MILENA GONÇALVES SANTOS

UM ESTUDO SOBRE A CONVERGÊNCIA DE SEQÜÊNCIAS NUMÉRICAS COM ALUNOS QUE JÁ TIVERAM CONTATO COM A NOÇÃO DE LIMITE

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2005

MILENA GONÇALVES SANTOS

UM ESTUDO SOBRE A CONVERGÊNCIA DE SEQÜÊNCIAS NUMÉRICAS COM ALUNOS QUE JÁ TIVERAM CONTATO COM A NOÇÃO DE LIMITE

*Dissertação se apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva.***

PUC/SP

São Paulo

2005

ATIVIDADE 1

1)

a) Escreva os 3 primeiros números naturais. →.....................................

b) Escreva os 132 primeiros números naturais. →.....................................

c) Escreva os n primeiros números naturais. →.....................................

d) Escreva todos os números naturais. →.....................................

e) Na questão b) há mais ou menos números que na questão c)? →

f) Na questão c) há mais ou menos números que na questão d)? →

2) Diga quantos elementos tem cada um dos conjuntos?

C = {1,2,3,...,19} → ....

D = {1,2,3,...,19,...} → ....

E = {1,2,3,...,n} → ....

F = {1,2,3,...,n,...} → ....

3) Existe diferença entre os conjuntos E e F? Justifique sua resposta.

4) Complete as tabelas e, em seguida, responda as questões abaixo:

tabela 1

1	1
2	3
3	5
4	.....
⋮	⋮
n	.....
⋮	⋮

tabela 2

1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	......
⋮	⋮
n	
⋮	⋮

tabela 3

1	-1
2	1
3	-1
4	....
⋮	⋮
n	....
⋮	⋮

tabela 4

1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\sqrt{2}$
5	$\frac{1}{5}$
6	.....
7	......
⋮	⋮
n	.....

⋮	⋮

a) Desenhe duas retas horizontais para cada tabela. Na primeira represente os números da 1ª coluna, na 2ª, os da 2ª coluna.

b) Quantos números existem na 1ª coluna? E na 2ª?

c) A cada elemento da 1ª coluna, quantos números correspondem na 2ª?

d) O que as quatro tabelas têm em comum?

e) Cada tabela representa uma função. Qual é o seu domínio? Qual seu contradomínio? E a imagem? Qual a sua expressão algébrica?

f) Você conhece um nome para especificar este tipo de função?

ATIVIDADE 2

1) Como você explicaria a um colega o que é uma seqüência?
2) Qual a relação entre seqüência e função?

3) Escreva os 5 primeiros termos das seguintes seqüências, e represente-os numa reta:

a) $a_n = 2n$

b) $a_n = (-1)^n$

c) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, se \quad n \quad ímpar \\ 5, se \quad n \quad par \end{cases}$

d) $a_n = \frac{1}{2n}$

e) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

4) Classifique as seqüências do exercício anterior de acordo com a tabela abaixo: (Complete todos os espaços escrevendo <u>sim</u> ou <u>não</u>).

	Crescente	Decrescente	Nem decrescente/ nem crescente	Limitada	Seus termos "se aproximam" de algum número
$a_n = 2n$					
$a_n = (-1)^n$					
$a_n = \frac{1}{n}$,n ímpar 5, n par					
$a_n = \frac{1}{2n}$					
$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$					

5) Observando a tabela do exercício anterior, responda:

a) Os termos de uma seqüência classificada como limitada "cabem" num intervalo limitado de reta?

b) As seqüências cujos termos “se aproximam” de um número são limitadas?

c) Os termos de uma seqüência limitada “se aproximam” de algum número?

6) As seqüências que têm limite são assinaladas na última coluna da tabela ou na penúltima?

7) O que significa uma seqüência ter limite?

8) Considere a função f: N $\rightarrow$ R, tal que:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, se \quad n \quad par \\ \dfrac{1}{2n}, se \quad n \quad ímpar \end{cases}$$

a) Escreva os 6 primeiros termos.
b) A função é decrescente?
c) Tem limite?

9) Escreva uma seqüência de termos estritamente positivos, não monótona convergindo para zero.

ATIVIDADE 3

1) Dê 3 exemplos de seqüência convergente.

-
-
-

2) Dê 3 exemplos de seqüência divergente.

-
-
-

3) Responda às seguintes questões, justificando sua resposta com suas próprias palavras:

a) Toda seqüência que tem limite é limitada?

b) E a recíproca vale? Ou seja, toda seqüência que é limitada, tem limite?

4) Dê um exemplo de seqüência limitada:

a) Convergente:

b) Divergente:

5) Uma seqüência monótona de números reais limitada pode divergir? Por que?

6) Dê 2 exemplos de seqüência divergente que tem subseqüência convergente.

-
-

7) Uma seqüência pode ter um número finito de termos?

8) Verdadeiro ou Falso:

(a) Toda seqüência convergente é monótona limitada ou é constante ( )

(b) Uma seqüência monótona limitada pode divergir ( )

(c) Uma seqüência de termos estritamente positivos que converge a zero é decrescente ( )

ATIVIDADE 4

Nas questões abaixo, a letra n representa um número natural, isto é: n é um elemento do conjunto N:{1,2,3,...}.

1) Considere a função f(n) = 2n + 3.

a) Represente numa reta, valores desta função.
b) O que acontece com esses valores quando “n cresce”?
c) Complete: $\lim_{n\to\infty}(2n+3)$ = __________ .
d) Descreva o significado da expressão: $\lim_{n\to\infty}(2n+3)$
e) Quantos valores a função pode assumir?
f) Existe um menor valor que todos os outros? E um maior valor, existe?
g) A função é limitada, ou seja, seus valores estão “confinados” num intervalo de reta limitado?

