PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

JEFFERSON ALMEIDA SANTOS

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES EM GEOMETRIA POR MEIO DE UMA PLATAFORMA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA: UMA EXPERIÊNCIA COM PROFESSORES DE ENSINO MÉDIO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2007

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

JEFFERSON ALMEIDA SANTOS

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES EM GEOMETRIA POR MEIO DE UMA PLATAFORMA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA: UMA EXPERIÊNCIA COM PROFESSORES DE ENSINO MÉDIO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni***

São Paulo
2007

ANEXOS

ANEXO 1

1º Encontro: O estudo dos Quadriláteros Notáveis

No Ensino Fundamental, encontramos freqüentemente, diferentes concepções dos alunos em relação aos conceitos de quadriláteros notáveis. Afirmações do tipo “todo quadrado é retângulo” ou “todo quadrado é losango” necessitam de tempo para serem incorporadas pelos alunos aos seus conhecimentos antigos.

A geometria que se estuda hoje nas escolas tem suas origens num livro chamado *Os Elementos* escrito, aproximadamente, em 300 a.C. por Euclides. É na Grécia que nasceram as principais idéias da geometria. E é lá que iremos ver como Euclides tratava os quadriláteros.

Na definição 19 do livro I, Euclides define “figura quadrilátera como aquela contida por quatro linhas retas”. Em seguida, na definição 22, ele apresenta caracterizações de alguns quadriláteros notáveis:

- **Quadrado é uma figura quadrilátera de quatro lados iguais com ângulos retos;**
- **Oblongo é uma figura quadrilátera com ângulos retos, mas que não tem quatro lados iguais;**
- **Rombo é uma figura quadrilátera com quatro lados iguais, mas não com ângulos retos;**
- **Rombóide é uma figura quadrilátera que tem lados e ângulos opostos iguais entre si, mas não tem quatro lados iguais e nem ângulos retos.**

Podemos observar que o oblongo de Euclides é um caso particular do objeto matemático denominado, hoje, retângulo, o rombo é um caso particular do nosso losango e que o rombóide é um paralelogramo particular.

Entre os textos de geometria que foram importantes no ensino, depois de *Elementos* de Euclides, estão os *Elementos de Geometria* de Legendre (1793) e o tratado de Hadamard (1898) *Leçons de géomètrie élémentaire*.

Legendre, que preconizava uma geometria mais rigorosa e menos intuitiva, caracterizava os **quadriláteros notáveis** da seguinte maneira:

- **O quadrado tem seus lados iguais e seus ângulos retos;**
- **O retângulo tem os ângulos retos sem ter os lados iguais;**
- **O losango tem os lados iguais sem que os ângulos sejam retos;**
- **O paralelogramo tem os lados opostos paralelos.**

Podem-se observar algumas diferenças entre as definições de Legendre e as de Euclides. O oblongo e o rombo de Euclides passam a ser denominados, respectivamente, retângulo e losango. O rombóide recebe o nome de paralelogramo, mas o seu conceito é ampliado. Agora o paralelogramo apresenta os lados opostos paralelos.

Mais tarde, Hadamard, na sua obra publicada em 1898, caracteriza os quadriláteros notáveis de uma maneira mais ampla:

- **Quadrado** é um quadrilátero que tem todos os lados iguais e todos os ângulos iguais.
- **Retângulo** é um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais e, conseqüentemente, retos.
- **Losango** é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais.
- **Paralelogramo** é o quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois.

Nessas novas definições, as restrições impostas aos retângulos e aos losangos foram eliminadas.

É importante observar que o processo que permitiu evoluir para as definições modernas de Hadamard levou muitos anos.

