Rosana Nogueira de Lima

Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas

Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC – SP
1999

Rosana Nogueira de Lima

Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas

Dissertação apresentada como exigência parcial para a obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação do Professor Doutor Saddo Ag Almouloud.

PUC – SP
1999

Anexo I – Questionário aplicado aos alunos

Questionário de Matemática

1) Para você, o que é:

a) Elipse?

b) Hipérbole?

c) Parábola?

2) Quantas raízes reais têm as seguintes equações? Justifique.

a) $x^3 + x = 0$ b) $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$

c) $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$ d) $x^3 + 1 = 0$

3) É possível uma equação de 3º grau ter duas raízes reais? Justifique.

4) Qual é o grau da equação $\frac{x^2 - 6}{6} = \frac{1}{x}$? Justifique.

5) Se você fizesse o gráfico da função $f: \Re \rightarrow \Re$ dada por $f(x) = \frac{x^2 - 6}{6}$, que tipo de curva encontraria?

6) Se você fizesse o gráfico da função $f: \Re \rightarrow \Re$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, que tipo de curva encontraria?

7) Você foi capaz de responder às questões 5) e 6) sem fazer o gráfico?

Sim Não

8) Você conhece algum tipo de "método" de resolução de equações de terceiro grau?

Que método é esse?

Onde você aprendeu?

Como resolve-se uma equação por este método?

Você sabe se existe outros além do que você conhece?

9) Você tem alguma dificuldade em resolver equações de 3º grau?

Quais são estas dificuldades?

Anexo II – Atividades da seqüência didática: Primeira aplicação

Atividade Cabri-géomètre

1) a) Crie uma reta d e um ponto F fora de d.
   b) Construa um ponto H sobre o objeto d.
   c) Construa a mediatriz n do segmento FH.
   d) Construa a perpendicular p à reta d passando pelo ponto H. As retas p e n se cortam no ponto M.
   e) Acione a opção “lugar geométrico” do menu “Construção”, clique em M e mova o ponto H. Qual é o conjunto dos pontos M?
   f) Compare as medidas FM e MH.
   g) Por que a reta p foi tomada perpendicular à reta d?
   h) Qual a conclusão que você pode chegar a respeito do conjunto de pontos M?

2) a) Construa uma circunferência de centro F_1 e de raio r.
   b) Crie um ponto F_2 que esteja fora da circunferência. Seja N um ponto sobre esta mesma circunferência.
   c) Crie a reta F_1N e o segmento NF_2
   d) A mediatriz do segmento NF_2 corta a reta F_1N no ponto M.
   e) Justifique a igualdade $|MF_1 - MF_2| = c$, com c constante
   f) Ache o conjunto dos pontos M usando o “lugar geométrico” como no exercício 1, agora movimentando N. Qual a natureza desse conjunto?
   g) Desloque o ponto F_2 por todo o plano, inclusive dentro da circunferência e pertencente a ela. O que acontece com o conjunto de pontos M?
   h) Existe alguma posição para este ponto F_2 para a qual a propriedade $|MF_1 + MF_2|$ = constante é válida? Onde?

Atividade Equação

1) Se o gráfico da parábola que você encontrou no exercício 1) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F(2, 3), H(x, -3) (H pertence à reta d), quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

2) Se o gráfico da hipérbole que você encontrou no exercício 2) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$ e a constante c=2, quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

$_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$ e a constante c=2, quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

3) Se o gráfico da elipse que você encontrou no exercício 2) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$ e constante c=10 quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

(Não é necessário resolver os exercícios 2) e 3).

2) Se o gráfico da hipérbole que você encontrou no exercício 2) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F

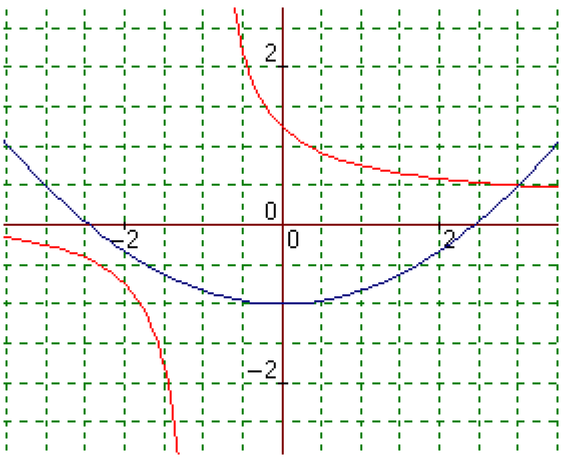
Atividade Encontro

Sejam f: $\Re \to \Re$ e g: $\Re^* \to \Re$ duas funções de valores reais definidas por $f(x) = \frac{x^2 - 6}{6}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$. Existe algum valor de x para o qual as duas funções têm a mesma imagem? Se existe, dê estes valores e justifique sua resposta; se não, explique porquê.

