CARLOS ROBERTO DA SILVA

# EXPLORANDO EQUAÇÕES CARTESIANAS E PARAMÉTRICAS EM UM AMBIENTE INFORMÁTICO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2006

**CARLOS ROBERTO DA SILVA**

# EXPLORANDO EQUAÇÕES CARTESIANAS E PARAMÉTRICAS EM UM AMBIENTE INFORMÁTICO

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de* ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Professora Doutora Celina Aparecida Almeida Pereira Abar.***

**PUC/SP**

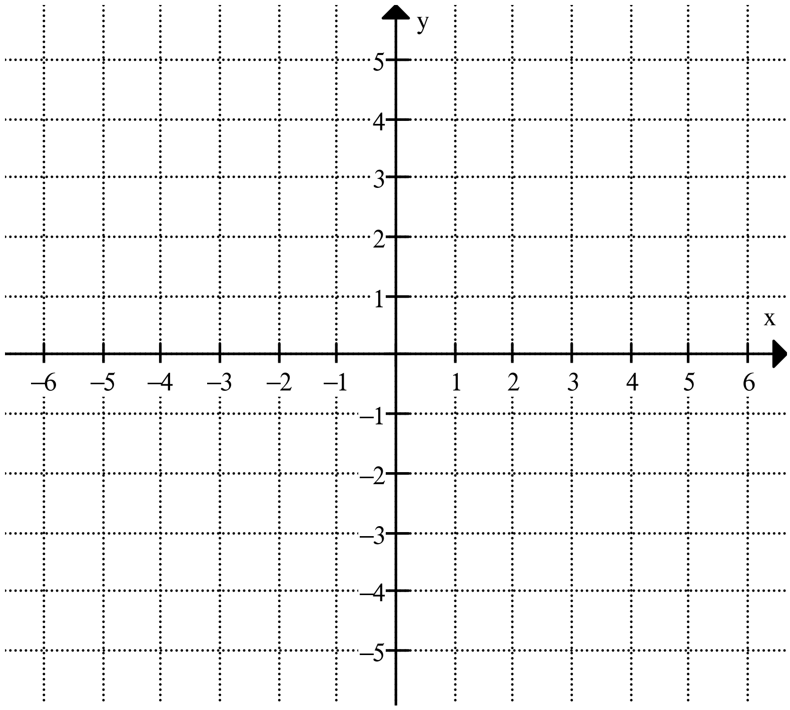
**São Paulo**

**2006**

## ANEXO 1:SESSÃO I

**SESSÃO I : ATIVIDADE 1**

a) Considere as coordenadas dos seguintes pontos A=(1;2), B=(2;3), C=(2;1), D=(-3;0) , E=(-4;-3). Sabe-se que 3 deles estão alinhados. Represente os pontos no plano cartesiano e justifique quais são estes 3 pontos que estão alinhados:




Resp.:____________________________________________________________

________________________________________________________________

________________________________________________________________

b) Existem outros pontos de coordenadas (x,y) que continuam alinhados com os três anteriores e possuem uma relação entre as variáveis *x* e *y* . Represente-os no plano cartesiano, apresentado anteriormente, e escreva pelo menos outros três pontos deste alinhamento.

Resp.:________________________________________________________________

____________________________________________________________________

c) Desta relação entre as variáveis x e y obtém-se uma equação algébrica. Utilize o rascunho, caso necessário, e escreva abaixo esta equação.