2) Considere a função f(n) = $\frac{1}{n}$.

a) Represente numa reta, valores desta função.
b) O que acontece com esses valores quando “n cresce”?
c) Complete: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ = ___________ .
d) Descreva o significado da expressão: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$.
e) Quantos valores a função pode assumir?
f) Existe um menor valor que todos os outros? E um maior valor, existe?
g) A função é limitada, ou seja, seus valores estão “confinados” num intervalo de reta limitado?

ATIVIDADE 5

1) Considere a expressão $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ = 1.

Quais das sentenças abaixo melhor descrevem esse fenômeno? Coloque em ordem de preferência aquelas que mais se ajustam. (quantas quiser)

____

a) Conforme n se aproxima de infinito, $\dfrac{n}{n+1}$ se aproxima de 1.

b) Quanto maior n, mais próximo de 1 está $\dfrac{n}{n+1}$.

c) Quando n está perto de +∞, $\dfrac{n}{n+1}$ está perto de 1.

d) Quando n tende a infinito, $\dfrac{n}{n+1}$ tende a 1.

e) Quando n tende a infinito, $\dfrac{n}{n+1}$ se aproxima de 1.

f) Quando n tende a infinito, o lim $\dfrac{n}{n+1}$ se aproxima de 1.

g) Quando n tende a infinito, o limite $\dfrac{n}{n+1}$ é 1.

h) O limite $\dfrac{n}{n+1}$ é 1 para n $\to$ ∞.

i) Escreva sua própria sentença para traduzir a expressão dada:

2) Considere o seguinte limite: $\lim\limits_{n\to\infty} 3$ = 3.

a) Que sentença você usaria para descrevê-lo?
b) Quais das sentenças da questão 1 seriam mais adequadas para descrever esse limite?
c) Como você explica a questão de "aproximar", ou seja, enquanto "n cresce, a seqüência se aproxima de .....”? Esse tipo de descrição de limite vale aqui?
d) Enquanto n cresce, o que acontece com a função? Ela se aproxima de 3?

3) Considere a função a: N $\to$ R, definida por a(n) = $\dfrac{(-1)^n}{n}$.

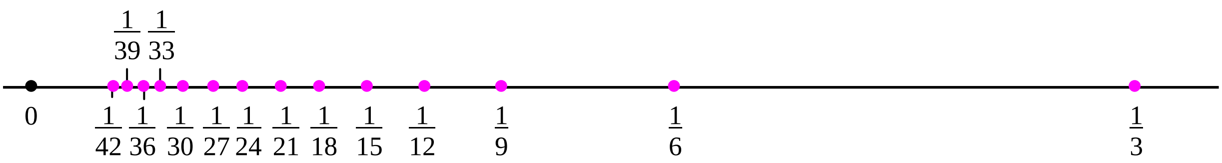
a) A função é crescente, é decrescente ou nem crescente, nem decrescente?
b) A função é limitada?
c) Esta função tem limite para n $\to$ ∞? Se tem, qual é ele?
d) A partir de n = 10, os valores da função cabem em qual intervalo de reta?
e) E a partir de n = 100?
f) O que você pode dizer sobre o intervalo que contém os termos a_n dessa seqüência a partir de um valor (suficientemente grande) de n?

g) É certo afirmar que a partir de um determinado valor n_0, todos os termos desta seqüência pertencem à uma vizinhança de zero?
OBS.: Se a vizinhança tiver amplitude $\varepsilon > 0$, ela é o intervalo $]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[$.

4) Complete: para a função a: N → R, definida por $a(n) = a_n = \frac{1}{3n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n}$ = ...

$(a_n) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \frac{1}{18} \ldots \right)$

Vejamos:

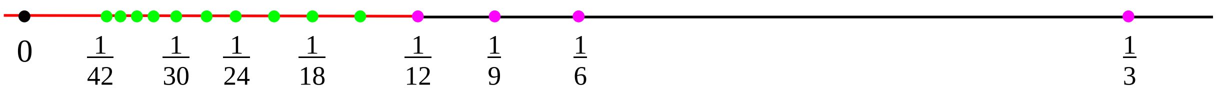


Responda:

a) Para $\varepsilon = \frac{1}{12}$, considere a vizinhança de amplitude $\frac{1}{12}$, isto é,

$V =]\, 0 - \frac{1}{12}, 0 + \frac{1}{12} \,[$.

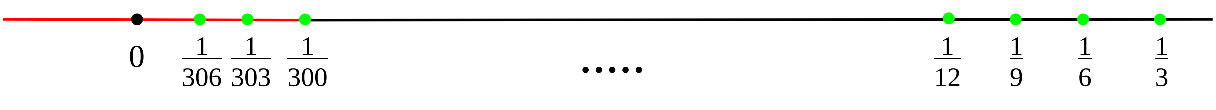
A partir de que valores de n, os termos a_n da seqüência estão contidos nesse intervalo?



b) Para $\varepsilon = \frac{1}{300}$, considere a vizinhança de amplitude $\frac{1}{300}$, isto é,

$V =]\, 0 - \frac{1}{300}, 0 + \frac{1}{300} \,[$.

A partir de que valor de n, os termos a_n da seqüência estão contidos nesse intervalo?



c) Para qualquer valor de ε positivo, os termos $a_n = \frac{1}{3n}$, a partir de um certo n_0, que depende de ε, pertencem ao intervalo] 0 - ε, 0 + ε [. Isso traduz a expressão $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n} = 0$.

Com base nesta idéia, reescreva uma sentença para descrever o $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, da primeira questão.