

João Carlos Passoni

(Pré-)Álgebra:
introduzindo os números inteiros negativos

Mestrado em Educação Matemática

PUC/SP
São Paulo – 2002

João Carlos Passoni
joaocp@uninet.com.br

(Pré-)Álgebra:
introduzindo os números inteiros negativos

Dissertação apresentada à
Banca Examinadora da Pontifí-
cia Universidade Católica de
São Paulo, como exigência
parcial para obtenção do título
de MESTRE em Educação
Matemática, sob a orientação
da Professora Doutora Tânia
Maria Mendonça Campos.

Mestrado em Educação Matemática

PUC/SP
São Paulo – 2002

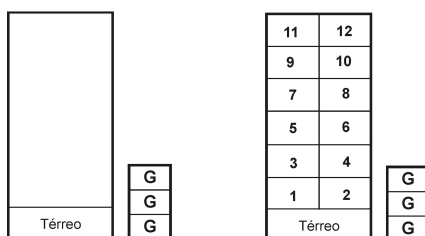
Os alunos realizam a atividade. O professor vê os desenhos mas não faz considerações, mesmo que o aluno solicite uma avaliação para saber se está certo ou errado.

ATIVIDADE 1a

Desenhe um prédio de apartamentos com 1 andar térreo, 12 andares acima do térreo, e três andares de garagens abaixo do térreo.

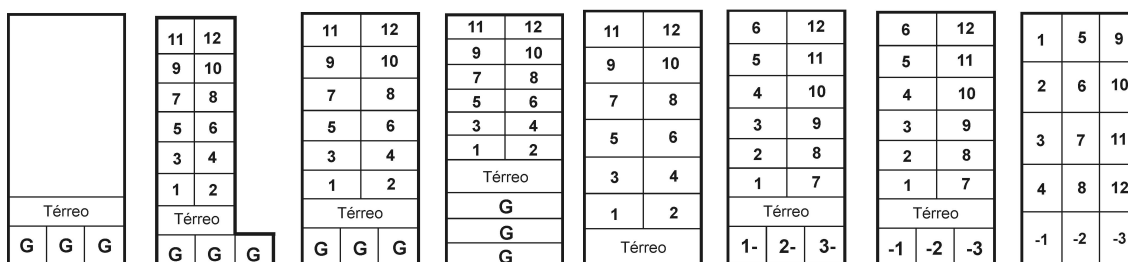
- 20 alunos desenharam um prédio com 16 pavimentos, sendo um térreo, 12 acima do térreo e três abaixo. Diremos que esses alunos pertencem ao conjunto S.

Dividimos os outros 18 alunos em dois grupos não disjuntos. O grupo L, com quatro alunos que desenharam as garagens ao lado do prédio, como nos diagramas a seguir,



e o grupo D, constituído por 15 alunos que desenharam mais de um apartamento ou mais de uma garagem por pavimento. Há um aluno que pertence a ambos os grupos.

Apresentamos a seguir alguns esquemas dos desenhos desses alunos



Atividades vindouras, neste e nos próximos conjuntos de atividades, e intervenções da professora tentarão fazer com que todos os alunos cheguem à representação da ordem habitual dos inteiros em uma reta. Seguiremos os grupos S, L e D nas próximas atividades.

Atividade 1b A atividade 1b envolve mudança de registros, de um registro pluri-funcional não discursivo (figura) para um monofuncional não discursivo (gráfico).

Com essa atividade pretendemos verificar a) como os alunos irão representar o prédio em uma reta e b) como irão numerar os andares.

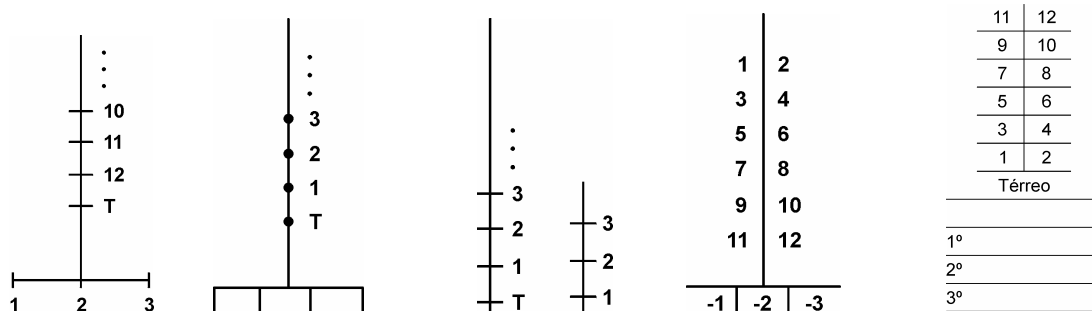
Além disso, é de se esperar, pelo fato de ser um prédio, que o representarão usando uma reta vertical. Ocorrerá tal coisa?

ATIVIDADE 1b

Represente o prédio que você desenhou com uma reta marcando os andares dos moradores, o térreo e os andares das garagens. Numere todos os andares, como você quiser.

- 29 alunos desenharam uma reta vertical e indicaram andares ao lado ou sobre a reta.

Oito alunos quebraram a reta vertical para representar as garagens como nos diagramas a seguir:



Um aluno utilizou três segmentos de retas horizontais para representar os andares do prédio

| | | | |
|---------------------|----|----|----|
| térreo | G1 | G2 | G3 |
| 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 | | | |
| 8, 9, 10, 11, 12 | | | |

Na atividade 1b vamos dividir os alunos em dois grupos. Os que usaram uma reta para representar o prédio, grupo R, e os que quebraram a reta, grupo Q, complementar de R.

Seis alunos do grupo D, da atividade anterior, em vez de representarem o prédio que haviam desenhado, representaram um prédio de 16 pavimentos e portanto estão agora no grupo R. O motivo dessa mudança talvez possa ser atribuído ao fato de que três desses alunos estavam fazendo duplas com colegas que estavam no grupo S ou ao

fato de a professora ter explicado para alguns alunos o significado da palavra *andar*. Os outros oito alunos do grupo D da atividade anterior representaram mais de um apartamento ou garagem por andar e três deles estão no grupo R e cinco no Q.

Todos os alunos de S da atividade anterior estão em R. Quanto aos alunos L da atividade anterior, um está em R. Talvez influência do colega de dupla. Os outros três estão em Q.

Apenas um aluno numerou todos os andares e usou o 0 para numerar o térreo. 34 alunos para o térreo escreveram T ou *térreo*. Três alunos pularam-no.

Todos os alunos usaram os números de 1 a 12 para numerar os apartamentos, dos quais 33 usaram o 1 para o primeiro acima do térreo, o 2 para o segundo e assim sucessivamente. Cinco alunos usaram o 1 para o apartamento mais longe do térreo.

Quanto às garagens, sete alunos indicaram-nas escrevendo *garagem* ou *subsolo* e dois alunos as desenharam, mas não usaram número ou número com um atributo para designá-las. Oito alunos utilizaram números negativos para indicá-las. Os outros alunos usaram ou números naturais ou os naturais seguidos ou antecidos de um atributo.

Atividade 1c A atividade 1c visa responder as questões: a) todos os alunos numerarão os andares acima do térreo na ordem habitual 1, 2, ..., 12? e b) o que fará o aluno para numerar os andares abaixo do térreo?

ATIVIDADE 1c

Represente o prédio que você desenhou com uma reta marcando os andares dos moradores, o térreo e os andares das garagens. Numere os andares da seguinte maneira: o térreo numere com 0, os andares acima do térreo numere com os números 1, 2, 3, ... Como você numera os andares das garagens abaixo do térreo?

- 27 alunos usaram retas verticais indicando os 16 pavimentos. Desses alunos, apenas um não utilizou o 0 para indicar o térreo.

ATIVIDADE 1d

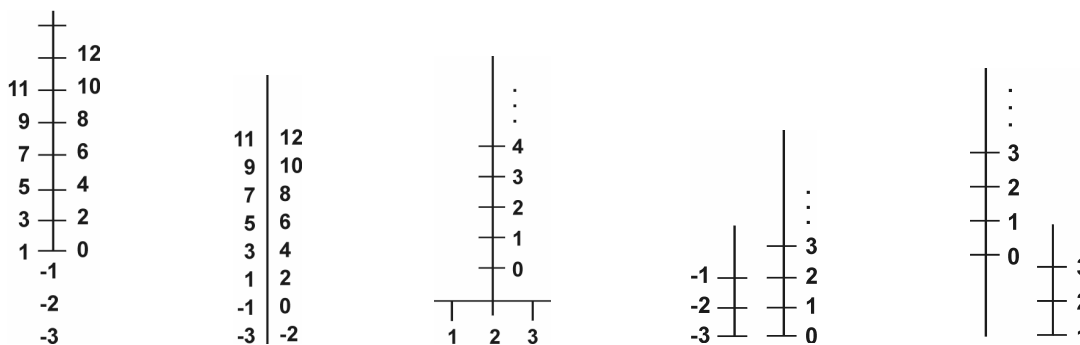
Represente o prédio que você desenhou com uma reta, marcando os andares dos moradores, o térreo e os andares das garagens. Numere os andares da seguinte maneira: os andares acima do térreo com os números 1, 2, 3, ..., o térreo numere 0. Numere os andares das garagens abaixo do térreo da seguinte maneira: para a primeira garagem abaixo do térreo use o número 1 e um sinal para dizer que é o primeiro andar abaixo do térreo. Faça o mesmo com as outras garagens.

- 30 alunos representaram usando retas verticais e marcando ao lado ou sobre essas retas os andares. A seguir apresentamos um quadro com o que escreveram, lido de baixo para cima.

Quadro 2.1.0. – O que os alunos escreveram nas retas verticais

| o que escreveram | nº de alunos | o que escreveram | nº de alunos |
|-----------------------|--------------|----------------------------|--------------|
| -3 -2 -1 0 1 2 ... 12 | 11 | 3S 2S 1S 0 3 2 1 ... 3 2 1 | 1 |
| S3 S2 S1 0 1 2 ... 12 | 3 | 3G 2G 1G 0 1 2 ... 12 | 1 |
| 3º 2º 1º 0 1 2 ... 12 | 3 | 3g 2g 1g 0 1 2 ... 12 | 2 |
| G3 G2 G1 0 1 2 ... 12 | 2 | 1S T 1 2 ... 12 | 1 |
| S1 S2 S3 0 1 2 ... 12 | 2 | 33 32 31 0 1 2 ... 12 | 1 |
| 3S 2S 1S 0 1 2 ... 12 | 2 | -0 -0 -1 1 2 ... 12 | 1 |

Outras apresentações:



23 alunos mantiveram os sinais que haviam utilizado na atividade 1c (-1, S1, etc.).

Quatro alunos que haviam usado -1, -2 e -3 na atividade 1c para as garagens mudaram respectivamente para G1, G2 e G3, 31, 32 e 33, 1g, 2g e 3g e 1G, 2G e 3G.

Os dois alunos que representaram horizontalmente a reta na atividade 1c passa-

mos que os alunos do sétimo e nono desenhos anteriores *quebram* a reta.

Apresentamos a seguir quadro com os erros, tipos de erros e número de alunos.

Quadro 2.1.1. – Erros, tipos de erros e número de alunos para cada tipo na atividade 1e

| erro | tipo | nº de alunos |
|---|----------|--------------|
| inverter a ordem dos positivos | p | 1 |
| inverter a ordem dos negativos | n | 5 |
| pular o zero | z | 4 |
| usar números positivos no lugar de negativos | l | 4 |
| quebrar a reta | q | 2 |
| colocar dois ou mais números para o mesmo ponto de reta | m | 2 |

Como podemos inferir do quadro acima, houve alunos que fizeram mais de um tipo de erro.

Um aluno fez erros dos tipos **p**, **z**, **q** e **m**, um dos tipos **n**, **z** e **l** e outro do tipo **n** e **l**.

Um aluno L da atividade 1a e oito de D estão em A.

Dos 20 alunos que desenharam o prédio como foi solicitado na atividade 1a, 15 acertaram 1e.

Atividade 1f Os alunos devem identificar os números que lhes foram apresentados.

| |
|---|
| ATIVIDADE 1f |
| a) Os números 1, 2, 3, ... são chamados _____ |
| b) O número 0 é chamado _____ ou _____ |
| c) Os números -1, -2, -3, ... são chamados _____ |
| d) Os números ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... são chamados _____ |

- 26 alunos responderam corretamente os quatro itens.

Intencionalmente, a professora apresentou rapidamente os números. Acentuou os nomes *positivos*, *zero* ou *nulo*, *negativos* e *inteiros*. Talvez a pregnância do modelo tenha feito com que seis alunos os designassem por *andares*, *apartamentos*, *térreo* e *garagens*. Um aluno respondeu *números afirmativos* em vez de *positivos*, talvez pela oposição afirmar/negar. Outro respondeu *números íntimos* em vez de *números inteiros*. Quando a

2.2. Segundo conjunto de atividades

No primeiro conjunto de atividades, iniciamos pedindo para os alunos desenharem um prédio que contivesse garagens no subsolo. Levamos esses alunos a nomearem o térreo usando o número zero, os andares acima do térreo usando os números 1, 2, etc. e as garagens abaixo do térreo usando os números -1 , -2 e -3 .

Como começamos com o modelo prédio, é natural que a representação mais imediata para os alunos seja a vertical. No segundo conjunto de atividades, para tentar superar possíveis obstáculos devido à apresentação, utilizamos um modelo bem simples, usando barbante e fichas, e é privilegiada a representação horizontal. Até agora não há muita generalização. Estamos tentando mostrar que uma maneira de representar os números recém-introduzidos é através de uma reta com um ponto inicial, uma distância do zero até o um e um sentido (para a representação horizontal, da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda).

Atividades

Atividade 2a Antes de iniciar a atividade 2a, que é a mesma 1f, o professor pergunta à classe o que viram no primeiro conjunto de atividades. Chama um voluntário para dizer ou escrever na lousa, os números vistos e seus nomes.

| | |
|--|----------------|
| ATIVIDADE 2a | |
| a) Os números 1, 2, 3, ... são chamados | _____ |
| b) O número 0 é chamado | _____ ou _____ |
| c) Os números -1 , -3 , ... são chamados | _____ |
| d) Os números ..., -3 , -2 , -1 , 0, 1, 2, 3, ... são chamados | _____ |

- 30 alunos acertaram todos os itens. A seguir, quadro das respostas dos outros oito alunos. Em negrito, os itens errados.

Quadro 2.2.0. – Respostas dos alunos que erraram algum item da atividade 2a.

| a | b | c | d |
|-------------------|-----------------------|------------------|---------------------------|
| positivos | térreo ou nulo | negativos | inteiros |
| interiores | nada ou zero | [branco] | inteiros |
| [branco] | zero ou nulo | negativos | inteiros |
| positivos | um ou zero | negativos | inteiros |
| adição | [branco] ou nulo | subtração | subtração e adição |
| positivos | térreo ou nulo | negativos | andares |
| positivos | zero ou nulo | negativos | números todos |
| positivos | zero ou térreo | negativos | algarismos |

Cada linha do quadro acima corresponde a um aluno.

No final da atividade 2a, a professora afirmou que doravante nos referiremos aos números $-1, -2, -3, \dots$ como *inteiros negativos* e aos números $1, 2, 3, \dots$ como *inteiros positivos*.

Atividade 2b Para a atividade 2b, o professor diz que vai “derrubar” o prédio da sessão anterior, mas não sugere de que lado o prédio vai “cair”.

Antes de iniciar a atividade, o professor chama um aluno à lousa para apresentar a representação que fez na atividade 1e.

| |
|--|
| <h2 style="margin: 0;">ATIVIDADE 2b</h2> <p>“Vamos derrubar o prédio.” Representar os números inteiros usando desta vez uma reta horizontal.</p> |
|--|

- Todos os alunos usaram retas horizontais.