| Rascunho: |
| --- |

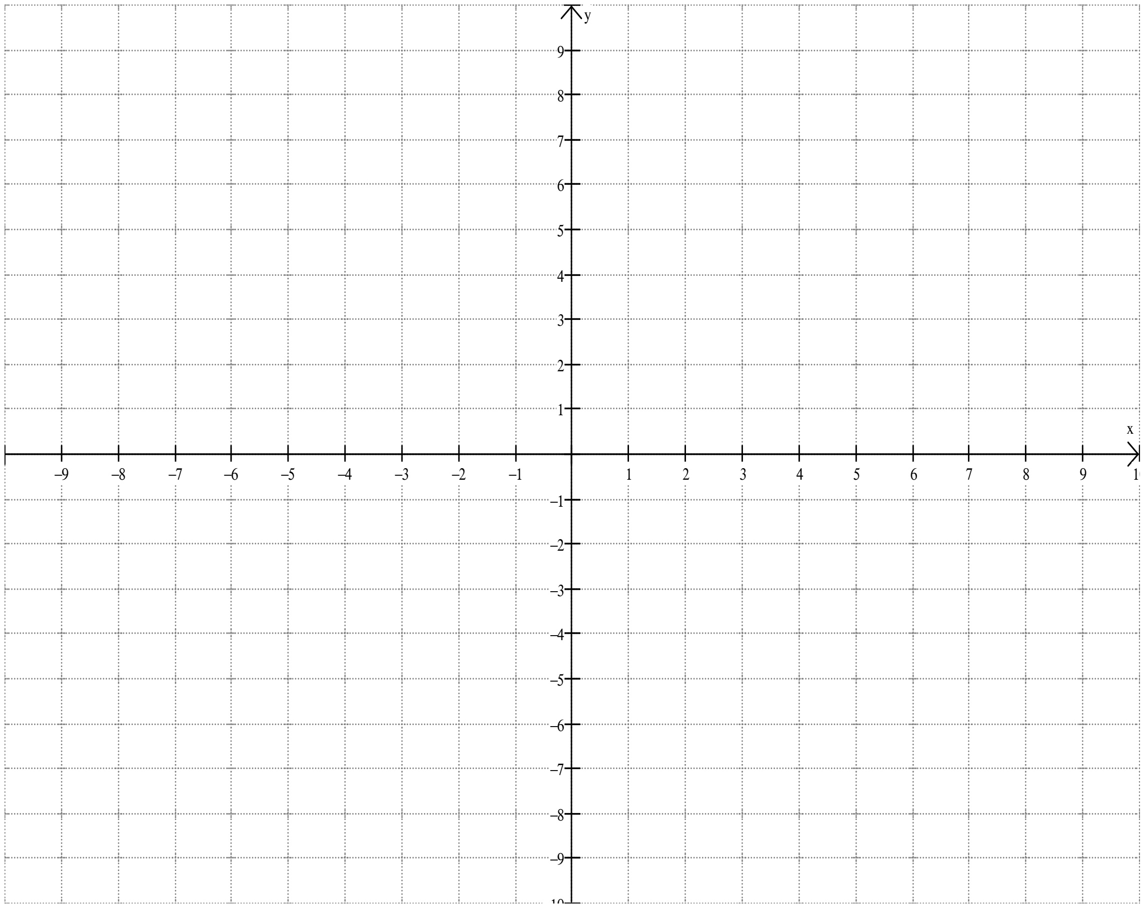
Resp.:________________________________________________________________

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

**SESSÃO I: ATIVIDADE 2**

a) Considere as coordenadas dos seguintes pontos A=(-2;4), B=(2;4), C= (-5;6), D=(3;9), E=(6;-5) e F=(-1,1). Sabe-se que 4 deles pertencem ao gráfico de uma parábola. Represente os pontos no plano cartesiano e justifique quais são estes 4 pontos que pertencem a parábola:



Resp.:________________________________________________________

____________________________________________________________

b) Existem outros pontos de coordenadas (x,y) que pertencem ao gráfico da parábola com os quatro pontos anteriores e possuem uma relação de dependência entre as variáveis *x* e *y*. Represente-os no plano cartesiano, apresentado anteriormente e escreva pelo menos outros três pontos desta parábola.

Resp.:______________________________________________________________

______________________________________________________________

c) Desta relação entre as variáveis x e y obtém-se uma equação algébrica. Utilize o rascunho, caso necessário, e escreva abaixo esta equação.

| Rascunho: |
|---|
| |

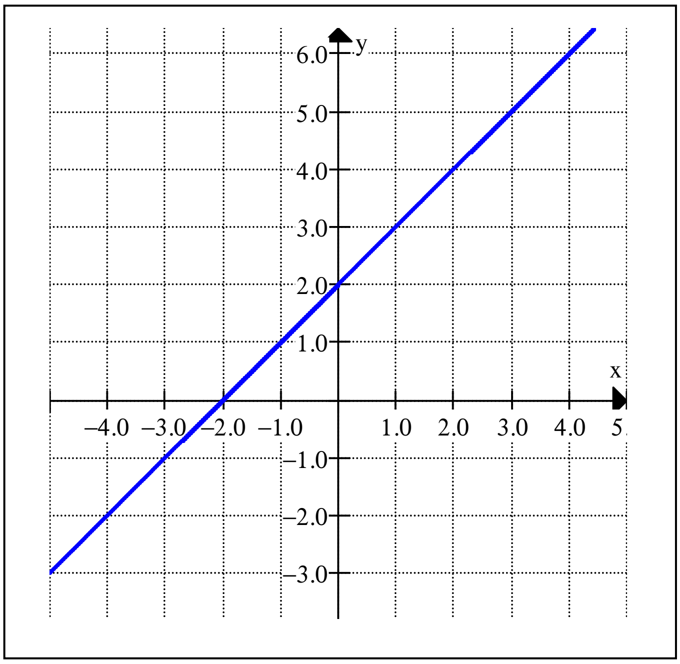
Resp.:______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

