

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Carlos Francisco Borges

**TRANSIÇÃO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DO
TRIÂNGULO RETÂNGULO PARA O CÍRCULO
TRIGONOMÉTRICO: UMA SEQUÊNCIA PARA ENSINO**

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo
2009

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

CARLOS FRANCISCO BORGES

**TRANSIÇÃO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DO
TRIÂNGULO RETÂNGULO PARA O CÍRCULO
TRIGONOMÉTRICO: UMA SEQUÊNCIA PARA ENSINO**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva**.

São Paulo
2009

ANEXO A: A sequência de ensino

Atividade 1

1. Abra o arquivo **triângulo ret.ggb**.

- a) Movimente o ponto B e observe a medida do ângulo α .
- b) O que você observou?
- c) O que aconteceu com as medidas dos lados do triângulo?
- d) Movimente os pontos A e C, registre suas observações.

Atividade 2

Na parte inferior da tela há uma janela onde está escrito *entrada*. Aperte o botão esquerdo do mouse dentro dela e digite c/d , depois dê “*enter*” e observe na janela algébrica que aparece a letra f com o resultado da divisão da medida do lado c pela medida do lado d .

- a) Arraste o ponto B e observe o resultado da razão c/d representada pela letra f . O que você observou?
- b) A medida do ângulo α alterou?
- c) Movimente o ponto A observe o resultado da razão c/d . O que você observou?
- d) A medida do ângulo α alterou?
- e) Movimente o ponto C observe o resultado da razão c/d . O que você observou?
- f) A medida do ângulo α alterou?

Atividade 3

Na janela de entrada, digite a/d e depois de “*enter*” aparecerá na janela algébrica a letra g que representa a razão da medida do lado a pela medida do lado d .

- a) Arraste o ponto B, observe o resultado da razão a/d representada pela letra g . O que você observou?
- b) A medida do ângulo α alterou?
- c) Movimente o ponto A, observe o resultado da razão a/d . O que você observou?
- d) A medida do ângulo α alterou?
- e) Movimente o ponto C, observe o resultado da razão a/d . O que você observou?
- f) A medida do ângulo α alterou?

Atividade 4

Digite na janela de entrada c/a . Dê *enter*. Aparecerá na janela algébrica, a letra h que representa a razão da medida lado c pela medida do lado a .

- a) Arraste o ponto B e observe o resultado da razão c/a representada pela letra h . O que você observou?
- b) A medida do ângulo α alterou?
- c) Movimente o ponto A, observe o resultado da razão c/a . O que você observou?
- d) A medida do ângulo α alterou?
- e) Movimente o ponto C, observe o resultado da razão c/a . O que você observou?
- f) A medida do ângulo α alterou?

Atividade 5

1. Abra o arquivo **ciclotrigo.ggb** e movimente o ponto P no primeiro quadrante. Pare num ângulo α qualquer, calcule o $\text{sen } \alpha$ e o $\text{cos } \alpha$ (utilize as medidas do triângulo PAH).

- a) Depois observe as coordenadas dos pontos H e I que são as projeções do ponto P nos eixos x e y . O que você observou?
- b) Escolha outras três posições para o ponto P e para cada uma observe o ângulo e determine seu seno e o cosseno.
- c) Quais suas conclusões? Justifique.
- d) Qual o valor máximo para o seno e o cosseno de um ângulo do primeiro quadrante? Para quais ângulos temos esses valores máximos?

Atividade 6

Vimos na atividade 5 que as coordenadas do ponto P que está sobre o ciclo trigonométrico, representam os valores do cosseno e do seno do ângulo determinado por este ponto. Podemos definir que as coordenadas de P são o cosseno e o seno de um ângulo α qualquer ($0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$) no ciclo trigonométrico. Dessa forma abra o arquivo **ciclotrigo1.ggb**, movimente o ponto P no primeiro quadrante observe e responda.

