

Ismael de Araújo Silva

**Probabilidades: a visão laplaciana
e a visão freqüentista na
introdução do conceito**

Mestrado em Educação Matemática

**PUC – SP
2002**

Ismael de Araújo Silva

**Probabilidades: a visão laplaciana
e a visão freqüentista na
introdução do conceito**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática sob orientação do Prof. Doutor Saddo Ag Almouloud.

**PUC - SP
2002**

Curricular. Podemos notar ainda, a não presença de atividades sobre essas noções probabilísticas nestes meios didáticos.

Procurando dar encaminhamentos a uma aprendizagem significativa dos conceitos de experimento aleatório e determinístico:

a) iniciamos esta sessão a partir de uma atividade (e não de definições) na qual o aluno para respondê-la entrará em contato com as noções de experimento determinístico e experimento aleatório e ainda, sobre o que se considera em probabilidade, “condições semelhantes”.

Atividade 2

A seguir temos uma lista com dez experimentos (testes, experiências):

1. Lançamento de uma moeda.
2. Lançamento de uma moeda e observação da face voltada para cima.
3. Lançamento de um dado.
4. Lançamento de um dado e observação do número da face de cima.
5. De um baralho comum de 52 cartas, retirar uma carta e observar seu naipe.
6. Sortear uma bolinha no bingo e verificar o número.
7. Lançar um dado e verificar a velocidade com que ele atinge o solo.
8. Verificar a que temperatura um determinado tipo de leite ferve.
9. Encontrar um semáforo em condições normais de funcionamento, e observar qual é a cor que ele está indicando.
10. Abandonar um corpo em queda livre a partir de uma altura conhecida e determinar o tempo gasto para este corpo atingir o solo.

Imagine que cada um desses dez experimentos possa ser repetido um número qualquer de vezes e classifique-os em um dos dois grandes grupos a seguir: (assinale com um x os experimentos que pertencem a cada um dos grupos).

A. Experimentos Determinísticos: experimentos que ao serem repetidos várias vezes, em *condições semelhantes**, apresentam resultados constantes, isto é, os resultados podem ser previstos. Nestes experimentos existe a possibilidade de se fazer a previsão lógica e precisa de qual será o resultado do experimento.

- () 1 () 2 () 3 () 4 () 5
() 6 () 7 () 8 () 9 () 10

B. Experimentos Aleatórios: Experimentos que ao serem repetidos várias vezes, em condições semelhantes*, apresentam resultados variados, não sendo possível, portanto, a previsão lógica dos resultados. Sabemos quais são os possíveis resultados do experimento, mas não sabemos qual particular resultado ocorrerá.

- () 1 () 2 () 3 () 4 () 5
() 6 () 7 () 8 () 9 () 10

* *condições semelhantes*: dizemos que as condições de realização de um experimento são semelhantes, quando as variações das condições que não são levadas em conta não modificam as características da experiência. Podemos dizer ainda que as condições de realização de um experimento são semelhantes, quando estas condições permanecem essencialmente inalteradas.

b) As soluções da "Atividade 2" deverão surgir de uma discussão suscitada pelo professor aplicador. Após esse debate inicial, apresentamos aos alunos as soluções da atividade proposta, abrindo espaço para esclarecimento de dúvidas dos alunos e comentários do professor.

c) Como pré-requisitos para resolução desta atividade, os alunos deverão ter conhecimentos da linguagem escrita, assim como atenção para a interpretação das definições apresentadas.

d) Como possíveis erros apresentados pelos alunos nessa atividade, poderemos observar (possivelmente) uma tendência maior dos alunos em considerar os experimentos dados como experimentos deterministas e não como experimentos aleatórios. Tal fato pode ser justificado pelos trabalhos de Fichbein (FICHBEIN, 1984) o qual assinala o fato do caráter exclusivamente determinista dos currículos atuais.

Soluções da Atividade 2

- Os experimentos 1, 3, 7, 8 e 10 pertencem ao grupo A: são os chamados experimentos determinísticos.
- Os experimentos 2, 4, 5, 6 e 9 pertencem ao grupo B, são os experimentos aleatórios.

e) Em seguida, formalizamos os conceitos de experimento aleatório e experimento determinístico, finalizando o texto com um "elo" para a próxima sessão que tratará do estudo das características dos experimentos aleatórios.

Formalização

- Experimentos Determinísticos: experimentos que ao serem repetidos várias vezes, em *condições semelhantes**, apresentam resultados constantes, isto é, os resultados podem ser previstos. Nestes experimentos existe a possibilidade de se fazer a previsão lógica e precisa de qual será o resultado do experimento.

- Experimentos Aleatórios: Experimentos que ao serem repetidos várias vezes, em condições semelhantes*, apresentam resultados variados, não sendo possível, portanto, a previsão lógica dos resultados. Sabemos quais são os possíveis resultados do experimento, mas não sabemos qual particular resultado ocorrerá.

A Teoria das Probabilidades estuda formas de se estabelecer a possibilidade de ocorrência de cada particular resultado de um experimento aleatório.

f) Tendo a noção de experimento aleatório e experimento determinístico formalizada, propomos uma atividade complementar na qual o aluno terá a oportunidade de retomar, aplicar e fixar tais noções.

Atividade Complementar 1

1) Classifique os experimentos a seguir em **EA** para experimento aleatório ou **ED** para experimento determinístico:

- a)(...) Lançar duas moedas comuns e observar a seqüências de caras e coroas obtidas.
- b)(...) Lançando-se uma moeda em queda livre de uma determinada altura, verificar a velocidade com que a moeda chega ao chão.
- c)(...) Lançar dois dados comuns e observar a soma dos números das faces voltadas para cima.
- d)(...) De um lote de 80 peças boas e 20 defeituosas, selecionar 10 peças e observar o número de peças defeituosas.
- e)(...) Colocar um tipo específico de barra metálica em aquecimento e observar a que temperatura a barra começa a fundir-se ("derreter-se").
- f)(...) De uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 2 bolas brancas, indistinguíveis pelo tato, selecionar uma bola e observar sua cor.
- g)(...) De um baralho comum de 52 cartas, selecionar uma carta e observar seu naipe.
- h)(...) Sob a pressão de uma atmosfera, verificar em que temperatura a água transforma-se em vapor.
- i)(...) Lançando-se um determinado objeto em queda livre, de um determinada altura, verificar o tempo gasto para este objeto atingir o solo.
- j)(...) Numa cidade onde 10% de seus habitantes possuem determinada moléstia, selecionar 20 pessoas e observar o número de portadores da moléstia.

Esta atividade será recolhida para a análise a posteriori, sendo que na próxima aula ("Sessão 3") os alunos receberão essa atividade corrigida seguida das soluções. Desta forma:

- os alunos poderão observar os erros cometidos e verificarem as respostas corretas.

- o professor terá um material para uma avaliação contínua, realizada ao longo do processo de ensino.

Soluções da Atividade Complementar 1

a) (EA) b) (ED) c) (EA) d) (EA) e) (ED)
f) (EA) g) (EA) h) (ED) i) (ED) j) (EA)

Sessão 3: Características de um Experimento Aleatório

Finalizamos a formalização da sessão 2 afirmando que a Teoria das probabilidades estuda os experimentos aleatórios: nesta sessão (3) procuramos proporcionar aos alunos uma apropriação significativa das características de um experimento aleatório.