## SESSÃO I: ATIVIDADE 3

a) Considerando o gráfico da reta apresentado abaixo e os pontos de coordenadas (x,y) que pertencem à reta, escreva pelo menos cinco pontos desta reta.




Resp.:______________________________________________________________

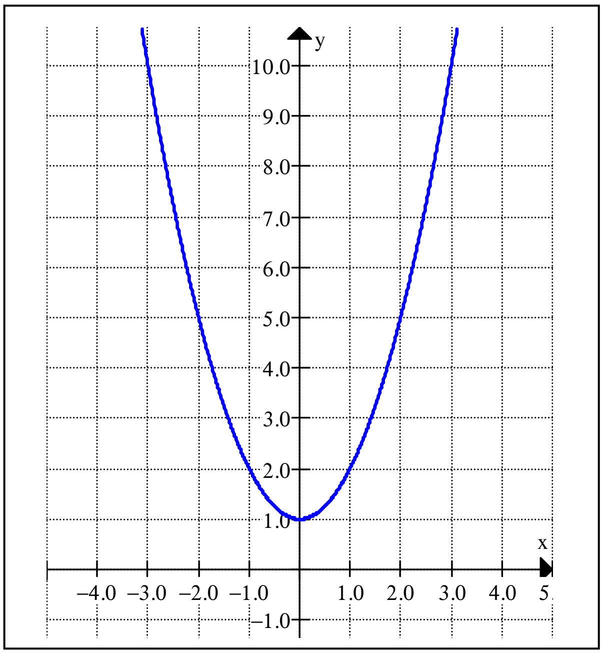
______________________________________________________________

b) Deste gráfico e da relação de dependência entre as coordenadas dos pontos que pertencem à reta, obtém-se uma equação algébrica. Utilize o rascunho, caso necessário, e escreva abaixo esta equação.

| Rascunho: |
|---|
| |

Resp.:______________________________________________________________

c) Considerando o gráfico da parábola apresentado abaixo e os pontos de coordenadas (x,y) que pertencem a ela, escreva pelo menos cinco pontos desta parábola.




Resp.:____________________________________________________________

_______________________________________________________________

d) Deste gráfico e da relação de dependência entre as coordenadas destes pontos que pertencem à parábola, obtém-se uma equação algébrica. Escreva abaixo esta equação. Utilize o rascunho, caso necessário, e escreva abaixo a equação.

| Rascunho: |
|---|
| |

Resp.:____________________________________________________________

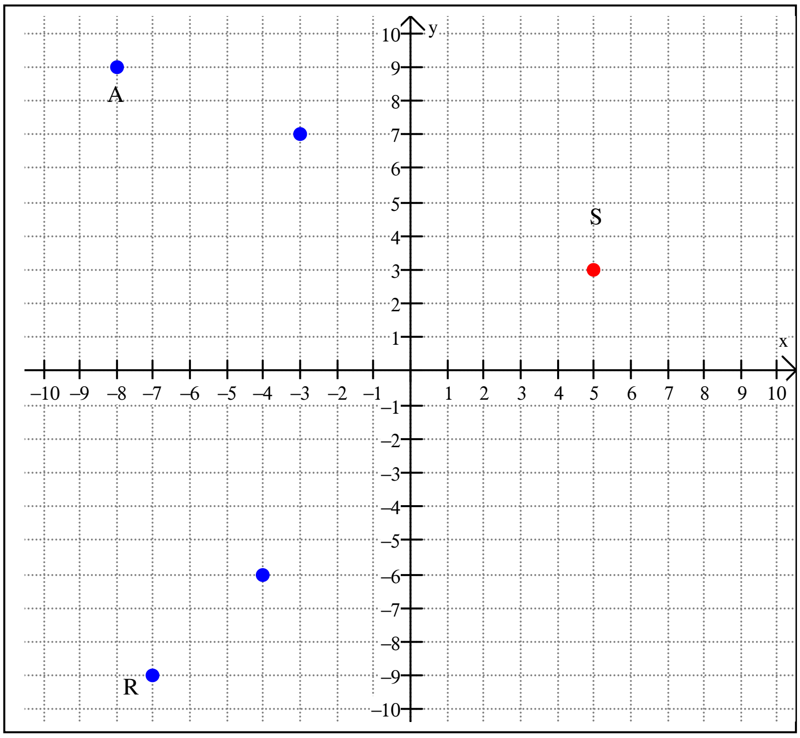
____________________________________________________________

