Marly De Nardi Ferraz Nunes

SEQÜÊNCIAS NUMÉRICAS:

UM ESTUDO DA CONVERGÊNCIA

ATRAVÉS DE ATIVIDADES

Mestrado em Educação Matemática

PUC — SP
São Paulo
2001

Marly De Nardi Ferraz Nunes

SEQÜÊNCIAS NUMÉRICAS:

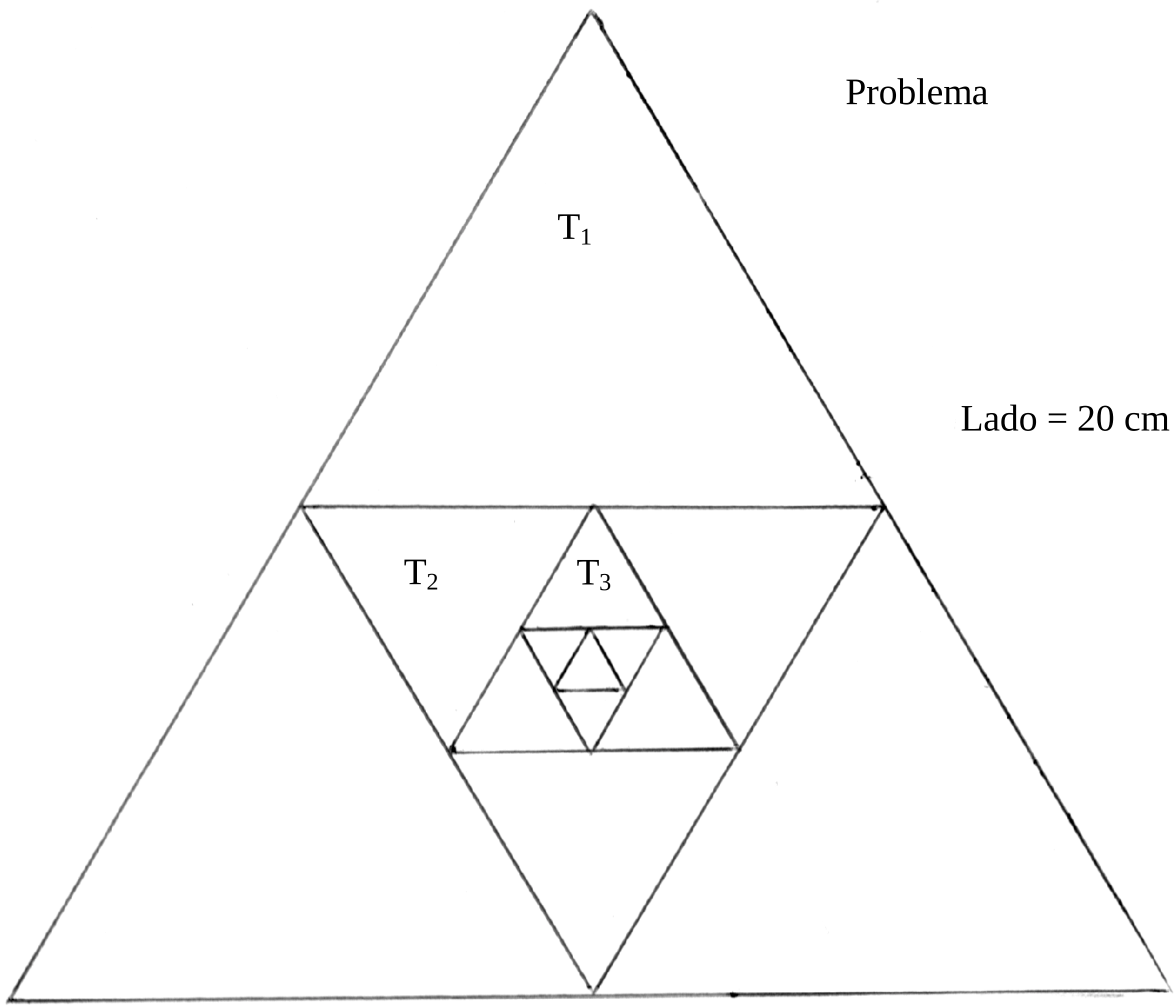
UM ESTUDO DA CONVERGÊNCIA

ATRAVÉS DE ATIVIDADES

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação do Professor Doutor Benedito Antonio da Silva.