Em nossa análise dos livros didáticos observamos que quatro entre os seis livros analisados não apresentam nenhuma referência às características dos experimentos aleatórios; os outros dois livros analisados apenas citam estas características, sem qualquer tipo de atividade inicial ou complementar. A Proposta Curricular cita tais características, no entanto não sugere o desenvolvimento dessas noções no trabalho com os alunos, tão pouco propõe atividades que envolvam estas noções.

Objetivando o ensino das características de um experimento aleatório e uma aprendizagem significativa por parte do aluno de tais noções:

Iniciamos a sessão 3 de nossa seqüência a partir de uma atividade composta de uma introdução seguida de três questões com o intuito de instigar o aluno a estabelecer as características de um dado experimento aleatório.

Atividade 3

Como já vimos, chamamos experimento aleatório o experimento que, ao ser realizado repetidas vezes, em condições semelhantes, apresenta resultados variados.

Considere o seguinte experimento aleatório: lançamento de um dado e observação do número da face voltada para cima.

Responda às questões a seguir:

- 1) É possível repetir-se esse experimento várias vezes em condições semelhantes?
- 2) Existe a possibilidade de se estabelecer o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento? Se existe essa possibilidade, quais são, então, os resultados possíveis neste experimento?
- 3) Ao lançar o dado, pode-se prever qual será o número da face voltada para cima?

b) Como possíveis estratégias na resolução desta atividade podemos citar que, apesar de já termos definido o que consideramos como "condições semelhantes" na atividade 2, alguns alunos poderão utilizar seu próprio conceito de "condições semelhantes" gerando a resposta "não" para a questão 1. Um tipo de erro possível também poderá ocorrer na questão 3 na qual o aluno interpreta como sendo uma questão que solicita os "possíveis resultados".

c) As soluções da "Atividade 3" deverão surgir de um debate provocado pelo aplicador. Após esse debate inicial, apresentamos aos alunos as soluções da atividade proposta, abrindo espaço para esclarecimento de dúvidas dos alunos e comentários do professor.

d) Durante o debate o professor poderá retomar as considerações sobre "condições semelhantes", assim como estabelecer uma distinção entre "previsão dos resultados possíveis" e "previsão do resultado", visto que consideramos estes aspectos como possíveis soluções ou dúvidas apresentadas pelos alunos.

Soluções da Atividade 3

- 1) Sim, é possível repetir várias vezes o experimento aleatório em questão em condições semelhantes. Na "Atividade 2" estabelecemos o que consideramos por "condições semelhantes".
- 2) Sim, podemos prever quais são os possíveis resultados do experimento aleatório: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
- 3) Ao lançarmos o dado não é possível prever qual será o número da face voltada para cima.

e) Em seguida, institucionalizamos as noções em questão, apresentando formalmente as três características fundamentais de um experimento aleatório:

Formalização

Na "Atividade 3", aparecem implícitas três características fundamentais de um experimento aleatório :

- Experimentos que podem ser repetidos várias vezes (indefinidamente) sob condições semelhantes, isto é, condições essencialmente inalteradas (Questão 1);
- Experimentos para os quais pode-se prever o conjunto de todos os resultados possíveis (Questão 2);

- Experimentos para os quais não se pode prever qual particular resultado, entre todos os possíveis, irá ocorrer (Questão 3);

Os experimentos aleatórios, objeto de estudo da Teoria das Probabilidades, estão sujeitos às "Leis do acaso". É exatamente a intervenção do acaso que nos impede de prever qual particular resultado, entre todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, irá ocorrer.

Mas ... o que é "acaso" ?

Como pode ser observado, finalizamos a formalização acima propondo uma questão ("Mas ... o que é acaso?") desencadeando (possivelmente) algumas indagações, mesmo que não explicitadas, por parte dos alunos e ainda, com este tipo de questão objetivamos também estabelecer um "elo" entre as sessões 3 e 4, visto que, na sessão 4, estudaremos a noção de acaso em probabilidades.

f) Já realizada a formalização, propomos uma atividade complementar ("Atividade Complementar 2") que será recolhida com o intuito de que:

- O aluno retome e aplique as noções estudadas em aula;
- O professor tenha subsídios para uma avaliação contínua;
- Tenhamos um material adequado para análise a posteriori de nossa seqüência de ensino.

Atividade Complementar 2

Considere o experimento aleatório: retirada de uma carta de um baralho comum e observação do seu naipe.

Tendo como referência o experimento aleatório acima, cite três características de um experimento aleatório.

Na próxima sessão ("Sessão 4") entregaremos aos alunos a atividade complementar 2 corrigida seguida das soluções, o que:

- Permitirá aos alunos identificarem os erros cometidos, verificando as soluções corretas.
- Possibilitará comentários do professor sobre a atividade.

Tendo como referência os aspectos descritos anteriormente, procuramos encaminhar uma aprendizagem significativa da noção de acaso por parte do aluno. Para tal:

a) Iniciamos nossa proposta de ensino por meio de uma atividade (atividade 4) composta de:

- Um texto apresentando os principais aspectos da noção de acaso.

Com o intuito de fornecer uma visão ampla da noção de acaso, elaboramos um texto no qual as três concepções epistemológicas do acaso fossem apresentadas. Tal texto tem como referência nosso estudo “conceitual” das probabilidades – Capítulo V desta dissertação.

- Uma questão da forma "verdadeiro ou falso" na qual o aluno deverá respondê-la com base no texto apresentado.

Atividade 4

A complexidade do conceito de acaso já pode ser deduzida da quantidade de palavras que surgem em nosso cotidiano e que se relacionam ou se confundem com ele: sorte, azar, coincidência, acidente, contingência, indeterminação, destino, causa fortuita, aleatoriedade.

Mas definir tais palavras não é um bom caminho para o acaso, pois suas relações são obscuras, elas não se complementam e nem necessariamente se assemelham. Não são categorias de acaso: não podemos dizer que há acasos do tipo azar, do tipo coincidência, acidente, pois são definições que partem de bases distintas. Esses termos podem às vezes cumprir o papel de sinônimo do acaso sem necessariamente serem sinônimas entre si. Ao contrário, podem ser antônimas, como o sentido recorrente de sorte e azar que temos na língua portuguesa. E alguns deles, ora afirmam, ora negam o acaso. Quando se diz alguma coisa é obra do destino, pode-se estar querendo dizer que é um produto de um jogo de forças imprevisíveis da natureza, de cruzamentos não necessários, acidentais. Uma afirmação do acaso. Mas pode ainda referir-se a algo que já estava escrito, previsto num roteiro minuciosamente traçado, do qual não se pode escapar. Negação do acaso.

É bastante nítido como o acaso assume com frequência, e cada vez mais, o centro de debates da filosofia, da matemática, da física, da biologia. Mas, mesmo no interior de cada uma dessas disciplinas, estamos longe de poder observar um consenso sobre o significado desse termo.

Se buscarmos a síntese, o que todas as suas definições parecem ter em comum, algo que, portanto, pode lhe definir uma essência, é o fato de que o acaso é sempre denominado a partir da impossibilidade de localizar as determinações de um fenômeno. Daí, outros fatores decorrem: a imprevisibilidade desse fenômeno, a falta de controle sobre ele, etc. Mas quando as várias disciplinas que abordam o acaso, ou ainda, quando nosso julgamento cotidiano afirma essa impossibilidade de localização das determinações, pode-se estar afirmando coisas

distintas sobre o processo fenomenológico: **as causas do fenômeno são desconhecidas; as causas do fenômeno são desconexas; ou o fenômeno não possui causas.**

Estas três situações sintetizam não propriamente classes distintas de fenômenos, mas três fenomenologias, três posições epistemológicas, se se quiser, pois veremos que dizem respeito à legitimidade do conhecimento que se pode ter sobre tal fenômeno que se chama **acaso**.