Quadro 2.2.1. – O que escreveram ao lado ou sobre a reta da esquerda para a direita.

| o que escreveram | nº de alunos | o que escreveram | nº de alunos |
|--------------------------|--------------|---------------------|--------------|
| 12 ... 2 1 0 -1 -2 -3 | 19 | -1 -2 -3 1 2 ... 12 | 2 |
| 1 ... 11 12 0 -1 -2 -3 | 3 | -3 -2 -1 1 2 ... 12 | 1 |
| 8 7 ... 1 0 -8 -7 ... -1 | 1 | 1 2 3 0 1 2 ... 12 | 1 |
| -3 -2 -1 0 1 2 ... 12 | 8 | -1 -2 -3 ... -12 | 1 |
| -1 -2 -3 0 1 2 ... 12 | 2 | | |

18 alunos viraram a folha para representar o prédio derrubado. Exemplos:

ATIVIDADE 2c

Você está recebendo um kit com um pedaço de barbante, várias fichas vermelhas, várias fichas verdes, uma ficha branca e uma flecha desenhada. Escreva na ficha branca 0, nas fichas vermelhas escreva $-1, -2, -3$, etc. e nas fichas verdes escreva $1, 2, 3$, etc. Estenda o barbante horizontalmente em relação a você. Escolha um ponto e coloque a ficha branca. Coloque o número 1 à direita do zero. Com a mesma distância do zero ao 1, coloque os números 2, 3, 4, etc. Coloque os números negativos. Dizemos que estamos orientando a reta da esquerda para a direita. Coloque a flecha \rightarrow ao lado do barbante.

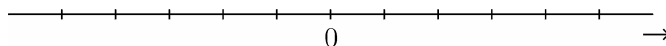
- A professora pediu, após os alunos terem realizado a atividade, para que eles representassem na folha o que haviam feito e que ainda estava à frente deles. Disse ainda que poderiam desenhar uma reta para o barbante, que escrevessem os números em vez de desenhar as fichas. Não seria necessário desenhar a flecha, mas poderiam fazê-lo se assim quisessem.

31 alunos representaram corretamente. Apresentamos a seguir quadro de outros seis alunos e o que escreveram da esquerda para a direita.

Quadro 2.2.2. – Ordens erradas na atividade 2c.

| o que escreveram | nº de alunos |
|--|--------------|
| $-5 -4 -3 -4 -5 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$ | 1 |
| $-1 -2 -3 -4 -5 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$ | 2 |
| $5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \quad -4 \quad -5$ | 3 |

Um aluno desenhou a reta orientada da esquerda para a direita mas só colocou o zero.



Atividade 2d Os alunos para essa atividade não têm mais o kit à sua frente.

Após esta atividade, o professor diz que essa é uma maneira de representar os números inteiros na reta com uma reta horizontal e com sentido da esquerda para a direita. Enfatiza o que é direção (horizontal) e o que é sentido (esquerda para a direita).

ATIVIDADE 2d

Representar os números inteiros em uma reta com direção horizontal, sentido da esquerda para a direita. Você pode, se quiser, desenhar uma flechinha \rightarrow na reta ou ao lado dela.

ATIVIDADE 2e

Você está recebendo um kit com um pedaço de barbante, várias fichas vermelhas, várias fichas verdes, uma ficha branca e uma flecha desenhada. Escreva na ficha branca 0, nas fichas vermelhas escreva $-1, -2, -3$, etc. e nas fichas verdes escreva $1, 2, 3$, etc. Estenda o barbante horizontalmente em relação a você. Escolha um ponto e coloque a ficha branca. Coloque o número 1 à esquerda do zero. Com a mesma distância do zero ao 1, coloque os números 2, 3, 4, etc. Coloque os números negativos à direita do zero. Dizemos que estamos orientando a reta da direita para a esquerda. Coloque a flecha \leftarrow ao lado do barbante.

- Os alunos deveriam dispor as fichas com os números escritos nelas sobre o barbante na ordem $5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0\ -1\ -2\ -3\ -4\ -5$. Em seguida deveriam desenhar na folha o que estava à frente deles. A professora deu a opção de desenhar a flecha ou não.

30 alunos desenharam corretamente.

Quadro 2.2.4. – Ordens erradas na atividade 2e.

| o que escreveram | nº de alunos |
|----------------------------|--------------|
| 5 4 3 2 1 0 -5 -4 -3 -2 -1 | 5 |
| -5 -4 -3 -2 -1 0 5 4 3 2 1 | 1 |
| -1 -2 -3 -4 -5 0 1 2 3 4 5 | 1 |

Um aluno desenhou uma reta orientada da direita para a esquerda com onze bolinhas bem espaçadas e no centro colocou o número 0.

Atividade 2f A atividade é realizada sem a presença do kit. O professor não explica aos alunos o que fazer.

Após essa atividade, os alunos representarão os números inteiros da maneira solicitada?

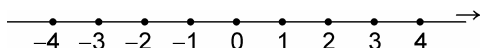
ATIVIDADE 2f

Representar os números inteiros em uma reta com direção horizontal, sentido da direita para a esquerda. Você pode, se quiser, desenhar uma flechinha \leftarrow na reta ou ao lado dela.

- 22 alunos representaram corretamente. A seguir, o quadro com o que 15 alunos escreveram da esquerda para a direita.

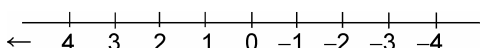
ATIVIDADE 2g

Estão representados a seguir, em uma reta, os números inteiros.



Esta é uma representação usando uma reta com direção a) _____
e com sentido b) _____

Estão representados a seguir, em uma reta, os números inteiros.



Esta é uma representação usando uma reta com direção c) _____
e com sentido d) _____

- 29 alunos acertaram todos os itens. A seguir, o quadro das respostas dos outros nove alunos.

Quadro 2.2.6. – Respostas dos alunos com algum item errado na atividade 2g

| a | b | c | d | nº de alunos |
|----------------|--------------------------------|-----------------|--------------------------------|--------------|
| horizontal | direita para a esquerda | horizontal | esquerda para a direita | 5 |
| horizontal | direita para a esquerda | horizontal | direita para a esquerda | 1 |
| direita | horizontal | esquerda | horizontal | 1 |
| horizontal | direita para a esquerda | [branco] | esquerda para a direita | 1 |
| iguais | diferentes | iguais | diferentes | 1 |

Como podemos ver acima, há alunos que confundem o sentido. Talvez exista algum problema de lateralidade ou algum problema semântico.

Considerações sobre o segundo conjunto de atividades

Como já havíamos assinalado, os possíveis efeitos indesejáveis do modelo pré-dio com que iniciamos a nossa seqüência começaram a desaparecer nesse conjunto de atividades. Houve três alunos que, na atividade 2a, ainda se referiram ao 0 como *térreo*, mas foi a última vez que fizeram tal coisa. Nenhum aluno quebrou mais a reta ou colocou dois ou mais números para um mesmo ponto da reta, como alguns haviam feito no primeiro conjunto de atividades.

O problema a ser superado agora é o da ordem habitual dos inteiros. Aproximadamente metade dos alunos teve dificuldades, em algum momento, em ordenar os núme-

mesmo de se compreender, se não houve uma aprendizagem prévia relativa às especificidades semióticas de formação e de tratamento de representação que são próprias a cada um dos registros presentes.” (Duval, 1995, p. 46) <19>

Este conjunto de atividades, além de propiciar ao aluno maneiras de ler expressões com desigualdades, permite verificar as asserções acima de Duval. É de se esperar, segundo Duval, que a passagem da linguagem natural, notadamente de expressões como *dois é positivo* apresente dificuldades maiores para os alunos que a passagem de expressões como *dois é maior do que zero* para uma linguagem simbólica ($2 > 0$ ou $0 < 2$).

No segundo conjunto de atividades, representamos os inteiros usando retas com direção horizontal e sentido da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Agora vamos estender a representação para quaisquer retas no plano.

Atividades

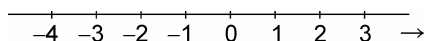
Atividades 3a e 3b A finalidade dessas atividades é consolidar nomenclaturas vistas.

| | |
|---------------------|--|
| ATIVIDADE 3a | |
| e) | Como são chamados os números 1, 2, 3, ...? _____ |
| f) | Como é chamado o número 0? _____ ou _____ |
| g) | Como são chamados os números -1, -2, -3, ...? _____ |
| h) | Como são chamados os números ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...? _____ |

- 37 alunos responderam os quatro itens corretamente. Um aluno escreveu para o item **a** *positivos* ou *inteiros* e para o item **c**, *negativos* ou *inteiros*.

ATIVIDADE 3b

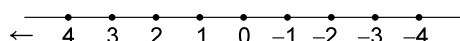
Estão representados a seguir, em uma reta, os números inteiros.



a) Qual a direção desta reta?

b) Qual o sentido?

Estão representados a seguir, em uma reta, os números inteiros.



c) Qual a direção desta reta?

d) Qual o sentido?

- 31 alunos acertaram todos os itens. A seguir, quadro das respostas dos outros sete alunos. Em negrito, os itens errados.

Quadro 2.3.0. – Alunos que erraram algum item na atividade 3b.

| a | b | c | d | nº de alunos |
|----------------|---------------------------------|-----------------|--------------------------------|--------------|
| horizontal | menor para o maior | horizontal | maior para o menor | 2 |
| horizontal | esquerda para a esquerda | horizontal | direita para a esquerda | 1 |
| horizontal | esquerda para a direita | direita | direita para a esquerda | 1 |
| horizontal | direita para a esquerda | horizontal | esquerda para a direita | 1 |
| direita | [branco] | esquerda | [branco] | 1 |
| horizontal | esquerda para a direita | horizontal | direita para a direita | 1 |

Atividades 3c, 3d e 3e Essas atividades são de conversões de registros, da linguagem simbólica para a natural e vice-versa.

O professor verifica cada item e discute com os alunos. A nossa experiência como professor tem mostrado que há alunos que simbolizam *três é positivo* escrevendo apenas 3 e simbolizam *menos quatro é negativo* escrevendo simplesmente -4.

Para explicar a diferença entre, por exemplo, -3 e -3 *é negativo*, o professor pode usar analogia com o Português. É diferente dizer o nome de uma pessoa, por exemplo, *Darci*, e o nome de uma pessoa com um atributo, por exemplo, *Darci é manidestro*.

ATIVIDADE 3c

Primeira Folha

Os números inteiros positivos, isto é, 1, 2, 3, ... são ditos maiores do que zero. Indicamos isto escrevendo, por exemplo,

$$2 > 0$$

ou, o que é a mesma coisa,

$$0 < 2$$

e lemos

dois é maior do que zero ou zero é menor do que dois ou dois é positivo

- Os alunos leram essa folha antes de preencher a próxima. Não foi necessária a intervenção da professora.

ATIVIDADE 3c

Segunda Folha

Colocar os sinais $>$ ou $<$ para obter sentenças verdadeiras e a seguir indicar como ler.

$$4 \text{ ______ } 0$$

Encontrava-se na folha também $5 \text{ ______ } 0$, $0 \text{ ______ } 3$ e $0 \text{ ______ } 1$.

- 36 alunos acertaram a colocação dos sinais e escreveram corretamente as três maneiras sugeridas de leitura.

Um aluno colocou para $4 > 0$, *dois é positivo* embora tenha escrito *quatro é maior que zero e zero é menor que quatro*.

Um aluno, em vez de escrever $0 < 1$, escreveu $0 > 1$, mas escreveu corretamente as três maneiras de ler $0 < 1$.

ATIVIDADE 3d

Primeira Folha

Os números inteiros negativos, isto é, -1 , -2 , -3 , ... são ditos menores do que zero. Indicamos isto escrevendo, por exemplo,

$$-3 < 0$$

ou, o que é a mesma coisa,

$$0 > -3$$

e lemos

menos três é menor do que zero ou zero é maior do que menos três ou menos três é negativo

- A professora pediu para alguns alunos lerem essa primeira folha em voz alta.

ATIVIDADE 3d

Segunda Folha

Colocar os sinais $>$ ou $<$ para obter sentenças verdadeiras e a seguir indicar como podem ser lidas.

-2 _____ 0

Além de -2 _____ 0, havia na folha:

0 _____ -4, 0 _____ 5, 0 _____ -1, -5 _____ 0, 7 _____ 0 e -3 _____ 0.

- 31 alunos acertaram todos os itens.

Cinco alunos colocaram o sinal $<$ e $>$ erradamente, por exemplo $0 < -4$, mas indicaram a leitura de $0 > -4$.

Um aluno escreveu $-5 < 0$, fez duas leituras corretas e *menos cinco é positivo*.

Um aluno para $7 > 0$ repetiu *sete é maior que zero* e não escreveu *sete é positivo*.

ATIVIDADE 3e

Representar usando números e o sinal $>$ ou $<$.

- a) dois é maior do que zero _____ b) três é positivo _____
 c) menos quatro é negativo _____ d) menos cinco é menor que zero _____
 e) zero é maior do que menos dois _____ f) menos seis é negativo _____
 g) quatro é positivo _____ h) menos dez é menor do que zero _____

- 31 alunos acertaram todos os itens.

Quadro 2.3.1.– Erros na atividade 3e.

| item | erro | nº de alunos |
|------|------------|--------------|
| a | $2 < 0$ | 1 |
| b | 3 | 2 |
| b | 0, 1, 2, 3 | 1 |
| c | -4 | 3 |
| c | $-4 > 0$ | 1 |
| e | $0 < 2$ | 1 |

| item | erro | nº de alunos |
|------|---------------|--------------|
| f | -6 | 2 |
| f | -7 | 1 |
| g | 4 | 2 |
| g | $4 < 0$ | 1 |
| g | 0, 1, 2, 3, 4 | 1 |
| h | $10 < 0$ | 1 |

A conversão, segundo Duval, de *dois é positivo* para $2 > 0$ é não-congruente e a conversão de *dois é maior do que zero* para $2 > 0$ é congruente. Quando a conversão é congruente, a taxa de sucesso é maior do que quando é não-congruente. Logo, é de se

esperar que as taxas de acerto dos itens **a**, **d**, **e** e **h** sejam maiores que as dos itens **b**, **c**, **f** e **g**. A tabela a seguir confirma essa previsão.

Tabela 2.3.0. – Desempenho da atividade 3e.

| <i>item</i> | <i>número de alunos que acertaram</i> | <i>%</i> | <i>item</i> | <i>número de alunos que acertaram</i> | <i>%</i> |
|-------------|---------------------------------------|----------|-------------|---------------------------------------|----------|
| a | 37 | 97 | e | 37 | 97 |
| b | 35 | 92 | f | 35 | 92 |
| c | 34 | 89 | g | 34 | 89 |
| d | 38 | 100 | h | 37 | 97 |

A taxa relativamente alta de acerto dos itens talvez se deva ao fato de terem sido feitas anteriormente várias conversões da linguagem simbólica para a linguagem natural. Como havíamos notado, alguns dos alunos que não obtiveram sucesso na atividade representaram, por exemplo, *três é positivo* por 3.

Atividades 3f a 3j Voltamos, nas atividades 3f a 3j, à representação dos inteiros com uma reta. Depois de, no segundo conjunto de atividades, os alunos terem visto o uso de retas apenas na direção horizontal, vamos ampliar este uso para qualquer reta com qualquer direção e qualquer sentido.

ATIVIDADE 3f

Representar os números inteiros usando uma reta com direção horizontal e com sentido da esquerda para a direita.

- 35 alunos representaram corretamente.

Dois alunos colocaram na reta $-1 \ -2 \ -3 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3$, e um aluno $1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 0 \ -1 \ -2 \ -3$.

ATIVIDADE 3g

Representar os números inteiros usando uma reta com direção horizontal e com sentido da direita para a esquerda.

- 33 alunos representaram corretamente.

Um aluno ordenou os números corretamente mas colocou a flecha \rightarrow . Entre os que não fizeram a ordenação corretamente, encontramos as seguintes respostas:

dois alunos, 3 2 1 0 -3 -2 -1; um aluno, -3 -2 -1 0 5 4 3 2 1; um aluno, 1 2 3 0 -1 -2 -3.

