhecida, outro em termos de variável e quantidades constantes"(Sierpinska 1992. p 37). Para identificar qual a altura máxima atingida pelo corpo o aluno tem a necessidade de pensar em termos de variáveis, o que caracterizaria a presença do raciocínio funcional. Essa distinção na forma de pensar segundo a autora tem suas origens em obstáculos epistemológicos, mais especificamente o obstáculo classificado por ela como "pensamento em termos de equações e da obtenção de um termo desconhecidos a partir dela".(Sierpinska 1992 p. 37).

Dessa forma fechamos o ciclo da dialética ferramenta-objeto. Se os alunos forem capazes de apresentar a solução envolvendo o raciocínio funcional podemos considerar validados as nossas hipóteses.

Parte 2 – Resolução e análise da atividade.

1) Uma função definida com domínio dos Reais sobre os Reais é definida pela expressão matemática *f(x) = -3x + 4*. Determine as imagens da função para valores de x ={-2,1,3,4}

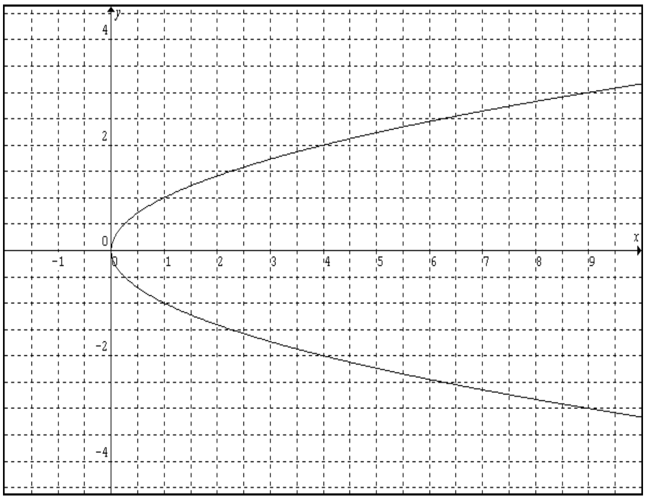
Dizemos que uma função é crescente quando a medida aumenta o valor de x, aumenta também o valor de f(x), se o aumento de x leva a diminuição de f(x) dizemos que a função é decrescente. A função acima é crescente ou decrescente?

Respostas:

f(-2) = -3 . (-2) + 4 = 10 + 4 = 14
f(1) = -3 . (1) + 4 = (-3) + 4 = 1
f(3) = -3 . (3) + 4 = (-9) + 4 = -5
f(4) = -3 . (4) + 4 = (-12) + 4 = -8
A função é decrescente, pois à medida que o valor de x aumenta, o valor de f(x) diminui.

A questão é uma aplicação imediata da nova representação e dá seqüência a reutilização da nova ferramenta. A classificação solicitada busca mostrar uma das características dessa nova ferramenta, que é o de permitir a análise do comportamento da variação.

1) O gráfico abaixo representa a equação $x - y^2 = 0$



a) Na expressão temos uma relação de dependência entre x e y! Poderíamos dizer que y está em função de x? Por quê?

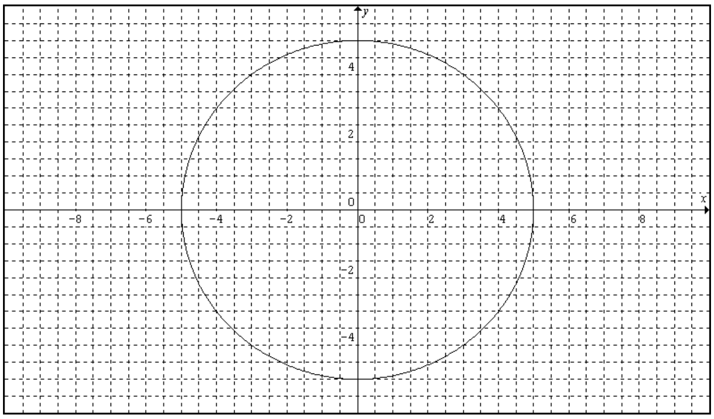
b) E x está em função de y? Por quê?

c) Se em uma das opções a expressão representa uma função para que valores ela é crescente ou decrescente?

Resposta: A equação não representa um função de y em x, pois para x = 4 temos y = - 2 e y = +2, o que não está de acordo com a definição de função. Mas podemos considerar que x está em função de y, pois para todo valor y de , temos um único x como correspondente, o que está de acordo com a definição.

A questão solicita uma análise de um gráfico que não representa função na forma da definição convencional, mas podendo ser classificada como função se considerada a relação inversa. Esperamos que os alunos identifiquem essa possibilidade, como já ocorreu na atividade aplicada no pré teste.

2) O gráfico abaixo representa a equação $x^2 + y^2 = 25$



a) Na expressão temos uma relação de dependência entre as variáveis x e y! Poderíamos dizer que y está em função de x? Por quê?

b) E x está em função de y? Por quê?