# ANEXO 2: SESSÂO II

## SESSÃO II: ATIVIDADE 1

Seja o seguinte problema: Roberta e Alexandre estão participando de um jogo semelhante a uma batalha naval. Os dois jogadores estão localizados na mesma planilha, representados pelos pontos A (Alexandre) e R (Roberta). Ambos têm como objetivo, com um míssel cada, atingir o submarino “S”.

A planilha cobre uma área de 400 $km^2$ e mostra uma espécie de mapa cartesiano da região: a imagem que aparece na tela é uma janela de [-10,10] por [-10,10], conforme mostra o esquema abaixo.




Vamos considerar que Alexandre e Roberta se encontram nas posições, respectivamente, de coordenadas A=(-8;9) e R=(-7;-9) de onde lançam os mísseis simultaneamente, como momento inicial (t = 0), e de coordenadas (-3;7) e (-4;-6) um minuto mais tarde (t = 1) após o lançamento.

| | Coordenadas em t=0 | Coordenadas em t=1 |
|---|---|---|
| Míssel A | (-8; 9) | (-3;7) |
| Míssel R | (-7;-9) | (-4;-6) |

Explorando os dados fornecidos nesta tabela, a seguir responda:

a) Quem realmente consegue atingir o alvo, no caso o submarino “S”? Justifique.

Rascunho:

Resp.:________________________________________________________

b) A tabela abaixo mostra as coordenadas *x* e *y* do míssel A, em cada instante de tempo indicado. Sabendo que o míssel se desloca com velocidade constante, complete esta tabela.

| t | x | y |
|---|---|---|
| 0 | -8 | 9 |
| 1 | -3 | 7 |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |

c) Use a tabela obtida no item anterior, para expressar a coordenada *x* do míssel “A” em função do tempo t. Faça o mesmo para a coordenada y.

Rascunho:

Resp.:________________________________________________________

d) Use as equações obtidas no item anterior e responda qual a posição (coordenadas) do míssel "A", decorridos 2 minutos após o início do lançamento?

Rascunho:

Resp.:__________________________________________________________

e) A tabela abaixo mostra as coordenadas *x* e *y* do míssel "R", em cada instante de tempo indicado. Sabendo que o míssel se desloca com velocidade constante, complete esta tabela.

| t | x | y |
|---|---|---|
| 0 | -7 | -9 |
| 1 | -4 | -6 |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |

f) Use a tabela obtida no item anterior, para expressar a coordenada *x* do míssel "R" em função do tempo t. Faça o mesmo para a coordenada y.

Rascunho:

Resp.:__________________________________________________________

g) Use as equações obtidas no item anterior e responda qual a posição (coordenadas) do míssel “R”, decorridos 2 minutos após o início do lançamento?

| Rascunho: |
|---|

Resp.:______________________________________________________________

h) É necessário que Alexandre ou Roberta alterem a rota de algum dos mísseis para que o submarino seja atingido? Justifique.

| Rascunho: |
|---|

Resp.:______________________________________________________________

i) Alexandre ou Roberta atingiram o submarino? Se afirmativo, quantos minutos foram necessários?

| Rascunho: |
|---|

Resp.:______________________________________________________________

# ANEXO 3: SESSÃO III

## SESSÃO III: Atividade 1

a) Represente os pontos A=(1;2), B=(2;3), C=(2;1), D=(-3;0) , E=(-4;-3) no plano cartesiano do *software* Winplot. Sabendo-se que 3 deles estão alinhados, quais são estes 3 pontos?

Resp.:______________________________________________________________

________________________________________________________________

b) Represente o ponto F=(t;1+t) no Winplot. Observe que ao clicar “ok” temos o ponto F=(0;1). Que valor assumiu o parâmetro “t”?