Os alunos já haviam feito essas representações no conjunto de atividades anterior. Na ausência do kit, tivemos uma taxa de sucesso de 68% para 3f e 58% para 3g. Agora tivemos, respectivamente, 92% e 87%.

ATIVIDADE 3h

Até agora temos representado os números inteiros usando uma reta com direção horizontal. Podemos usar uma reta com qualquer direção desde que indiquemos o sentido.

Representar os números inteiros usando uma reta com direção vertical e com sentido de baixo para cima.

- 34 alunos representaram corretamente. Dois alunos escreveram o número negativo de maior módulo, dentre os que escolheram, próximo ao zero. Um aluno ordenou os números como solicitado mas colocou \uparrow . Um aluno escreveu de baixo para cima, 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4.

ATIVIDADE 3i

Representar os números inteiros usando uma reta com direção vertical e com sentido de cima para baixo.

- 32 representaram como solicitado.

Três alunos representaram como antes, isto é, com direção de baixo para cima. Um aluno colocou a flecha \uparrow e colocou os seguintes números de cima para baixo, 3 4 5 0 1 2 3. Um aluno colocou os números de cima para baixo, 1 2 0 -2 -1. Um aluno, números de cima para baixo: 2 1 0 -4 -3 -2 -1.

ATIVIDADE 3j

Representar os números inteiros usando uma reta cuja direção não seja nem horizontal e nem vertical. Indicar o sentido usando uma flechinha.

- 30 representaram corretamente, dos quais 13 usaram o sentido sudeste para noroeste \swarrow ; 12 sudoeste para nordeste \nearrow ; quatro noroeste para sudeste \searrow e um, nordeste para sudoeste \swarrow .

Atividades

Atividades 4a a 4e Visto que não será a primeira vez que os alunos farão essas atividades, o professor não explica o que é para ser feito e não tira dúvidas. À medida que os alunos entregarem as folhas, o professor anota aqueles que erraram algum item. No final da atividade, chama-os para tentar descobrir qual é o problema.

ATIVIDADE 4a

Representar os números inteiros usando uma reta horizontal com sentido da esquerda para a direita.

- 36 alunos representaram conforme o solicitado.

Um aluno colocou apenas números positivos e nulo, e outro escreveu a ordem correta mas colocou a flecha ← .

ATIVIDADE 4b

Representar os números inteiros usando uma reta horizontal com sentido da direita para a esquerda.

- 34 alunos representaram corretamente.

Um aluno escreveu a ordem correta mas colocou a flecha → .

Um aluno representou apenas o zero e os positivos.

Um aluno ordenou os números da esquerda para a direita, como em 4a, mas desenhou flecha da direita para a esquerda.

Um aluno indicou com flecha o sentido corretamente mas escreveu números positivos no lugar dos negativos: 3 2 1 0 1 2 3 .

ATIVIDADE 4c

Representar os números inteiros usando uma vertical com sentido de baixo para cima.

- 35 alunos acertaram a atividade 4c.

Três alunos ordenaram corretamente mas desenharam flechas de cima para baixo

E.

ATIVIDADE 4d

Representar os números inteiros usando uma vertical com sentido de cima para baixo.

- 34 alunos acertaram a atividade 4d.

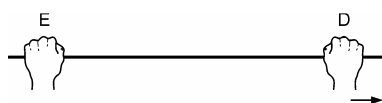
Dois alunos colocaram -3 imediatamente acima do zero. Um aluno ordenou corretamente mas desenhou **A**. Um aluno colocou os números como em c e a flecha **E**.

Depois da atividade 4d, a professora observando terem alguns alunos dificuldades, pediu-lhes que tentassem explicar-lhe o que haviam entendido por *direção* e *sentido*. Alguns desses alunos ainda estavam confusos com esses termos. Para tentar clareá-los, foi proposta a seguinte atividade para toda a classe.

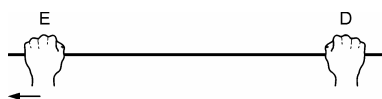
Em uma folha sulfite os alunos desenharam várias retas e colocaram as flechinhas indicando o sentido. Escreveram a direção de cada reta. Depois colocaram as duas mãos fechadas, uma em cada extremidade. Observando o sentido da flecha e as mãos, foram capazes de dizer o sentido.

Exemplos:

Direção horizontal:

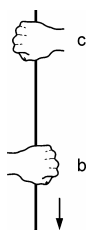


sentido da esquerda para a direita



sentido da direita para a esquerda

Direção vertical:



sentido de cima para baixo



sentido de baixo para cima

Esses alunos também oralizaram que a flechinha indicava o “lado” da reta em que os números “estavam crescendo”.

ATIVIDADE 4e

Representar os números inteiros usando uma reta que não seja nem horizontal e nem vertical. Indicar o sentido usando uma flechinha.

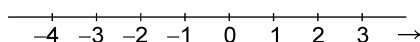
- 36 alunos representaram corretamente. Sentidos utilizados: 17 sudoeste para nordeste, 13 sudeste para noroeste, quatro noroeste para sudeste e dois nordeste para sudoeste.

Um aluno com a direção / e o outro com a direção \ , colocaram as flechas em sentido contrário.

Atividade 4f A atividade 4f tem a finalidade de preparar a próxima. Queremos saber se é claro para todos os alunos que, se usarmos uma reta horizontal, o número, por exemplo 2, em relação ao zero, está à mesma distância do número -2 , tanto com sentido da esquerda para a direita como da direita para a esquerda. E que, se usarmos uma reta com outra direção e outro sentido, acontecerá o mesmo.

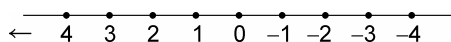
ATIVIDADE 4f

Estão representados a seguir, em uma reta, os números inteiros,



usando uma reta com direção horizontal, orientada da esquerda para a direita.

Estão representados a seguir, em uma reta, os números inteiros.



usando uma reta com direção horizontal, orientada da direita para a esquerda.

- a) A distância do número 0 até o número 1 é diferente ou é igual à distância do número 0 até o número -1 ? _____
- b) Em qual das representações? _____
- c) A distância do número 0 até o número 2 é diferente ou é igual à distância do número 0 até o número -2 ? _____
- d) Em qual das representações? _____
- e) Se usarmos uma outra reta com outra direção e com outro sentido, a distância de 0 a 2 será a mesma distância de 0 a -2 ? _____

- Respostas encontradas para o item **a**: *igual* (37 alunos), *diferente* (um aluno); para o item **b**: *nas duas* (37 alunos), *nas primeiras* (um aluno); para o item **c**: *igual* (33 alunos), *diferente* (5 alunos); para o item **d**: *nas duas* (37 alunos), *na segunda* (um aluno) e para o item **e**: *sim* (32 alunos), *não* (6 alunos).

Depois de os alunos terem entregue a folha, a professora perguntou o que haviam respondido. Em uma das classes um aluno disse que mediu as distâncias e elas eram diferentes, no que foi contestado por colegas. Um aluno escreveu na folha as medidas que encontrou.

A professora disse então que iríamos convencionar que, quando representarmos os inteiros em uma reta, a distância de, por exemplo, zero ao dois sempre será a mesma de zero a menos dois, para qualquer reta, isto é, não importa a direção e o sentido escolhidos e não importa se o desenho esteja bem feito ou não.

Atividade 4g Na atividade 4g, o professor introduz o conceito de oposto de um número inteiro x como sendo um número inteiro que está à mesma distância de x ao zero mas com sentido oposto. Além de simplesmente enunciar tal conceito, faz desenhos na lousa.

Não introduzimos nesta atividade nenhum sinal para a expressão *o oposto de*.

ATIVIDADE 4g

Primeira Folha

Dizemos que o número 3 é o oposto do número -3 e que o número -3 é o oposto do número 3.

Podemos representar tais fatos escrevendo

o oposto de $(3)=-3$ e o oposto de $(-3)=3$

O oposto do zero é o próprio zero. Assim podemos escrever

o oposto de $(0)=0$

- A professora desenhou na lousa uma reta com um sentido. Para cada número in-

teiro que ela representava na reta, perguntava aos alunos qual era o oposto daquele número e onde deveria colocá-lo. Em seguida os alunos fizeram perguntas para seus colegas, por exemplo, *qual é o oposto de 2001?*

| | |
|----------------------------|---------------------------|
| ATIVIDADE 4g | |
| Segunda Folha | |
| Completar. | |
| o oposto de $(-3) =$ _____ | o oposto de $(5) =$ _____ |

Havia ainda nessa folha:

| | |
|-----------------------------|----------------------------|
| o oposto de $(0) =$ _____ | o oposto de _____ $= -6$ |
| o oposto de _____ $= 8$ | o oposto de _____ $= 0$ |
| o oposto de $(-9) =$ _____ | o oposto de $(10) =$ _____ |
| o oposto de $(-14) =$ _____ | o oposto de _____ $= 13$ |

- 35 alunos responderam corretamente todos os itens.

Em *o oposto de* _____ $= -6$, dois alunos colocaram -6 no espaço em branco e um aluno colocou 5 .

Alguns alunos comentaram que era *muito fácil* o oposto de um número.

Atividade 4h Na atividade 4h, cada aluno sugere um símbolo para a expressão *o oposto de*. O professor observa e ratifica cada escolha.

Uma das dificuldades dos alunos quando aprendem os números inteiros é a notacional. O mesmo sinal usado para indicar que um número é negativo é usado também para significar que queremos o oposto do número. O fato de o aluno poder inventar um sinal de *o oposto de* pode ajudá-lo a ter consciência desse fato?

| | |
|---|-------|
| ATIVIDADE 4h | |
| Para não ficar escrevendo a toda hora <i>o oposto de</i> , invente um sinal para indicar <i>o oposto de</i> . | |
| Reescreva as sentenças a seguir usando o sinal que você inventou. | |
| o oposto de $(2) = -2$ | _____ |

Também pedia-se para reescrever

número 22:



número 23:



número 24:



número 25:



número 26:



número 27:



número 28:



número 29:



número 30:



número 31:



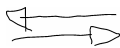
número 32:



número 33:



número 34:



número 35:



número 36:



número 37:



número 38:



Percebemos que alguns desses símbolos tentam passar alguma idéia de inversão, por exemplo, 2, 4 e 37. Outros estão desvinculados do sentido de oposto, por exemplo, 3, 8 e 13. Outros ainda são abreviações de *o oposto de* ou modificações da letra *o*, por exemplo, 7 e 11.

ATIVIDADE 4i

Complete e reescreva usando o sinal que você inventou.

o oposto de (7) = _____

Também pedia-se para reescrever e completar:

o oposto de (-2) = _____

o oposto de _____ = -5

o oposto de _____ = 4

o oposto de (0) = _____

ATIVIDADE 4j

Primeira Folha

Em Matemática usa-se o sinal $-$ para significar *o oposto de*.

Assim, em vez de escrever o oposto de (-2) escreve-se $-(-2)$

No lugar de escrever o oposto de (2) escreve-se $-(2)$

CONVENÇÃO

Se um número é positivo ou nulo, por exemplo 2, para indicar o oposto de 2, no lugar de Escrever $-(2)$ escreve-se simplesmente -2

Mas se um número é negativo, por exemplo -3 , para indicar o oposto de -3 , então usam-se os parênteses

Assim, escrevemos

$$-(-3)$$

Lembremos que o oposto de 0 é o próprio 0. Por isso, tanto faz escrever

$$0 \text{ como } -0$$

Em outras palavras,

$$0 = -0$$

ou

$$-0 = 0$$

- A professora introduziu o sinal $-$ e solicitou que os alunos lessem sempre de duas maneiras, por exemplo, $-(-2)$ (*menos menos dois e o oposto de menos dois*).

ATIVIDADE 4j

Segunda Folha

Em cada item, completar a primeira linha e reescrever na segunda linha usando o sinal $-$ no lugar de *o oposto de*. Respeitar os parênteses para os números negativos.

a) o oposto de $(-3) =$ _____

b) o oposto de $5 =$ _____

A folha também continha os itens:

c) o oposto de $0 =$ _____

d) o oposto de _____ $= -6$

e) o oposto de _____ $= 8$

f) o oposto de _____ $= 0$

g) o oposto de $(-9) =$ _____

h) o oposto de $10 =$ _____

i) o oposto de $(-14) =$ _____

j) o oposto de _____ $= 13$

- 27 alunos acertaram todos os itens. Seis erraram um item, três erraram dois, um errou três itens e um errou quatro.

Seis alunos diferenciaram o sinal para o oposto, fazendo-o maior do que o sinal

$$-(-7).$$

para indicar que o número é negativo. Exemplo:.

Um aluno comentou que *o sinal de menos é muito importante! Ele aparece nas contas de menos, nos negativos e também é o oposto de um número.*

A professora chamou os alunos que percebia terem errado algum item para escreverem na lousa ou responderem oralmente.

ATIVIDADE 4k

Completar. Reescrever retirando os parênteses quando possível.

a) $-(-5) =$ _____

b) o oposto de $-(-5) =$ _____

A atividade continha também os itens:

c) $-(\quad) = 4$

d) $-(\quad) = -7$

e) $-(8) =$ _____

f) $-(9) =$ _____

g) $-(0) =$ _____

h) $-(-0) =$ _____

i) $-(-7) =$ _____

j) $-(12) =$ _____

k) $-(\quad) = 10$

l) $-(\quad) = -11$

• Três alunos preencheram corretamente mas reescreveram quase todos os itens incorretamente. Um desses alunos, por exemplo, depois de preencher corretamente $-(-7) =$ _____ escreveu $7 = 7$. Os dois outros alunos, por exemplo, depois de preencherem corretamente $-(-5) = 5$, escreveram, respectivamente, $5 = -5$ e $-5 = 5$.

Três outros alunos preencheram e reescreveram incorretamente vários itens.

Os outros 32 alunos preencheram todos os itens corretamente mas nem todos retiraram todos os parênteses possíveis.

Posto que os alunos, aparentemente, pelas atividades anteriores, soubessem o que é o oposto de um número inteiro, como explicar as respostas desses seis alunos? A resposta talvez seja a dificuldade de manipular o sinal $-$ e o não saber o que significa uma igualdade.

ATIVIDADE 4I

1. Todo número inteiro tem oposto? _____
2. Existe algum número inteiro que é igual ao seu oposto? _____
3. V ou F:
Todo número inteiro é diferente de seu oposto. α

- 21 alunos responderam *sim* para 1, *sim* para 2 e *F* para 3.

Quadro 2.4.0. – Respostas dos outros dezessete alunos.

| item 1 | item 2 | item 3 | nº de alunos |
|--------|--------|--------|--------------|
| sim | não | V | 6 |
| sim | não | F | 4 |
| sim | sim | V | 4 |
| não | não | V | 2 |
| não | sim | F | 1 |

Observemos que a sentença *existe algum número inteiro que é igual ao seu oposto* é equivalente à negação da sentença *todo número inteiro é diferente de seu oposto*.

Oito alunos responderam coerente e incorretamente *não* à pergunta 2 e assinalaram *V* para a sentença do item 3.

Oito alunos ao lado da resposta *sim* à pergunta 2 escreveram o número 0.

No final, a professora discutiu com a classe as respostas dadas pelos alunos. A professora tentou mostrar que responder *sim* à pergunta 2 *era o mesmo* que assinalar *F* para a afirmação do item 3 e que responder *não* à 2 *era o mesmo* que assinalar *V* para 3.

Considerações sobre o quarto conjunto de atividades

Aproximadamente 70% dos alunos fizeram, corretamente, todas as representações de inteiros em uma reta propostas nesse conjunto de atividades. Insistiremos nas próximas atividades na consolidação dessas representações.