PUC — SP
São Paulo
2001

Anexo 2 — PRÉ-EXPERIMENTAÇÃO



Seja T_1 um triângulo equilátero cujo lado mede 20 cm. Unindo-se os pontos médios de seus lados, obtém-se um triângulo equilátero T_2. Unindo-se os pontos médios de T_2 obtém-se T_3, e assim sucessivamente. considere a seqüência de triângulos T_1, T_2, T_3, ...

1) Calcule os perímetros de T_1, T_2, T_3 e T_4.

2) Calcule a soma dos perímetros dos quatro primeiros triângulos.
3) Calcule a soma dos perímetros dos seis primeiros.
4) Calcule a soma dos oito primeiros perímetros, dos nove, dos dez, dos onze e dos doze primeiros perímetros.
5) Quantos triângulos você acha necessários para atingir uma soma de perímetros igual a 120 cm? Justifique sua resposta.

Obs.: Perímetro de um polígono é a soma das medidas de seus lados.

****

Anexo 3 — A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

ATIVIDADE 1

1) 1. Escreva os 3 primeiros números naturais
   2. Escreva os 7 primeiros números naturais
   3. Escreva os n primeiros números naturais
   4. Escreva todos os números naturais
   Resp. : 1.
   2.
   3.
   4.

2) 1. Na questão 1) 2. há mais ou menos números que na 1) 3.?
   Resp.:

   2. E na questão 1) 3. com 1) 4.?
   Resp.:

3) 1.Quantos elementos tem cada um dos conjuntos?
   A={1,2,3,4} e B={1,2,3,4,...}
   Resp.:

   C={1,2,3,...,15} e D={1,2,3,...,15,...}
   Resp.:

   E={1,2,3,4,...,n} e F={1,2,3,4,...,n,...}
   Resp.:

   2. Há diferença entre os conjuntos C e D?
   Resp.:

   3. Há diferença entre os conjuntos E e F?
   Resp.:

4) Complete a tabela::

1	1
2	3
3	5
4	
5	⋮
⋮	
n	
⋮	⋮

1. Quantos números tem a 1^a coluna?
   E a 2^a ?
2. Que tipo de números figuram na 1^a ?
   E na 2^a coluna?
3. A cada elemento da 1^a coluna quantos correspondem na 2^a ?
4. A tabela representa uma __________________ cujo domínio é ____________,
   cujo contradomínio é _______________, e cujo conjunto-imagem é ________.

****

ATIVIDADE 2

Verifique, dentre os seguintes exemplos, quais representam seqüências.
Justifique cada resposta.

1)

x	y
1	-7
2	-5
3	-3
4	-1
5	1
⋮	⋮

Resposta:

2)

x	y
⋮	⋮
-2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6
3	9
⋮	⋮

Resposta:

3) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto f(n) = 2n - 1$
Resposta:

4) $g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$
$z \mapsto g(z) = 2z - 1$
Resposta:

5) $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto x_n = \sqrt{7}$
Resposta:

6) (-1, 0, -1, 0, -1, 0,...)
Resposta:

7) (1, 3, 5, 7, 9)
Resposta:

8) (2/5, 3/7, 4/9, 5/11, 6/13, ...)
Resposta:

9) (..., -7, -4, -1, 2, 5, 8,...)
Resposta:

10)

x	1	2	3	4	5
y	10	20	30	40	50

Resposta:

11)

x	1	2	3	4	5
y	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$

Resposta:

12)

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	...
y	-2	-3	-4	-5	...

