

Mário Servelli Rosa

NÚMEROS COMPLEXOS

“Uma Abordagem Histórica Para Aquisição do Conceito”

Mestrado: ENSINO DA MATEMÁTICA

PUC - SP
1998

Mário Servelli Rosa

NÚMEROS COMPLEXOS

“Uma Abordagem Histórica Para Aquisição do Conceito”

Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como exigência parcial, para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação do Professor Doutor Saddo AG ALMOULOUD e com co-orientação do Professor Doutor Benedito Antonio da Silva.

PUC - SP
1998

$$u^3 + 3uv(u + v) + v^3 = 3(u+v) + 2$$

Para que esta igualdade se verifique devemos ter u e v tais que:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ 3uv = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ u^3 \cdot v^3 = 1 \end{cases}$$

Nesse sistema, os alunos terão a oportunidade de construírem diretamente a equação que dá suas soluções, que são u^3 e v^3 , sem que precisem resolvê-lo por substituição. A equação será $X^2 - 2X + 1 = 0$.

Assim $u^3 = 1$ e $v^3 = 1$, e daí $u = 1$ e $v = 1$

Uma vez que esta seqüência será apresentada logo após o capítulo de equações polinomiais, para introduzir-se o conceito de números complexos, é oportuno propor aos alunos que resolvam uma equação polinomial e analisem o número de soluções da mesma.

Atividade 1. Seja a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$

- Resolva a equação por pesquisa de raízes inteiras. Se você encontrar uma raiz, use o Teorema de D'Alembert para achar as outras. Quantas soluções tem a equação? Explique.
- Escrevendo a equação como uma igualdade entre duas funções, uma do terceiro grau, e uma do 1º, resolvê-la graficamente.
- Identifique sobre o gráfico a(s) solução(ões) da equação dada. Será que a equação tem mais de uma solução? Explique.

d) Supondo $x = u + v$, resolvê-la. Quantos valores de x achou com essa estratégia?

Objetivo: O objetivo é que os alunos encontrem uma solução dessa equação por processos que eles já conhecem e verifiquem que a maneira de resolver, agindo como Cardano e Tartaglia, que é a efetuada no item d), também leva à mesma solução, dando credibilidade à esta última.

Análise matemática e didática:

Variáveis didáticas: Os coeficientes são escolhidos com o objetivo de os alunos resolverem a equação por pesquisa de raízes inteiras, e que não haja maiores dificuldades com os cálculos durante a resolução com o método de Cardano-Tartaglia, para que eles possam constatar que este método leva à mesma solução.

Lembrando que esta seqüência deva ser aplicada após o capítulo de equações polinomiais, onde os alunos muito provavelmente, estudaram pesquisa de raízes inteiras, racionais e reais, eles poderão resolver a equação dada, pesquisando as possíveis raízes inteiras, que se existirem, serão divisores de 9: ± 1 , ± 3 e ± 9 . Descobrimos que 3 é solução, pelo teorema de D'Alembert, o polinômio $P(x) = x^3 - 6x - 9$ será divisível por $x - 3$. Fazendo essa divisão por Briot-Ruffini, por exemplo, encontrarão:

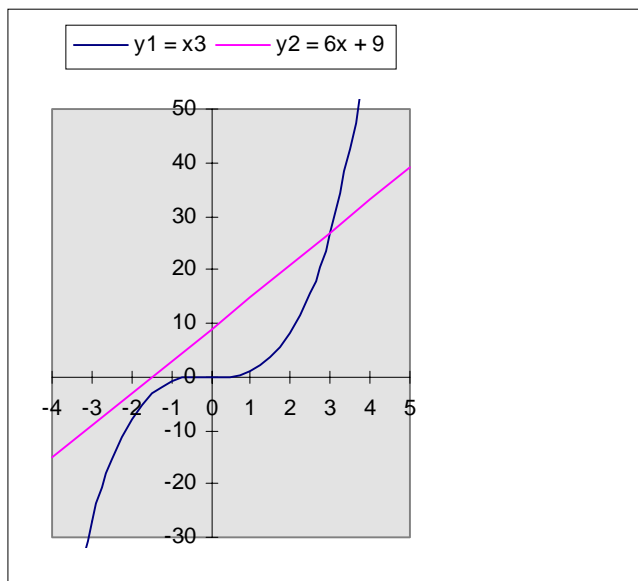
3	1	0	-6	-9
	1	3	3	0

$$x^3 - 6x - 9 = (x - 3).(x^2 + 3x + 3) = 0$$

$$x^2 + 3x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -3$$

Como $\Delta < 0$ a equação tem apenas uma raiz real: $x = 3$.

Os alunos deverão também, fazer os gráficos de $y_1 = x^3$ e de $y_2 = 6x + 9$ no mesmo sistema de coordenadas cartesianas e verificar que eles se interceptam em um único ponto, portanto a equação tem um único valor de x que faz com que $y_1 = y_2$. Se eles construírem estes gráficos com medidas corretas, poderão descobrir que a solução da equação é $x = 3$. O professor pode também propor que eles construam os gráficos no computador, no aplicativo Excel, como o que foi feito abaixo.



É de se esperar que num primeiro momento, os alunos sintam dificuldades para desenvolver esse algoritmo descoberto por Cardano-Tartaglia, por ser algo completamente novo para eles. Porém após essa primeira equação, deverão estar mais à vontade para resolverem outras.

$$x^3 - 6x - 9 = 0$$

$$x = u + v$$

$$(u + v)^3 - 6(u + v) - 9 = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 6(u + v) - 9 = 0$$

Acreditamos que este será um momento de dificuldade, pois os alunos não estando acostumados a resolver esse tipo de problema, talvez não percebam que devem colocar $3uv$ em evidência, para que surja outra vez $u + v$.

$$u^3 + 3uv(u + v) + v^3 - 6(u + v) - 9 = 0$$

Como no passo acima foi feita uma fatoração, talvez eles percebam que podem fatorar novamente, mesmo sem saber ao certo onde isso poderá levar.

$$u^3 + (3uv - 6)(u + v) + v^3 - 9 = 0$$

Outro ponto de dificuldade pode estar aqui, pela falta de prática nesta situação, na qual, eles precisarão pensar: “para que u e v esta equação é verdadeira?”