(Texto adaptado de "A definição de Acaso" de Ronald Entler, 1997)

Assinale "V" para sentença verdadeira e "F" para sentença falsa.

Com base no resumo acima podemos dizer que num dado fenômeno (ou experimento) intervém o acaso, quando:

- a) (.....) as causas do fenômeno são desconhecidas ou não temos controle sobre as causas ou não conhecemos todas as causas do fenômeno: dizemos então que o fenômeno ocorreu por "acaso".
- b) (.....) as causas do fenômeno são perfeitamente conhecidas o que nos permite realizar uma previsão precisa de qual particular resultado do fenômeno ocorrerá.
- c) (.....) o fenômeno não possui causas, isto é, a ausência de causas é que nos leva a dizer que o fenômeno ocorreu por "acaso".
- d) (.....) as causas do fenômeno são desconexas, ou seja, não existe um encadeamento lógico que justifique racionalmente a ocorrência do fenômeno: dizemos então que o fenômeno ocorreu por "acaso".
- e) (.....) as causas do fenômeno apresentam uma conexão lógica e racional o que possibilita prever com certeza absoluta qual resultado do fenômeno em estudo.

b) Após uma discussão inicial, suscitada pelo aplicador, os alunos deverão tentar responder a questão proposta na "Atividade 4". Seguido um período de tempo para que os alunos respondam a "Atividade 4", recolheremos a questão com o objetivo de:

- Verificar se o texto permitiu aos alunos identificarem as diferentes concepções epistemológicas sobre o acaso.
 - Obter material para uma análise *a posteriori* de nossa seqüência de ensino.
 - Fornecer subsídios para uma avaliação contínua do aluno por parte do professor.
- c) Como possíveis obstáculos nesse tipo de situação, podemos citar os obstáculos psicológicos, nos quais a crença, aceitação ou rejeição do acaso

conceitos de Espaço Amostral e Evento a partir de exemplos seguidos de definição.

Um outro aspecto que julgamos relevante em nossa análise é o fato de que os livros sugerem atividades complementares envolvendo as noções em questão, enquanto que a Proposta Curricular não sugere atividades nesse sentido.

Tendo como meta dar encaminhamentos a uma construção significativa das noções de espaços amostral e evento, a "Sessão 5" foi dividida em três fases: na primeira fase abordamos a noção de espaço Amostral; na segunda fase, a noção de evento, e na terceira fase uma atividade de apoio envolvendo as noções estudadas na primeira e segunda fase.

Como requisito básico para a resolução destas atividades, o aluno deverá disponibilizar conhecimentos elementares da teoria dos conjuntos: representação de conjuntos, igualdade de conjuntos e número de elementos de um conjunto - notações utilizadas nesta teoria.

A seguir, apresentamos nossa proposta para cada fase:

1ª Fase - A noção de Espaço Amostral

Com o intuito de possibilitar uma apropriação significativa da noção de Espaço Amostral, iniciamos nossa proposta de ensino a partir de uma atividade na qual o aluno entra em contato com essa.

Atividade 5

Considere os seguintes experimentos aleatórios:

A: Lançamento de um dado comum (não viciado) e observação do número da face voltada para cima.

B: Lançamento simultâneo de duas moedas comuns distintas e observação de cada uma das figuras das faces voltadas para cima.

a) Apresente um conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório "A".

b) Apresente um conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório "B".

Como possíveis erros ou estratégias de resolução que podem se apresentados pelos alunos nesta atividade, ressaltamos a questão proposta no item "b", no qual a não percepção do fato de que as moedas são distintas

(conforme enunciado) pode gerar uma solução da forma $B = \{(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, coroa)\}$.

As soluções da "Atividade 5" deverão emergir de uma discussão provocada pelo professor aplicador. Após esse debate inicial, apresentamos aos alunos as soluções da atividade proposta, abrindo espaço para esclarecimento de dúvidas dos alunos e comentários do professor.

Soluções da Atividade 5

Vamos representar o conjunto de todos os resultados possíveis de cada experimento por "S" e o número de elementos do conjunto S de $n(S)$.

a) $S = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6 \}$

$$n(S) = 6$$

b) $S = \{ (cara; cara); (cara; coroa); (coroa; cara); (coroa; coroa) \}$

$$n(S) = 4$$

Cada um dos conjuntos que você determinou recebe o nome de ESPAÇO AMOSTRAL do experimento aleatório.

Tendo em vista esse estudo inicial, institucionalizamos por meio da formalização a noção de Espaço Amostral.

Formalização

- Espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

2ª Fase – A noção de Evento

Com o intuito de possibilitar uma aprendizagem significativa da noção de evento probabilístico, propomos uma seqüência de ensino na qual, partindo de uma atividade inicial composta de duas questões, o aluno (implicitamente) entrará em contato com a noção de evento. Como requisitos básicos para a resolução desta atividade, os alunos deverão apresentar conhecimentos sobre números pares, ímpares e primos, além dos quesitos apresentados no início da análise dessa sessão.

Atividade 6

Considere o experimento aleatório: lançamento simultâneo de um dado e uma moeda comuns (não viciados) e observação das faces voltadas para cima.

- 1) Determine o espaço amostral "A" do experimento aleatório acima.
- 2) Determine os subconjuntos "E" do espaço amostral "A" que satisfaçam as condições a seguir:
 - a) ocorrência de número par no dado.
 - b) ocorrência de número ímpar no dado e cara na moeda.
 - c) ocorrência de coroa na moeda.
 - d) ocorrência de número primo no dado e coroa na moeda.

As soluções da "Atividade 6" deverão surgir de um debate suscitado pelo aplicador. Após essa discussão inicial e um período de tempo para que os alunos respondam às questões propostas, apresentamos aos alunos as soluções da atividade: desse modo os alunos identificam os erros, verificam as soluções corretas e o professor pode fazer eventuais comentários.

Soluções da Atividade 6

- 1) O espaço amostral "A" do experimento aleatório dado é:

$$A = \{ (1; cara); (2; cara); (3; cara); (4; cara); (5; cara); (6; cara); (1; coroa); (2; coroa); (3; coroa); (4; coroa); (5; coroa); (6; coroa) \}$$
- 2) Os subconjuntos "E" do espaço amostral "A" são:
 - a) ocorrência de número par no dado

$$E = \{ (2; cara); (4; cara); (6; cara); (2; coroa); (4; coroa); (6; coroa) \}$$
 - b) ocorrência de número ímpar no dado e cara na moeda

$$E = \{ (1; cara); (3; cara); (5; cara) \}$$
 - c) ocorrência de coroa na moeda

$$E = \{ (1; coroa); (2; coroa); (3; coroa); (4; coroa); (5; coroa); (6; coroa) \}$$
 - d) ocorrência de número primo e coroa

$$E = \{ (2; coroa); (3; coroa); (5; coroa) \}$$

Cada um dos subconjuntos do espaço amostral "A" que você determinou recebe o nome de **Evento**.

Como possíveis erros ou estratégias neste tipo de questão podemos citar o fato de que alguns alunos podem não compreender o tipo de experimento em questão: assim, quando se pede "ocorrência de número par", alguns alunos poderão uma solução da forma $E = \{2, 4, 6\}$, não percebendo a relação com o lançamento simultâneo da moeda.