- a) O que acontece com o ponto Q ao movimentar o ponto P? Justifique sua resposta.
- b) O que você pode afirmar a respeito das coordenadas dos pontos P e Q?
- c) Qual a medida do ângulo β ($\widehat{B\hat{A}Q}$)? Qual o valor do cosseno e do seno de esse ângulo?
- d) Movimente o ponto P para três posições diferentes, determine o cosseno e o seno do ângulo β para cada uma delas.
- e) Qual a soma das medidas dos ângulos α e β ?
- f) Sabendo os valores do cosseno e do seno do ângulo α , é possível determinar o cosseno e o seno do ângulo β ? Justifique sua resposta.

Atividade 7

1. Abra o arquivo **ciclotrigo2.ggb**, movimente o ponto P no primeiro quadrante, observe e responda:

- a) O que acontece com o ponto R ao movimentar o ponto P? Justifique sua resposta.
- b) O que você pode afirmar a respeito das coordenadas dos pontos P e R?
- c) Qual a medida do ângulo γ ($\widehat{B\hat{A}R}$)? Qual o valor do cosseno e do seno desse ângulo?
- d) Movimente o ponto P. Pare em três posições diferentes e determine o cosseno e o seno do ângulo γ para cada uma delas.
- e) Como encontrar a medida de γ sabendo a medida de α ?
- f) Sabendo os valores do cosseno e do seno do ângulo α é possível determinar o cosseno e o seno do ângulo γ ? Justifique sua resposta.

Atividade 8

1. Abra o arquivo **ciclotrigo3.ggb**, movimente o ponto P no primeiro quadrante, observe e responda:
 - a) O que acontece com o ponto S ao movimentar o ponto P? Justifique sua resposta.
 - b) O que você pode afirmar a respeito das coordenadas do ponto P e S?
 - c) Qual a medida do ângulo δ (BÂS)? Qual o valor do seno e do cosseno desse ângulo?
 - d) Movimente o ponto P para em três posições diferentes e determine o cosseno e o seno do ângulo δ para cada uma delas.
 - e) Qual a soma do ângulo α e δ ?
 - f) Sabendo os valores do cosseno e do seno do ângulo α , é possível determinar o cosseno e o seno do ângulo δ ? Justifique sua resposta.

Atividade 9

- a) Abra o arquivo **trigocirculo.ggb**, e observe os triângulos CBF e ZBA, utilize a semelhança de triângulos para calcular a medida do segmento \overline{ZA} .
- b) Calcule a tangente do ângulo β no triângulo CBF.
- c) Divida o valor do seno pelo valor do cosseno do triângulo CBF, compare com a medida do segmento \overline{ZA} e com o valor da tangente obtida no item b. Os valores são iguais?
- d) Movimente o ponto C para um outro ângulo qualquer do primeiro quadrante, depois repita os procedimentos a, b e c. Novamente os valores são iguais? O que você conclui com estes resultados? Os resultados são iguais à tangente de β . Existe outro ângulo que tenha o mesmo valor da tangente de β ? Qual a medida desse ângulo?
- e) Movimente o ponto C no segundo quadrante observe e responda. Existe outro ângulo que tenha o mesmo valor da tangente de β ? Qual a medida desse ângulo?

Atividade 10

1. Abra o arquivo **trigociclo.ggb**, observe os sinais das razões trigonométricas ao movimentar o ponto C no primeiro quadrante e responda:

- O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?
- O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?
- E com o sinal dos valores das tangentes?