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 9 \\ 3uv - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = 9 \\ uv = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = 9 \\ u^3 v^3 = 8 \end{cases}$$

Os alunos trabalharam com as propriedades de soma e produto das raízes de uma equação do segundo grau na 8ª série e no primeiro colegial, mas normalmente não utilizam essas propriedades fora desse contexto, por isso acreditamos que aqui terão alguma dificuldade. No entanto, será importante eles perceberem que as mesmas podem ser bastante usadas nesta seqüência facilitando a resolução das nossas atividades. O fato de os alunos não utilizarem as relações entre a soma e o produto das raízes de uma equação do segundo grau e os seus coeficientes, fora do capítulo que as estudam especificamente, poderá provocar um obstáculo didático, quando eles forem utilizá-las, na presente atividade.

Outro aspecto a considerar é que normalmente fica implícito um contrato didático entre os alunos e o professor de tal maneira que este último só exige nas avaliações, o assunto dado no bimestre em sala de aula. Se o assunto não mais aparecer nas aulas de outro bimestre, ele será então esquecido.

u^3 e v^3 são soluções da equação $X^2 - 9X + 8 = 0$, ou seja

$$u^3 = 8 \Rightarrow u = 2 \text{ e}$$

$$v^3 = 1 \Rightarrow v = 1$$

e finalmente $x = 2 + 1 = 3$

Neste momento os alunos poderão comparar este resultado com aquele que já possuem e confiarem que este método leva à resolução de equações do terceiro grau, ou seja que eles conheceram uma nova maneira de resolver essas equações. Por esse método os alunos poderão concluir que eles encontram apenas uma solução da equação do terceiro grau.

Obs: Uma maneira que encontramos para amenizar as dificuldades descritas na atividade 1, foi elaborar a atividade 0.

Atividade 2: Seja a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$

- a) Escrevendo a equação como uma igualdade entre duas funções, uma do terceiro grau, e uma do 1° , resolvê-la graficamente.
- b) Identifique sobre o gráfico a(s) solução(ões) da equação dada. Será que a equação tem mais de uma solução? Explique.
- c) Resolva a equação por pesquisa de raízes inteiras. Se você encontrar uma raiz, use Briot-Ruffini para encontrar outras, se houver. Quantas soluções tem a equação? Explique.
- e) Supondo $x = u + v$ resolvê-la. Quantos valores de x você achou com essa estratégia? Você aprendeu a extrair raiz quadrada de um número positivo, e que não faz sentido tentar no conjunto dos números reais, extrair raiz quadrada de um número negativo. Mesmo sabendo disso vamos supor que

$\sqrt{-1} = i$ ou seja $i^2 = -1$. Com essa suposição tente calcular u^3 , v^3 , u , v , $x = u + v$, $u^3 + v^3$ e $u^3 \cdot v^3$

Objetivo: O objetivo desta equação é provocar um desequilíbrio, pois ao resolverem por pesquisa de raízes inteiras, os alunos deverão encontrar as três raízes da equação, analisando graficamente, também poderão encontrar as três raízes, porém quando tentarem resolver por Cardano-Tartaglia deverão se deparar com a raiz quadrada de um número negativo tornando inviável sua resolução por esse método. Será que o método falhou, apesar de ter funcionado tão bem na primeira equação, ou será que existe raiz quadrada de número negativo e pelo fato de só conhecermos os números reais e sabermos que nenhum número real ao quadrado resulta negativo, desconhecemos essa existência? A idéia é então trabalhar com as raízes de números negativos como se elas existissem, operar com os novos números descobertos, como ferramenta, mesmo que seja para justificar o algoritmo de resolução da equação proposta, e tentar após operar com esses novos números, resolvê-la finalmente.

Análise matemática e didática:

Variáveis didáticas: Os coeficientes foram escolhidos de tal modo que a equação tenha uma raiz inteira, para que os alunos possam resolvê-la por pesquisa de raízes, e quando da sua resolução pelo método de Cardano-Tartaglia, para se extrair uma das raízes cúbicas de um número complexo, deva-se calcular o seno e o cosseno de um ângulo de 45° . Para os outros ângulos será necessário o uso das fórmulas de $\cos(a+b)$ e $\sin(a+b)$.

Resolução da equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ por pesquisa de raízes.

Os alunos poderão encontrar a solução $x = 2$ pesquisando as raízes inteiras, e aplicando Briot-Ruffini ou o método das chaves efetuar a divisão de $x^3 - 6x + 4$ por $x - 2$.

2	1	0	-6	4
	1	2	-2	0

$$x^3 - 6x + 4 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x - 2) = 0$$

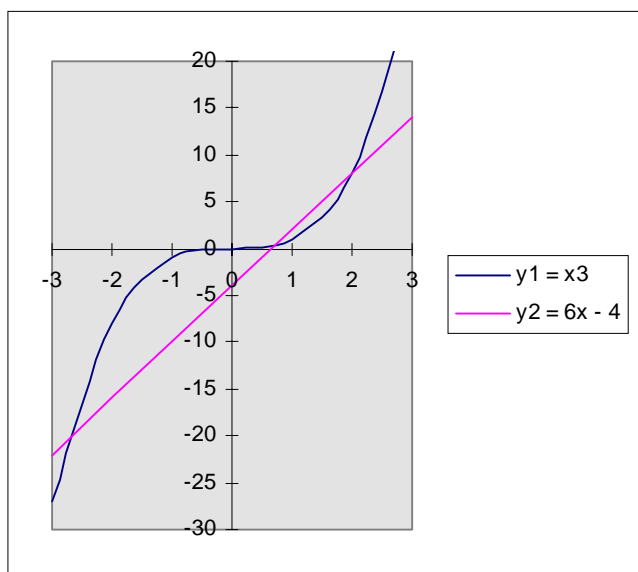
$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = 12$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{3} \cong 0,73$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{3} \cong -1,73$$

Eles poderão fazer os gráficos de $y_1 = x^3$ e $y_2 = 6x + 4$ e encontrar:



daí poderão concluir a existência de três raízes reais.