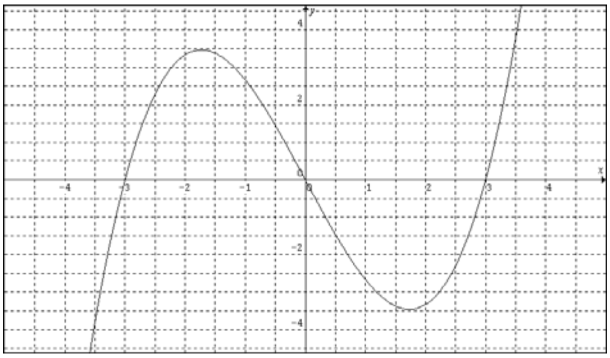
c) Se em uma das opções a expressão representa uma função para que valores ela é crescente ou decrescente?

d) Se em nenhuma das opções não temos uma função, haveria uma faixa de valores que tornaria equação uma função

Resposta: A equação não representa uma função em nenhuma das situações propostas, mas se restringirmos o Domínio no intervalo [-5,5[e o contra-domínio a $_{+}$ *ou* $_{-}$ *teremos a definição de funções . Considerando a função com contra-domínio em* $_{+}$*, a função será crescente no intervalo de [-5,0] e crescente de [0,5]. Já no contra–domínio* $_{-}$*, a função é crescente no intervalo de [0,5] e crescente de [-5,0]*

Da mesma forma que a anterior essa equação não representa uma função de acordo com a convenção para a representação e nem para a relação inversa. Entretanto a definição de domínio e contra–domínio conveniente, como destacado nas respostas nos permitirá a definição de relações funcionais.

4) O gráfico abaixo representa a equação $x^3 - 9x - 3y = 0$



a) Na expressão temos uma relação de dependência entre x e y! Poderíamos dizer que y está em função de x? Por quê?

Resposta: Na equação acima, y está em função de x, pois qualquer que seja x no domínio Real existe um único correspondente y no contra–domínio.

b) E x está em função de y? Por quê?

Resposta: Na equação acima, não representa função de x em , pois para y = 0 temos x= -3, x=0 e x = +3, logo três correspondências.

c) Se em uma das opções a expressão representa uma função para que valores ela é crescente ou decrescente?

Resposta a função é crescente nos intervalos de $\{ x \in \quad / x < -1{,}7 \text{ou } x > 1{,}7\}$ *e decrescente para* $\{ x \in \quad / -1{,}7 < x < 1{,}7\}$

d) Se em nenhuma das opções não temos uma função, haveria uma faixa de valores que tornaria a equação uma função.

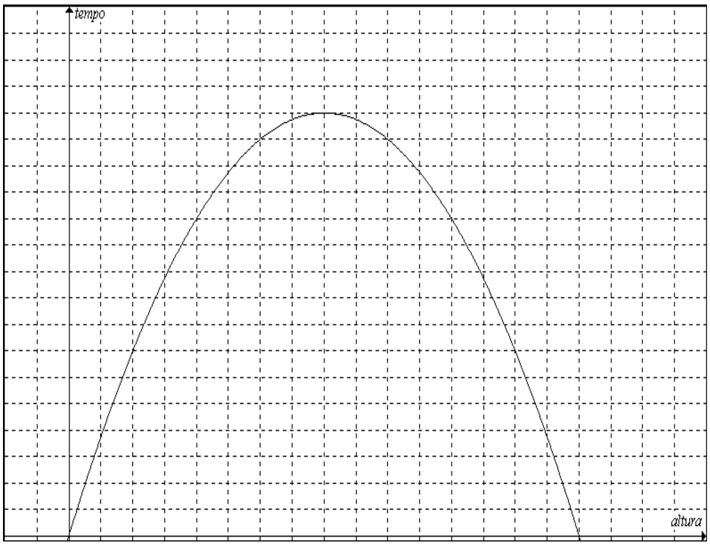
Resposta: A equação representa uma função de y em x

O terceiro gráfico é o único em que temos representação de uma função de y em x. Entretanto a relação inversa não representa função, o que esperamos que seja identificado pelos alunos.

5) Em física o movimento de um corpo em lançamento de um corpo é dado pela expressão $h = 40\,t - 5\,t^2$ onde a altura h é dada em metros e t, tempo decorrido após o lançamento em segundos.

a) Identifique o instante em que o corpo atinge a altura máxima.

Resposta: Sabemos que a trajetória corpo será a indicada no gráfico abaixo, esperando-se que o tempo subida seja o mesmo gasto na trajetória de queda, logo será a metade do tempo *para sair da altura h = 0 metros e voltar a altura h = 0 metros, portanto basta resolver a equação 0 = 40 t – 5 t^2, cujas soluções são 0 e 8 segundos.*



logo, o instante para atingir a altura máxima será $t_{h_{max}} = \frac{0+8}{2} = 4$ *segundos*

b) Identifique a altura máxima

Resposta: logo para t = 4 então h = 40 . 4 – 5 . 4^2 = 80 m. portanto a altura máxima será de oitenta metros.

A solução apresentada acima é a que julgamos ideal uma vez que se enquadraria dentro de uma perspectiva analítica, própria do quadro funcional. Levamos em consideração que os alunos não conhecem as propriedades da função do segundo grau, logo não teriam condições de obter o ponto máximo da parábola e o instante para esse ponto máximo, fazendo uso dessas propriedades. Entretanto devido a estrutura das atividades desenvolvidas no projeto cremos que uma possível solução será a apresentada a seguir:

Como h = 40 t – 5 t^2.

Se t = 1 então h = 40 .1 – 5 . 1^2 = 35 m

Se t = 2 então h = 40 . 2 – 5 . 2^2 = 60 m

Se t = 3 então h = 40 . 3 – 5 . 3^2 = 75 m

se t = 4 então h = 40 . 4 – 5 . 4^2 = 80 m.

se t = 5 então h = 40 . 5 – 5 . 5^2 = 75 m

Se t = 6 então h = 40 . 6 – 5 . 6^2 = 60 m

Se t = 7 então h = 40 . 7 – 5 . 7^2 = 35 m., logo o instante que o corpo atinge a altura máxima é t = 4 segundos, portanto *a altura máxima será de oitenta metros.*