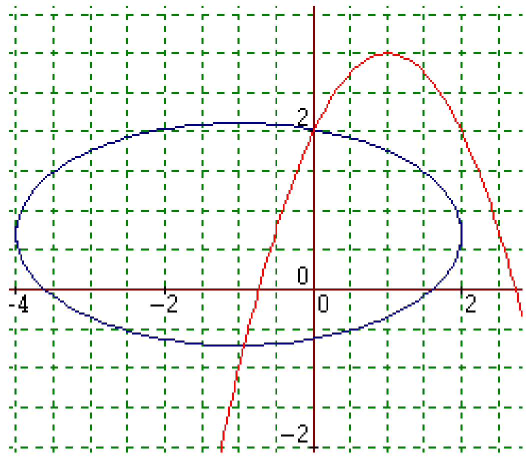
Atividade Gráficos

Identifique cada uma das curvas dadas nos gráficos abaixo. Existem pontos em que elas coincidem? Caso exista dê as coordenadas desses pontos (exatos ou aproximados); se não, explique porquê.

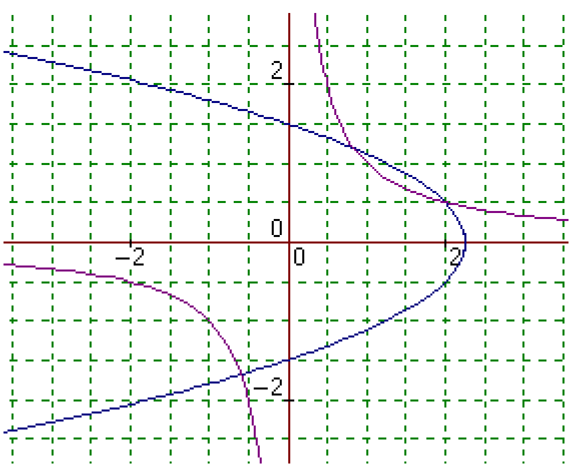
1)



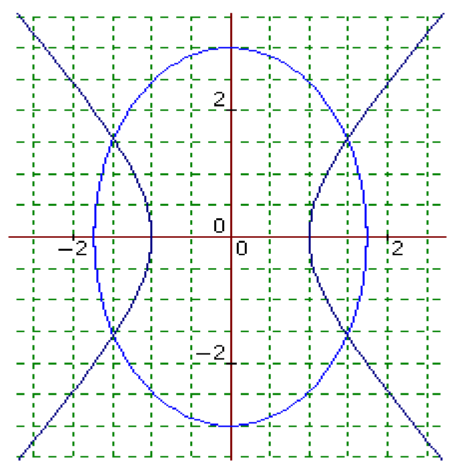
2)



3)



4)



Atividade Duplicação do Cubo

No século V a.C., a Grécia foi tomada por uma peste terrível que assombrou e dizimou grande parte da população. Uma delegação foi enviada ao oráculo de Apolo em Delos para rezar e pedir àquele deus que dissesse o que o povo precisava fazer para que a peste desaparecesse. Conta a lenda que o oráculo determinou que se duplicasse o altar de Apolo, cuja forma era a de um cubo. Os atenienses, obedientemente, duplicaram as dimensões do altar, pensando terem atendido ao pedido divino. A peste, contudo, continuava a se espalhar pelo país pois, quando duplicam-se seus lados, o volume do altar é multiplicado por oito e não por dois.

Platão, ao ser consultado a respeito do problema, respondeu que o intuito dos deuses não era tê-lo resolvido, mas que os Gregos desistissem de guerras e maldades e cultivassem as Musas, para que suas paixões fossem supridas pela Filosofia e pela Matemática, vivendo uma relação de ajuda uns com os outros.

1) Apesar da indagação de Platão, a peste precisava ser detida. Tendo os lados do altar medida 1, calcule seu volume. Encontre uma expressão algébrica para o lado do cubo cujo volume é igual ao dobro do volume do altar.

Observação: O volume de um prisma é igual ao produto de sua altura pela área da base.