Resp.:__________________________________________________________

c) Faça variações nos valores de “t” e, em seguida, determine:
c1) Qual o valor de “t” para obter o ponto B?________________________
c2) Qual o valor de “t” para obter o ponto E?________________________

d) Mantendo os pontos representados anteriormente no Winplot, represente o ponto G=(3+a;4+a) e clique em “família”. Na nova janela, faça as seguintes opções “a”, mínimo= - 7, máximo=0, passos=10, retraso=10. Clique em “olhar” e “definir”, observe os pontos representados na tela e, em seguida, aumente os passos para 100 e retraso para 100 e clique em “definir”. Descreva o que você observa:

Resp.:______________________________________________________________

________________________________________________________________

e) Observando os pontos da atividade 1, escreva uma equação paramétrica ((x;y)=(f(t);g(t)) ou cartesiana (y=f(x)) da reta que contenha três destes pontos.

Resp.:________________________________________________________

f) Utilizando o Winplot, verifique se sua resposta está correta.
Sim ( ) ou não ( )? Caso não, procure reescrever a equação da reta que contenha pelo menos três dos pontos do item a.
Salve como “ativ1G...” seguido do número do grupo.

**SESSÃO III: Atividade 2**

a) Represente no Winplot os pontos A=(-2;4), B=(1;3), C=(3;9), D=(-5;6), E=(-2;-5) e F=(-1,1). Sabe-se que 3 deles pertencem ao gráfico de uma parábola. Represente o ponto G=$(a;a^2)$. Observe que ao clicar “ok” temos o ponto G=(0;0). Altere os valores de “$a$”. Observe os pontos obtidos e escreva os três pontos que pertencem à parábola.
Resp.:________________________________________________________

b) Utilizando o ponto G=$(a;a^2)$ represente uma família de pontos que pertence à parábola. Descreva o que você observa:

Resp.:________________________________________________________
______________________________________________________________
____________________________________________________________

c) Represente a parábola desta atividade 2 na forma de equação paramétrica ou equação cartesiana.

Resp.:________________________________________________________
______________________________________________________________

d) Utilizando o Winplot, verifique se sua resposta está correta.
Sim ( ) ou não ( )? Caso não, procure reescrever a equação da parábola que contenha pelo menos três dos pontos do item a.
Salve como “ativ2G...” seguido do número do grupo.

**SESSÃO III: Atividade 3**

a) Escreva a equação na forma "paramétrica" x= t e y= 1+t, "t mín" **0** e "t máx" **3.** Observe o gráfico representado por esta equação. O que representa este gráfico? Quais as coordenadas dos pontos extremos (início e final) do gráfico representado?

Resp.:____________________________________________________________

________________________________________________________

b) Acrescente um novo parâmetro "k" à equação paramétrica anterior obtendo x=kt e y=1+kt, Observe que o gráfico desapareceu. Faça variações determinando quais devem ser os valores do parâmetro k para obter os instantes inicial e final da atividade anterior.

Resp.: _________________________________________________________

Salve como "ativ3aG..." seguido do número do grupo.

c) Escreva a equação do item **a** na forma cartesiana, com 0<x<3.

Resp.: _________________________________________________________

## ANEXO 4: SESSÃO IV

### SESSÃO IV: Atividade 1 (Ponto parametrizado)

Voltamos ao problema de Roberta e Alexandre que participam de um jogo. Vamos recordar:

Os dois jogadores estão localizados em uma planilha, representados pelos pontos “A” (Alexandre) e “R” (Roberta). Ambos têm como objetivo, com um míssel cada, atingir o submarino “S”, fixo em um local de coordenadas (5;3), considerando que cada míssel viaja em linha reta com velocidade constante. A tabela abaixo mostra as coordenadas (posição) dos dois mísseis no momento em que começa o lançamento simultâneo, isto é, o momento inicial (t = 0), e um minuto mais tarde (t = 1) após os lançamentos.

| | Coordenadas em t=0 | Coordenadas em t=1 |
|---|---|---|
| Míssel A | (-8;9) | (-3;7) |
| Míssel R | (-7;-9) | (-4;-6) |

Explorando os dados fornecidos nesta tabela e utilizando o Winplot, faça o que se pede:

No Winplot, em ponto (x,y) represente as coordenadas dos aviões A e R em função do parâmetro t ((x;y)=(f(t);g(t)), variando o parâmetro “t” e responda:

a) Alexandre ou Roberta atingiram o submarino? Se afirmativo, quantos minutos foram necessários?