Resposta:

****

ATIVIDADE 3

Considere as seguintes seqüências:

a)

x	1	2	3	4	5	6	....
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	....

c) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto f(n)=n^2-6n+8$

b)

x	1	2	3	4	5	6	7	...
y	4	4	4	4	4	4	4	...

d) $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$n \mapsto g(n) = \frac{n}{n+1}$

e) $x: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto x_n = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

1) Represente cada seqüência na reta lR:

a) ______________________________

b) ______________________________

c) ______________________________

d) ______________________________

e) ______________________________

2) Complete o quadro, marcando com X.

2.1) As seqüências crescentes, as decrescentes, as constantes e as não monótonas (se houver)
2.2) As seqüências cujos termos “se aproximam” de algum número (não é preciso determiná-lo)

	a	b	c	d	e
monótona crescente					
monótona decrescente					
monótona constante					
não monótona					
seus termos “se aproximam” de um n°					

****

ATIVIDADE 4

Considere as seqüências abaixo, definidas por seu termo geral:

a) $x_n = \frac{1}{n}$ b) $a_n = 2n$ c) $u_n = (-1)^n$

d) $y_n = \frac{3}{7}$ e) $v_n = \frac{-n}{n+1}$ f) $c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

g) $b_n = \begin{cases} 1, & \text{se n é ímpar} \\ \frac{1}{n^2}, & \text{se n é par} \end{cases}$ h) $z_n = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 3 \\ 4, & \text{se } n > 3 \end{cases}$

1) Escreva cada seqüência designando seus termos (no mínimo os 6 primeiros).

2) Escreva o conjunto-imagem de cada seqüência.

3) Verifique quais seqüências têm o conjunto imagem limitado.

****

ATIVIDADE 5

1) Considere as seqüências (a_n), (b_n), (c_n) e (d_n) definidas abaixo. Para cada uma delas:
a) escreva seus 6 primeiros termos;
b) escreva seu conjunto-imagem;
c) verifique se seus termos "cabem" ou não no intervalo [0,2].

$a_n = \frac{2}{n}$

a)
b)
c)

$b_n = -\frac{1}{6}$

a)
b)
c)

$$c_n = \begin{cases} 2 & \text{, se n é par} \\ \frac{1}{2^n} & \text{, se n é ímpar} \end{cases}$$

a)
b)
c)

$d_n = \frac{2n}{n+2}$

a)
b)
c)

2) Coloque V(Verdadeiro) ou F(Falso)
( ) {1,3,5,7,9,...} é ilimitado e infinito

( ) [$\sqrt{2}$,58) é limitado e infinito

( ) a seqüência (4,3,2,4,3,2,4,3,2,...) tem conjunto imagem limitado e infinito.

( ) {64, 32, 16, 8, 4, 2, ...} é infinito e limitado

( ) $\left\{ \frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \frac{7}{11}, ... \right\}$ é ilimitado e infinito

ATIVIDADE 6

Considere as seguintes seqüencias:

$(a_n) = (0; 0{,}25; 0{,}50; 0{,}75; 1{,}00; 1{,}25; ...)$

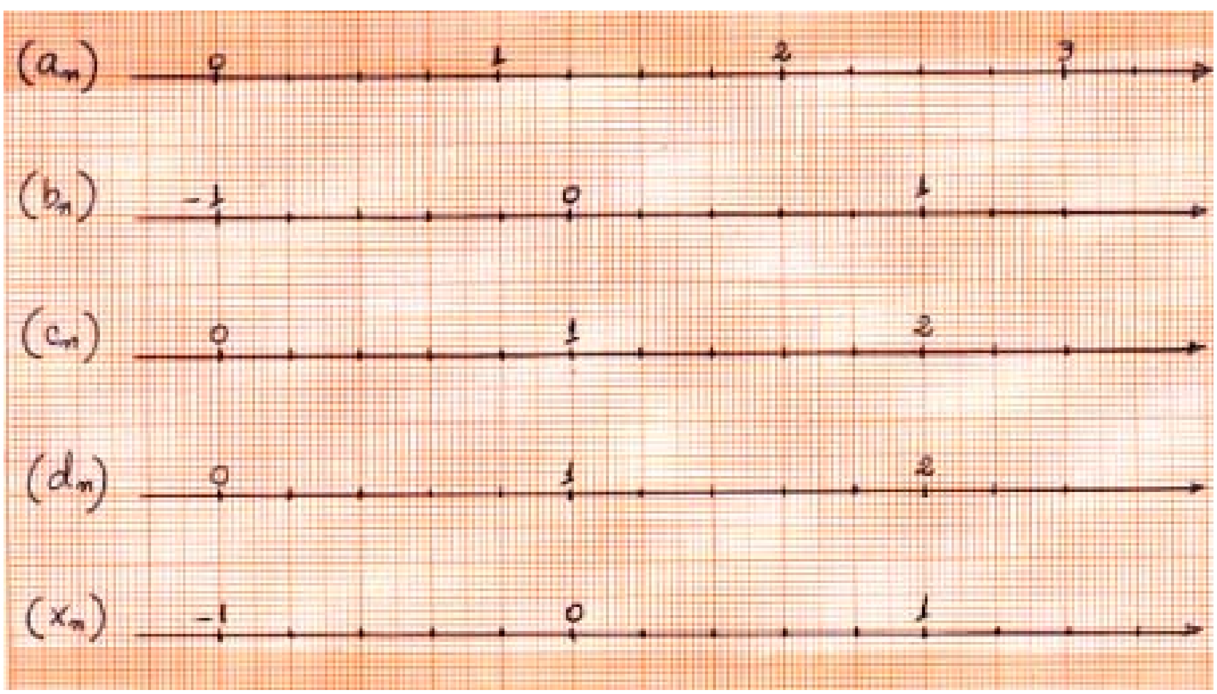
$(b_n) = (0, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, ...)$

$(c_n) = (1, \frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, 1, \frac{7}{6}, ...)$

$(d_n) = (1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}, ...)$

$(x_n) = (-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, ...)$

1) Represente cada seqüência na reta lR, de acordo com a escala dada.



2) Complete o quadro. Marque com X a resposta.

Características	a_n	b_n	c_n	d_n	x_n
crescente					
decrescente					
não monótona					
limitada					
ilimitada					
convergente					

****

ATIVIDADE 7

Considere as seguintes seqüências:

$(a_n) = (1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...)$

$(b_n) = (1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, ...)$

$(c_n) = (0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...)$

$(d_n) = (-2, -\frac{3}{6}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, ...)$

$(e_n) = (3, 6, 9, 12, 15, 18, ...)$

$(f_n) = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...)$

$(g_n) = (20, 10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, ...)$

$(h_n) = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{16}, \frac{1}{5}, \frac{1}{36}, \frac{1}{7}, ...)$

$(i_n) = (1, 2, 3, 2, 5, 2, 7, 2, ...)$

$(j_n) = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}, 0, \frac{1}{36}, 0, \frac{1}{64}, ...)$

Complete o quadro abaixo, marcando com X as respostas corretas.

Características	(a_n)	(b_n)	(c_n)	(d_n)	(e_n)	(f_n)	(g_n)	(h_n)	(i_n)	(j_n)
crescente										
decrescente										
não monótona										
limitada										
ilimitada										
convergente										
não convergente										

ATIVIDADE 8

Considere as seguintes seqüências. “Extraia” de cada uma delas, duas seqüências diferentes.