2) Utilizando os conhecimentos de cônicas e intersecção de gráficos adquiridos nas atividades precedentes, encontre um valor (mesmo que aproximado) para o lado do cubo procurado.

Atividade Construtor de Equações

1) Construção da Máquina

a) Construa quatro segmentos de medidas arbitrárias a, b, c e d perpendiculares a um segmento AB. A seguir, construa um sistema de coordenadas ortogonais de origem O, de modo que AB seja paralelo ao eixo x.

b) Construa sobre o eixo y o segmento OD de medida d, o segmento OC de medida c+d, o segmento OB de medida b+c+d e o segmento OA de medida a+b+c+d. A seguir, construa sobre o eixo x, um segmento OX de medida x e um segmento OE de medida 1.

c) Pelos pontos X e E construa perpendiculares r e s (respectivamente) ao eixo x.

d) Pelo ponto A, construa a perpendicular t ao eixo y. Seja S o ponto de intersecção de s e t.

e) Construa a reta SB. Seja G a intersecção das retas SB e r.

f) Construa a reta m por G paralela ao eixo x. Seja H a intersecção entre m e s.

g) Construa a reta CH. Seja P a intersecção entre CH e r.

h) Construa a reta n por P paralela ao eixo x. Seja F a intersecção entre n e s.

i) Construa a reta DF. Seja J a intersecção entre DF e r.

j) Qual é o lugar geométrico de J quando X se move sobre o eixo x?

2) Varie a medida dos segmentos a, b, c e d. O que acontece com o gráfico?

O que acontece quando:

- a medida do segmento a é zero?
- as medidas dos segmentos a e b são zero?
- as medidas dos segmentos a, b e c são zero?

A partir das manipulações feitas com a mudança das medidas dos segmentos a, b, c e d, o que se pode concluir a respeito desta “máquina” que você construiu?

3) Calcule as coordenadas do ponto J em função de x, a, b, c e d.

4)Utilizando o Construtor de Equações, construa o gráfico da equação cúbica $x^3 - 6x = 6$. Quais são as raízes desta equação?

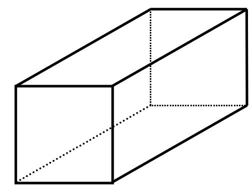
5)Compare os resultados e procedimentos das atividades I e II. Qual dos dois métodos você achou mais fácil de se utilizar? Por que? Em qual dos dois, na sua opinião, as raízes são dadas com maior precisão? Por que?

Atividade Método de Omar Khayyam

Seja a equação $x^3 + 5x^2 + 3x = 1$. É possível transformar esta equação numa igualdade entre duas curvas da mesma família, como na atividade I? Justifique. Encontre as raízes desta equação.

Atividade Cardano

1) O volume do bloco ao lado é igual a n unidades de volume. Os lados da base têm medidas $a+b$ e $a+b+\frac{m}{a+b}$. Sua altura tem medida $a+b$. Encontre uma expressão algébrica para este volume.



2) Compare a expressão que você encontrou acima com o desenvolvimento de $(a+b)^3$ e escreva m e n em função de a e b.

3) Sendo a^3 e b^3 raízes de uma equação de segundo grau, escreva os valores destas raízes em função de m e n.

4) Dada a equação $x^3 - 3x = 2$, encontre $x = a+b$ utilizando os exercícios precedentes.

Atividade Comparação

1) Use o método de Cardano para resolver as equações a) $x^3 - 6x = 40$ e b) $x^3 - 5x = 4$.

2) Use o método de Omar Khayyam para resolver estas equações. Compare os resultados obtidos com as raízes encontradas acima. O que você pode concluir?

Atividade Briot-Ruffini

1) Seja a equação $x^3 - 5x = 4$. Encontre uma raiz desta equação através do critério de pesquisa de raízes e, utilizando o Teorema de d'Alembert, encontre outras, caso existam.

2) Compare este método de resolução com os que você estudou até agora (Cardano e Omar Khayyam). Qual deles é o mais indicado, na sua opinião?

Atividade Final

Agora você está sem o auxílio do computador para resolver equações. Dê as raízes da equação $x^3 - 15x = 4$. Utilize os três métodos que você estudou e compare suas facilidades ou dificuldades.