Resp.:________________________________________________________________

__________________________________________________________________

b) É necessário que Alexandre ou Roberta alterem as suas rotas para atingirem o alvo? Se afirmativo, qual deverá ser a nova rota?

Resp.:________________________________________________________________

__________________________________________________________________

Salve como “ativ1G...” seguido do número do grupo.

**SESSÃO IV: Atividade 2 (Curvas parametrizadas)**

Na História, objetos matemáticos como as curvas, demoravam séculos de estudos para que fossem representadas por alguns matemáticos através de gráficos ou equações.

Hoje, com o auxílio de uma ferramenta computacional, como o *Winplot*, é possível verificar a beleza e o encanto destas curvas, em forma de gráficos, de maneira dinâmica e com facilidade.

Historicamente foi o uso de parâmetros nas equações que possibilitou a representação gráfica destas curvas no plano.

Voltemos à atividade:

Utilizando as equações abaixo, faça as construções de seus respectivos gráficos no *Winplot*. Em seguida, faça variações nos valores reais de seus parâmetros para uma animação gráfica da curva no plano.

Salve cada item como "ativ2..." seguido do número do item e do grupo.

a) Conchóide de Nicomedes:
$(x - b)^2 . (x^2 + y^2) - (a^2x^2) = 0$

b) Ciclóide:
$x=a(1-\sin(t))$ e $y=a(1-\cos(t))$

c) Limaçon de Pascal:
$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$

d) Pérola de Sluze:
$y^m = x^n(a - x)^b$

e) Involuta de um Círculo:
$x=a(\cos(t) + t \sin(t))$ e $y=a(\sin(t) - t \cos(t))$

f) Lemniscata de Bernoulli:
$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

g) Epiciclóide:
$x = (a + b)\cos(t) - b\cos((a/b + 1)t)$ ; $y=(a + b)\sin(t) – b\sin((a/b + 1)t)$

h) Epitrocóide:
$x= 14\cos(t)-8\cos(3.5t)$ e $y= 14\sin(t)-8\sin(3.5t)$

i) Hipociclóide:
$x = (a - b)\cos(t) + b\cos((a/b - 1)t)$ ; $y = (a - b)\sin(t) - b\sin((a/b - 1)t)$

j) Hipotrocóide:
$x=(a-b)\cos(t)+c\cos((a/b-1)t)$ ; $y=(a-b)\sin(t)-c\sin((a/b-1)t)$

# ANEXO 5: SESSÃO V

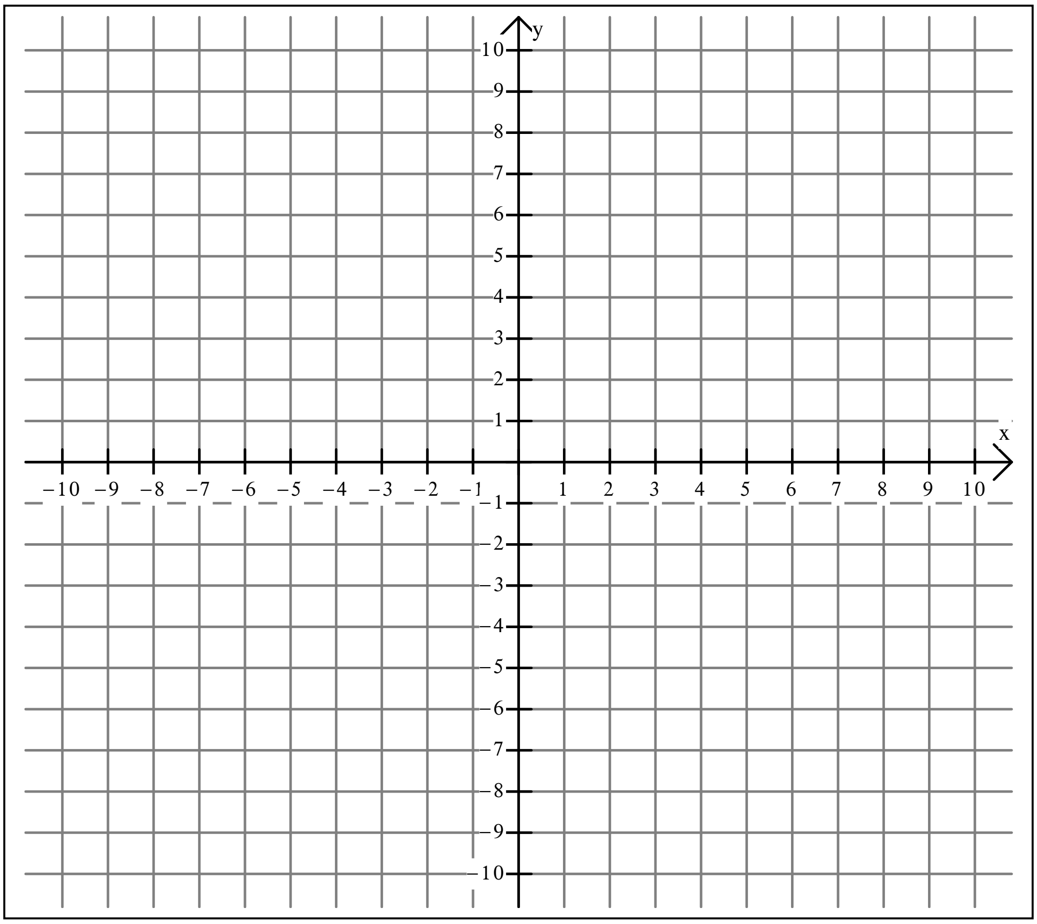
## SESSÃO V: Construção de GIF`s animados.