$(a_n) = (1, 2, 3, 2, 5, 2, 7, 2, ...)$
$(a_{n_i}) =$
$(a_{n_j}) =$

$(b_n) = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}, 0, \frac{1}{36}, 0, \frac{1}{64}, 0, ...)$
$(b_{n_i}) =$
$(b_{n_j}) =$

$(c_n) = (3, 6, 9, 12, 15, 18, ...)$
$(c_{n_i}) =$
$(c_{n_j}) =$

$(d_n) = (-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, ...)$
$(d_{n_i}) =$
$(d_{n_j}) =$

****

ATIVIDADE 9

Considere as seqüências abaixo e suas respectivas subseqüências:

$(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)$

$(a_{n_i}) = (1, 1, 1, 1, 1, ...)$

$(a_{n_j}) = (-1, -1, -1, -1, ...)$

$(b_n) = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...)$

$(b_{n_i}) = (-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, ...)$

$(b_{n_j}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128}, ...)$

$(c_n) = (\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, ...)$

$(c_{n_i}) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, ...)$

$(c_{n_j}) = (-\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, -\frac{6}{7}, -\frac{8}{9}, ...)$

$(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, 0, ...) = (d_n)$

$(d_{n_i}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, ...)$

$(d_{n_j}) = (0, 0, 0, 0, ...)$

$(d_{n_r}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{20}, ...)$

Complete o quadro, marcando com X as respostas corretas.

características	a_n	a_{n_i}	a_{n_j}	b_n	b_{n_i}	b_{n_j}	c_n	c_{n_i}	c_{n_j}	d_n	d_{n_i}	d_{n_j}	d_{n_r}
crescente													
decrescente													
não monótona													
limitada													
ilimitada													
convergente													
divergente													

ATIVIDADE 10

Considere as seqüências seguintes e suas subseqüências:

1) $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)$

$(a_{n_i}) = (1, 1, 1, 1, 1, ...)$

$(a_{n_j}) = (-1, -1, -1, -1, ...)$

3) $(c_n) = (1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, ...)$

$(c_{n_i}) = (1, 3, 5, 7, 9, ...)$

$(c_{n_j}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, ...)$

2) $(b_n) = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...)$

$(b_{n_i}) = (-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, ...)$

$(b_{n_j}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128}, ...)$

4) $(d_n) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{8}, ...)$

$(d_{n_i}) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, ...)$

$(d_{n_j}) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, ...)$

Complete o quadro, com as respostas corretas:

	const.	crescente	decrescente	ñ monótona	converge p/ n°	ñ converge
(a_{n_i})						
(a_{n_j})						
(a_n)						
(b_{n_i})						
(b_{n_j})						
(b_n)						
(c_{n_i})						
(c_{n_j})						
(c_n)						
(d_{n_i})						
(d_{n_j})						
(d_n)						

Anexo 4 — PÓS-TESTE

1) Represente as seqüências abaixo, escrevendo os seus 6 primeiros termos:

a) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

b) $b_n = \begin{cases} n & \text{, se n é número ímpar} \\ \dfrac{n}{n+1} & \text{, se n é número} \end{cases}$

c) $c_n = \begin{cases} 1 & \text{, se n} \leq 3 \\ \dfrac{1}{n} & \text{, se n} > 3 \end{cases}$

d) $d_n = 2(-1)^n$

e) $e_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{, se n é número par} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{, se n é número} \end{cases}$

2) Dê exemplo, se existir, de uma seqüência de cada um dos seguintes tipos:

(a) seqüência limitada e convergente
(b) seqüência não limitada e convergente
(c) seqüência limitada e divergente
(d) seqüência monótona limitada
(e) seqüência não monótona limitada
(f) seqüência não monótona e não limitada
(g) seqüência de termos positivos, não monótona, convergindo para zero.

3) Coloque V(Verdade) ou F(Falso):
( ) Toda seqüência que converge é limitada.
( ) Toda seqüência limitada é convergente.
( ) Toda seqüência convergente é monótona.
( ) Toda seqüência monótona é convergente.
( ) Toda seqüência monótona e limitada converge.
( ) Toda seqüência constante converge.

( ) Uma seqüência pode ter dois limites diferentes.

( ) Toda seqüência que possui uma subseqüência convergente é convergente.

( ) Se (x_n) converge para a, então toda subseqüência de (x_n) também converge para a .

( ) Seqüência de números reais é uma função de lN em lR.

4) Como você explicaria a um aluno de 15 anos o que é uma seqüência convergente?