Atividade 1

a) Represente, por um diagrama de Venn, os conjuntos dos quadriláteros notáveis definidos por Euclides.

b) Represente, por um diagrama de Venn, os conjuntos dos quadriláteros notáveis definidos por Legendre

c) Represente, por um diagrama de Venn, os conjuntos dos quadriláteros notáveis definidos por Hadamard**.**

Atividade 2

a) Desenhe um quadrilátero conhecendo duas diagonais, e sabendo que elas têm medidas iguais, são perpendiculares entre si e que se interceptam nos respectivos pontos médios. A seguir classifique o quadrilátero obtido.

b) Desenhe um quadrilátero conhecendo duas diagonais, e sabendo que elas têm medidas iguais, são perpendiculares entre si e que se interceptam num ponto que é ponto médio de apenas uma das diagonais.

c) Desenhe um quadrilátero conhecendo duas diagonais, e sabendo que elas têm medidas iguais, são perpendiculares entre si e que se interceptam num ponto que não é ponto médio de nenhuma das diagonais.

d) Desenhe um quadrilátero conhecendo duas diagonais, e sabendo que elas têm medidas iguais, não são perpendiculares entre si e que se interceptam nos respectivos pontos médios.

e) Desenhe um quadrilátero conhecendo duas diagonais, e sabendo que elas têm medidas iguais, não são perpendiculares entre si e se interceptam num ponto que é ponto médio de apenas uma das diagonais.

f) Desenhe um quadrilátero conhecendo duas diagonais, e sabendo que elas têm medidas iguais, não são perpendiculares entre si e se interceptam num ponto que não é ponto médio de nenhuma das diagonais.

g) Desenhe um quadrilátero conhecendo duas diagonais, e sabendo que elas não têm medidas iguais, são perpendiculares entre si e se interceptam nos respectivos pontos médios.

h) Desenhe um quadrilátero conhecendo duas diagonais, e sabendo que elas não têm medidas iguais, são perpendiculares entre si e se interceptam num ponto que é ponto médio de apenas uma das diagonais.

i) Desenhe um quadrilátero conhecendo duas diagonais, e sabendo que elas não têm medidas iguais, são perpendiculares entre si e se interceptam num ponto que não é ponto médio de nenhuma das diagonais.

j) Desenhe um quadrilátero conhecendo duas diagonais, e sabendo que elas não têm medidas iguais, não são perpendiculares entre si e se interceptam nos respectivos pontos médios.

k) Desenhe um quadrilátero conhecendo duas diagonais, e sabendo que elas não têm medidas iguais, não são perpendiculares entre si e se interceptam num ponto que é ponto médio de apenas uma das diagonais.

l) Desenhe um quadrilátero conhecendo duas diagonais, e sabendo que elas não têm medidas iguais, não são perpendiculares entre si e se interceptam num ponto que não é ponto médio de nenhuma das diagonais.

Atividade 3

Dê duas definições de:

a) paralelogramo

b) losango

c) retângulo

d) quadrado

e) reta tangente a uma circunferência

f) parábola

ANEXO 2

2º Encontro: Tipos de atividades no ensino de Matemática

Aline Robert, pesquisadora francesa, no seu artigo “Ferramentas de análise dos conteúdos matemáticos a ensinar”, extraído da revista *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 18, nº2, pp.139-190,1998,* classifica o funcionamento de conhecimentos pelos alunos em 3 níveis: ***técnico, mobilizável*** e ***disponível.***

O aluno põe em funcionamento um conhecimento de nível ***técnico*** quando resolve uma questão simples que corresponde a uma aplicação imediata de um teorema, de uma propriedade, de uma definição ou de uma fórmula. Em geral, há indicações dos métodos a utilizar.

No nível de funcionamento ***mobilizável*** os conhecimentos que serão utilizados são bem identificados, mas necessitam de alguma adaptação ou de alguma repetição antes de serem colocados em funcionamento.

O nível de funcionamento ***disponível*** corresponde à resolução de uma questão proposta sem nenhuma indicação ou sugestão fornecida pelo professor. É preciso achar nos conhecimentos anteriores o que favorece a resolução da questão.

Daremos um exemplo no **quadro algébrico.**

O assunto em questão é a fatoração da diferença de dois quadrados:

1. Atividade que apresenta um nível de funcionamento **técnico**: Fatore $x^2 - 4$. Basta aplicar a fórmula que acaba de ser apresentada.
2. Atividade que apresenta um nível de funcionamento **mobilizável:** Fatore $x^3 - 4x$ ou fatore $x^4 - 1$.