Os alunos mostraram não ter dificuldades para entender o que significa o oposto de um número inteiro. Usam coerentemente os símbolos que inventaram para *o oposto de*. No entanto, quando introduzimos o sinal – com a mesma finalidade, seis alunos con-

atividade, a letra k é outro nome do número, em outras palavras, pode ser considerada constante. No que expusemos acima, k está no lugar de -3 , isto é, k é, naquele momento, um outro nome de -3 .

Essa atividade pretende também auxiliar aqueles alunos que ainda têm dificuldades em representar os inteiros em uma reta. Outras atividades serão ainda desenvolvidas com o mesmo escopo.

Atividades

Atividades 5a, 5b e 5c Nessas atividades queremos saber se, apenas lendo as instruções, os alunos conseguem ler, por exemplo, -7 e $-(-7)$ de diversas maneiras.

| | | |
|--|-------|-------------------------|
| ATIVIDADE 5a | | |
| Você pode ler o número | -6 | de diferentes maneiras. |
| Por exemplo, ele pode ser lido como: | | |
| <i>menos seis</i> ou <i>o oposto do número seis</i> ou, sem usar a palavra <i>número</i> , <i>o oposto de seis</i> | | |
| Como você pode ler -7 ? | | |
| _____ | _____ | |
| _____ | _____ | |

Nessa folha, pedia-se ainda a leitura de -2 .

- Não colocamos a maneira de ler -6 , na folha da atividade 5a, *menos o número seis*. Dois alunos, no entanto, colocaram quatro maneiras de ler -7 : *menos sete*, *o oposto de sete*, *o oposto do número sete* e *menos o número sete*. Dez alunos escreveram, entre três maneiras de ler, *menos o número sete* e seis alunos colocaram *menos o número dois*. Dois alunos erraram: um aluno respondeu *menos sete é o oposto de sete* e outro aluno escreveu *o oposto de seis* onde deveria ser *o oposto de dois*.

Não houve dificuldades na maneira de ler ou escrever os números. Na turma A todos os alunos leram em voz alta cada item da atividade. Na turma B foi feita a correção, solicitando-se os alunos à lousa.

ATIVIDADE 5b

O número $-(-6)$ pode ser lido, por exemplo, das seguintes maneiras:

o oposto do número menos seis ou *o oposto do oposto do número seis* ou
menos o oposto do número seis ou *menos o número menos seis*

ou sem usar a palavra *número*. Assim, podemos ler também:

o oposto de menos seis ou *o oposto do oposto de seis* ou
menos o oposto de seis ou *menos menos seis*

Escrever várias maneiras de ler $-(-8)$ usando a palavra “número”.

- 25 alunos escreveram todos os itens solicitados corretamente. Quanto aos outros alunos, quatro escreveram entre as maneiras de se ler, *o oposto do oposto do número menos oito*. Três alunos copiaram o exemplo, no lugar de *oito* colocaram *seis*. Três alunos escreveram *o oposto do número oito*. Dois alunos repetiram uma das maneiras de ler. Um aluno não usou a palavra *número*.

Inicialmente, a professora colocou exemplos na lousa e pediu que os alunos falassem as diferentes maneira de ler, por exemplo, $-(-6)$. Todos os alunos participaram ativamente falando os números em voz alta. Desta maneira foi feita a correção.

ATIVIDADE 5c

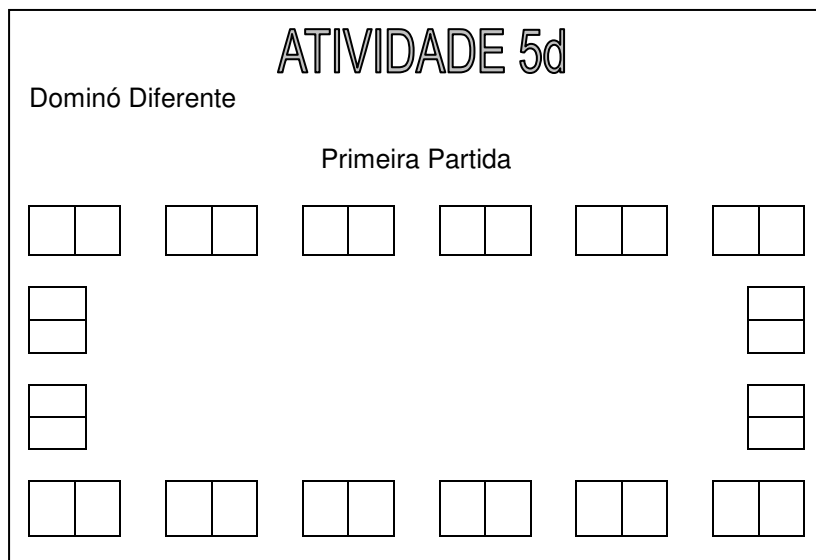
a) Escrever várias maneiras de ler $-(-2)$ sem usar a palavra “número”.

b) Escolha uma maneira de ler -5 e escreva-a: _____

c) Escolha uma maneira de ler $-(-10)$ e escreva-a: _____

- 26 responderam quais as maneiras de se ler $-(-2)$, como solicitado. Dois alunos repetiram um dos modos. Dez alunos erraram uma das formas de leitura. Desses, seis alunos escreveram *o oposto do oposto de menos dois*, dois alunos, *o oposto de menos menos dois*, um aluno escreveu *menos o oposto de menos dois* e um aluno escreveu apenas *menos dois*.

Primeiramente, o professor joga com os alunos para explicar as regras. Em seguida, são organizadas partidas com duplas de alunos. Os alunos devem anotar cada partida.



- Preliminarmente, a professora apresentou as regras do jogo e fez uma partida com a classe. Para tanto, utilizou peças grandes e fixou-as na lousa.

Durante o jogo, a professora circulou pela classe para verificar se os alunos estavam jogando conforme as regras. Observou que uma dupla não percebera ainda que $-(-1)$ é o mesmo que 1 e que deveriam colocar -1 . A professora desenhou na reta o -1 e pediu para o aluno ler $-(-1)$. Imediatamente o aluno respondeu que era um. A professora observou também que os alunos, nas duplas, mesmo “adversários”, ajudavam-se.

Os alunos jogaram cinco partidas na turma A e três na B.

Atividade 5e Vamos, nessa atividade, fazer a conversão da linguagem natural para a simbólica.

O professor discute com os alunos a necessidade ou não dos parênteses, sempre lembrando que esse uso é convencional.

ATIVIDADE 5e

Escrever usando símbolos. Usar parênteses quando necessário.

menos sete _____ o oposto do número oito _____

menos menos cinco _____ o oposto de menos sete _____

o oposto do oposto de menos nove _____

o oposto do oposto do número dez _____

o oposto do oposto do oposto de menos dois _____

o oposto de onze _____

Simbolizar e dizer V ou F.

o oposto de menos dez é dez _____ α

o oposto do oposto de onze é igual a onze _____ α

menos menos cinco é igual ao oposto de cinco _____ α

- Antes de entregar a folha, a professora escreveu na lousa

$$-(-(-(-2)))$$

colocando cada par de parênteses com cores distintas.

Pedi então que os alunos lessem.

Para mostrar que cada *oposto* corresponde a um sinal $-$, escreveu

$$\underbrace{-}_{\text{oposto}} \quad \underbrace{(-)}_{\text{do oposto}} \quad \underbrace{(-)}_{\text{do oposto}} \quad \underbrace{(-)}_{\text{do oposto}} \quad \underbrace{2)}_{\text{de 2}}$$

o oposto do oposto do oposto do oposto de 2

30 alunos passaram da linguagem natural para a simbólica corretamente. Dois alunos escreveram -7 em vez de $-(-7)$, um aluno escreveu $-(-(-9))$ em vez de $-(-10)$, dois alunos, escreveram $-(-(-2))$ e um aluno escreveu $-(-2)$ no lugar de $-(-(-(-2)))$. Dois alunos trocaram os números.

Quanto a dizer se as sentenças eram V ou F, todos acertaram. Mais de um aluno mencionou o dominó.

Atividade 5f O professor solicita aos pares uma troca de papéis.

Em cada turno o aluno descreve o que aconteceu. Essa descrição, além de escrita, deve ser oral, com a participação, quando possível, do professor.

O professor observa que foi escolhida uma só cor para as fichas.

ATIVIDADE 5f

Primeira Folha

Você está recebendo um kit com um pedaço de barbante, várias fichas, uma flecha em cartolina e várias letras também em cartolina.

Trabalhando com um colega, um de vocês, digamos o aluno *A*, escolhe uma direção e o outro, digamos o aluno *B*, escolhe um sentido. Representem os inteiros.

Desenhe abaixo a sua representação dos inteiros.

A: _____ B: _____

Agora, um de vocês, digamos o aluno *A*, coloca uma letra no lugar de um dos números. O outro aluno, digamos *B*, vai escrever em uma outra ficha o número correspondente e montar uma igualdade. Por exemplo, se *A* colocou a letra *k* no lugar do número -3 no barbante, então *B* pegará a letra *k*, uma ficha, escreverá -3 na ficha e colocará

$$k = -3$$

Registre o que aconteceu.

Seguem mais cinco folhas para anotações.

- Das nove duplas da turma A e das dez da turma B, encontramos as seguintes representações.

Quadro 2.5.0. – Representações da turma A.

| representação dupla | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª | 5ª |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | ← $m=6$ | ↗ $g=0$ | ↑ $s=4$ | ↘ $a=7$ | ← $p=-2$ |
| 2 | ← $m=1$ | ↓ $j=0$ | ↓ $a=2$ | → $j=1$ | ↘ $j=4$ |
| 3 | → $b=6$ | ↑ $a=-4$ | ↖ $c=3$ | ↓ $f=0$ | ↗ $z=4$ |
| 4 | ↗ $x=5$ | → $j=0$ | → $z=-6$ | ↑ $z=-4$ | ↑ $j=2$ |
| 5 | ↗ $p=4$ | ← $j=-3$ | ↑ $h=3$ | ↘ $a=4$ | ↓ $a=2$ |
| 6 | → $z=-3$ | ↗ $s=1$ | ↑ $a=1$ | ↙ $k=-3$ | ← $c=-3$ |
| 7 | ← $o=4$ | ↗ $f=0$ | ↙ $n=-5$ | ↓ $y=-6$ | ↓ $a=-5$ |
| 8 | ↑ $e=-4$ | ↘ $o=0$ | ← $n=-2$ | ↖ $s=3$ | → $s=5$ |
| 9 | ↑ $n=4$ | ← $l=0$ | ↑ $a=6$ | ↖ $y=-2$ | ↙ $s=4$ |

Esse uso errôneo do sinal de igual persiste na universidade, como foi documentado por Mevarech e Yitschak (1983), que mostraram que os estudantes que eles testaram tinham um entendimento fraco do sentido do sinal de igualdade apesar de suas habilidades para resolver diferentes tipos de equações com uma variável. (pp. 398-399) (21)

Esperamos que, com a nossa pequena reflexão sobre a igualdade inspirada em Frege, tenhamos condições de começar a dar à igualdade o seu sentido matemático, isto é, o de relação de equivalência. Aliás, o protótipo ou arquétipo das relações de equivalência. Essa empresa no entanto não se limita à nossa seqüência, isto é, terá de ser continuada. Temos tido experiência positiva, introduzindo a igualdade dessa maneira, com alunos de quinta série em diante.

Atividades

Atividade 6a As atividades 6a e 6b têm a finalidade de enfatizar para o aluno que, por exemplo, $-x$ pode ser positivo, negativo ou nulo.

ATIVIDADE 6a

Primeira Folha

Como na sessão anterior, um aluno A escolhe a direção e o outro B escolhe o sentido. Representar os números inteiros. Depois um de vocês, digamos o aluno A , coloca uma letra no lugar de um dos números. O outro aluno, digamos B , vai colocar a mesma letra mas vai escrever o sinal $-$ na frente para indicar que está tomando o oposto do que o colega tomou. Em seguida B coloca-a no lugar de uma das fichas colocadas no barbante.

Por exemplo, se A colocou a letra k no lugar do número -3 no barbante, então B pegará a letra k , escreverá o sinal $-$ na frente de k ficando $-k$ (leia: o oposto de k ou menos k) e colocará $-k$ no barbante no lugar do número 3 . No espaço onde está escrito “o que aconteceu” escreveram $k=-3$ e $-k=3$.

1.

Representação

O que aconteceu.

Seguem mais cinco folhas para anotações.

- Quatro alunos colocaram, em uma das representações, as flechas indicando o sentido de maneira incorreta. Um aluno colocou, em uma reta vertical orientada de baixo para cima, o número -7 próximo ao zero.

Quadro 2.6.1. – Representações das duplas da turma B.

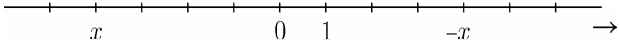
| representação dupla | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª | 5ª | 6ª |
|------------------------|------------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1 | $\rightarrow f=-7$ $-f=7$ | $\rightarrow e=-5$ $-e=5$ | $\rightarrow z=-3$ $-z=3$ | $\rightarrow t=-1$ $-t=1$ | $\rightarrow u=-6$ $-u=6$ | $\rightarrow v=0$ $-v=0$ |
| 2 | $\rightarrow a=-4$ $-a=4$ | $\searrow -y=1$ $y=-1$ | $\downarrow k=7$ $-k=-7$ | $\downarrow g=0$ $-g=0$ | $\nearrow -n=6$ $n=-6$ | $\uparrow -p=1$ $p=-1$ |
| 3 | $\rightarrow s=-5$ $-s=5$ | $\rightarrow b=-4$ $-b=4$ | $\rightarrow t=-1$ $-t=1$ | $\rightarrow w=-6$ $-w=6$ | $\rightarrow d=-3$ $-d=3$ | $\rightarrow k=-7$ $-k=7$ |
| 4 | $\leftarrow b=-2$ $-b=2$ | $\uparrow z=-4$ $-z=4$ | $\downarrow n=-7$ $-n=7$ | $\rightarrow m=-6$ $-m=6$ | $\downarrow j=-2$ $-j=2$ | $i=-4$ $\downarrow -i=4$ |
| 5 | $\rightarrow n=-0$ $-n=0$ | $\leftarrow b=-4$ $-b=4$ | $\uparrow m=4$ $-m=-4$ | $\nearrow i=7$ $-i=-7$ | $\downarrow b=-7$ $-b=7$ | $o=1$ $\nearrow -o=-1$ |
| 6 | $\rightarrow a=-5$ $-a=5$ | $\leftarrow j=-2$ $-j=2$ | $c=-4$ $\downarrow -c=4$ | $\uparrow -B=-5$ $B=5$ | $\nearrow z=-7$ $-z=7$ | $j=-6$ $\nwarrow -j=6$ |
| 7 | $\rightarrow y=0$ $-y=-0$ | $\uparrow a=-1$ $-a=1$ | $\uparrow -n=4$ $n=-4$ | $r=-5$ $\downarrow -r=5$ | $\uparrow v=-1$ $-v=1$ | $\uparrow k=-1$ $-k=1$ |
| 8 | $\rightarrow \ell=-6$ $-\ell=6$ | $\nearrow B=-4$ $-B=4$ | $w=0$ $\downarrow -w=0$ | $\uparrow y=-3$ $-y=3$ | $\leftarrow p=-2$ $-p=2$ | $e=-7$ $\swarrow -e=7$ |
| 9 | $\rightarrow a=-4$ $-a=4$ | $\searrow y=1$ $-y=-1$ | $-k=-7$ $\downarrow k=7$ | $o=0$ $\downarrow -o=0$ | $\leftarrow i=3$ $-i=-3$ | $-p=-6$ $\nwarrow p=6$ |
| 10 | $\rightarrow g=-4$ $-g=4$ | $\leftarrow -t=3$ $t=-3$ | $\leftarrow k=-5$ $-k=5$ | $\leftarrow -x=0$ $x=0$ | $\uparrow -c=5$ $c=-5$ | $\uparrow -q=3$ $q=-3$ |

Atividade 6b Antes de iniciar a atividade, o professor desenha na lousa o item **a** da atividade, mas coloca o x e o $-x$ em outras posições. Diz à classe que, no lugar de um número, colocou a letra x . *Que número é esse?* Quando os alunos responderem, ele pergunta se o número é positivo ou negativo ou nulo. Faz o mesmo com $-x$.