Em seguida, institucionalizamos a noção em estudo: cada um dos subconjuntos apresentados pelos alunos na "Atividade 6" recebe o nome de evento.

Formalização

- **Evento** é qualquer subconjunto de um espaço amostral.

3º Fase - *Atividade Complementar*

Tendo já formalizados os conceitos de Amostragem e Evento, propomos uma atividade complementar (que será recolhida no final da sessão) com o intuito de:

- a) Permitir ao aluno retornar, fixar e aplicar os conceitos de Espaço Amostral e Evento;
- b) Fornecer subsídios para uma avaliação contínua por parte do professor;
- c) Termos elementos para uma análise a posteriori.

Atividade Complementar 3

1) Considere o experimento aleatório: "lançar dois dados e observar o número das faces voltadas para cima". Determine:

- a) o espaço amostral do experimento
- b) o evento: a soma dos pontos é menor que cinco
- c) o evento: a soma dos pontos é par

2) Considere o experimento aleatório: "lançamento de três moedas comuns e observação das figuras das faces voltadas para cima". Construa o espaço amostral e enumere os seguintes eventos:

- a) A: ocorrer pelo menos uma cara
- b) B: ocorrer uma única coroa

3) Seja uma urna contendo 5 cartões brancos e 5 cartões azuis. Considere o experimento aleatório: "retirar dois cartões sucessivamente e observar a cor". Apresente:

- a) o espaço amostral A deste experimento
- b) o evento E: o segundo cartão é azul
- c) o evento F: pelo menos um dos cartões é branco
- d) o evento G: os dois cartões são da mesma cor

4) Um casal planeja ter três filhos. Apresente o espaço amostral do experimento: observação da seqüência de sexos dos três filhos. Em seguida determine o evento: "nascimento de no máximo uma menina"

Na próxima sessão ("Sessão 6") os alunos receberão esta atividade complementar corrigida seguida das soluções: eventuais dúvidas poderão ser sanadas e o professor poderá realizar comentários que julgar pertinentes.

que enfoque tais noções. A Proposta Curricular sugere a seqüência “exemplo - definição” sem, no entanto, propor atividades complementares.

Com o intuito de proporcionar uma apreensão significativa dos tipos de eventos (elementos importantes para se definir os tipos de espaço amostral, assim como o estudo da probabilidade condicional, entre outros elementos) por parte dos alunos, temos como proposta de ensino uma seqüência na qual os aspectos a seguir a compõem:

a) Iniciamos o estudo dos tipos de eventos a partir de uma atividade ("Atividade 7") composta de uma introdução seguida de seis questões. Estas questões enfocam os cinco tipos de eventos, sem ocorrer nesse momento referências formais.

Como requisitos básicos para a resolução desta atividade, os alunos deverão dispor de conhecimentos sobre a teoria dos conjuntos, tais como representações de um conjunto, igualdade de conjuntos, subconjuntos de um dado conjunto, cardinal de um conjunto, as operações de união e intersecção entre conjuntos; conhecimentos sobre múltiplos e divisores de um número natural.

Atividade 7

Como já sabemos, "Espaço Amostral" é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório e "Evento" é qualquer subconjunto do espaço amostral.

Considere o seguinte experimento aleatório: "lançamento de um dado comum e observação do número da face voltada para cima".

- 1) Apresente o espaço amostral do experimento.
- 2) Apresente os subconjuntos unitários do espaço amostral.
- 3) Apresente o evento: "ocorrência de número menor que oito"
- 4) Apresente o evento: "ocorrência de número múltiplo de sete"
- 5) Apresente os seguintes eventos:
 - a) A: ocorrência de número divisor de quatro
 - b) B: ocorrência de número múltiplo de cinco
 - c) O conjunto "M" tal que $M = A \cap B$
- 6) Apresente:
 - a) o evento E: "ocorrência de número par"
 - b) o evento F : "ocorrência de número ímpar"
 - c) o evento $E \cap F$
 - d) o evento $E \cup F$

Tendo como referência essa introdução, projetamos uma proposta de ensino para focar os dois tipos de espaço amostral: a "Sessão 7".

A seguir apresentamos nossa proposta:

- a) Iniciamos nosso estudo não a partir de definições, mas tendo como ponto de partida uma atividade composta de duas questões na qual o aluno, implicitamente, se envolverá com as noções de equiprobabilidade e não equiprobabilidade de um espaço.
- b) Como pré-requisitos que deverão ser apresentados pelos alunos para resolução desta atividade estão: conhecimentos sobre espaço amostral (noção já desenvolvida na sessão 5); capacidade de leitura e interpretação das explanações dadas na forma escrita ao longo da atividade.

Atividade 8

1) Considere o experimento aleatório: "lançamento de uma moeda comum (não viciada) e observação da figura da face voltada para cima".

a) Determine o espaço amostral deste experimento.

b) Assinale a afirmação correta:

I. () Temos um Espaço Amostral Equiprovável, isto é, os possíveis resultados deste experimento são igualmente prováveis: as chances de se obter um resultado são as mesmas de se obter outro.

II. () Temos um Espaço Amostral não-equiprovável, ou seja, os possíveis resultados deste experimento não são igualmente prováveis: as chances de se obter um resultado são maiores que as chances de se obter outro.

2) Numa determinada classe de alunos existem 28 meninas e 23 meninos. Seus nomes são colocados em pequenos cartões e depositados em uma urna com a finalidade de se realizar o sorteio de um aluno da classe.

Considere o experimento: "sortear o nome de um aluno e verificar se este é menino ou menina".

a) Apresentar o espaço amostral deste experimento.

b) Assinale a afirmação correta:

I. () Temos um Espaço Amostral Equiprovável, isto é, os possíveis resultados deste experimento são igualmente prováveis: as chances de se obter um resultado são as mesmas de se obter outro.

II. () Temos um Espaço Amostral não-equiprovável, ou seja, os possíveis resultados deste experimento não são igualmente prováveis: as chances de se obter um resultado são maiores que as chances de se obter outro.

c) As soluções da "Atividade 8" deverão emergir de um debate provocado pelo professor aplicador. Após esse debate inicial e um período de tempo para que os alunos respondam as duas questões da "Atividade 8", apresentamos as soluções desta atividade e institucionalizamos através da formalização os dois tipos de espaço amostral, abrindo espaço para esclarecimento de dúvidas dos alunos e comentários do professor.

Soluções da Atividade 8 e Formalização

1) a) Ao lançarmos uma moeda comum e observarmos sua face temos dois resultados possíveis: cara (C) ou coroa (K). Portanto seu espaço amostral é:

$$A = \{ C; K \}$$

b) Temos um Espaço Amostral Equiprovável: a afirmação " I " é a correta. Portanto:

- Um Espaço Amostral é denominado Equiprovável quando todos os seus eventos elementares correspondem a resultados igualmente prováveis.

2) a) O experimento aleatório em questão consiste em sortear um cartão da urna e verificar se o nome corresponde a um menino ou a uma menina da classe. Temos dois resultados possíveis: o cartão sorteado possui um nome correspondente a um menino (H) o cartão possui um nome correspondente a uma menina (M).

O espaço amostral é: $A = \{ H ; M \}$

c) Como há um número maior de meninas na classe parece-nos razoável admitir que o fato de uma menina ser sorteada é mais provável que o fato de um menino ser sorteado. Os eventos elementares $\{ H \}$ e $\{ M \}$ não são igualmente prováveis. Nesse caso, o espaço amostral é dito não-equiprovável.