<u>Anexos III – Atividades da seqüência didática:</u>
<u>Segunda aplicação</u>

Atividade Cabri-géomètre

1) a) Crie uma reta <u>d</u> e um ponto F fora de d.
   b) Construa um ponto H sobre o objeto d.
   c) Construa a mediatriz <u>n</u> do segmento FH.
   d) Construa a perpendicular <u>p</u> à reta d passando pelo ponto H. As retas p e n se cortam no ponto M.
   e) Acione a opção "lugar geométrico" do menu "Construção", clique em M e mova o ponto H. Qual é o conjunto dos pontos M?
   f) Compare as medidas FM e MH.
   g) Por que a reta <u>p</u> foi tomada perpendicular à reta <u>d</u>?
   h) Qual a conclusão que você pode chegar a respeito do conjunto de pontos M?

2) a) Construa uma circunferência de centro F_1 e de raio r.
   b) Crie um ponto F_2 que esteja fora da circunferência. Seja N um ponto sobre esta mesma circunferência.
   c) Crie a reta F_1N e o segmento NF_2
   d) A mediatriz do segmento NF_2 corta a reta F_1N no ponto M.
   e) Justifique a igualdade $|MF_1 - MF_2| = c$, com c constante
   f) Ache o conjunto dos pontos M usando o "lugar geométrico" como no exercício 1, agora movimentando N. Qual a natureza desse conjunto?
   g) Desloque o ponto F_2 por todo o plano, inclusive dentro da circunferência e pertencente a ela. O que acontece com o conjunto de pontos M?
   h) Existe alguma posição para este ponto F_2 para a qual a propriedade $|MF_1 + MF_2|$ = constante é válida? Onde?

Atividade Equação

1) Se o gráfico da parábola que você encontrou no exercício 1) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F(2, 3), H(x, -3) (H pertence à reta d), quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

2) Se o gráfico da hipérbole que você encontrou no exercício 2) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F_1(-3, 0), F_2(3, 0) e a constante c=2, quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

$_1$(-3, 0), F_2(3, 0) e a constante c=2, quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

3) Se o gráfico da elipse que você encontrou no exercício 2) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F_1(-3, 0), F_2(3, 0) e constante c=10 quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

3) Se o gráfico da elipse que você encontrou no exercício 2) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F_1(-3, 0), F_2(3, 0) e constante c=10 quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

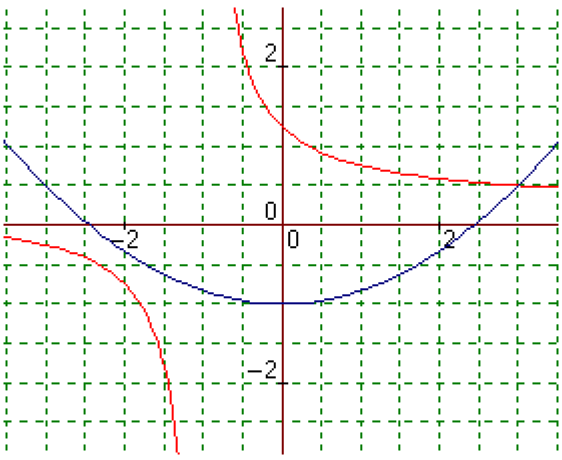
(Não é necessário resolver os exercícios 2) e 3).

2) Se o gráfico da hipérbole que você encontrou no exercício 2) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F

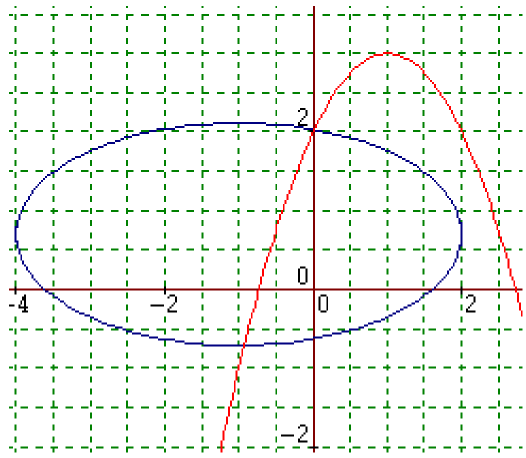
Atividade Gráficos

Identifique cada uma das curvas dadas nos gráficos abaixo. Existem pontos em que elas coincidem? Caso exista dê as coordenadas desses pontos (exatos ou aproximados); se não, explique porquê.