No primeiro caso há necessidade de uma pequena adaptação antes de utilizar a fórmula da diferença de dois quadrados:

$$x^3 - 4x = x \cdot (x^2 - 4) = x \cdot (x - 2)(x + 2).$$

No segundo caso há necessidade de uma repetição da fórmula:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

3. Atividade que apresenta um nível de funcionamento **disponível:** Fatore $x^4 + 4$.

O problema aparentemente não tem relação com a diferença de dois quadrados. Mas utilizando conhecimentos anteriores podemos escrever:

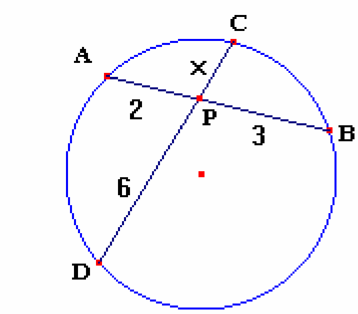
$$x^4 + 4 = x^4 + 4 - 4x^2 + 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

Daremos a seguir um exemplo no **quadro geométrico** referente ao assunto **relações métricas num círculo.**

1. Atividade que apresenta um nível de funcionamento **técnico**:

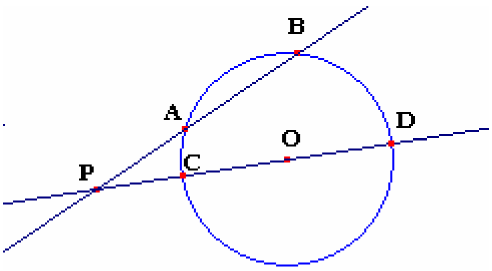
Na figura representada pelo desenho abaixo, obter o valor de x.

É uma simples aplicação da fórmula: PA.PB = PC.PD



2. Atividade que apresenta um nível de funcionamento **mobilizável**:

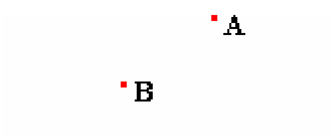
Na circunferência de centro O e raio 5 representada pelo desenho abaixo temos PA = 3cm e AB = 4cm. Obter a distância de P ao centro O.



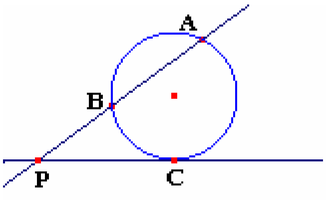
Uma pequena adaptação deve ser feita antes de aplicar a fórmula. PA.PB = PC.PD. Nesse caso, deveríamos escrever PA.PB = (PO - R).(PO + R)

3. Atividade que apresenta um nível de funcionamento disponível:

Descrever um método que permite construir uma circunferência passando por A e B e tangente à reta dada.



Nesse caso, o problema aparentemente não está ligado ao assunto, mas uma análise mostra que, para obter o ponto C, basta utilizar a relação PA.PB = PC². A partir do ponto C, levanta-se uma perpendicular à reta. A intersecção dessa reta com a mediatriz do segmento AB dará o centro da circunferência procurada.



Aline Robert sugere que **nenhum desses três níveis seja negligenciado no ensino da matemática.**

Atividade proposta

Apresente uma atividade situada no nível técnico, outra no nível mobilizável e uma terceira no nível disponível, nas quais o aluno deverá colocar em funcionamento os seus conhecimentos, sobre:

a) O teorema de Pitágoras;

b) O teorema de Tales;

c) Funções Quadráticas (somente para o grupo do 1º ano);

d) Determinantes (somente para o grupo do 2º ano);

e) Geometria Analítica (somente para o grupo do 3º ano).

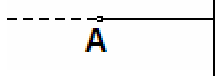
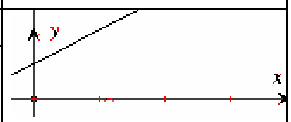
ANEXO 3

3º Encontro: Registros de Representação

Os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, *o seu acesso passa, necessariamente, por representações semióticas* (formas sob a qual a informação é descrita). Raymond Duval, filósofo e psicólogo francês, no seu livro *Sémiosis et pensée humaine. Berne: Peter Lang , 1995* fornece um referencial estruturado de análise do funcionamento cognitivo da compreensão em matemática por meio da Teoria dos Registros de Representações Semióticas.