- Um espaço amostral é denominado não equiprovável quando entre seus eventos elementares existe(m) aquele(s) com maior(es) chance(s) de ocorrência.

Nesse momento, poderão ocorrer esclarecimentos de dúvidas dos alunos e comentários pertinentes do professor.

d) Tendo já formalizados os conceitos de equiprobabilidade e não equiprobabilidade de um espaço amostral, propomos uma atividade complementar ("Atividade Complementar 5") com o intuito de:

- Permitir ao aluno retomar, fixar e aplicar as noções formalizadas em nosso estudo.
- Fornecer elementos para uma avaliação contínua do professor.

- Obter material para uma análise a posteriori da seqüência didática.

Atividade Complementar 5

1) Uma urna contém 5 bolas verdes, 3 brancas e 4 pretas, indistinguíveis pelo tato. Considere o experimento aleatório: retirada de uma bola da urna e observação de sua cor.

Apresente o espaço amostral do experimento e em seguida classifique-o em equiprovável ou não-equiprovável.

2) Considere o seguinte experimento aleatório: lançamento de um dado comum (não viciado) e observação do número da face voltada para cima.

- Qual o espaço amostral deste experimento?
- Este espaço amostral é equiprovável ou não-equiprovável?

3) Considere o seguinte experimento aleatório: retirada de uma carta de um baralho comum e observação do naipe desta carta.

Determine seu espaço amostral e, em seguida, classifique-o.

4) Imaginemos um experimento aleatório que consiste em lançar uma tacinha (também conhecida como percevejo) e observar sua posição após a queda.

- Apresente um espaço amostral para o experimento.
- Classifique o espaço amostral encontrado.

Na próxima sessão ("Sessão 8"), devolveremos a "Atividade Complementar 5" corrigida para os alunos, seguida das soluções: desse modo os alunos poderão identificar os erros cometidos, verificar as soluções corretas e esclarecer eventuais dúvidas e com o professor.

Soluções da Atividade Complementar 5

1) $A = \{ \text{verde, branca, preta} \}$

Este espaço amostral é não-equiprovável visto que seus eventos elementares não possuem a mesma probabilidade de ocorrência.

2) a) $A = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6 \}$

b) Temos um espaço amostral equiprovável: as chances de ocorrência de cada um dos eventos elementares são iguais.

3) $A = \{ \text{ouros; copas; paus; espadas} \}$

O espaço amostral é equiprovável.

4) Ao lançarmos uma tacinha o observarmos sua posição após a queda temos duas chances:

- posição 1: "ponta e cabeça encostadas no solo"
- posição 2: "apenas cabeça sobre o solo"

$A = \{ \text{posição 1; posição 2} \}$

Podemos notar através da experimentação que as posições "1" e "2" não são igualmente prováveis. Temos um espaço amostral não-equiprovável.

Sessão 8: Introdução à Definição de Probabilidades

Nesta sessão procuramos realizar uma introdução à definição de probabilidades: não pretendemos ainda formalizar a definição, mas através de um texto (que elaboramos com base em nosso estudo realizado neste, trabalho) disponibilizar as duas posições que, historicamente, desenvolveram-se quase que simultaneamente:

- a) A possibilidade de estabelecer a probabilidade de um evento através de uma previsão teórica (probabilidade calculada *a priori*);
- b) A possibilidade de se estabelecer a probabilidade de um evento através da realização prática do experimento (probabilidade calculada *a posteriori*).

Como intentamos projetar uma proposta de ensino abrangente e significativa do conceito de probabilidade, pensamos que as duas visões probabilísticas devem ser abordadas.

Dessa forma, iniciamos a "Sessão 8" através de uma atividade ("Atividade 9") composta de um texto e duas questões. Sugerimos que o texto seja lido em conjunto (alunos e professores) e acompanhado de explicações pertinentes do professor: a idéia central do texto é tentar possibilitar aos alunos apreenderem dois modos de se estabelecer a probabilidade de um evento (através de previsões teóricas ou através de realizações do experimento). Como requisitos básicos para a realização da atividade, o aluno deverá disponibilizar conhecimentos sobre leitura e interpretação de informações dadas por meio de um texto no qual se mesclam elementos da linguagem escrita e da linguagem matemática.

Atividade 9

Neste estudo realizado até o momento estivemos preocupados com experimentos cujos resultados não temos certeza, mas sobre os quais existe a possibilidade de se fazer previsões matemáticas fornecidas pela Teoria das Probabilidades. São experimentos como "lançamento de um dado comum e observação da face voltada para cima": qual das faces obteremos? Ou o lançamento de uma moeda comum e observação da face voltada para cima: o resultado será cara ou coroa? Ou ainda, a retirada de uma carta de um baralho comum: qual será seu naipe?

Um aspecto importante que salientamos em nosso estudo é o de espaços amostrais equiprováveis nos quais temos resultados igualmente prováveis ou igualmente possíveis.

Considerando-se o lançamento de um dado comum e observando-se a face voltada para cima, estamos de comum acordo que qualquer uma das seis faces do dado tem possibilidade igual à de qualquer outra de cair virada para cima: dizemos então que cada uma das faces do dado tem uma chance em seis de cair voltada para cima. Em outras palavras, dizemos que a probabilidade de obtermos face "5" (ou qualquer uma das outras faces) é $1/6$ (uma "chance" em seis).

Da mesma forma, ao lançarmos uma moeda comum (não-viciada) parece-nos razoável admitir que qualquer uma das faces tem a mesma chance ou igual possibilidade de cair voltada para cima. Podemos dizer que a face cara tem uma chance em duas de cair voltada para cima, ou melhor, que a "probabilidade" de obter face cara é $1/2$.

Entretanto, precisamos verificar através da experiência se nossa intuição de fato está correta, ou seja, se nossas conclusões ou previsões teóricas estão de acordo com a realização prática do experimento.

Consideremos, mais uma vez, o fenômeno aleatório "lançamento de uma moeda comum e leitura da face voltada para cima". Se fizermos n vezes a experiência e obtivermos m vezes o resultado "cara", diremos que a frequência absoluta do evento "cara" é m e a frequência relativa é m/n e ainda, que a probabilidade de se obter cara é m/n quando n tende ao infinito (isto é, realizamos a experiência um número n crescente de vezes).

De fato, a experiência nos mostra que, repetindo-se o experimento um número n crescente de vezes, a probabilidade de ocorrência do evento "cara" é $1/2$, isto é, a ocorrência do evento cara tende a estabilizar-se em torno de 0,5.

A tabela abaixo mostra os resultados de algumas experiências históricas neste assunto:

experimntador	KERRICH	BUFFON	PEARSON
m	5087	2048	12512
n	10000	4040	25000
m/n	0,5087	0,50693	0,50048

Essas e muitas outras experiências mostram que, de fato, nossas conclusões estão corretas: no lançamento de uma moeda perfeita (homogênea, simétrica, etc.) a "chance" ou "probabilidade" de obter cara é $1/2$ ou 0,5 ou 50%.

Notemos que em nenhum dos casos da tabela acima o resultado experimental esteve exatamente de acordo com a previsão teórica, mas esteve bem próximo. Se fizéssemos a experiência com 100 000, 1 milhão, 1 bilhão de lançamentos, o quociente m/n (razão entre o número de caras observadas e o número de vezes que o experimento foi realizado) estaria bem mais próximo do valor teórico. Ou seja, $1/2$ é o limite de m/n quando n tende ao infinito.