Os alunos operando como Cardano-Tartaglia vão obter a seguinte solução:

$$x = u + v$$

$$(u + v)^3 - 6(u + v) + 4 = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 6(u + v) + 4 = 0$$

$$u^3 + 3uv(u + v) + v^3 - 6(u + v) + 4 = 0$$

$$u^3 + (3uv - 6)(u + v) + v^3 + 4 = 0$$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -4 \\ 3uv - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -4 \\ uv = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -4 \\ u^3v^3 = 8 \end{cases}$$

u^3 e v^3 são soluções da equação $X^2 + 4X + 8 = 0$.

Na resolução dessa equação deveremos ter $\Delta = -16$

É de se esperar que os alunos respondam que a equação não tem solução, mas daí estarão diante de um impasse, eles sabem que a equação tem soluções, inclusive já as encontraram por outros métodos, mas para encontra-las pelo método de Cardano - Tartaglia estão se deparando com a raiz quadrada de um número negativo. O fato de os alunos saberem que a equação tem soluções é motivo para que eles tentem considerar a existência de raízes quadradas de números negativos e a questão que eles estão respondendo, sugere os próximos passos. Assim eles poderão se deparar com números do tipo $a + bi$ e operar com eles, e provavelmente o farão como se operassem com números reais.

Os alunos continuando os cálculos como se a raiz de um número negativo existisse deverão chegar à:

$$u^3 = \frac{-4 + \sqrt{-16}}{2} \quad \text{que por sugestão da questão proposta deve ficar}$$

$$u^3 = \frac{-4 + \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2} \quad \text{depois} \quad u^3 = \frac{-4 + 4\sqrt{-1}}{2} = \frac{-4 + 4i}{2}$$

Provavelmente neste ponto os alunos devam simplificar esse valor e com isso intuitivamente já estarão operando com esse novos números, pois estão fazendo a divisão por um número real. Finalmente, deverão chegar em

$$u^3 = -2 + 2i \quad \text{e}$$

$$v^3 = -2 - 2i$$

$$\text{Daí} \quad x = \sqrt[3]{-2 + 2i} + \sqrt[3]{-2 - 2i}$$

Talvez aqui eles concluam que de nada adiantou prosseguir com a resolução, mas o professor deve intervir dizendo a eles que realmente a equação não foi resolvida, mas que um novo tipo de número foi descoberto e que não se consegue resolvê-la, porque não se conhecem ainda esses números, portanto deve-se estudá-los melhor, para então voltar à referida equação.

Prosseguindo na resolução eles poderão fazer:

$$u^3 + v^3 = (-2 + 2i) + (-2 - 2i) = -2 + 2i - 2 - 2i = -4$$

$$u^3 \cdot v^3 = (-2 + 2i) \cdot (-2 - 2i) = (-2)^2 - (2i)^2 = 4 - (4i^2) = 4 - [4(-1)] = 4 - (-4) = 8$$

Acreditamos que não haverá dificuldades para essas operações uma vez que elas conservam as propriedades das operações com números reais, apenas devendo-se considerar que $i^2 = -1$.

Institucionalização da definição dos números complexos:

Nesse momento o professor institucionaliza a definição de número complexo, como sendo um número do tipo $a + bi$ com a e b sendo números reais, tal que $i^2 = -1$ e que esses números geralmente são nomeados na Matemática com a letra z , assim $z = a + bi$. O número a chama-se parte real de z e o número b chama-se parte imaginária de z . Se a parte imaginária de um número complexo é diferente de zero chamamos o número complexo de imaginário. Se o número tiver a parte real igual a zero ele será chamado de número imaginário puro.

As operações entre os números complexos.

A adição será definida como:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad \text{e a multiplicação por}$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\text{A igualdade: } a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

O conjugado de $a + bi = a - bi$

$$\text{a divisão } \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Atividade 3:

a) Chama-se conjugado do número complexo $a + bi$ ao número $a - bi$. Efetue o produto de $a + bi$ pelo seu conjugado. De que tipo de número é o resultado?

b) Efetue $(2 + 3i) \cdot (2 - 3i)$

c) Efetue $\frac{4 + 8i}{2}$

d) Efetue $\frac{8 - i}{1 - 2i}$

e) Determine os números reais a e b tais que $(a + bi)(1 - 2i) = 8 - i$. O que essa operação tem em comum com a operação do item d) ?

f) Como já foi dito, $i^2 = -1$. Nesse caso calcule $i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, i^{23}, i^{132}$

Objetivo: Esta atividade foi introduzida após aplicarmos a seqüência para uma dupla de alunos, e verificarmos que havia necessidade de que eles adquirissem mais habilidades com as operações com números complexos, principalmente na parte de igualdade e potências de i. O objetivo é que nas próximas atividades eles não encontrassem maiores dificuldades nos cálculos, e desviassem a atenção daquilo que era realmente importante na questão formulada.