Primeira Folha

ATIVIDADE 6b

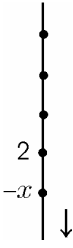
Veja as ilustrações e diga quanto vale x e quanto vale $-x$.

a) 

$x =$ _____ $-x =$ _____

x é positivo, negativo ou nulo? _____

$-x$ é positivo, negativo ou nulo? _____

b) 

$x =$ _____ $-x =$ _____

x é positivo, negativo ou nulo? _____

$-x$ é positivo, negativo ou nulo? _____

que dois objetos matemáticos sejam iguais depende do modelo, no sentido matemático, com que estamos trabalhando. Mas isto não precisa ser dito para os alunos neste estágio.

ATIVIDADE 6c

Primeira Folha

Refletindo sobre a igualdade

Quando usamos o sinal da igualdade = , cada lado, ou membro, refere-se ao mesmo número, isto é, um número só é igual a si mesmo, embora cada lado possa ter ou não significados distintos.

Colocar a seguir o sinal = ou \neq para obter sentenças verdadeiras. Discutir com seus colegas ou com a professora, no caso de você colocar = , se cada lado tem o mesmo significado ou não do outro. Depois responda os itens i, ii, iii e iv.

a) $1+2$ _____ 3

i) O número descrito no primeiro membro refere-se ao mesmo descrito no segundo?

ii) Tente explicar o significado do primeiro membro.

iii) Tente explicar o significado do segundo membro.

iv) O significado do primeiro membro é igual ao _____ significado do segundo membro.
 diferente do _____

A segunda folha dessa atividade fazia as mesmas questões para b) $-(-8)$ _____ 8 e c) -2 _____ 2 .

- A professora falou em significado e referência usando *a estrela da manhã* e *a estrela da tarde*. Como surgissem alguns *não entendi* a professora escreveu na lousa $1+1=2$ e perguntou se o primeiro membro da igualdade é o mesmo número do segundo membro. Houve um pequeno debate entre as crianças. Quando todos concordaram que ambos os membros eram o mesmo número, a professora disse que nesse caso os dois membros referem-se ao mesmo número. Depois a professora perguntou o que cada um entendia por $1+1$ e por 2 . Um aluno na classe A disse que entendia que estava somando um com um e no segundo lado era só o número dois. Na classe B um aluno disse

As partidas são realizadas em duplas. Cada aluno escolhe 4 letras diferentes e as mesmas 4 letras com o sinal $-$ antecedido a elas. Por exemplo, A pode escolher $a, b, c, d, -a, -b, -c$ e $-d$ e B pode escolher $k, m, p, s, -k, -m, -p$ e $-s$.

Os alunos orientam a reta. O professor deve estimular o uso de direções e sentidos diversos.

Jogam o dodecaedro. Inicia o jogo quem tirar o maior número. Embora não tenhamos introduzido o conceito de *maior* ou de *menor* entre números inteiros, o professor o faz informalmente. Uma das finalidades desta subatividade é verificar se assimilam facilmente tal conceito.

O aluno que dá a saída escolhe uma letra (com ou sem sinal) e joga o dado. Suponhamos, por exemplo, que A tenha escolhido $-b$ e que a face de cima do dodecaedro seja 4. Esse aluno colocará, na reta, $-b$ no lugar de 4 e colocará b no lugar de -4 .

A regra do jogo estipula que, se o segundo aluno sortear 4 ou -4 , ele não poderá colocar a sua letra pois o outro chegou antes. Vence quem se livrar primeiro de suas letras.

Cada par de jogadores faz um registro ao final de cada partida, indicando quem era cada um e quem venceu.

A finalidade deste jogo, como a da próxima atividade, é auxiliar a consolidar a) a representação de inteiros com sua ordem habitual em uma reta, b) o conceito de oposto e c) que no lugar de um número podemos colocar uma letra.

Primeira Folha

jogo: "Ocupei primeiro".

ATIVIDADE 7a

Anotações da primeira partida.

Seguem mais cinco folhas semelhantes à primeira.

- A professora jogou uma partida com os alunos e mostrou na lousa como os alunos registrariam suas jogadas. Os alunos formaram duplas.

- Todos os alunos escreveram na folha os itens **a, b, d e g** corretamente.

37 alunos acertaram o item **c**. Um aluno colocou $r = -2$, $-r = 2$, r é negativo e $-r$ é positivo.

36 alunos acertaram o item **e**. Dois alunos escreveram $k = 3$, $-k = -3$, k é negativo e $-k$ é positivo.

37 alunos acertaram o item **f**. Um aluno colocou $d = -2$, $-d = 2$, d é positivo e $-d$ é negativo.

37 acertaram o item **h**. Um aluno escreveu $x = -2$, $-x = 2$, $x > 0$, e $-x < 0$

Dois alunos erraram o item **i**. Um aluno escreveu $y = 3$, $-y = -3$, $y > 0$ e $y < 0$. Um aluno escreveu $y = -3$, $-y = 3$, $y = -3$ e $-y = 3$ (onde deveria escrever $y < 0$ e $-y > 0$).

Um aluno errou o item **j**. Escreveu: $x = 3$, $-x = -3$, x é positivo e $-x$ é negativo.

36 alunos acertaram o item **k**. Um aluno escreveu 0 menor em vez de $0 < x$ (ou 0 menor que x) e 0 maior em vez de $0 > -x$. Um aluno deixou em branco 0 _____.

Dos 418 itens feitos pelos alunos, aproximadamente 3% estavam errados.

Atividade 7c O professor alerta que os alunos só podem usar as letras, os símbolos $>$, $<$ e $=$; e, na segunda folha, também os parênteses.

| |
|---|
| <p>Primeira Folha</p> <p style="font-size: 1.5em; font-weight: bold;">ATIVIDADE 7c</p> <p>Escrever usando os símbolos $>$, $<$ ou $=$.</p> <p>a) x é positivo _____</p> |
|---|

Nessa folha havia ainda os itens

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|-----------------------|
| b) b é negativo | c) $-x$ é positivo | d) x é igual a zero |
| e) $-k$ é maior que zero | f) m é menor que zero | g) y é nulo |

Nessa primeira folha os alunos poderiam escolher trabalhar em duplas ou indivi-

dualmente.

- Um aluno escreveu para o item **a** x é maior, para **b**, b é menor, para **c**, $-x$ é maior e para **d**, x é zero.

ATIVIDADE 7c

Segunda Folha

Escrever usando os símbolos $-$, $>$, $<$ ou $=$. Usar parênteses (), quando necessário.

a) o oposto de k _____

Nessa segunda folha, havia ainda os itens

- b) o oposto de m é negativo
- c) o oposto de $-x$
- d) o oposto de $-x$ é igual a zero
- e) o oposto do oposto de $-k$
- f) o oposto de $-m$ é menor que zero
- g) o oposto de y é nulo

- A professora corrigiu a primeira folha antes de os alunos fazerem a segunda. Nas duas folhas o trabalho foi individual.

Erros detectados: no item **a**, um aluno escreveu $-de k$ e um aluno escreveu $-(-k)$, no item **c** dois alunos escreveram x em vez de $-(-x)$, no item **e**, dois alunos escreveram $-(-k)$ em vez de $-(-(-k))$ e, no item **g**, um aluno deixou em branco.

Atividade 7d O professor enfatiza para não colocar números na reta.

ATIVIDADE 7d

Dado $-a$, coloque na reta a e $-a$. (Não coloque números na reta, só $-a$ e a).

a) $-a = -2$

Havia nessa atividade ainda os itens

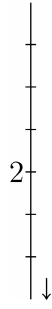
- b) $-a = 0$
-

Dado x , coloque na reta x e $-x$. (Não coloque números na reta, só $-x$ e x).

- c) $x = -1$
-

- d) $x = 3$
-

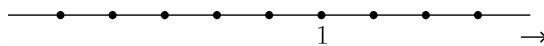
e) $x = -1$



Dado y ou $-y$, coloque na reta y e $-y$. (Não coloque números na reta, só $-y$

e y).

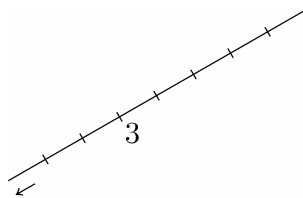
f) $-y = -4$



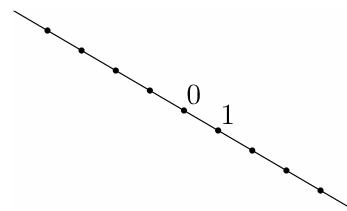
g) $-y = -2$



h) $y = 1$



i) $y = 4$



- Erros detectados: no item **a**, um aluno colocou $-a$ no ponto correspondente ao número -1 e a no ponto 1 ; no item **c**, um aluno colocou x no ponto -3 e $-x$ no ponto 3 e um aluno colocou x no ponto -1 mas $-x$ no 2 ; no item **d**, um aluno colocou o x no ponto 4 e o $-x$ no -4 .

Atividade 7e

ATIVIDADE 7e

Completar.

a) Se $a = -4$, então $-a =$ _____

b) Se $-b = 4$, então $b =$ _____

Havia ainda os itens

c) Se $c = -5$, então $-c =$ _____

d) Se $-a = -2$, então $a =$ _____

e) Se $x = 1$, então $-x =$ _____

f) Se $-y = -3$, então $y =$ _____

g) Se $a = 0$, então $-a =$ _____

h) Se $-k = -9$, então $k =$ _____

- i) Se $m = 7$, então $-m =$ _____ j) Se $-j = -12$, então $j =$ _____
 k) Se $-x = -8$, então $x =$ _____ l) Se $a = 13$, então $-a =$ _____

- Não houve dificuldades na compreensão dos enunciados, todos eles envolvendo o conectivo *se... então...*. Todos os alunos fizeram sozinhos e acertaram todos os itens.

Atividade 7f O professor explica cada item da atividade 7f.

ATIVIDADE 7f

Se x é um número inteiro e $x > 0$,

| | |
|------------------------|-----------------------|
| x pode ser 3? _____ | x pode ser 0? _____ |
| x pode ser -5? _____ | x pode ser 2? _____ |
| x pode ser -3? _____ | |

Indicar todos os números que tornam x é inteiro e $x > 0$ verdadeira.

Indicar todos os números que tornam x é inteiro e $x < 0$ verdadeira.

Indicar todos os números que tornam x é inteiro verdadeira.

- Pouquíssimas perguntas. Esperávamos mais. Apenas o aluno 3, para indicar os números que tornam x é inteiro, não mencionou o zero.

Atividade 7g

ATIVIDADE 7g

x é um número inteiro.

| | |
|---|----------------------------------|
| a) Como deve ser x para que $-x$ seja positivo? _____ | |
| b) Como deve ser x para que $-x$ seja negativo? _____ | |
| c) Como deve ser x para que $-x$ seja nulo? _____ | |
| d) Se $x > 0$, então $-x$ _____ | e) Se $-x > 0$, então x _____ |
| f) Se $x < 0$, então $-x$ _____ | g) Se $-x < 0$, então x _____ |
| h) Se $x = 0$, então $-x$ _____ | i) Se $-x = 0$, então x _____ |

- Os alunos acertaram os itens dessa folha.

Nos itens **a**, **b** e **c**, 20 alunos responderam, respectivamente, $x < 0$, $x > 0$ e $x = 0$, 12 alunos responderam, respectivamente, *negativo*, *positivo* e *nulo* e 6 alunos escreveram ambas as formas.

Para cada atividade, os alunos escolhem o saldo inicial, o valor do cheque ou da quantia que vão retirar do caixa ou que irão depositar.

Quanto ao debate, o professor estimula a classe, para que o maior número possível de alunos dê suas opiniões.

| ATIVIDADE 8a | | |
|--|---|--|
| Cheque | | |
| Ficha 1 | | |
| Extrato da conta do dia 16 de maio de 2001 que o | | |
| <u>BANCO LISARB</u> | | |
| fornece ao cliente | | |
| 16 Saldo | | |
| 16 Cheque | | |
| 16 Saldo | + | |
| Ficha 2 | | |
| Extrato da conta do dia 16 de maio de 2001 da conta do cliente | | |
| para uso interno do | | |
| <u>BANCO LISARB</u> | | |
| 16 Saldo | | |
| 16 Cheque | | |
| 16 Saldo | + | |

- A professora explicou como preencher um cheque, o que é depósito, saque, etc. Os alunos determinaram em cada classe as possibilidades do saldo inicial e dos valores dos cheques. Foram escolhidos 100 e 200 reais para o saldo inicial e cheques de 50, 70 e 80 reais.

37 alunos preencheram a folha com as convenções feitas. Um aluno escreveu $200 + 120$ em vez de $200 + (-80)$.

A **atividade 8b** era semelhante à 8a, mas dessa vez dever-se-ia registrar um saque do caixa eletrônico.

- Os alunos escolheram duas quantias para o saque, 50 ou 100 reais. Os saldos finais para a ficha 1 ficaram: -30 , ou -70 ou 50 ou 70.

35 alunos preencheram as fichas corretamente. Dois alunos não escreveram o saldo final e um aluno só escreveu o saldo inicial, em ambas as fichas.

A **atividade 8c** era semelhante às anteriores. O aluno, agora, deveria preencher as duas fichas para um depósito.

- Os alunos fizeram depósitos em suas contas. O valor foi discutido entre eles. Os alunos que estavam com saldo negativo quiseram que o depósito fosse “grande” para que voltassem a ter saldo positivo. Os depósitos foram de 100, 150, 70 e 20 reais e os saldos finais foram de 70, 80, 120 e 90.

35 preencheram as fichas corretamente. Um aluno não as preencheu, um aluno escreveu $-120+200$ onde deveria ter escrito $-50+(-70)$ e um aluno escreveu $30+(-70)$ onde deveria ter escrito $30+(-100)$.

Na **atividade 8d** o cliente escolhia o que fazer: depósito ou saque, este no caixa eletrônico ou com cheque.

- Nas duas classes escolheram fazer cheques com os valores 90, 50, 200 ou 100. Saldos finais: -20 , 30 , -80 e -10 .

Dois alunos deixaram as fichas em branco, os outros as preencheram corretamente.

| | | |
|------------------------|--|-------|
| Primeira Folha | ATIVIDADE 8e | |
| | O cliente escolhe o que fazer | |
| | Ficha 1 | |
| | Extrato da conta do dia 16 de maio de 2001 que o | |
| | <u>BANCO LISARB</u> | |
| | fornece ao cliente | |
| | _____ | |
| 16 Saldo | _____ | _____ |
| 16 _____ | _____ | _____ |
| 16 Saldo _____ + _____ | _____ | _____ |
| 16 _____ | _____ | _____ |
| 16 Saldo _____ + _____ | _____ | _____ |

Primeira Folha

ATIVIDADE 8f

Extrato da conta do dia 16 de maio de 2001 que o

BANCO LISARB

fornece ao cliente

| | | |
|---------------------------|-------|-------|
| 16 Saldo | _____ | _____ |
| 16 Cheque | | _____ |
| 16 Saldo | _____ | _____ |
| 16 Saque Caixa Eletrônico | | _____ |
| 16 Saldo | _____ | _____ |
| 16 Depósito | | _____ |
| 16 Saldo | _____ | _____ |
| 16 _____ | | _____ |
| 16 Saldo | _____ | _____ |
| 16 _____ | | _____ |
| 16 Saldo | _____ | _____ |
| 16 _____ | | _____ |
| 16 Saldo | _____ | _____ |
| 16 _____ | | _____ |
| 16 Saldo | _____ | _____ |
| 16 _____ | | _____ |
| 16 Saldo | _____ | _____ |

A segunda folha referia-se à ficha 2, isto é, ao extrato da conta do dia 16 de maio de 2001 que o BANCO LISARB fornece ao cliente.