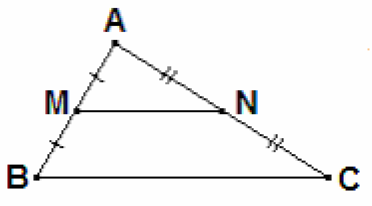
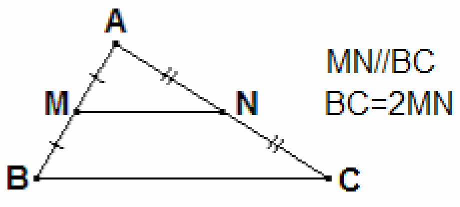
Os diferentes tipos de representações semióticas mobilizáveis no funcionamento matemático são designados por ele como “registros de representação” e classificados em quatro tipos. Dois são relativos à representação discursiva: **a língua natural** e os **sistemas de escritas** (registro numérico, registro simbólico e registro algébrico)**;** e dois relativos à representação não discursiva: **registro figural** (registro figural da perspectiva cavaleira, registro figural da geometria descritiva, registro figural da perspectiva cônica,...) e **registro gráfico (**cartesiano, polar,...).

Um registro pode dar origem a outros registros. Por exemplo, o registro numérico pode dar origem: ao registro numérico decimal, ao registro numérico fracionário,...

Registro da língua natural	**Registro do sistema de escrita (registro simbólico)**	**Registro figural**	**Registro gráfico**
Considere a reta que passa pelos pontos A e B.	$\overleftrightarrow{AB}$		

Obs: o registro figural de uma figura geométrica se limita somente à sua forma, não trazendo nenhuma indicação de medida ou propriedades.

Exemplo de representação de um teorema de geometria em três registros:

Registro discursivo	Ligando os pontos médios dos lados de um triângulo obtém-se um segmento paralelo ao terceiro lado e cuja medida é a metade da medida do terceiro lado.
Registro simbólico	$A \notin BC$, $M \in AB$, $MA=MB$, $N \in AC$, $NA=NC \Rightarrow MN//BC$ e $2.MN=BC$
Registro figural	
Registro misto (figural + simbólico)	

Duval (1996) sustenta que, para que um conhecimento ou um saber matemático possa ser colocado em funcionamento, é necessário que o aprendiz o apreenda não somente com um registro mas com, pelo menos, dois *registros de representação* e que saiba coordenar esses registros.

As pesquisas de Duval indicam que "*A compreensão em matemática implica na capacidade de mudar de registro*".

Existem dois tipos de mudanças de registro que são radicalmente diferentes: os tratamentos e as conversões.

O tratamento de uma representação é a transformação da representação numa outra, mas permanecendo no mesmo registro.

Exemplos de tratamentos:

1) $5x + 4 = 3x - 2 \Rightarrow 5x - 3x = - 4 - 2$ (registro algébrico para registro algébrico).

2) $0{,}7 = 0{,}70$ (registro numérico decimal para registro numérico decimal).

3) $2x + y - 5 = 0 \Rightarrow y = -2x + 5$.

4) $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ (nesse caso, o tratamento é a simplificação)

A conversão de uma representação é a transformação da representação numa outra, mas não permanecendo no mesmo registro.

Exemplos de conversão:

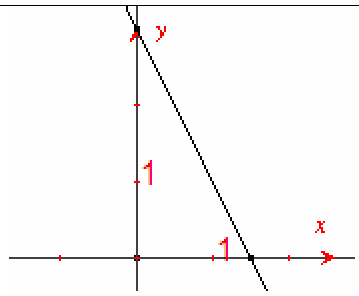
1) $0{,}5 = \frac{1}{2}$ (registro numérico decimal para registro numérico fracionário)

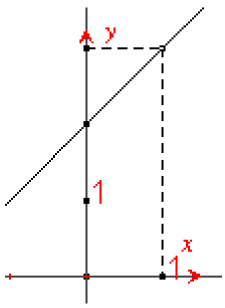
2) $0{,}7 = 7.\ 10^{-1}$ (registro numérico decimal para registro numérico exponencial)

Quando as conversões são feitas nos dois sentidos, há maior possibilidade de mobilizar conhecimentos dos alunos visando a aquisição de um conceito.