Análise matemática e didática:

Procuramos no item e) mostrar que podíamos fazer uma divisão usando apenas a multiplicação, porém acreditamos que os alunos realizem os cálculos dos itens d) e e) sem notarem que se trata da mesma operação, uma vez que é muito comum eles realizarem os cálculos e não analisarem o que foi feito, ficando satisfeitos por terem obtido a solução final.

a) $(a + bi).(a - bi) = (a^2 - (bi)^2) = a^2 + b^2$ O resultado é um número real.

b) $(2 + 3i).(2 - 3i) = 4 + 9 = 13$

c) $\frac{4 + 8i}{2} = 2 + 4i$

d) $\frac{8 - i}{1 - 2i} = \frac{(8 - i).(1 + 2i)}{(1 - 2i).(1 + 2i)} = \frac{8 - i + 16i - 2i^2}{1 + 4} = \frac{10 + 15i}{5} = 2 + 3i$

$$e) (a+bi).(1-2i)=8-i \Rightarrow a-2ai+bi-2bi^2=8-i \Rightarrow \begin{cases} a+2b=8 \\ -2a+b=-1 \end{cases} \text{ e daí } a=2 \text{ e } b=3$$

f)

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$$

$$i^{23} = (i^4)^5 \cdot i^3 = i^3 = -i$$

$$i^{132} = i^0 = 1$$

Atividade 4: Existe um número do tipo $a + bi$ tal que $(a + bi)^2 = 3 + 4i$?

Objetivos: Um dos objetivos desta atividade é que os alunos desenvolvam um algoritmo para extrair raízes quadradas de um número complexo, e que mais à frente eles tentem fazer o mesmo com uma raiz cúbica, deparando-se então com a impossibilidade desta última operação. Esta impossibilidade será a motivação para que mudemos o nosso estudo, do quadro algébrico para o geométrico. Outro objetivo é que eles trabalhem com esses novos números para que adquiram habilidades nas operações.

Análise matemática e didática:

variáveis didáticas: Tendo em vista que para se desenvolver esta atividade, os alunos deverão resolver uma equação bi-quadrada, é importante escolher-se um número complexo de tal modo que a equação do segundo grau que resulta da bi-quadrada, tenha uma raiz que seja um quadrado perfeito para simplificar os cálculos.

$$(a + bi)^2 = 3 + 4i$$

$$a^2 + 2abi - b^2 = 3 + 4i$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

$$b = \frac{2}{a}$$

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = 3$$

$$a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$a^2 = k$ O número escolhido ($3 + 4i$) faz resultar um valor de k que seja um quadrado perfeito

$$k^2 - 3k - 4 = 0$$

$$k_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 2$$

$k_2 = -1$ não convém, pois a deve ser real

Se $a = 2$ então $b = 1$ e uma raiz quadrada de $3 + 4i$ será $2 + i$

Se $a = -2$ então $b = -1$ e a outra raiz de $3 + 4i$ será $-2 - i$

Assim os números que elevados ao quadrado resultam em $3 + 4i$ são $\pm (2 + i)$.

Portanto as raízes quadradas de $3 + 4i$ serão $\pm (2 + i)$.

Atividade 5 : Existe um número do tipo $a + bi$ tal que $(a+bi)^3 = -2 + 2i$? Qual?

Objetivo: O objetivo desta atividade é que o aluno ao tentar encontrar a raiz cúbica de um número complexo, como ele já fizera com a raiz quadrada, se depare com uma impossibilidade, pois para consegui-lo precisará resolver uma

equação do terceiro grau. Em vista disso, haverá a necessidade de uma mudança de quadro, e do registro de representação de um número complexo.

Análise matemática e didática:

Para extrair a raiz cúbica de $-2 + 2i$, os alunos baseados na raiz quadrada, talvez façam:

$$(a + bi)^3 = -2 + 2i$$

Eles devem encontrar o número $a + bi$ tal que $(a + bi)^3 = -2 + 2i$

$$a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = -2 + 2i$$

$$a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = -2 + 2i \Rightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -2 \\ 3a^2b - b^3 = 2 \end{cases}$$

Os alunos poderão perceber que para extraírem a raiz cúbica de um número complexo, deverão resolver um sistema de equações do terceiro grau, que sem ser impossível, é no entanto muito trabalhoso e por consequência impróprio para o cálculo da raiz. Além disso como fazer para extrair uma raiz de índice maior? Na impossibilidade desse cálculo com os conhecimentos obtidos até este momento, surge um impasse. O professor proporá então novas atividades para que os alunos adquiram os conhecimentos necessários para finalmente resolverem a equação pedida.

Atividade 6:

- a) Represente o número complexo $z = a + bi$, $a > 0$ e $b > 0$ através de um ponto, num sistema de coordenadas cartesianas, tomando o eixo horizontal para situar o valor de a (parte real do número complexo) e o eixo vertical para situar o valor de b (parte imaginária do número complexo).

- b) Calcule o comprimento do vetor que vai de $(0,0)$ até (a,b) . Chame esse comprimento de $|z|$. (é o módulo do número complexo dado)
- c) Seja θ o ângulo formado, supondo-se o eixo x girando no sentido anti-horário, até se sobrepor ao vetor citado no item anterior. (Esse ângulo é chamado de argumento do número complexo). Escreva em função de θ e de $|z|$ o número complexo $z = a + bi$.

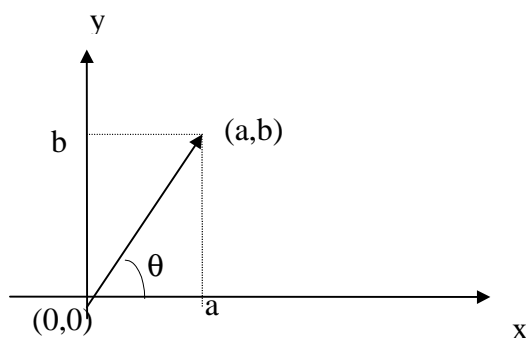
Objetivo: O objetivo é que os alunos mudem do quadro algébrico para o geométrico, para mudar da representação cartesiana para a trigonométrica para que consiga efetuar potenciação e radiciação de números complexos.