Do mesmo modo, se fizéssemos experimentos com o lançamento de um dado comum (não-viciado), notaríamos que o valor teórico $1/6$ (ou 0,1666... ou 16,666...%) que propusemos para probabilidade de cair uma das faces está de acordo com a experiência.

Assim, quando fazemos uma "previsão teórica" de que probabilidade de ocorrência de face 5 no dado é de $1/6$ ou 0,1666... ou 16,666...% estamos implicitamente de acordo com a

"realização prática do experimento": ao realizarmos "n" lançamentos observamos "m" faces 5 e o quociente m/n (chamado frequência relativa) tende a 0,1666... quando n tende ao infinito.

Tendo como referência o texto anterior, responda às duas questões a seguir:

1) Numa urna existem cinco bolas indistinguíveis pelo tato: quatro vermelhas e uma amarela. Deseja-se retirar uma bola dessa urna e verificar sua cor. Dizemos que a bola amarela tem uma chance em cinco de ser retirada e que temos quatro chances em cinco de retirarmos uma bola vermelha. Ou melhor:

- A probabilidade de se retirar uma bola amarela é de $1/5$ ou 0,2 ou 20%.
 $P(A) = 1 / 5$
- A probabilidade de se retirar uma bola vermelha é de $4/5$ ou 0,8 ou 80%.
 $P(V) = 4 / 5$

Em termos de "realização prática do experimento", o que significa dizermos que a probabilidade de retirarmos bola vermelha é de $4 / 5$ ou de 0,8 ou de 80%?

2) Numa urna existem quatro cartões de mesma forma: um branco, um azul, um vermelho e um preto. Considere o experimento: retirada de um cartão e observação da sua cor.

- a) Qual a probabilidade de que o cartão retirado seja azul? Expresse o resultado nas formas fracionária, decimal e percentual.
- c) Como podemos explicar o resultado encontrado no item anterior através da realização de experiências?

Após a leitura do texto (propomos uma leitura em "conjunto": alunos e professor aplicador), uma discussão inicial incitada pelo aplicador e um período de tempo para que os alunos respondam a "Atividade 9", apresentamos as soluções das questões propostas nesta atividade, momento em que o texto pode ser retomado e eventuais dúvidas dos alunos serem esclarecidas.

Como possíveis entraves no desenvolvimento desta atividade, podemos citar o fato de alguns alunos não apreenderem quais são as duas formas de se obter a probabilidade de um dado acontecimento: possivelmente poderão existir três casos: alunos que apreendam apenas a chamada "previsão teórica"; alunos que apreendam apenas a chamada "realização prática do experimento"; os alunos que compreendam a possibilidade conjunta destas duas forma de determinação da probabilidade de um dado evento.

Soluções da Atividade 9

1) Ao afirmarmos, por meio de uma previsão teórica, que a probabilidade de retirarmos uma bola vermelha é de "0,8", queremos informar que, ao realizarmos n vezes o experimento em

questão (retirada de uma bola da urna e observação da sua cor), obtemos m vezes o resultado "bola vermelha" e que o quociente m/n (frequência relativa) tende a 0,8 quando o número n de vezes que realizamos o experimento tende ao infinito. Ou ainda, que a frequência m/n tende a estabilizar-se em torno de 0,8 quando o número n de repetições do experimento é suficientemente grande.

2) a) Como temos quatro cartões, sendo apenas um deles de cor azul, dizemos que temos uma chance em quatro de retirarmos o cartão azul (evento A), ou seja, a probabilidade de obtermos um cartão azul é:

- $P(A) = 1/4$ (fracionária)
- $P(A) = 0,25$ (decimal)
- $P(A) = 25\%$ (percentual)

b) O valor teórico que determinamos no item "a" pode ter a seguinte interpretação do ponto de vista da realização prática da experiência:

Realizamos n vezes o experimento "retirada de um cartão da urna e observação da sua cor". Anotamos as k vezes em que obtemos o resultado "cor azul". O quociente k/n tende ao valor teórico 0,25 quando o número n de repetições do experimento tende ao infinito. Ou ainda, à medida que aumentamos o número n de repetições do experimento, aumentamos a aproximação entre o quociente k/n e o valor teórico 0,25.

Em seguida propomos uma atividade complementar ("Atividade Complementar 6") na qual os alunos poderão retomar, fixar e aplicar o estudo realizado até o momento. Tal atividade também poderá fornecer subsídios para uma avaliação contínua dos alunos.

Esta atividade será recolhida para análise a posteriori de nossa seqüência didática.

Atividade Complementar 6

1) Considere o experimento aleatório: "lançamento de um dado comum e observação do número da face voltada para cima".

- a) Qual a probabilidade de obtermos um número par no lançamento desse dado? Exprese o resultado nas formas fracionária, decimal e percentual.
- b) Como você obteve o resultado: valendo-se de uma previsão teórica ou da realização prática do experimento?
- c) Estabeleça uma comparação entre as duas formas (previsão teórica ou realização de experiências) de se obter o resultado.

2) Você faz parte de um grupo de 10 pessoas. Será realizado um sorteio de uma pessoa desse grupo. Quais as chances (ou a probabilidade) de você ser o sorteado? Indique o resultado nas formas fracionária, decimal e percentual.

Como explicar o resultado, imaginando que o experimento acima fosse realizado uma infinidade de vezes?

3) Um baralho comum possui 52 cartas divididas em 4 naipes: ouros, copas, paus e espadas. Considere o experimento aleatório: "retirar ao acaso uma carta do baralho e verificar seu naipe".

- a) Apresente o espaço amostral do experimento.
- b) Qual a probabilidade de que a carta sorteada tenha naipe "espadas"? Apresente probabilidade nas formas fracionária, decimal e percentual.
- c) Você obteve a probabilidade do item "b" através de uma previsão teórica ou através da realização prática do experimento?
- d) Estabeleça uma comparação entre as duas formas de se obter a probabilidade de ocorrência do naipe "espadas" na retirada de uma carta do baralho.

Na próxima sessão ("Sessão 9") os alunos receberão a "Atividade complementar 6" corrigida e seguida das soluções, com o intuito de:

- Permitir ao aluno identificar os erros cometidos e verificar as soluções corretas.
- Permitir ao professor efetuar comentários e observações que julgar pertinentes.

Soluções da Atividade Complementar 6

1) a) Ao lançarmos o dado temos 3 chances em 6 de obter um número par, ou seja, a probabilidade de ocorrer o evento "número par" é:

- $P(E) = 3/6 = 1/2$ (fracionária)
- $P(E) = 0,5$ (decimal)
- $P(E) = 50\%$ (percentual)

b) No caso, fizemos o cálculo da probabilidade fazendo uso da previsão teórica.

c) De acordo com nossa previsão teórica, a probabilidade de se obter face par no lançamento do dado é de 0,5. Vamos imaginar que realizássemos n lançamentos do dado e anotássemos o número p de vezes em que obtivemos face par : a medida que aumentamos o número n de lançamentos, o quociente p / n se aproxima cada vez mais de 0,5. Quanto maior o número de lançamentos mais próximos estaremos de 0,5: quando n tende ao infinito podemos dizer então que o quociente p/n tende ao valor teórico 0,5.

2) Sendo você uma das dez pessoas, podemos dizer que você tem uma chance em dez de ser sorteado(a), isto é, a probabilidade de você ser sorteado(a) é $1/10$ ou 0,1 ou 10%.