2. Movimente o ponto C no segundo quadrante:

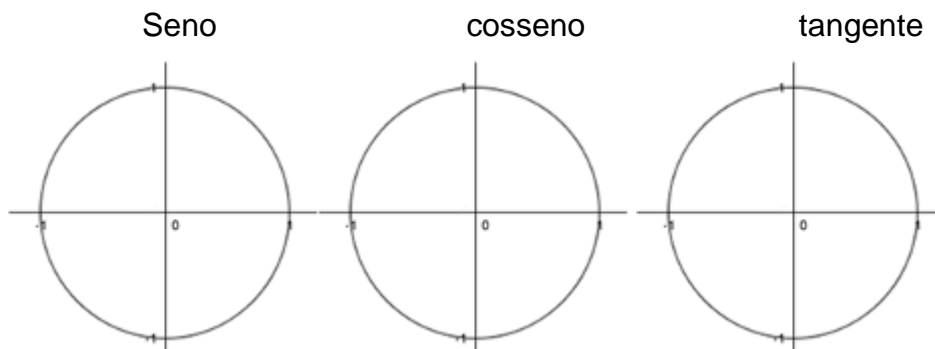
- O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?
- O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?
- E com o sinal dos valores das tangentes?

3. Agora mova o ponto C no terceiro quadrante, observe e responda:

- O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?
- O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?
- E com o sinal dos valores das tangentes?

4. Movimente o ponto C no quarto quadrante, observe e responda:

- O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?
- O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?
- E com o sinal dos valores das tangentes?
- Represente os sinais dos valores do seno, do cosseno e da tangente para o primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes a partir das observações acima.



Atividade 11

1) Abra o arquivo **rad.ggb** e observe na figura que \overline{CA} é o raio da circunferência, d , representa o comprimento do arco CD . Movimente o ponto C, observe o que acontece com a medida do raio e do arco da circunferência. O que você observou?

Quando a medida do arco de uma circunferência for igual à medida do raio da circunferência que o contém, dizemos que este arco mede 1 radiano , (símbolo rad).

- 2) Qual o comprimento de uma circunferência qualquer?
- 3) Quantos radianos têm uma circunferência qualquer?
- 4) Quantos radianos têm a metade de uma circunferência?
- 5) Quantos radianos têm em um quarto de uma circunferência?
- 6) Quantos radianos equivalem a um arco que corresponde a 60° ? E 45° equivalem a quantos radianos?
- 7) Quantos graus equivalem a um arco de $\frac{\pi}{6} rad$? E $\frac{\pi}{8} rad$ equivalem a quantos graus?

Atividade 12

- a) Na folha de papel milimetrado trace duas retas perpendiculares entre si. A intersecção destas retas será a origem do sistema de eixos coordenados, a reta na horizontal será o eixo x e a reta na vertical será o eixo y. Faça marcas nos eixos de 10 em 10 milímetros, partindo do cruzamento dos eixos para cima, para baixo, para a direita, e para a esquerda. Cada marca representará 0,1 decímetros, escreva em cada marca o valor que elas representam nos eixos orientados.
- b) Com o compasso, trace uma circunferência com centro em O (0,0) e raio igual a 1 decímetro (10 cm). Como consequência deste traçado, a circunferência ficou dividida em quatro partes que chamaremos de quadrantes.
- c) Faça marcas de 10° em 10° no sentido anti-horário, começando a contar a partir do ponto (1,0).
- d) Trace uma reta paralela ao eixo y no ponto (1,0) e chame-a de t. Faça marcas iguais às feitas no eixo y.
- e) Sobreponha a transparência no ciclo trigonométrico de modo que o ponto A coincida com o centro da circunferência, fixe a tachinha no ponto A de maneira que a transparência possa girar.
- f) Para utilizar o dispositivo, mova a transparência, pare num ponto qualquer, e observe a intersecção da circunferência da transparência com os eixos x e y. A distância dos pontos de intersecção da circunferência com os eixos y e x e a origem serão, respectivamente, os valores do seno e do cosseno do ângulo. A ordenada do ponto de intersecção da reta da transparência com a reta t será o valor da tangente.
- g) Utilize o dispositivo e determine o seno, o cosseno e a tangente de 50° .
- h) Encontre os valores do seno do cosseno e da tangente para os arcos de $\frac{\pi}{4} rad$ e para $\frac{\pi}{6} rad$.