Análise matemática e didática: Apesar de na História passarem-se 300 anos desde o surgimento dos números complexos até sua representação geométrica, atualmente, como os alunos trabalham com o sistema de coordenadas desde a 8ª série do 1º grau, eles poderão desenvolver essa tarefa sem dificuldades.

Variáveis didáticas: a e b foram escolhidos positivos para sua fácil representação no sistema de coordenadas, podendo-se depois generalizar.

Eis o que os alunos poderão fazer:

a)



$$b) |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c) \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|} \quad e \quad \operatorname{cos}\theta = \frac{a}{|z|}$$

$$d) a = |z| \cdot \operatorname{cos}\theta \quad e \quad b = |z| \cdot \operatorname{sen}\theta \quad \text{portanto:}$$

$$z = a + bi = |z| \cdot \operatorname{cos}\theta + (|z| \cdot \operatorname{sen}\theta) \cdot i = |z| \cdot (\operatorname{cos}\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

Atividade 7: Sejam os números complexos $1 + \sqrt{3}i$ e $2\sqrt{3} + 2i$:

- Encontre seus módulos e seus argumentos.
- Represente-os como vetores em dois sistemas de coordenadas cartesianas.
- Efetue o produto desses números e represente o resultado como um vetor no sistema de coordenadas cartesianas.
- Existe uma relação entre o módulo do produto e o módulo dos fatores? Qual? E entre os argumentos? Qual?
- Tendo em vista os resultados acima, qual seria o resultado do produto $2(\operatorname{cos} 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ) \cdot 5(\operatorname{cos} 20^\circ + i \operatorname{sen} 20^\circ)$?
- Sabendo que $\operatorname{cos}(a + b) = \operatorname{cos}a \cdot \operatorname{cos}b - \operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}b$ e que $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a \cdot \operatorname{cos}b + \operatorname{sen}b \cdot \operatorname{cos}a$ prove as relações obtidas no item d efetuando o produto $z_1 \cdot z_2$ sendo:

$$z_1 = |z_1|(\operatorname{cos}\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \quad e \quad z_2 = |z_2|(\operatorname{cos}\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$$

- Explique como você poderia efetuar mais facilmente $(1 + \sqrt{3}i)^5$. Efetue.

Objetivo: O objetivo desta atividade é que o aluno descubra que o módulo do produto de dois números complexos é igual ao produto dos módulos desses números, o argumento do produto é a soma dos argumentos e daí que eles percebam que a potenciação fica bem mais simples quando é usada a representação trigonométrica.

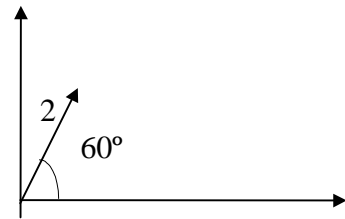
Análise matemática e didática.

Variáveis didáticas: Os números acima foram escolhidos de tal forma que seus argumentos tenham seno e cosseno conhecidos e no item g, a forma trigonométrica já tenha sido estabelecida no item a. Foram dadas as fórmulas de $\cos(a+b)$ e $\sin(a+b)$ pois os alunos normalmente operam poucas vezes com elas no curso secundário.

a)

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

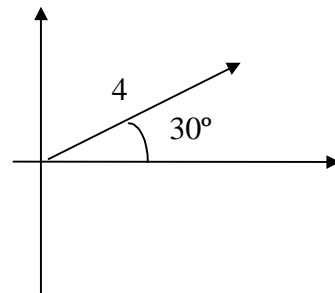
$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{cos } \theta = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$



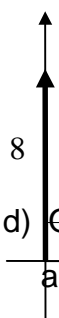
b)

$$|z_2| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } \theta = \frac{1}{2} \\ \text{cos } \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$



c) $(1 + \sqrt{3}i) \cdot (2\sqrt{3} + 2i) = 2\sqrt{3} + 2i + 6i - 2\sqrt{3} = 0 + 8i$



d) módulo do produto é igual ao produto dos módulos dos fatores e o argumento do produto é igual à soma dos argumentos dos fatores.

e) $2(\cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ) \cdot 5(\cos 20^\circ + i \operatorname{sen} 20^\circ) = 10(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$

f)
$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot |z_2|(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2| (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cdot \cos \theta_1) =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2| \cdot ((\cos(\theta_1 + \theta_2)) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

g)

$$(1 + \sqrt{3}i)^5 = 2^5 (\cos 5.60^\circ + i \operatorname{sen} 5.60^\circ) =$$

$$= 32(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ) = 32\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16 - 16\sqrt{3}i$$

Desde que os alunos percebam que para multiplicar dois números complexos basta multiplicar seus módulos e somar seus argumentos eles deverão estar prontos para efetuar a potenciação.

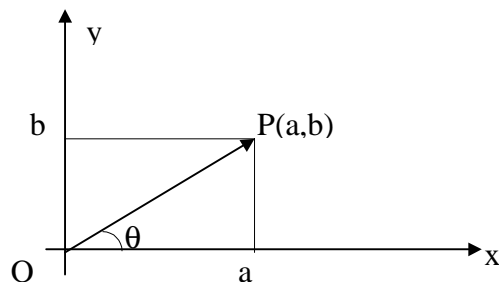
Institucionalização da representação gráfica, da forma trigonométrica, do produto e da potência de números complexos.

Vamos representar um número complexo, num sistema de coordenadas cartesianas. Representaremos cada número complexo $z = a + bi$ pelo ponto

do plano de coordenadas (a,b) . Dessa forma o número complexo $z = 3 + 2i$ será representado pelo ponto $P(3,2)$

Forma trigonométrica de um número complexo.