### Atividade 1 (sem o uso do computador)

a) Escreva as coordenadas de quatro pontos alinhados:

A=(__,___), B=(__,___), C=(__,___) e D=(__,___).

Se necessário utilize o campo quadriculado.



b) Escreva as equações paramétricas da reta que contém estes pontos.

Resposta:________________________________________________

c) Utilizando as equações paramétricas encontradas, complete a tabela abaixo.

| t | x | y |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |

d) Quais são os respectivos valores de t para os pontos alinhados do item 1?

Para o ponto A temos t = ______

Para o ponto B temos t = ______

Para o ponto C temos t = ______

Para o ponto D temos t = ______

**Atividade 2 (utilizando o computador)**

Como já conhecemos algumas curvas famosas que foram desenvolvidas ao longo da história da geometria analítica, vamos construir GIF´s animados utilizando os softwares gratuitos *Winplot* e *GIF Animator*. Neste caso, escolha qualquer uma das equações de curvas apresentadas abaixo e, em seguida, construa um *GIF* animado.

O tridente de Descartes:
$(a+x)(a-x)(2a-x)=axy$

Cissóide de Dioclés:
$y^2 = (x^3)/(2a - x)$

Conchóide de Nicomedes:
$(x - b)^2 . (x^2 + y^2) - (a^2x^2) = 0$

Quadratriz de Hípias:
$y = x\cot((pi)x/2a)$

Hipérbole de Fermat:
$(x^m)(y^n)=a$

Parábola de Fermat:
$y^n=ax^m$

Curva de Agnesi:
$y(x^2 + a^2) = a^3$

Ciclóide :
$x=a(1-\sin(t))$ e $y=a(1-\cos(t))$

Limaçon de Pascal
$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$

Pérola de Sluze:
$y^m = x^n(a - x)^b$

Involuta de um Círculo:
$x=a(\cos(t) + t \sin(t))$ e $y=a(\sin(t) - t \cos(t))$

Parábola Divergente de Newton:
$y^2=ax^3+bx^2+cx+d$

Lemniscata de Bernoulli:
$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

Epiciclóide:
$x = (a + b)\cos(t) - b\cos((a/b + 1)t)$ ; $y=(a + b)\sin(t) - b\sin((a/b + 1)t)$

Epitrocóide:
x= 14cos(t)-8cos(3.5t) e y= 14sin(t)-8sin(3.5t)

Hipociclóide:
$x = (a - b)\cos(t) + b\cos((a/b - 1)t)$ ; $y = (a - b)\sin(t) - b\sin((a/b - 1)t)$

Hipotrocóide:
x=(a-b)cos(t)+ccos((a/b-1)t) ; y=(a-b)sin(t)-csin((a/b-1)t)

Salve como “GIFG...” seguido do número do grupo.

O que é necessário para a construção do GIF animado de uma curva? Justifique.

Resposta:__________________________________________

Quais os procedimentos que foram executados?

Resposta:__________________________________________