Exemplo:

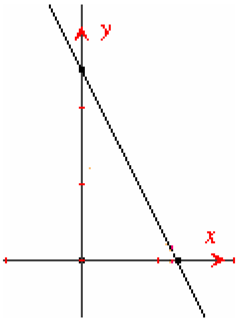
Obter o gráfico da função f de R em R definida por y=-2x+3. A seguir, obter a equação da reta que passa pelos pontos (0,2) e (1,3)

<table>
<tr><th>Registro do sistema de escrita</th><th>Registro gráfico</th></tr>
<tr><td>Obter o gráfico de y = - 2x + 3</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Registro gráfico</th><th>Registro do sistema de escrita</th></tr>
<tr><td>Obter a equação da reta que passa pelos pontos (0,2) e (1,3)

</td><td>y = x + 2</td></tr>
</table>

Em geral, no ensino, as atividades matemáticas só levam em conta tratamentos. Duval sustenta que, numa fase de aprendizagem, a conversão desempenha um papel essencial na apreensão do conceito e que as conversões são as mudanças de registro mais eficazes para a aquisição de um conceito.

Exemplo de uma atividade que necessita de uma conversão para ser resolvida:

Uma reta passa pelos pontos (0;2,5) e (1,25;0)  Pergunta-se: existem pontos da reta que tenham coordenadas inteiras?	Mudando para o registro algébrico Equação da reta: $4x + 2y = 5$ Observando o registro algébrico conclui-se que não existe tal par, pois, se existisse, o primeiro membro da equação seria par e o segundo membro ímpar.

Estas atividades deverão ser construídas em conjunto pela sua equipe e aplicadas (somente as questões 3 e 4) para um grupo de alunos (dez alunos escolhidos a critério da equipe). As questões, bem como o seu relato das resoluções dos alunos deverão ser depositados no fórum para posterior discussão.

1) Formule, em grupo, um teorema de geometria plana no registro da língua natural. A seguir transforme-o no registro misto (figural+ simbólico).

2) Formule um teorema de geometria espacial no registro misto (figural + simbólico). A seguir, transforme-o no registro da língua natural.

3) Elabore um problema de geometria plana que, para ser resolvido, necessite de uma mudança de registro.

4) Elabore um problema de geometria espacial que, para ser resolvido, necessite de uma mudança de registro.

ANEXO 4

4º Encontro: Mudança de Quadro

Régine Douady, pesquisadora francesa, caracteriza a noção de quadro da seguinte maneira (REPERES-IREM n° 6- Janvier 1992, pg 135): “Um quadro é constituído de objetos de um campo da matemática, de relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diferentes e das imagens mentais associadas a esses objetos e a essas relações”. Exemplos de quadros: quadro algébrico, quadro geométrico, quadro numérico, quadro gráfico, etc.

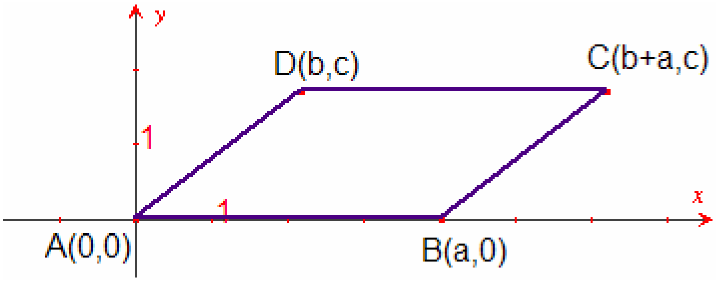
Segundo Douady, uma *mudança de quadro* é uma passagem de um quadro para um outro a fim de obter formulações diferentes de um problema. Essa mudança pode permitir uma nova entrada nas dificuldades encontradas e o funcionamento de ferramentas e técnicas não pertinentes na primeira formulação.

Exemplo de mudança de quadro

Para provar que as diagonais de um paralelogramo se intersectam nos respectivos pontos médios, em geral, parte-se de um desenho de um paralelogramo que mostra as duas diagonais se intersectando. A prova se baseia no desenho que está sob os olhos e a prova não costuma levar em conta que a existência do ponto de encontro das diagonais foi admitida sem nenhuma justificativa. Usando a expressão de Bernard Parsysz, podemos dizer que, ao admitir que as diagonais se intersectam, houve *contaminação do sabido pelo percebido.*

Considere a seguinte questão: *prove que as diagonais de um paralelogramo se intersectam*.

A questão está proposta no **quadro geométrico**. Há uma dificuldade em achar uma solução no quadro geométrico. Fazemos, então, uma mudança para o **quadro algébrico das coordenadas.**



Inicialmente, elegemos um ponto candidato a ser o ponto de intersecção: é o ponto médio. A seguir, provamos que as diagonais se intersectam exatamente nesse ponto.