- Os alunos deveriam transcrever todas as operações feitas. 32 alunos transcreveram-nas corretamente para as duas folhas, quatro alunos erraram sinais e dois alunos pularam informações.

ATIVIDADE 8g DEBATE

Usamos até agora duas fichas.

A ficha 1 era a que o banco fornecia ao cliente e a ficha 2 era a de uso interno do banco.

a) Você acha necessário usar duas fichas? Se usarmos apenas uma delas, você acha que tanto o banco quanto o cliente saberão o que está se passando?

b) Os bancos usam só uma das fichas. Qual você pensa que eles usam?

- A professora pediu para os alunos lerem a folha e perguntarem se houvesse dúvidas. Alguns alunos leram e imediatamente opinaram. Em seguida, responderam às perguntas.

Para a pergunta **a**, 15 alunos escreveram *uma*, cinco alunos responderam *duas*, sete alunos responderam *não é necessário*, oito alunos responderam *a do cliente*, um aluno respondeu *só a do cliente pois a ficha 2 é o oposto da 1*, um aluno escreveu *não, uma folha grande daria* e um aluno respondeu *sim, pois cliente e banco poderiam se embananar*.

Para a pergunta **b**, 35 responderam *ficha 1*, um aluno respondeu *ficha 2*, um aluno escreveu *sim* e um aluno escreveu *cliente*.

Depois de os alunos terem respondido às perguntas, houve o debate. A professora perguntou se alguém queria falar e explicar suas respostas. Depois de, ou durante, o aluno falar, seus colegas concordavam ou discordavam de suas explicações.

Ao final, os alunos que haviam respondido à questão de modo divergente da maioria, concordaram com esta, isto é, que uma ficha só é suficiente e que é razoável que seja a ficha 1.

ATIVIDADE 9a

Primeira Folha

Completar.

No dia 20 de março de 2001, José da Silva, no começo do dia, tinha no Banco Duas Estrelas um saldo de 10 reais. Fez um saque de 10 reais no Caixa Eletrônico.

Extrato da conta do dia 20 de março que o Banco

Duas Estrelas

fornece ao cliente

José da Silva

| | |
|---------------------------|-------|
| 20 Saldo | _____ |
| 20 Saque Caixa Eletrônico | _____ |
| 20 Saldo | _____ |

Na **segunda folha**, o aluno deveria completar os extratos de dois clientes com as informações:

No dia 5 de abril de 2001, Fernando Henrique, no começo do dia, tinha no Banco Uma Estrela saldo de 1 real. Fez um saque de 1 real no Caixa Eletrônico.

e

No dia 15 de maio de 2001, Guilherme Portões, no começo do dia, tinha no Banco Zero Estrela saldo de -1 real. Fez um depósito de 1 real em dinheiro.

ATIVIDADE 9a

Terceira Folha

Completar:

$$1+(-1)= \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-1)+1= \underline{\hspace{2cm}}$$

CONVENÇÃO

Quando escrevemos $1+(-1)$ usamos sempre os parênteses para o número -1 .

No entanto, podemos escrever $(-1)+1$ ou $-1+1$

- A atividade 9a foi considerada “fácil” pelos alunos. Os alunos preencheram as três folhas corretamente, exceto um que escreveu, para os saldos da segunda folha, $1+(-1)$ e $-(-1)+1$.

Atividade 9b Na atividade 9b usam-se fichas de duas cores, verdes e vermelhas, uma ficha verde no lugar de -1 e uma ficha vermelha no lugar de 1 . Colocam-se as fichas em um círculo.

| | | | | |
|----------------|-----------------------------|---------------|-----------|--|
| Primeira Folha | ATIVIDADE 9b | | | |
| | MODELO DAS FICHAS | | | |
| | Usando as fichas, calcular: | | | |
| a) $5+(-7)=$ | b) $-8+3=$ | c) $-5+(-4)=$ | d) $8+3=$ | |

Havia ainda nessa folha os itens:

- e) $-5+(-7)=$ f) $-9+5=$ g) $3+(-9)=$ h) $-8+(-3)=$
i) $-3+(-7)=$ j) $-1+10=$ k) $5+(-5)=$ l) $-3+11=$
m) $7+(-4)=$ n) $-3+3=$ o) $-6+(-6)=$

Na **segunda folha**, havia uma circunferência no interior da qual os alunos colocavam as fichas.

- Antes de distribuir a folha, a professora propôs quatro adições: $3+2$, $-3+(-2)$, $-3+2$ e $3+(-2)$. Explicou como funcionava o modelo e pediu para os alunos fazerem os cálculos em duplas. Percorreu a sala, verificando cada dupla e tirando dúvidas.

Depois de distribuída a folha, a professora ainda auxiliou alguns alunos no item **a**. A partir daí, os alunos trabalharam sozinhos. À medida que terminavam a atividade, entregavam a folha para a professora. Esta anotava os erros e os circulava na folha, pedindo aos alunos que refizessem aqueles itens.

Apresentamos a seguir um quadro com os erros cometidos em cada item e o número de alunos que os cometeram antes da correção.

pode ter sido feita quando dispuseram as fichas no círculo ou quando escreveram o resultado na folha; ou

c) colocarem uma ficha de uma cor sobre outra da mesma cor e contar como zero; ou

d) pegarem fichas de cores diferentes quando as parcelas eram do mesmo sinal.

O **ou** que estamos usando acima é inclusivo.

A troca mencionada em b pode ter sido devida ao fato de no início da seqüência os alunos terem escrito números positivos nas fichas verdes e negativos nas vermelhas.

Atividade 9c A atividade 9c tem a finalidade de aferir até que ponto os alunos conseguem fazer as contas, agora sem o modelo das fichas.

| | | | |
|-------------------------------|------------|---------------|-----------|
| ATIVIDADE 9c | | | |
| Calcular, sem usar as fichas. | | | |
| a) $4+(-7)=$ | b) $-7+3=$ | c) $-6+(-5)=$ | d) $8+5=$ |

Havia ainda nessa folha os itens:

e) $-5+(-8)=$ f) $-9+5=$ g) $3+(-9)=$ h) $-8+(-4)=$

i) $-4+(-7)=$ j) $-1+11=$ k) $-5+(-7)=$ l) $-5+11=$

m) $-7+7=$ n) $7+(-2)=$ o) $-7+(-7)=$

- Foi adotado o mesmo procedimento da atividade anterior, isto é, a professora via a folha do aluno, anotava os erros para si, circulava o item errado na folha do aluno e pedia que o item fosse refeito. O aluno voltava e a professora recorria. Houve no máximo duas correções.

Iremos classificar os erros que encontramos entre os alunos quando fizeram adições de inteiros. Para tanto, vamos tecer algumas considerações.

Os alunos fizeram até agora adições no contexto bancário e com as fichas. A professora até o momento não apresentou nenhuma regra para os alunos. Quando alguém propunha alguma, ela devolvia a questão, perguntando ao aluno sua opinião.

Para fazer as adições propostas na atividade 9c, os alunos possivelmente tenta-

são de que um número somado com seu oposto é zero.

Desde o início dessa atividade, o professor estimula a verbalização. Aos poucos vai nomeando: em $a + b = c$, a e b são as parcelas e c é a soma.

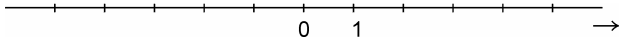
ATIVIDADE 10a

Primeira Folha

fichas

reta (Colocar uma flecha iniciando na primeira parcela e terminando na soma.)

a) $-5+3=$



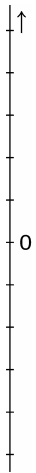
ponto inicial: _____
somei: _____
ponto final: _____

Na reta, você partiu do número _____. Andou _____ unidades no mesmo sentido
 sentido contrário

da orientação da reta e chegou ao número _____.

No **modelo bancário**, explique, com um exemplo, o que pode significar $-5+3$.

elevador



Você partiu do andar número _____.

Subiu _____ andares e chegou no andar número _____.

Des-

- A professora explicou o que deveriam fazer. Inicialmente, verificou se todos estavam usando as fichas para $-5+3$. Vários alunos disseram que não precisavam de fichas.

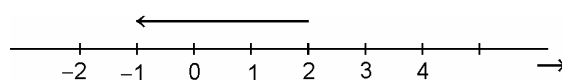
Passou, então, para a reta, perguntando o que haviam entendido que era para ser feito. Respondeu as questões dos alunos, pediu que completassem a folha e, em segui-

As **sétima, oitava e nona folhas** da atividade 10a foram semelhantes à primeira, segunda e terceira, mas agora com $1+3$, $3+1$ e $1+3$ _____ $3+1$.

As **décima, décima primeira e décima segunda folhas** da atividade 10a foram semelhantes à primeira, segunda e terceira, mas agora com $-2+(-3)$, $-3+(-2)$ e $-2+(-3)$ _____ $-3+(-2)$.

- Os resultados, nessas seis folhas finais, foram semelhantes às seis primeiras folhas.

Depois de os alunos terem respondido todas essas folhas, a professora apresentou na lousa cada uma das formas de representação, por exemplo, a reta



e perguntou a que adição correspondia. No caso, $2+(-3)$.

Os alunos responderam adequadamente.

| |
|--|
| ATIVIDADE 10a |
| Décima Terceira Folha |
| Você verificou que |
| $-5+3=3+(-5)$ $-2+5=5+(-2)$ $1+3=3+1$ $-2+(-3)=-3+(-2)$ |
| Você saberia afirmar, usando letras, algo de maneira geral, isto é, que vale para todos os números inteiros? |
| _____ |

- A professora fez a pergunta para a classe. Em uma das classes um aluno respondeu: $m+n=n+m$. A professora solicitou ao aluno que explicasse para toda a classe. Concluíram que podiam usar quaisquer duas letras. No final, a professora enfatizou que quando eles escrevem, por exemplo, $m+n=n+m$, estão querendo dizer que isto é válido para quaisquer m e n . Poderiam escrever: para todos m e n inteiros, $m+n=n+m$.

Na outra classe, dois alunos descartaram suas próprias sugestões ao enunciá-las: $a+a=2a$, *não é isso não!* e $a+(-a)$, *são opostos, dá zero, não é isto!*

ATIVIDADE 10a

Décima Sexta Folha

c) Completar para obter sentença verdadeira.

$$-3+3=3+(-3)= \underline{\hspace{2cm}}$$

i) Você saberia generalizar essa última afirmação?

ii) O número descrito no primeiro membro refere-se ao mesmo descrito no segundo?

iii) Use um dos modelos para dar um significado ao primeiro membro.

iv) Use o mesmo modelo anterior para dar um significado ao segundo membro.

v) O significado do primeiro membro é igual ao significado do segundo membro.
 diferente do

- Todos escreveram 0 para obter sentença verdadeira. No item **i**, todos usaram letras para generalizar; apenas um aluno errou e escreveu $j + j = j + j = 0$ j é inteiro. Os outros escreveram $\alpha + (-\beta) = -\beta + \alpha$ ou $-\alpha + \beta = \beta + (-\alpha)$.

No item **ii**, todos colocaram *sim*. Nos itens **iii** e **iv** 15 usaram fichas; 9 banco; e 13, elevador. Um aluno escreveu para ambos os membros m mais $-m$ é igual a $-m$ mais m . Todos, no item **v**, assinalaram *diferente do*.

Atividade 10b A atividade 10b é descontextualizada com módulos das parcelas até 20.

ATIVIDADE 10b

Calcular.

a) $6+(-8)=$

b) $-9+4=$

c) $-7+(-4)=$

d) $8+5=$

Essa folha continha também os itens:

e) $-7+(-7)=$

f) $-8+5=$

g) $3+(-2)=$

h) $-7+(-3)=$

i) $-5+(-7)=$

j) $-5+10=$

k) $5+(-9)=$

l) $9+(-7)=$

Tabela 2.10.0. – Desempenho na atividade 10b.

| nº de alunos | número de adições erradas | % | nº de alunos | número de adições erradas | % |
|--------------|---------------------------|----|--------------|---------------------------|----|
| 26 | 0 | 0 | 3 | 3 | 21 |
| 4 | 1 | 7 | 3 | 4 | 29 |
| 1 | 2 | 14 | 1 | 7 | 50 |

Na 9c, 16 alunos acertaram todas as adições. Na 10b, 26. Dos alunos que acertaram todas na 9c, dois não acertaram todas na 10b.

Depois que os alunos fizeram e refizeram a atividade 10b, a professora chamou alguns alunos à lousa. Perguntava, para cada adição, se ele sabia qual seria o sinal do resultado. *Por quê? E que conta você faz?* Os alunos, de maneira geral, disseram, por exemplo, que a soma de dois negativos é negativo. *Eu somo e coloco menos.* Nesse caso, a professora estimulava o aluno a refletir sobre o que fizera. *Você soma o quê? Os números ou as distâncias dos números até o zero?*

Atividade 10c A maioria das parcelas nessa atividade tem módulos maiores que 20.

| | | | |
|----------------------|----------------|-----------------|-----------------|
| ATIVIDADE 10c | | | |
| Calcular. | | | |
| a) $-45+30=$ | b) $50+(-50)=$ | c) $125+(-17)=$ | d) $-55+(-69)=$ |

Essa folha continha também os itens:

- | | | | |
|-------------------|------------------|------------------|------------------|
| e) $-425+130=$ | f) $150+(-50)=$ | g) $234+(-417)=$ | h) $345+(-219)=$ |
| i) $-345+(-830)=$ | j) $455+(-555)=$ | k) $870+(-770)=$ | l) $-2001+2001=$ |
| m) $-6+0=$ | n) $0+(-71)=$ | o) $123+0=$ | p) $0+546=$ |

- Apresentamos a seguir quadro dos erros na atividade 10c.

Apresentamos tabela do número de alunos com quantidade de questões erradas e a porcentagem aproximada até o item I.

Tabela 2.10.1. – Desempenho na atividade 10c até o item I.

| nº de alunos | número de adições erradas | % | nº de alunos | número de adições erradas | % |
|--------------|---------------------------|----|--------------|---------------------------|----|
| 8 | 0 | 0 | 4 | 4 | 33 |
| 8 | 1 | 8 | 2 | 5 | 42 |
| 7 | 2 | 17 | 2 | 6 | 50 |
| 6 | 3 | 25 | 1 | 7 | 58 |

Atividade 10d Na atividade 10d o aluno deve responder e dar exemplos de qual é o resultado da adição de um número positivo com um positivo, negativo com negativo, positivo com negativo e negativo com positivo.

| |
|---|
| <h2 style="margin: 0;">ATIVIDADE 10d</h2> <p>Primeira Folha</p> <p>i) Qual é o resultado da adição de um número positivo com um número positivo?</p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> <p>Exemplos:</p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> |
|---|

Nesta folha e na próxima havia ainda as questões:

ii) Qual é o resultado da adição de um número negativo com um número negativo? Exemplos.

iii) Qual é o resultado da adição de um número positivo com um número negativo? Exemplos.

iv) Qual é o resultado da adição de um número negativo com um número positivo? Exemplos.

- Todos responderam *positivo* para o item **i** e *negativo* para o item **ii**. Os exemplos estavam corretos.

Dois alunos responderam *positivo* para o item **iii** e *negativo* para o item **iv** e exemplificaram para apoiar o que haviam escrito.

Atividade 11a O jogo “Cheguei Primeiro” é uma variante do que é conhecido por trilha. Usando uma base retangular de material emborrachado, desenhemos nas extremidades duas cidades e um segmento de reta ligando-as. Sobre esse segmento, escrevemos números inteiros do intervalo $[-13, 13]$, com espaçamento regular.