Imaginemos que você realize v vezes o experimento e observe o número s de vezes que você foi o sorteado. A frequência relativa s/v se aproxima cada vez de 0,1 à medida que o número v de repetições do experimento também aumenta. Ao realizarmos o experimento uma

Atividade 10

1) Uma urna contém 20 bolas idênticas, indistinguíveis pelo tato, numeradas de 1 a 20. Considere o experimento aleatório que consiste em retirar ao acaso uma bola dessa urna e observar seu número. Apresente o espaço amostral A desse experimento, $n(A)$, e em seguida, classifique-o.

Determine a probabilidade de ocorrência de cada um dos eventos a seguir:

- a) "Ocorrência de número par"
- b) "Ocorrência de número divisor de vinte"
- c) "Ocorrência de número múltiplo de cinco"
- d) "Ocorrência de número primo"

Para o cálculo das probabilidades acima, você fez uso da definição laplaciana ou da definição freqüentista de probabilidades?

2) Considere o experimento aleatório: lançamento de duas moedas comuns (uma dourada e uma prateada) e observação da figura da face voltada para cima. Qual a probabilidade de que:

- a) Em ambas ocorra "cara"?
- b) Em uma ocorra "cara" e na outra "coroa"?
- c) Não ocorra nenhuma "cara"?
- d) Ocorra pelo menos uma "coroa"?

Para o cálculo das probabilidades acima, você fez uso de que tipo de definição: a "laplaciana" ou a "freqüentista"?

3) No lançamento de uma tachinha ou percevejo (muito usada para afixar cartazes, entre outras utilidades) para o alto e observação da sua posição de equilíbrio sobre o solo após a queda.

- a) Apresente um exemplo de evento impossível para o experimento em questão.
- b) Apresente o espaço amostral do experimento.
- c) O espaço amostral do experimento em questão é equiprovável ou não-equiprovável?
- d) Explique como poderíamos determinar a probabilidade de ocorrência de cada um dos possíveis resultados do experimento. Diga qual a definição utilizada para determinar as probabilidades: laplaciana ou freqüentista?

Observemos que a questão 3 desta atividade, poderá ser solucionada apenas com o uso da noção freqüentista de probabilidades. Entretanto, podemos dizer que poderão ocorrer casos nos quais os alunos utilizem-se da definição clássica de probabilidades para a resolução, ocasionando soluções incorretas, como "a probabilidade de se obter um dos possíveis resultados do experimento é $1/2$ ".

As questões 1 e 2 apresentam espaços amostrais equiprováveis, os quais permitem a aplicação da noção clássica de probabilidade. Entretanto,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(A)}$$

Ao trabalharmos com espaços amostrais não-equiprováveis, isto é, espaços amostrais nos quais seus eventos elementares não são igualmente prováveis, o estudo experimental nos mostra que a definição laplaciana não é aplicável: temos de recorrer à definição freqüentista para estabelecermos a probabilidade de ocorrência de um determinado evento. No entanto, há que se considerar a importância da definição laplaciana, pois essa nos permite o cálculo da probabilidade de um evento (em um espaço amostral equiprovável) sem a necessidade da realização prática do experimento.

Nessa etapa o professor aplicador fará a leitura do texto em conjunto com os alunos, suscitando uma discussão e esclarecendo eventuais dúvidas dos alunos.

VI. Propomos a aplicação de uma atividade complementar ("Atividade complementar 7") com os seguintes objetivos:

- Permitir aos alunos retomar, fixar e aplicar os conceitos formalizados nessa sessão.
- Fornecer elementos para análise posterior de nossa seqüência.

Atividade Complementar 7

1) No lançamento de dois dados perfeitos e distinguíveis, um branco e outro vermelho, qual é a probabilidade de que:

- a) a soma seja "sete"?
- b) ambos os números sejam pares?
- c) ambos os números sejam iguais?
- d) a soma seja um número primo?

Classifique o espaço amostral do seu experimento e diga qual definição você utilizou para se calcular as probabilidades acima.

2) Um casal planeja ter exatamente 3 crianças. Qual é a probabilidade de que:

- a) duas crianças sejam meninos e a outra, seja menina?
- b) pelo menos um menino?

Qual definição você utilizou para calcular as probabilidades acima?

3) Um jogo de crianças consiste em lançar uma caixa de fósforos sobre uma mesa e observar a face em que a caixa fica apoiada: face "pequena"(F1), face "média"(F2) ou face "grande"(F3).

Apresente o espaço amostral A do experimento em questão e, em seguida, responda as questões:

- a) O espaço amostral em estudo é equiprovável, isto é, os possíveis resultados são igualmente prováveis?
- b) Podemos dizer que a probabilidade de se obter qualquer uma das faces é $2/6 = 1/3$?
- c) Explique como poderíamos determinar a probabilidade de ocorrência de cada uma das faces? Qual visão probabilística devemos utilizar: a "laplaciana" ou a "freqüentista"?
- 4) Considere o experimento aleatório que consiste em lançar uma tampa de um tubo de creme dental e observar sua posição após a queda.
- a) Podemos dizer que temos uma chance em três de obtermos uma entre as três posições possíveis, ou seja, que a probabilidade de ocorrência de uma das posições do "tampa" após a queda é $1/3$? Justifique sua resposta.
- b) O espaço amostral do experimento em estudo é equiprovável?
- c) Como determinar a probabilidade de ocorrência de cada um dos eventos elementares do experimento em questão?

Na próxima sessão ("Sessão 10"), entregaremos a "Atividade complementar 7" corrigida e seguida das soluções: nesse momento, dúvidas dos alunos poderão ser sanadas e comentários ou observações que o professor julgar importantes poderão ser efetuados.

Soluções da Atividade Complementar 7

Questão 1

O espaço amostral do experimento é

$$S = \{(1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(1;6);(2;1);(2;2);(2;3);(2;4);(2;5);(2;6); \\ (3;1);(3;2);(3;3);(3;4);(3;5);(3;6);(4;1);(4;2);(4;3);(4;4);(4;5);(4;6); \\ (5;1);(5;2);(5;3);(5;4);(5;5);(5;6);(6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6)\}$$

$$\text{e } n(S) = 36$$

a) $A = \{(1;6);(2;4);(3;4);(4;3);(5;2);(6;1)\}$ e $n(A) = 6$

$$P(A) = n(A)/n(S) = 6/36 = 1/6 = 16,6\%\dots$$

b) $B = \{(2;2);(2;4);(2;6);(4;2);(4;4);(4;6);(6;2);(6;4);(6;6)\}$ e $n(B) = 9$

$$P(B) = n(B)/n(S) = 9/36 = 1/4 = 25\%$$

c) $C = \{(1;1);(2;2);(3;3);(4;4);(5;5);(6;6)\}$ e $n(C) = 6$

$$P(C) = n(C)/n(S) = 6/36 = 1/6 = 16,6\%\dots$$

d) $D = \{(1;1);(1;2);(1;4);(1;6);(2;1);$

$$(2;3);(2;5);(3;2);(3;4);(4;1);$$

$$(4;3);(5;2);(5;6);(6;1);(6;5)\}$$
 e $n(D) = 15$

$$P(D) = n(D)/n(S) = 15/36 = 5/12 = 41,6\%\dots$$

Questão 2

Adotando-se M = masculino e F = feminino, temos o seguinte espaço amostral: $S = \{MMM; MMF; MFM; MFF; FMM; FMF; FFM; FFF\}$ e $n(S) = 8$

a) Iniciaremos o estudo da história das probabilidades a partir de uma atividade ("Atividade 11") composta de um texto seguido de uma questão.