Vamos localizar um número complexo na sua representação geométrica por:



- A distância OP deste ponto até a origem do sistema cartesiano ortogonal é chamada módulo de z e representada por $|z|$.
- O ângulo θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, que se obtém, supondo-se o eixo x girando no sentido anti- horário em torno de O até se superpor ao segmento OP . Esse ângulo θ é chamado argumento de z e é representado por $\text{Arg}(z)$.

Cálculo do módulo de z onde $z = a + bi$

Pelo Teorema de Pitágoras temos $|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\text{O ângulo } \theta \text{ é tal que } \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \cdot \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

Assim o número $z = a + bi$ pode ser representado por

$$z = |z| \cdot \cos \theta + i |z| \operatorname{sen} \theta \quad \text{ou} \quad z = |z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

que é sua forma trigonométrica.

Potenciação na forma trigonométrica

$$\text{Sejam } z_1 = |z_1| \cdot (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \text{ e } z_2 = |z_2| \cdot (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

Vamos efetuar o produto $z_1 \cdot z_2$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2 \cdot \cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) + i (\operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cdot \cos \theta_1)$$

Da trigonometria temos que:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) \quad \text{e}$$

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = (\operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cdot \cos \theta_1)$$

$$\text{Portanto } z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) \right]$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \left[\cos[(\theta_1 + \theta_2) + \theta_3] + i \operatorname{sen}[(\theta_1 + \theta_2) + \theta_3] \right] =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \left[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right]$$

Como a potência z^n é um produto de n fatores iguais a z , vem:

$$z^n = |z| \cdot |z| \cdot |z| \dots |z| \cdot [\cos(\theta + \theta + \theta + \dots + \theta) + i \cdot \text{sen}(\theta + \theta + \theta + \dots + \theta)]$$

Logo

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}(n \cdot \theta)]$$

Assim se quisermos calcular $(\sqrt{3} + i)^9$ podemos usar o Binômio de Newton, ou escrever esse número na forma trigonométrica que é $2(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen} \frac{\pi}{6})$ e efetuar a potência.

Assim se $z = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen} \frac{\pi}{6})$ então

$$z^9 = 2^9 (\cos 9 \cdot \frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen} 9 \cdot \frac{\pi}{6}) = 512 (\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \text{sen} \frac{3\pi}{2}) = 512(0 - i) = -512i$$

Atividade 8: Efetuar

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^8$

b) $(1 + i)^{10}$

c) $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{12}$

Objetivo: Esta atividade também foi introduzida após a aplicação da seqüência, inicialmente para apenas uma dupla de alunos. Percebemos que os alunos precisavam de maior habilidade com os cálculos e este é o objetivo dessa atividade.

Análise matemática e didática.

Variáveis didáticas:

Procuramos elaborar exercícios de tal modo que o seno e o cosseno dos argumentos permitissem o cálculo dos mesmos sem o uso de calculadoras. Não esperamos que os alunos encontrem dificuldades nessa atividade pois se tratam apenas de exercícios de fixação da teoria.

Atividade 9:

- a) Represente os números abaixo pela sua forma algébrica e graficamente. Existe uma relação entre eles? qual ? Explique.

$$8(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$$

$$8(\cos 450^\circ + i \operatorname{sen} 450^\circ)$$

$$8(\cos 810^\circ + i \operatorname{sen} 810^\circ)$$

$$8\cos(1170^\circ + i \operatorname{sen} 1170^\circ)$$

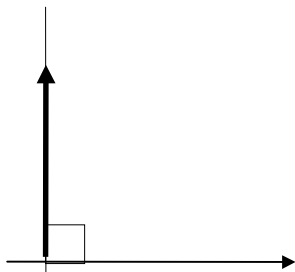
- b) Encontre os números complexos que elevados ao cubo sejam iguais a cada um dos números acima. Com esses resultados e a conclusão do item anterior, quais são as raízes cúbicas de $8(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$? Qual a diferença entre seus argumentos? E a relação entre seus módulos?
- c) Represente-os geometricamente num mesmo sistema de coordenadas. Que figura eles formam?

Objetivo: O objetivo é que os alunos extraiam a raiz cúbica de um número complexo, fazendo as operações inversas da potenciação, que eles percebam que um número complexo tem três raízes cúbicas, que todas têm o mesmo módulo e os argumentos estão em uma Progressão Aritmética de razão 120° .

Análise matemática e didática.

Variáveis didáticas: Os números foram escolhidos de tal forma que seus argumentos fossem múltiplos de 3, que o módulo tivesse uma raiz cúbica exata e que sua representação geométrica fosse simples de ser encontrada.

- a) Todos os números são iguais a $8i$, portanto são iguais entre si.



b) O número ao cubo igual a $8(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$ é $2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$.

O número que elevado ao cubo é igual a $8(\cos 450^\circ + i \operatorname{sen} 450^\circ)$ é $2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$, o número ao cubo igual a $8(\cos 810^\circ + i \operatorname{sen} 810^\circ)$ é $2(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ)$ e o número ao cubo igual a $8(\cos 1170^\circ + i \operatorname{sen} 1170^\circ)$ é $2(\cos 390^\circ + i \operatorname{sen} 390^\circ)$ que por sua vez é igual a $2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$.

Tendo no item a) concluído que os números dados, são todos iguais entre si, os alunos poderão perceber que os três valores encontrados são as raízes de $8(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$, que a diferença entre seus argumentos é de $\frac{360^\circ}{3}$ e que todos tem o mesmo módulo.

c) Como as raízes tem o mesmo módulo e seus argumentos formam uma P.A. elas se localizam sobre uma circunferência de raio 2, sendo vértices de um triângulo equilátero.

Atividade 10:

- Encontre as raízes quartas de $-8 - 8\sqrt{3}i$ e represente-as geometricamente num mesmo sistema de coordenadas cartesianas.
- Determine as raízes cúbicas de 1 e represente-as geometricamente no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.
- Calcule as raízes quadradas de i e represente-as geometricamente num mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Objetivo: Também introduzida após o teste inicial da seqüência para uma dupla de alunos, esta atividade tem por objetivo que os alunos adquiram

habilidade na radiciação de números complexos e que eles consigam representar graficamente as raízes.