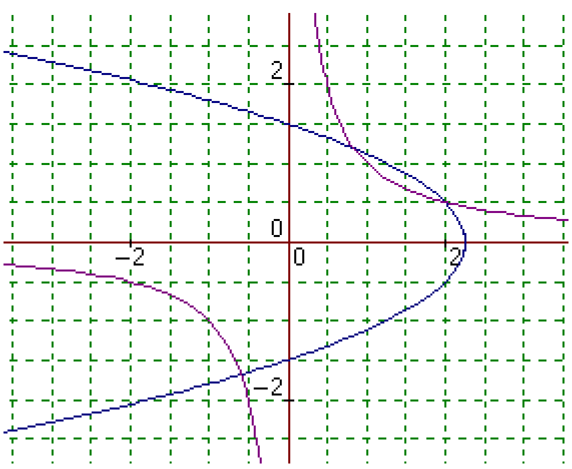
1)



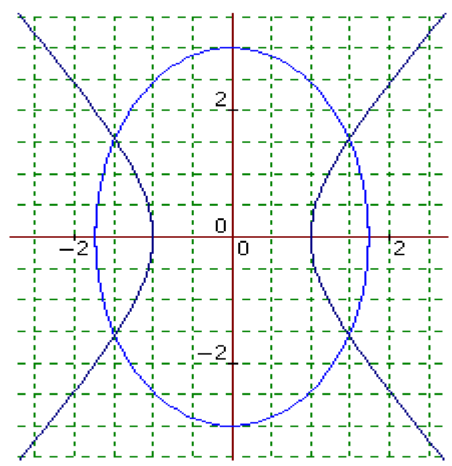
2)



3)



4)



Atividade Encontro

1) Sejam f: $\Re \to \Re$ e g: $\Re^* \to \Re$ duas funções de valores reais definidas por $f(x) = \frac{x^2 - 6}{6}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$. Existe algum valor de x para o qual as duas funções têm a mesma imagem? Se existe, dê estes valores e justifique sua resposta; se não, explique porquê.

2) Os métodos de resolução que você conhece e usou no exercício anterior foram satisfatórios? Você conseguiu encontrar os resultados pedidos? Existe alguma outra forma de encontrar estes valores? Qual? Justifique sua resposta.

Atividade Omar Khayyam

1) Seja a equação $x^3 + 5x^2 + 3x = 1$. É possível transformar esta equação em uma outra formada por duas cônicas? Justifique. Encontre as raízes desta equação.

2) Resolva a equação acima utilizando os métodos que você conhece. Compare seus procedimentos com o método de Omar Khayyam. O que você pode concluir?

Atividade Construtor de Equações

1) Construção da Máquina

a) Construa quatro segmentos de medidas arbitrárias <u>a</u>, <u>b</u>, <u>c</u> e <u>d</u> perpendiculares a um segmento AB. A seguir, construa um sistema de coordenadas ortogonais de origem O, de modo que AB seja paralelo ao eixo x.

b) Construa sobre o eixo y o segmento OD de medida <u>d</u>, o segmento OC de medida <u>c+d</u>, o segmento OB de medida <u>b+c+d</u> e o segmento OA de medida <u>a+b+c+d</u>. A seguir, construa sobre o eixo x, um segmento OX de medida x e um segmento OE de medida 1.

c) Pelos pontos X e E construa perpendiculares <u>r</u> e <u>s</u> (respectivamente) ao eixo x.

d) Pelo ponto A, construa a perpendicular <u>t</u> ao eixo y. Seja S o ponto de intersecção de <u>s</u> e <u>t</u>.

e) Construa a reta SB. Seja G a intersecção das retas SB e r.

f) Construa a reta <u>m</u> por G paralela ao eixo x. Seja H a intersecção entre <u>m</u> e <u>s</u>.

g) Construa a reta CH. Seja P a intersecção entre CH e r.

h) Construa a reta <u>n</u> por P paralela ao eixo x. Seja F a intersecção entre <u>n</u> e <u>s</u>.

i) Construa a reta DF. Seja J a intersecção entre DF e r.

j) Qual é o lugar geométrico de J quando X se move sobre o eixo x?

2) Varie a medida dos segmentos a, b, c e d. O que acontece com o gráfico?

O que acontece quando:

- a medida do segmento a é zero?
- as medidas dos segmentos a e b são zero?
- as medidas dos segmentos a, b e c são zero?

A partir das manipulações feitas com a mudança das medidas dos segmentos a, b, c e d, o que se pode concluir a respeito desta “máquina” que você construiu?

3) Calcule as coordenadas do ponto J em função de <u>x</u>, <u>a</u>, <u>b</u>, <u>c</u> e <u>d</u>.

4)Utilizando o Construtor de Equações, construa o gráfico da equação cúbica $x^3 - 6x = 6$. Quais são as raízes desta equação?