Atividade 11

A seguir apresentaremos um breve resumo de alguns elementos importantes da história da Teoria das Probabilidades.

Inúmeros povos da Antiguidade, por hábito ou mesmo como forma de passatempo, gostavam de algum tipo de jogo no qual havia a interferência do acaso: os chamados "jogos de azar". Atualmente podemos citar como "jogos de azar": os jogos com dados; baralhos; roletas; sorteios; bingos; rifas além de jogos eletrônicos variados. Foram jogos como esses que suscitaram as primeiras idéias sobre a Teoria das Probabilidades.

A obra intitulada "Livro sobre os jogos de azar", surgida em 1550, pode ser considerada o primeiro trabalho sobre a teoria probabilística: esta obra foi escrita pelo matemático e médico italiano Gerolamo CARDANO (1501-1576). Galileu Galilei (1564-1642) também está entre os primeiros a analisar, matematicamente, os jogos de dados, em sua obra "Considerações sobre os jogos de dados".

Considerado um dos maiores marcos na História da Teoria das Probabilidades, a correspondência entre dois matemáticos franceses, Blaise PASCAL (1623-1662) e Pierre de FERMAT (1601-1665), contribuiu de forma decisiva para a evolução da teoria probabilística: tal correspondência iniciou-se com o intuito de responder a questões de um jogador fanático da época, Antoine Gambaud, conhecido como "Cavaleiro de Méré".

Outros matemáticos também se dedicaram ao estudo de elementos da Teoria das Probabilidades: o matemático holandês HUYGENS (1629-1695) e o francês Abraham de MOIVRE (1667-1754).

Em 1713 é publicada a obra "Ars Conjectandi" ("A Arte de Conjecturar"), de autoria do matemático suíço Jacques BERNOULLI (1654-1705): este trabalho é considerado um marco fundamental no desenvolvimento da concepção freqüentista de probabilidades. Nesta obra, Bernoulli propõe o teorema conhecido como "Lei dos Grandes Números", afirmando que a probabilidade de ocorrência um evento é dada pela sua freqüência relativa quando o número de ensaios deste evento tende ao infinito.

Em seguida temos os trabalhos do matemático suíço EULER (1707-1783) e do matemático alemão D'ALEMBERT (1717-1783).

Contudo, parece haver uma unanimidade em considerar que a Teoria das Probabilidades deve mais a LAPLACE (matemático francês, 1749-1827) que a qualquer outro matemático: em 1812 é publicado seu trabalho "Teoria Analítica das Probabilidades" no qual é apresentada a reconhecida teoria clássica de probabilidades em que a existência da equiprobabilidade de um espaço amostral conduz à relação de probabilidade dada pela razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

Destacamos ainda os trabalhos dos matemáticos russos MARKOV (Andrei Andreyvitch Markov, 1856-1922) e KOLMOGOROV (Andrei Nicolaievitch Kolmogorov, 1903-1987). Markov, em 1906, mostrou a importância das probabilidades em Física, Estatística, Genética e Economia, em seu trabalho que ficou conhecido como "Cadeias de Markov". Em 1933, Kolmogorov apresenta seu trabalho conhecido como "Axiomática de Kolmogorov" na qual, adotando uma base lógica formal, coloca a probabilidade no quadro da Teoria dos Conjuntos.

A seguir, associe o *fato histórico* ao(s) *matemático(s)*:

I. O primeiro trabalho sobre probabilidade surgido com uma obra intitulada "Livro sobre os jogos de azar", escrita por um matemático e médico italiano.

II. Um dos marcos da história das probabilidades: a correspondência entre dois matemáticos franceses.

III. "Ars Conjectandi" (A arte de conjecturar), primeira obra substancial sobre teoria das probabilidades é publicada. Nesta obra, é apresentado um teorema (Lei dos Grandes Números) no qual a probabilidade de um evento ocorrer é dada pela observação da estabilidade da sua frequência relativa quando o número de ensaios desse evento tende ao infinito.

IV. A teoria das probabilidades alcança forma e estrutura através de um conjunto de definições presentes na obra "Teoria Analítica das Probabilidades" de autoria de um matemático francês. É um marco clássico da teoria das probabilidades.

V. Matemáticos que, com suas obras apresentaram as diversas aplicações das probabilidades e acabaram por colocar a teoria das probabilidades no quadro da teoria dos conjuntos, adotando estruturas axiomáticas.

- () LAPLACE - Pierre Simom Laplace (1749-1827)
- () MARKOV - Andrei Andreyvitch Markov (1856-1922)
- () CARDANO - Gerolamo Cardano (1501-1576)
- () PASCAL - Blaise Pascal (1623-1662)
- () KOLMOGOROV - Andrei Kolmogorov (1903-1987)
- () JACQUES BERNOULLI - Jakob Bernoulli (1654-1705)
- () FERMAT – Pierre de Fermat (1601-1665)

b) O professor aplicador fará a leitura do texto em conjunto com os alunos, suscitando uma discussão e esclarecendo eventuais dúvidas dos alunos. Após essa discussão inicial e um período de tempo para que os alunos respondam as questão proposta, recolhemos a "Atividade 11" para uma análise a posteriori (este material poderá também ser utilizado em um processo de avaliação contínua do aluno) de nossa seqüência didática.

c) Em seguida apresentamos as soluções da questão proposta na "Atividade 11", momento em que eventuais dúvidas dos alunos podem ser sanadas e o

professor poderá efetuar comentários ou observações que considerar relevantes.

Como podemos constatar, cada item da questão trata de um aspecto ou fato importante da história das probabilidades e o aluno deveria relacioná-lo ao(s) matemático(s) envolvido(s) no fato em questão:

Soluções da Atividade 11

- O primeiro item trata da (considerada) primeira obra sobre probabilidades: o "Livro sobre os jogos de azar" de Cardano (Gerolamo Cardano, 1501-1576).
- O segundo item trata de um fato considerado um marco fundamental para o desenvolvimento da teoria probabilística: a correspondência entre os matemáticos franceses Pascal (Blaise Pascal, 1623-1662) e Fermat (Pierre de Fermat, 1601-1665), suscitada por jogadores (de "azar") da época, notadamente Antoine Gambaud, o Cavaleiro de Méré.
- O terceiro item trata da obra "Ars Conjectandi" de Jacques Bernoulli (1654-1705), na qual a visão freqüentista de probabilidades é apresentada tendo como base o "Teorema dos Grandes Números" ou "Teorema de Bernoulli".
- O quarto item aborda o trabalho desenvolvido pelo matemático francês Laplace (1749-1827), considerado um marco clássico no desenvolvimento da teoria das probabilidades. A estrutura proposta nesta obra é considerada a base da visão clássica de probabilidades (ou visão laplaciana).
- O quinto item aborda os trabalhos dos matemáticos russos Markov (1856-1922) e Kolmogorov (1903-1987), nos quais a Teoria das Probabilidades se enquadram na Teoria dos Conjuntos, através de estruturas de ordem axiomática.

Na próxima aula, cada aluno receberá a questão proposta na "Atividade 11" corrigida e o professor da turma dará prosseguimento ao estudo da Teoria das Probabilidades: probabilidade da união de eventos, probabilidade condicional, etc.

Nossa proposta de "Introdução ao conceito de probabilidade" enfocando as definições "Laplaciana" e "Freqüentista" de probabilidade termina com a sessão 10.