São utilizados ainda dois carrinhos desenhados em cartolina, o dodecaedro do sétimo conjunto de atividades e um baralho com treze cartas onde estão escritas mensagens como, por exemplo, *se você estiver em um número negativo, então some 3; se você estiver em um número positivo, então some -3; some 0; some 1; some -1; some o oposto do número que você tirou; some o oposto do número em que você está; some o oposto do oposto do número que você tirou.*

As partidas são realizadas em duplas. Ambos os jogadores colocam seus carrinhos no zero. Usam o dodecaedro para decidir quem começa o jogo: o aluno que tirar o maior número. O jogador que inicia joga o dodecaedro e move o carrinho para o número que sair. Escreve então, na folha, a adição no espaço *1ª jogada: dado _____*. Retira uma carta do baralho. Lê a mensagem e a segue. Move seu carrinho para a soma obtida. Escreve a adição no espaço ainda da primeira jogada, *carta_____*. O outro jogador realiza as mesmas ações, registrando-as no espaço da segunda jogada. E assim sucessivamente.

Ganha a partida quem chegar a, ou ultrapassar, uma cidade em uma das extremidades.

| ATIVIDADE 11a | |
|---|---|
| Jogo “Cheguei Primeiro”. jogador _____ 1ª jogada:dado <u> 0+ </u> = _____ :carta _____ 3ª jogada:dado _____ :carta _____ | Primeira Partida jogador _____ 2ª jogada:dado _____ :carta _____ 4ª jogada:dado _____ :carta _____ |

O número mínimo de adições foi o da dupla 1 da turma A com 66 e o número máximo foi o da dupla 6 da turma A com 200 adições.

Atividade 11b Na atividade 11b, uma letra está no lugar de um número inteiro, na representação na reta.

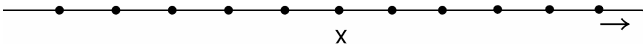
O aluno deve, por exemplo, dado x , escrever onde se encontra $x + 3$. Em seguida, desenha uma flecha com origem em x e extremidade em $x + 3$.

ATIVIDADE 11b

Primeira Folha

Representar na reta. Em cada item, colocar uma flecha iniciando na primeira parcela e terminando na soma.

a) $x + 3$



Na **primeira folha**, existiam ainda os itens **b** a **j**. Os itens **b**, **c**, **d**, **g** e **j** eram retas orientadas da esquerda para a direita e os itens **e**, **f**, **h** e **i** eram retas orientadas da direita para a esquerda.

- b) $m + 2$ c) $y + (-2)$ d) $k + 4$ e) $m + 0$ f) $z + (-5)$
g) $a + (-4)$ h) $i + 2$ i) $c + (-3)$ j) $e + (-3)$

Na **segunda folha**, existiam os itens **k** a **t**. Os itens **k** a **n** eram retas verticais orientadas de baixo para cima; os itens **o** a **r**, verticais de cima para baixo e os itens **s** e **t** eram retas horizontais, sendo **s** orientada da direita para a esquerda e **t** da esquerda para a direita.

- k) $x + (-2)$ l) $y = 3$ m) $z + 2$ n) $a + (-4)$ o) $r + 3$
p) $s + (-2)$ q) $t + 2$ r) $u + (-4)$ s) $v + (-4)$ t) $n + 4$

Havia, na **terceira folha**, os itens **u** a **z**. Os itens eram retas inclinadas, sendo **u** e **x** orientadas no sentido sudoeste-nordeste, os itens **v** e **z** no sentido nordeste-sudoeste, o item **w** no sentido noroeste-sudeste e o item **y** no sentido sudeste-noroeste.

- u) $x + (-2)$ v) $y + (-4)$ w) $k + 3$ x) $m + 2$ y) $p + (-1)$ z) $z + (-3)$

Quadro 2.11.1. – Número de alunos que erraram algum item na atividade 11b.

| item | nº de alunos que erraram |
|------|--------------------------|
| c | 1 |
| f | 4 |
| g | 4 |
| h | 3 |
| i | 3 |
| n | 1 |
| o | 3 |
| p | 2 |
| q | 2 |

| item | nº de alunos que erraram |
|------|--------------------------|
| r | 6 |
| s | 1 |
| t | 1 |
| u | 1 |
| v | 4 |
| w | 3 |
| x | 1 |
| y | 1 |

A atividade 11b constou de 26 itens. Houve 41 itens incorretos dos 988 feitos pelos alunos, isto é, aproximadamente 4,1% dos itens.

Atividade 11c Na atividade 11c, os alunos começam a usar descrições de números inteiros e adição, para modelar situações aditivas envolvendo subir a, ou descer de, um andar determinado, de elevador. Generalizam usando formas descritivas com uma variável.

ATIVIDADE 11c

Primeira Folha

01. Uma pessoa está no quinto andar de um edifício. Toma o elevador e sobe 7 andares.

a) Apresente uma descrição, usando adição, do andar final em que a pessoa está.

b) Em que andar está no final?

Havia ainda, na primeira folha e na seguinte, os problemas:

02. Uma pessoa está no andar -2 de um edifício. Toma o elevador e sobe 5 andares.

a) Apresente uma descrição, usando adição, do andar final em que a pessoa está.

b) Em que andar está no final?

03. Uma pessoa está no quarto andar de um edifício. Toma o elevador e desce 6 andares.

a) Apresente uma descrição, usando adição, do andar final em que a pessoa está.

b) Em que andar está no final?

Atividades

Atividade 12a O cenário desta atividade são as operações bancárias e suas representações usando números inteiros e adição. Até a questão 5, o aluno é solicitado a fazer a descrição do saldo final a partir do inicial e após um depósito ou emissão de cheque ou saque de caixa eletrônico. Nas questões 6 e 7, são realizadas mais de uma operação bancária.

Nas questões 8 e 9, o aluno é informado de que alguém tem saldo inicial de x (ou k) reais e é solicitado a descrever o saldo final após um saque ou depósito.

ATIVIDADE 12a

Primeira Folha

01. No dia primeiro de março, o saldo da conta bancária de Maria em certo banco era de 100 reais. Depositou 50 reais.

a) Apresente, usando adição, uma descrição do novo saldo de Maria.

b) Qual o novo saldo de Maria?

Havia ainda, nessa folha e na seguinte, os problemas:

02. No dia cinco de abril, o saldo da conta bancária de Mário em certo banco era de -200 reais. Depositou 100 reais.

a) Apresente, usando adição, uma descrição do novo saldo de Mário.

b) Qual o novo saldo de Mário?

03. No dia dez de dezembro, o saldo da conta bancária de Mariá em certo banco era de -50 reais. Depositou 150 reais.

a) Apresente, usando adição, uma descrição do novo saldo de Mariá.

b) Qual o novo saldo de Mariá?

04. No dia cinco de setembro, o saldo da conta bancária de Maíra em certo banco era de 100 reais. Sacou do caixa eletrônico 150 reais.

a) Apresente, usando adição, uma descrição do novo saldo de Maíra.

Quadro 2.12.0. – Erros dos alunos na atividade 12a, por item.

| item | erro | n° de alunos | item | erro | n° de alunos |
|------|----------------|--------------|------|--|--------------|
| 1a | [branco] | 2 | 6b | 240 | 5 |
| 2a | $-200+(-100)$ | 1 | 6b | -60 | 2 |
| 2b | 150 | 1 | 6b | -100 | 1 |
| 3a | -50 | 1 | 7a | $-100+10+40+50+60+(-80)+(-100)+(-200)$ | 3 |
| 4a | $150+(-100)$ | 1 | 7b | -320 | 3 |
| 4b | 50 | 1 | 7b | 220 | 7 |
| 5a | $-100+40$ | 1 | 8 | $x+20$ | 3 |
| 5b | -60 | 1 | 8 | [branco] | 1 |
| 5b | 140 | 1 | 9 | [branco] | 1 |
| 6a | $100+50+(-50)$ | 1 | | | |
| 6a | $100+50+90$ | 5 | | | |

Cada aluno nessa atividade fez 16 itens. Dos 608 feitos pelos alunos, 42 estavam incorretos. Tivemos então, aproximadamente, 7% de itens não corretos.

Observamos que o número de erros aumentou quando os alunos tiveram que fazer adições com mais de duas parcelas.

Atividade 12b O professor não lê, nem explica o que fazer para os alunos.

| |
|---|
| <h2 style="margin: 0;">ATIVIDADE 12b</h2> <p>01. Paulo tem três doces. Ele compra 14 doces.</p> <p>a) Descrever, usando adição, o número de doces que Paulo tem agora.</p> <p>_____</p> <p>b) Quantos doces Paulo tem agora?</p> <p>_____</p> |
|---|

Nessa folha havia também os problemas:

02. Paulo tem dez doces. Ele come 4 desses doces.

a) Descrever, usando adição, o número de doces que Paulo tem agora.

b) Quantos doces Paulo tem agora?

03. Paulo tem k doces. Sua mãe dá-lhe 3 doces. Descrever, usando adição, o número de doces que Paulo tem agora.

04. Ana tem x doces. Ela come 4 desses doces. Descrever, usando adição, o número de doces que Ana tem agora.

- Sem que lhes fosse dito e sem que perguntassem, os alunos, à exceção de um, representaram *Paulo tem dez doces. Ele come 4 desses doces* usando adição de inteiros: $10 + (-4)$. Também não houve relutância, à exceção do mesmo aluno, em usar as letras nas questões 3 e 4.

Dois alunos erraram alguns itens. Um aluno colocou $k + (-3)$ na questão 3. Outro aluno errou as questões 2, 3 e 4. Para 2a escreveu $10 + 4$ e para 2b, 14. Na questão 3 escreveu apenas 3 e na questão 4 escreveu 4. Esse aluno não havia respondido as duas últimas questões da atividade anterior. Nas questões 3 e 4 ele ignorou a letra, escrevendo 3 e 4 em vez de $k + 3$ e $x + 4$.

As questões foram corrigidas oralmente.

Atividade 12c O professor, antes da atividade, convencionou com os alunos que irão representar, por exemplo, *o saldo de alguém que compra um brinquedo por 10 reais e o vende por 20 reais* usando a forma descritiva $-10 + 20$.

ATIVIDADE 12c

01. José compra um gueime por 100 reais e dois meses depois vende esse gueime por 120 reais.

a) Apresente uma descrição, usando adição, do saldo de José.

b) Qual o saldo de José?

c) José teve lucro, prejuízo ou não teve lucro nem prejuízo? De quanto?

Havia ainda nessa folha o problema:

02. Artur comprou um gueime em janeiro. Em abril, vendeu esse gueime por 100 reais.

a) Apresente uma forma descritiva, usando adição e uma letra, do saldo final de Artur.

b) Se soubermos que no final Artur teve um prejuízo de 10 reais, como você representaria tal fato?

c) Você saberia resolver?

do concurso”. Para explicar o jogo, o professor usa um painel maior, visível para toda a sala, com números diferentes das cinco folhas que serão distribuídas aos alunos. Joga com a classe toda, chamando voluntários para cada adição realizada.

Tendo verificado que todos entenderam o jogo, o professor distribui a primeira folha. Dá um sinal de início. Vence o que terminar primeiro e corretamente.

Primeira Folha

ATIVIDADE 12e

Fique Esperto

Some!

The image shows a maze game board with a yellow background and blue paths. The maze is shaped like a stylized animal head. The path starts at a square labeled '-19' and ends at a square labeled '-5'. The path consists of 20 squares connected by arrows. The numbers on the arrows are: 5, -7, 2, 0, -1, 8, -6, -5, -3, 10, -8, -7, -5, 2, -5. There are also two orange boxes: 'SAÍDA' (Exit) at the start and 'CHEGADA' (Arrival) at the end.

Os alunos deveriam escrever no primeiro quadrado o resultado de $-19 + 5$, no segundo quadrado o resultado de $-14 + (-7)$, e assim sucessivamente. Houve mais quatro

ATIVIDADE 13a

Primeira Folha

Paulo está jogando figurinhas.

01. Na primeira partida, ganha 4 e, na segunda, perde 6.

a) Apresente uma descrição, usando adição, do saldo final de figurinhas de Paulo.

b) Qual o saldo de figurinhas de Paulo após as duas partidas?

c) Após as duas partidas, Paulo ganhou, perdeu ou nem ganhou, nem perdeu figurinhas? Quantas?

Essa folha continha ainda:

02. Na primeira partida perde 6 e na segunda ganha 4.

a) Apresente uma descrição, usando adição, do saldo final de figurinhas de Paulo.

b) Qual o saldo de figurinhas de Paulo após as duas partidas?

c) Após as duas partidas, Paulo ganhou, perdeu ou nem ganhou, nem perdeu figurinhas? Quantas?

03. V ou F.

$$4 + (-6) = (-6) + 4 \quad \alpha$$

- Antes de resolver cada item de cada problema, um aluno ou a professora leu em voz alta para a classe.

Na questão 1, um aluno escreveu para o item **c**: *perdeu -2*. Um aluno escreveu $6+4$ para o item **2a**. Todos os outros escreveram $6+(-4)$. Para o item **2c**, um aluno deixou em branco e outro escreveu *perdeu -2*.

A **segunda folha** da atividade 13a continha:

04. Na primeira partida perde 4 e na segunda ganha 6.

a) Apresente uma descrição, usando adição, do saldo final de figurinhas de Paulo.

b) Qual o saldo de figurinhas de Paulo após as duas partidas?

c) Após as duas partidas, Paulo ganhou, perdeu ou nem ganhou, nem perdeu figurinhas? Quantas?

ATIVIDADE 13a

Sexta Folha

Quando escrevemos

$$3+5=8$$

os números 3 e 5 são chamados *parcelas* e o resultado, isto é, 8, é chamado *soma*.

16. V ou F.

$$-5+3=3+(-5) \quad \alpha$$

$$7+3=3+7 \quad \alpha$$

$$0+(-3)=-3+0 \quad \alpha$$

$$-5+(-2)=(-2)+(-5) \quad \alpha$$

$$7+(-4)=(-4)+7 \quad \alpha$$

$$-5+5=5+(-5) \quad \alpha$$

17. Como você poderia, usando letras, generalizar?

18. Você saberia dizer isso em Português?

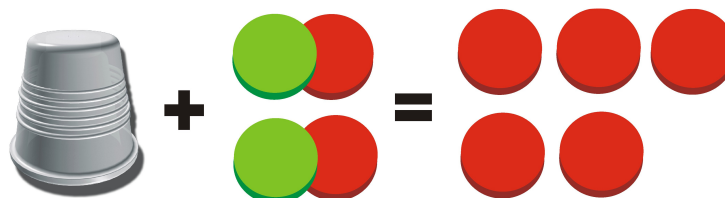
- A professora pediu para um aluno ler em voz alta as questões 17 e 18 e solicitou que os demais alunos as respondessem. Vários responderam corretamente, tanto no tocante ao uso de letras, que já haviam feito na atividade 10a, como em Português.

A professora enfatizou que na adição $a+b=c$, a e b são parcelas e não fatores e c é soma e não produto, pois houve um aluno que falou que a ordem dos fatores não altera o produto.

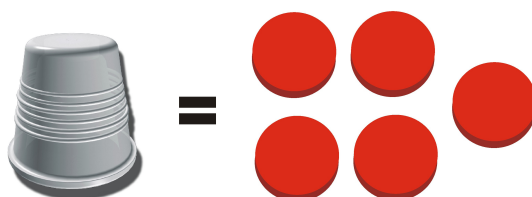
Para a questão 17, todos escreveram $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, onde α e β eram letras minúsculas do alfabeto latino, com exceção de um aluno que escreveu $-m+b=b+(-m)$. Observamos que os alunos usam letras de que eles “gostam” (foi assim que mais de um aluno se expressou). Nessa questão, só não usaram as letras h, i, t e u. Colocamos, a seguir, pares ordenados com as letras usadas e o número de alunos que as usaram: (a,10), (b,5), (c,7), (d,9), (e,5), (f,1), (g,3), (j,4), (k,1), (l,2), (m,6), (n,1), (o,2), (p,4), (q,1), (r,4), (s,1), (v,2), (w,1), (x,3), (y,2) e (z,2).