Análise matemática e didática:

Variáveis didáticas: Os números foram escolhidos de tal maneira que os argumentos fossem ângulos de seno e cosseno conhecidos e também pedimos a raiz cúbica de um número real para que os alunos o tratasse como um número complexo obtendo três raízes cúbicas. acreditamos que os alunos respondam à essa atividade sem dificuldades.

Atividade 11:

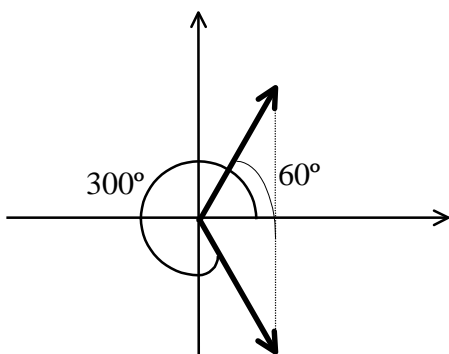
- a) Represente o número $1 + \sqrt{3}i$ geometricamente e escreva sua forma trigonométrica
- b) Represente geometricamente e escreva a forma trigonométrica de $1 - \sqrt{3}i$, conjugado de $1 + \sqrt{3}i$, em função do argumento deste último número.
- c) Se a forma trigonométrica de $z = a + bi$ é $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, qual é a forma trigonométrica de $\bar{z} = a - bi$ em função do ângulo θ .

Objetivo: O objetivo desta atividade é que os alunos descubram que sendo a forma trigonométrica de um número complexo, $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ então a forma trigonométrica do seu conjugado será $\bar{z} = |z|(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$, de tal modo que isso seja utilizado na atividade seguinte, onde vão extrair raízes cúbicas de um número, e de seu conjugado.

Análise matemática e didática

Variáveis didáticas: Os números foram escolhidos de tal forma que os alunos já o representaram antes facilitando esta parte da atividade.

Uma das dificuldades ao desenvolvimento dessa tarefa talvez seja o aluno descobrir o ângulo de 300° uma vez que normalmente os alunos sentem dificuldades de transferir os conhecimentos e eles estão acostumados a trabalharem com esses valores somente quando estão estudando trigonometria e fazem a redução ao primeiro quadrante. Para que eles descubram esse ângulo e percebam as relações entre as funções trigonométricas de 60° e de 300° será importante que façam a representação gráfica de $1 - \sqrt{3}i$ tendo em vista a representação gráfica de $1 + \sqrt{3}i$.



$$1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$$1 - \sqrt{3}i = 2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = 2(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$$

$$a - bi = |z| \cdot (\cos \theta - i \sin \theta)$$

Atividade 12 : Agora que você já sabe extrair raízes cúbicas de um número complexo resolva a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ do ponto onde havíamos parado.

Objetivo: Finalmente os alunos operando com raízes quadradas de números negativos, poderão resolver a equação o que a princípio eles não conseguiram, por não conhecerem os números complexos.

Análise matemática e didática

Variáveis didáticas: Como já foi dito anteriormente a equação foi escolhida de tal forma que neste momento sua representação geométrica fosse simples e

que os ângulos resultassem em valores cujos senos e cossenos fossem conhecidos podendo-se calculá-los sem o uso de uma calculadora.

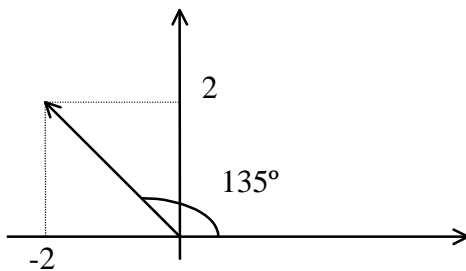
$$x = \sqrt[3]{-2 + 2i} + \sqrt[3]{-2 - 2i}$$

Os alunos deverão extrair as raízes cúbicas de $-2 + 2i$ e de $-2 - 2i$. Para isso deverão escrever esses números nas suas formas trigonométricas e para tanto achar seus módulos e argumentos. Eles poderão trabalhar com $-2 + 2i$ e depois baseados na atividade anterior transferir os resultados para o conjugado desse número

$$z_1 = -2 + 2i$$

$$|z_1| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

Eles poderão representar o número geometricamente para determinar o argumento ou então calculá-lo através do seno e do cosseno.



$z_1 = \sqrt{8} (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$ e as raízes cúbicas de z_1 são:

$$u_1 = \sqrt[6]{2^3} \cdot (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

$$u_2 = \sqrt{2} (\cos 165^\circ + i \sin 165^\circ)$$

$$u_3 = \sqrt{2} (\cos 285^\circ + i \operatorname{sen} 285^\circ)$$

Tendo escrito o número na forma trigonométrica e achado suas raízes eles deverão operar com o conjugado.

$$z_2 = \sqrt{8} (\cos 135^\circ - i \operatorname{sen} 135^\circ)$$

$$v_1 = \sqrt{2} (\cos 45^\circ - i \operatorname{sen} 45^\circ)$$

$$v_2 = \sqrt{2} (\cos 165^\circ - i \operatorname{sen} 165^\circ)$$

$$v_3 = \sqrt{2} (\cos 285^\circ - i \operatorname{sen} 285^\circ)$$

como $x = u + v$

$$x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt{2} \cos 45^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt{2} \cos 165^\circ \cong -2,73 \quad (\cos 165^\circ = \cos(45^\circ + 120^\circ))$$

$$x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt{2} \cos 285^\circ \cong 0,732 \quad (\cos 285^\circ = \cos(45^\circ + 240^\circ))$$

Nesta última passagem os alunos talvez questionem se não deveríamos ter 9 soluções uma vez que temos três raízes cúbicas de cada número complexo. Porque somar somente as conjugadas? A resposta é que o produto de $u.v$ deve ser 2 e somente as raízes conjugadas, neste caso, quando multiplicadas resultam em 2.