As coordenadas do ponto médio da diagonal AC são $(\frac{b+a}{2}, \frac{c}{2})$

As coordenadas do ponto médio da diagonal DB são $(\frac{b+a}{2}, \frac{c}{2})$

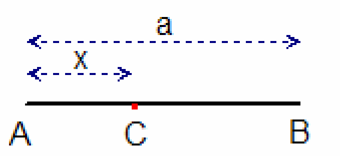
Como o ponto de coordenadas $(\frac{b+a}{2}, \frac{c}{2})$ pertence às duas diagonais, então, elas se intersectam.

Um outro exemplo de mudança de quadro

Problema proposto: dado um segmento AB, obter um ponto C pertencente ao segmento AB tal que o quadrado construído sobre o lado AC seja equivalente ao retângulo de lados AB e BC.

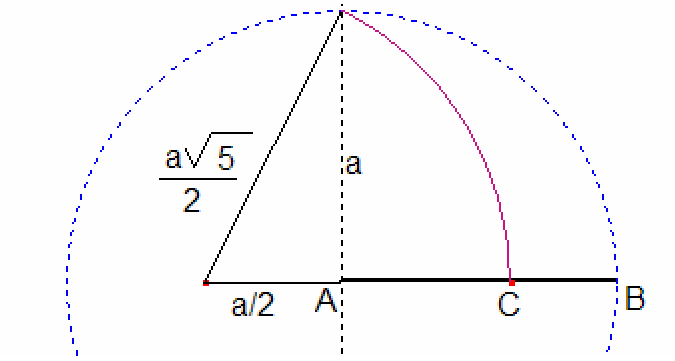
O problema está enunciado no ***quadro geométrico***. Uma mudança para o ***quadro algébrico*** nos dará ferramentas novas para poder resolvê-lo.

Seja a, a medida do segmento AB, e x a distância de A até C conforme desenho abaixo.



A área do quadrado de lado AC será x^2 e a área do retângulo de lados AB e BC será a(a-x). Queremos que $x^2 = a.(a-x)$. Resolvendo a equação do segundo grau obteremos $x = \frac{a\sqrt{5}-a}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}$

Voltamos para o *quadro geométrico* para construir com régua e compasso o ponto C:



Atividade proposta:

Elabore um problema geométrico de modo que a sua resolução seja facilitada por uma *mudança de quadro*.

ANEXO 5

5º Encontro: Um quadro teórico para a Geometria ensinada

Bernard Parsysz, pesquisador francês, no seu artigo “articulação entre percepção e dedução num meio geométrico para professores da escola elementar” extraído do Colóquio COPIRELEM-Tours-2001, apresenta um modelo para um quadro teórico do ensino da geometria, no qual destaca quatro etapas no desenvolvimento do pensamento geométrico:

- **geometria concreta** (nível G0). Nesse nível, parte-se da realidade, do concreto e os objetos são materializados.
- **geometria espaço-gráfica** (nível G1), que é a geometria das representações figurais e gráficas. Nesse nível, os objetos são bidimensionais como, por exemplo, desenhos produzidos numa folha ou numa tela de um computador. A justificativa de propriedades é feita pelo “olhar”.
- **geometria proto-axiomática** (nível G2). Nesse nível, os conceitos são objetos teóricos e as demonstrações dos teoremas são feitas a partir de premissas aceitas pelos alunos de modo intuitivo; os objetos e o caminho da validação são “localmente” os mesmos que na geometria axiomática, mas não há necessidade de explicitar um sistema de axiomas. É possível que, nesse nível, elementos de G0 e G1 sejam incorporados no G2, ou seja, é possível que o sabido se apóie ainda no percebido.
- **geometria axiomática** (nível G3). Nesse nível os axiomas são explicitados completamente.

Nos níveis G0 e G1 os objetos são concretos e as validações são perceptivas; e nos níveis G2 e G3 os objetos são teóricos e as validações são dedutivas. A distinção entre os quatro níveis se situa nas rupturas de contrato. Nos níveis G0 e G1 as justificativas são feitas pelo percebido; no nível G2, por propriedades evidentes e no nível G3, por um sistema de axiomas.