Para a questão 18 *Você saberia dizer isso em Português?*, encontramos as respostas, corretas ou incorretas, apresentadas no quadro a seguir:

Para saber quantas fichas de cada cor há (às vezes a professora coloca de antemão as fichas no copo opaco) ou haveria (às vezes não as coloca) dentro do copo, o aluno deve colocar de cada lado duas fichas vermelhas para neutralizar as verdes que estão no primeiro membro. Temos então:



Logo



Assim, há ou haveria dentro do copo 5 fichas vermelhas, isto é $x = 5$.

Primeira Folha

ATIVIDADE 13b

Paulo, o esquecido, joga uma partida de figurinhas de manhã e uma à tarde.

01. Ele não se lembra do que aconteceu na partida da manhã mas à tarde ele perde 5.

a) Apresente uma forma descritiva, usando adição e uma letra, do saldo final de figurinhas de Paulo.

b) Se soubermos que, no final do dia, após as duas partidas, ele tem 10 figurinhas, como você representaria tal fato?

c) Você conseguiria dizer o que aconteceu de manhã?

d) Você conseguiria representar esses fatos na reta orientada? Usar direção horizontal e sentido que você quiser.

e) Faça a atividade que a professora vai propor, com o copinho e as fichas. Esquematize essa atividade.

f) O que aconteceu de manhã?

- Foi necessário o auxílio da professora para a representação na reta. A professora também explicou como trabalhar com o copo e as fichas. Os alunos aceitaram tranqüila-

ATIVIDADE 13c

Primeira Folha

01. Calcular $x+y$ sendo

a) $x=-8$ e $y=9$

b) $x=5$ e $y=-12$

c) $x=15$ e $y=-22$

d) $x=-7$ e $y=-7$

Essa folha continua ainda:

02. Calcular $a+(-b)$ sendo

a) $a=-7$ e $b=-11$

b) $a=15$ e $b=2$

c) $a=25$ e $b=25$

d) $a=-7$ e $b=-14$

03. Calcular $-m+(-n)$ sendo

a) $m=-9$ e $n=9$

b) $m=4$ e $n=-11$

c) $m=25$ e $n=-22$

- A professora perguntou aos alunos se tinham idéia do que era para ser feito. Vários tinham. A professora fez com os alunos o item **1a**. Alguns alunos fizeram na lousa os itens **2a** e **3a**. Alguns alunos foram chamados à lousa para a correção dos itens depois de terem entregue a folha.

Lembremos a classificação de erros na adição que fizemos no nono conjunto de atividades.

n proveniente de erro em operações com naturais. Exemplo: $-9+(-3)=-11$

r devido ao mau uso das regras de funcionamento da adição. Exemplo: $-7+(-2)=9$

rn quando em uma mesma adição ocorrem o erro **n** e o erro **r**. Exemplo: $-3+(-7)=9$.

o erro que não pode ser incluído nos três tipos anteriores.

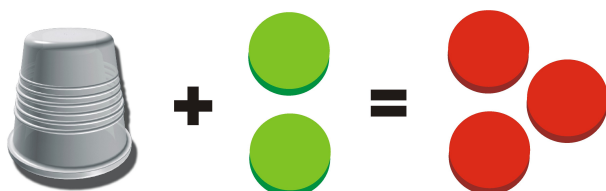
Para essa atividade, acrescentamos um novo tipo de erro:

s substituição incorreta.

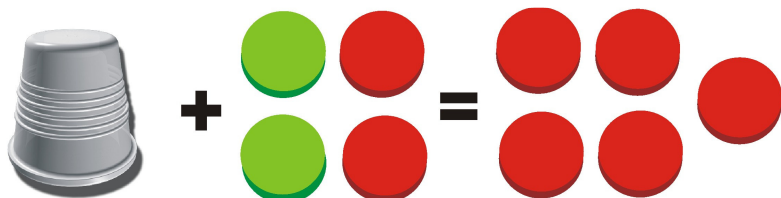
Um erro somente do tipo **s** significa que o aluno substituiu as letras incorretamen-

copo e fichas

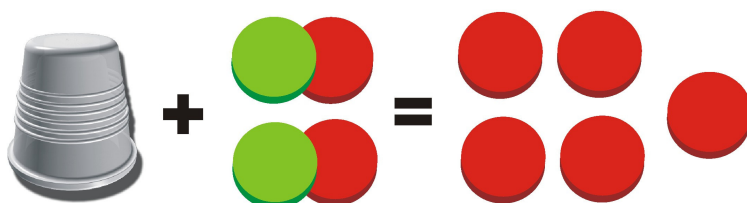
representação em linguagem algébrica



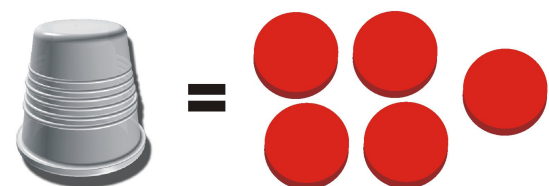
$$x + (-2) = 3$$



$$x + (-2) + 2 = 3 + 2$$



$$x + 0 = 5$$



$$x = 5$$

Primeira Folha

ATIVIDADE 14a

No item a) você vai resolver a equação usando copinho e fichas. No item b) você vai representar, usando apenas letra, sinais e números, o que foi feito com o copinho e as fichas.

01. $x + (-3) = 8$

a) $x =$ _____

b) _____

Essa folha e as seguintes continham ainda os itens:

2. $-3 + x = 8$

3. $x + 3 = -5$

4. $-2 + x = 9$

5. $x + 3 = 8$

6. $x + 4 = 0$

7. $8 + x = -2$

8. $2 + x = -2$

9. $-3 + x = -3$

10. $x + (-3) = 0$

- A professora, primeiramente, resolveu com os alunos, usando o copo e as fichas,

e as fichas, escrevem apenas as representações em linguagem simbólica. São solicitados a refletir sobre cada passo.

| | |
|--|----------------------|
| Primeira Folha | ATIVIDADE 14b |
| 01. a) Resolver a equação no universo dos números inteiros. Recorde o que foi feito com o copinho e as fichas e represente abaixo, usando letra, sinais e números. | |
| $x + (-5) = -1$ | |
| _____ | |
| _____ | |
| _____ | |
| _____ | |
| b) Diga o que você fez em cada etapa. | |
| _____ | |
| _____ | |
| _____ | |
| _____ | |

A **segunda folha** da atividade 14b foi igual à primeira, excetuando-se a equação, que foi $x + 4 = -3$.

- Os alunos formularam, com suas palavras, o que fizeram em cada etapa.

Todos resolveram corretamente a equação da primeira folha.

O quadro a seguir apresenta as respostas, corretas ou incorretas, do item 1b.

Quadro 2.14.0. – Respostas do item 1b.

| respostas | nº de alunos |
|--|--------------|
| Somei o oposto da segunda parcela. Somei o oposto da segunda parcela ao total. Anulei a segunda parcela e encontrei o valor da letra | 5 |
| valor do exercício | 2 |
| resultado | 2 |
| valor da equação | 9 |
| Primeiro somei o oposto da segunda parcela. Somei -5 com 5 e deu zero. Somei o segundo membro. | 11 |
| Somamos o oposto da segunda parcela nos dois membros. Anulei a segunda parcela e encontrei zero. Somei o segundo membro. | 3 |
| Somei o oposto da segunda parcela. Somei o oposto do outro número e ficou zero. Somei o segundo membro. | 3 |
| Somei o oposto da segunda parcela. Encontrei o número zero somando os opostos da segunda parcela. Somei o segundo lado. | 2 |
| Anulei a primeira parcela. | 1 |

As respostas da segunda folha foram as mesmas, mutatis mutandis, das da primeira folha.

Atividade 14c A atividade 14c consiste de um debate entre os colegas, havendo a intermediação do professor, com a finalidade de resolver equações do tipo $x + a = b$ e $a + x = b$ com menos passagens do que estão fazendo até agora. Formulam, auxiliados pela professora, a regra prática *passar o oposto de a para o segundo membro e somar com b* . Em seguida, instanciam equações desse tipo e as resolvem usando o que foi discutido.

ATIVIDADE 14c

DEBATE

Discutir com seus colegas (com a professora também) uma regra prática, baseada no que você fez com as fichas e com o copinho, para resolver equações do tipo

$$a + x = b \qquad \text{ou} \qquad x + a = b$$

onde a e b são números inteiros.

Tome dois exemplos. Escolha valores para a e para b .

- Antes das atividades, a professora escreveu na lousa a equação

$$x + a = b, \quad a \text{ e } b \text{ são números inteiros.}$$

Desafiou, então, a classe a tentar explicar o que estava escrito.

Houve alunos que deram exemplos, $x + 2 = -5$, etc. Houve alunos que tentaram ser mais gerais, dizendo que a e b eram quaisquer números inteiros, mas o x eles não sabiam quanto era, era para calcular. A professora confirmou esses alunos.

Voluntários foram chamados à lousa. Cada um deles escreveu, com o auxílio eventual dos colegas ou da professora, as linhas

$$x + a = b$$

$$x + a + (-a) = b + (-a)$$

$$x + 0 = b + (-a)$$

$$x = b + (-a)$$

cia da associatividade, sem prejuízos para aprendizagem, em vários momentos, inclusive posteriormente à seqüência.

Atividade 14d Na atividade 14d, os alunos usam a regra prática *passar para o segundo membro o oposto do número do primeiro* para resolver equações. Para cada equação resolvida, o aluno substitui o valor encontrado na equação e diz se a sentença resultante é verdadeira ou falsa.

ATIVIDADE 14d

Primeira Folha

Resolver as equações no universo dos números inteiros. Usar a regra prática estabelecida com seus colegas e com a professora.

01. $x+(-4)=1$

Verifique se você acertou, substituindo o valor encontrado na equação.

Essa folha e as duas próximas continham ainda

2. $3+x=-7$ 3. $x+5=-4$ 4. $x+(-4)=-6$ 5. $x+7=0$ 6. $-8+x=-6$
7. $x+(-6)=-6$ 8. $-9+x=0$ 9. $-7+x=6$ 10. $8+x=-7$

- Durante a atividade, para alguns alunos, e no final, para todos, a professora anotou os erros e solicitou que refizessem os itens que haviam errado.

Observamos três tipos de erros:

- a) aluno que, no segundo membro, conservou o mesmo sinal do número do primeiro membro. Por exemplo, $x+(-4)=-6$ $x=-6+(-4)$ $x=-10$,
- b) aluno que, no segundo membro, mudou o sinal do número do segundo membro e conservou o sinal do número do primeiro. Por exemplo, $x+(-4)=-6$ $x=6+(-4)$
 $x=2$
- c) aluno que, no final, somou errado.

Quadro 2.14.1. – Tipos de erros na atividade 14d.

| item | tipo | nº de alunos | item | tipo | nº de alunos |
|------|------|--------------|------|------|--------------|
| 3 | c | 1 | 6 | b | 1 |
| 4 | a | 5 | 6 | c | 2 |
| 4 | b | 1 | 7 | a | 3 |
| 4 | c | 1 | 8 | a | 3 |
| 5 | a | 6 | 8 | c | 1 |
| 5 | c | 1 | 9 | a | 2 |
| 6 | a | 7 | 10 | a | 3 |

Atividade 14e Continuamos, na atividade 14e, a substituir valores nas formas descritivas com variáveis.

ATIVIDADE 14e

Sendo $a=-8$, $b=5$, $c=0$, $d=-1$, $e=4$ e $f=-2$, calcular

a) $a+b=$ _____

Outros itens dessa atividade:

b) $a+(-b)+c=$

c) $a+b+(-c)=$

d) $-a+(-b)+d=$

e) $a+(-b)=$

f) $a+(-c)=$

g) $-a+e=$

h) $-c+a=$

i) $e+a+(-d)=$

j) $-f+(-b)+a=$

k) $a+b+c+d=$

l) $a+(-b)+c+d=$

m) $a+b+(-c)+d=$

n) $-a+b+c+d=$

o) $a+b+c+(-d)=$

p) $a+b+c+d+e+f=$

q) $a+(-c)+d+e+f=$

r) $a+b+(-d)+e+f=$

s) $b+c+d+(-e)+f=$

- Os alunos fizeram individualmente. A professora verificou e anotou os itens errados e pediu que os alunos os refizessem. Depois de terem refeito, alguns itens foram corrigidos na lousa por alunos ou pela professora.

Vamos usar a classificação dos tipos de erros da atividade 13c, isto é, **n** proveniente de erro em operações com naturais. Exemplo: $-9+(-3)=-11$

01. Pedro tem 7 bolinhas de gude. Joga uma partida e perde 4 bolinhas. Quantas bolinhas tem depois da partida?

Havia ainda nessa e em outras folhas os problemas:

02. Beto joga uma partida de bolinhas de gude e perde 6 bolinhas. Depois da partida tem 3 bolinhas. Quantas bolinhas ele tinha antes da partida?

03. Cláudio tem 4 bolinhas de gude. Depois da partida, ele tem 9 bolinhas. O que aconteceu na partida?

04. Paulo joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira partida, ele ganha 7 bolinhas. Na segunda perde 4. O que aconteceu?

05. Lauro joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira perde 3. Na segunda perde 5. O que aconteceu?

06. Miguel joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira ganha 3. Na segunda perde 7. O que aconteceu?

07. Cristiano joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira partida ganha 4. Joga uma segunda partida. Depois dessas partidas, ele ganhou ao todo 9 bolinhas. O que aconteceu na segunda partida?

08. Jair joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira perde 4. Joga uma segunda partida. Depois dessas duas partidas, perdeu 8 bolinhas. O que aconteceu na segunda partida?

09. Didi joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira perde 6. Joga uma segunda partida. Depois dessas duas partidas, perdeu 4 bolinhas. O que aconteceu na segunda partida?

10. Olívio joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira ganha 3. Joga uma segunda partida. Depois dessas duas partidas, perdeu 7 bolinhas. O que aconteceu na se-

ATIVIDADE 15b

01. Lídia tinha saldo de -100 reais no banco. Sacou ou depositou uma certa quantia. Atualmente, seu saldo é de 220 reais.

a) Escreva uma equação cuja solução seja o saque ou o depósito.

b) Resolva.

c) Lídia sacou ou depositou? Quanto?

Essa atividade continha ainda o problema:

02. Paola tinha um certo saldo no banco. Retirou 200 reais. Atualmente, seu saldo é de 50 reais.

a) Escreva uma equação cuja solução seja o saldo inicial.

b) Resolva.

c) Qual era o saldo inicial de Paola?

- Os alunos não tiveram dificuldade na compreensão dos enunciados. No item **1a**, dois alunos escreveram apenas *depositou*. Um outro aluno, no item **1c**, escreveu 350 em vez de 320.

Atividade 15c A atividade 15c é planejada para ser feita com a classe toda. O professor lê cada problema com os alunos e verifica, perguntando, o que entenderam. Depois, chama os alunos à lousa para resolverem um problema com o mesmo enunciado, mas com outros números. Em seguida, pede para fazerem a atividade na folha. Verifica cada uma e, novamente, chama os alunos à lousa para resolver.

ATIVIDADE 15c

Primeira Folha

01. Rafael jogou duas partidas de bolinhas de gude. Ele tinha 15 bolinhas no início. No final das duas partidas, ele tinha 6 bolinhas a mais do que no início. Na segunda partida, ganhou 8 bolinhas. O que aconteceu na primeira partida?

02. Renato está remando em um rio e pára uma primeira vez a 200 metros do ponto de partida. Continua remando e pára uma segunda vez. Depois, retorna em direção ao ponto de partida e rema 500 metros. Encontra-se, então, a 100 metros do ponto de partida. Quantos metros remou entre a primeira e a segunda parada?

Tentamos mostrar como chegamos a eles no capítulo anterior, no desenvolvimento da seqüência de atividades.