E finalmente a equação foi resolvida chegando-se às soluções reais, embora trabalhando-se com raízes quadradas de números negativos. Com essa resolução espera-se que os alunos vejam significado no uso dos números complexos que apesar de não representarem quantidades, operando-se com eles podemos chegar a resultados que são números reais, negando-se a idéia de que sempre que um problema apresenta raiz quadrada de um número negativo na sua resolução, é porque ele não tem solução.

Institucionalização da radiciação de números complexos

Define-se raiz enésima do número complexo

$$z = |z|.(\cos \theta + i.\text{sen} \theta),$$

aos números $w = |w|.(\cos \varphi + i.\text{sen} \varphi)$ tal que $w^n = z$.

$$w^n = z \Rightarrow |w|^n . (\cos n\varphi + i.\text{sen} n\varphi) = |z|.(\cos \theta + i.\text{sen} \theta)$$

dessa igualdade temos que: $|w|^n = |z| \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$
$$\left. \begin{array}{l} \cos n\varphi = \cos \theta \\ \text{sen} n\varphi = \text{sen} \theta \end{array} \right\} \Rightarrow n\varphi = \theta + k.360^\circ \quad (k \text{ é } n^\circ \text{ inteiro})$$

$$\text{portanto } \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{k.360^\circ}{n}$$

Vamos atribuir valores à k e observar os valores de φ .

$$k = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\theta}{n}$$

$$k = 1 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{360^\circ}{n}$$

$$k = 2 \Rightarrow \varphi_3 = \frac{\theta}{n} + \frac{2.360^\circ}{n}$$

.

.

.

Observe que para $k = n$, teremos $\cos \varphi_{n+1} = \cos \varphi_1$ e $\text{sen} \varphi_{n+1} = \text{sen} \varphi_1$:

$$k = n \Rightarrow \varphi_{n+1} = \frac{\theta}{n} + \frac{n \cdot 360^\circ}{n} = \frac{\theta}{n} + 360^\circ$$

Para $k = n+1$ teremos:

$$\varphi_{n+2} = \frac{\theta}{n} + \frac{(n+1) \cdot 360^\circ}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{360^\circ}{n} + 360^\circ = \varphi_2 + 360^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_{n+2} = \cos \varphi_2 \quad e \quad \text{sen } \varphi_{n+2} = \text{sen } \varphi_2$$

Portanto teremos n valores diferentes para os argumentos de w e concluímos que o número z possui n raízes enésimas, todas com módulo igual a $\sqrt[n]{|z|}$ e cujos argumentos são

$$\varphi_1 = \frac{\theta}{n}$$

$$\varphi_2 = \frac{\theta}{n} + 1 \cdot \frac{360^\circ}{n}$$

$$\varphi_3 = \frac{\theta}{n} + 2 \cdot \frac{360^\circ}{n}$$

.

.

$$\varphi_n = \frac{\theta}{n} + (n-1) \frac{360^\circ}{n}$$

Ou seja os argumentos formam uma P.A. de primeiro termo $\varphi_1 = \frac{\theta}{n}$ e razão

$$\frac{360^\circ}{n}.$$

Atividade 13: Qual é o número que elevado ao cubo é igual ao seu triplo mais 1? Dados: $\cos 20^\circ \cong 0,94$ $\cos 140^\circ \cong -0,77$ $\cos 260^\circ \cong -0,17$

Objetivo: O objetivo desta atividade é que os alunos apliquem os conhecimentos adquiridos durante as atividades anteriores, analisem por pesquisa de raízes e graficamente o número de soluções de uma equação do terceiro grau, que é $x^3 = 3x + 1$ e a resolvam pelo método de Cardano-Tartaglia.

Análise matemática e didática.

Variáveis didáticas: Os coeficientes foram escolhidos de tal maneira que o argumento do número complexo do qual vai-se extrair raiz cúbica, seja um ângulo conhecido, no caso 60° . Porém eles precisarão do cosseno de 20° , de 140° e de 260° que serão fornecidos.

Após escreverem a equação do problema proposto, $x^3 - 3x - 1 = 0$, e efetuarem a pesquisa de raízes inteiras, os alunos deverão descobrir que ela não possui esse tipo de raízes. Analisando graficamente poderão constatar que ela possui três raízes reais, as quais tentarão encontrar pelo método de Cardano-Tartaglia.

$$(u + v)^3 = 3(u + v) + 1$$

$$u^3 + 3uv(u + v) + v^3 = 3(u + v) + 1$$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 1 \\ u \cdot v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = 1 \\ u^3 \cdot v^3 = 1 \end{cases}$$

u^3 e v^3 são as raízes da equação $X^2 - X + 1 = 0$

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}, \quad v = \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \quad e \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

As raízes cúbicas desse números são:

$$u_1 = 1(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$$

$$v_1 = 1(\cos 20^\circ - i \sin 20^\circ)$$

$$u_2 = 1(\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ)$$

$$v_2 = 1(\cos 140^\circ - i \sin 140^\circ)$$

$$u_3 = 1(\cos 260^\circ + i \sin 260^\circ)$$

$$v_3 = 1(\cos 260^\circ - i \sin 260^\circ)$$

e daí:

$$x_1 = u_1 + v_1 = 2\cos 20^\circ \cong 2 \times 0,94 = 1,88$$

$$x_2 = u_2 + v_2 = 2\cos 140^\circ \cong 2 \times (-0,77) = -1,54$$

$$x_3 = u_3 + v_3 = 2\cos 260^\circ \cong 2 \times (-0,17) = -0,34$$