Parsysz, no seu artigo, apresenta a hipótese de que os professores da França dos primeiros ciclos do Ensino Fundamental não distinguem claramente os níveis G1 e G2 e, como conseqüência, não distinguem validações perceptivas de validações teóricas.

Os níveis de Parsysz podem ser caracterizados pelas atividades desenvolvidas pelos alunos. Por exemplo, no problema de determinar a soma das medidas dos três ângulos de um triângulo, se o aluno confeccionar um triângulo de papel e a seguir recortar com uma tesoura os três ângulos, formando com eles um semicírculo, ele estará no nível G0 que corresponde a uma geometria concreta. Se ele desenhar um triângulo e, a seguir, medir os três ângulos com um transferidor (ou construir um triângulo com a ajuda de um software) e medir os ângulos, observando a soma das suas medidas comparando-as com a soma dos seus colegas, ele estará no nível G1, ou seja, na geometria espaço-gráfica. Se ele traçar uma paralela a um dos lados e utilizar o fato (que não é justificado) que retas paralelas determinam ângulos alternos internos congruentes para provar que a soma das medidas dos ângulos é igual a 180°, ele estará no nível G2, que é o da geometria proto-axiomática ; e se ele fizer uma demonstração apoiado num sistema axiomático de referência ele estará no nível 3, que é o da geometria axiomática.

Uma das grandes tarefas do professor de matemática no ensino da geometria é promover o salto de validações perceptivas para validações dedutivas.

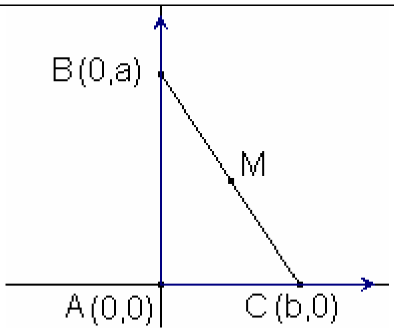
Atividade proposta

Um professor propôs a seguinte tarefa de casa a alunos do 3º ano do Ensino Médio. “Verifique se, num triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa tem por medida a metade da medida da hipotenusa”.

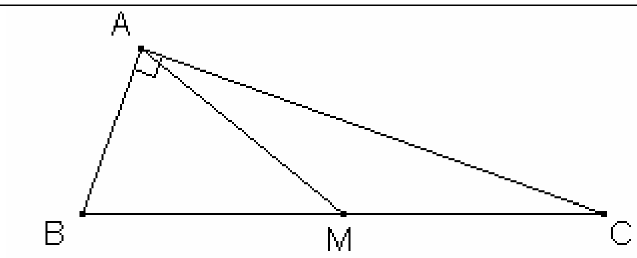
Quatro alunos, João, Paulo, Renata e Flávia resolveram o problema de quatro maneiras diferentes. Comentar as quatro resoluções destacando os tipos de registros (tratamentos e conversões), se houve mudança de quadro e possíveis reconfigurações. Classificar as estratégias segundo os níveis de Parsysz (G0, G1 ou G2) e preencher eventuais lacunas deixadas pelo aluno.

1) João criou um sistema de coordenadas no seu caderno. Nomeou os vértices do triângulo retângulo de A (0,0), B (0,a) e C (b,0) e desenhou uma

figura representada pelo desenho abaixo. Em seguida, calculou as coordenadas (xM , yM) do ponto médio M da hipotenusa obtendo (b/2, a/2). *Finalmente, calculou a distância entre os pontos A e M e entre os pontos B e C encontrando d(A,M)=* $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{2^2} + \frac{a^2}{2^2}} = \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{2}$ *e d (B,C)=* $\sqrt{b^2+a^2}$.

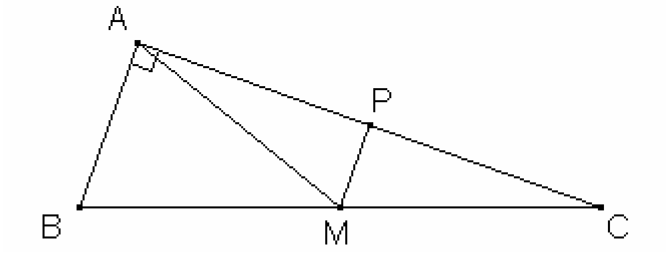


2) Paulo construiu um triângulo retângulo ABC e a sua respectiva mediana AM, utilizando o software Cabri. Mediu com a ferramenta “distância” os segmentos AM e BC e concluiu que a afirmação era verdadeira. Em seguida, desenhou no seu caderno a figura representada pelo desenho abaixo.

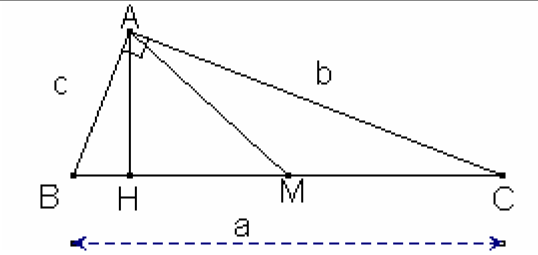


Tentou várias vezes estabelecer a relação “olhando” para a figura e nada conseguiu.

Então, considerou o ponto médio P do segmento AC e traçou o segmento PM conforme figura abaixo. Observou “olhando” o desenho que PM é perpendicular a AC. Considerou os triângulos CPM e APM e afirmou que são congruentes pelo caso LAL concluindo, dessa forma, que AM = MC



3) Renata desenhou um triângulo retângulo ABC e indicou o ponto médio da hipotenusa de M. A seguir, traçou a altura AH do triângulo e indicou as medidas dos catetos AB e AC e da hipotenusa BC respectivamente por c, b e a.



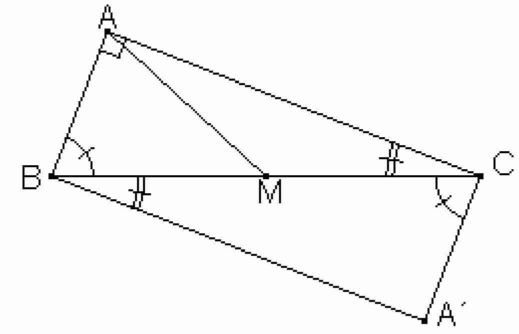
A seguir, usou a relação métrica num triângulo retângulo que diz que *b.c = a.h, no qual h é a medida da altura AH. Donde concluiu que AH =* $\frac{bc}{a}$*. Aplicou o teorema de Pitágoras no triângulo ABH da seguinte maneira: c² = BH² + AH². Logo BH² = c² - AH² =* $c^2 - \frac{b^2c^2}{a^2} = \frac{c^2a^2 - b^2c^2}{a^2} = \frac{c^2\left(a^2 - b^2\right)}{a^2} = \frac{c^2c^2}{a^2} = \frac{c^4}{a^2}$ *. Donde BH* $= \frac{c^2}{a}$*. Depois calculou a medida do segmento HM fazendo HM = BM – BH =* $\frac{a}{2} - \frac{c^2}{a}$*.*

Finalmente, aplicou o teorema de Pitágoras no triângulo AHM AM² = AH² + HM² = $\frac{b^2c^2}{a^2} + \left(\frac{a}{2} - \frac{c^2}{a}\right)^2 = \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{a^2}{4} - \frac{2ac^2}{2a} + \frac{c^4}{a^2} = \frac{a^2}{4}$*.*

Donde AM = $\frac{a}{2}$*.*

4) Flávia juntou dois esquadros de ângulos de 30º e 60º e obteve um retângulo. Como as diagonais de um retângulo se encontram nos respectivos

pontos médios, concluiu que a propriedade era verdadeira. A seguir, utilizando Cabri, rotacionou de 180º (simetria central) o triângulo retângulo ABC em torno do ponto médio M da hipotenusa obtendo a figura representada pelo desenho abaixo:



A partir da figura acima, concluiu que, no quadrilátero ABA'C, o ângulo oposto ao ângulo A é reto, pois que a rotação preserva as medidas dos ângulos e que os outros dois ângulos formados pelo quadrilátero são retos, posto que os ângulos C e B do triângulo retângulo são complementares. O ponto A', sendo simétrico de A em relação ao centro M, é alinhado com A e M e A'M = AM. Utilizando o fato que as diagonais de um retângulo se encontram nos respectivos pontos médios concluiu que AM é a metade de BC.