

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP**

JOSÉ LEÔNCIO FERREIRA FILHO

**UM ESTUDO SOBRE ARGUMENTAÇÃO E PROVA
ENVOLVENDO O TEOREMA DE PITÁGORAS**

**MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE
MATEMÁTICA**

**SÃO PAULO
2007**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP**

JOSÉ LEÔNCIO FERREIRA FILHO

**UM ESTUDO SOBRE ARGUMENTAÇÃO E PROVA
ENVOLVENDO O TEOREMA DE PITÁGORAS**

Trabalho Final apresentado à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL** em Ensino de Matemática, sob a orientação do professor Dr. Vincenzo Bongiovanni.

SÃO PAULO

2007

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ Local e data: _____

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela sabedoria.

Aos meus pais José Leôncio e Erotilde, que mesmo a distância sempre confiaram e incentivaram. Tenho orgulho de vocês.

À minha querida esposa Adriana e meu querido filho Leonardo, que bem compreenderam minhas muitas ausências nesse período de mestrado. Obrigado pela cooperação e apoio. Amo vocês.

Ao Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni, pela sábia, dedicada e paciente orientação. Foi um grande privilégio.

Aos professores doutores Antonio Carlos Brolezzi e Sônia Pitta Coelho por terem aceitado o convite a compor a Banca Examinadora e pelas valiosas sugestões. Seus nomes enobrecem este trabalho.

Aos professores e colegas do projeto AprovaME. Foi muito importante a ajuda de vocês.

Aos professores do curso de Mestrado Profissional da PUC-SP, por contribuírem para minha formação.

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo pela bolsa de estudo. À equipe da Diretoria de Ensino Sul II.

Aos meus irmãos José Maria e Mário, minhas irmãs Raimunda, Socorro, Eronilde, Celsa, Marinete, Marinês, Ana Cláudia, Marinelza e Ednelza.

Ao Colégio Adventista de Itapeceira da Serra e à sua mantenedora a Associação Paulista Sul da Igreja Adventista do Sétimo Dia, pelo auxílio financeiro.

Aos colegas de curso Wellington Zarur Vianna e Paulo Rogério Salomão, por estarmos juntos em todas as disciplinas, todos os seminários e todas as reuniões. Obrigado pela amizade.

Muito Obrigado.

RESUMO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) reconhecem e orientam, que o currículo de Matemática deve necessariamente contemplar atividades e experiências que possibilitem aos aprendizes o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos. Mas há consenso entre os pesquisadores da Educação Matemática, em diversos países, quanto às dificuldades inerentes ao ensino e à aprendizagem de prova.

Esta pesquisa está inserida no projeto AprovaME na área da Educação Matemática da PUC-SP, que tem entre seus objetivos, o de contribuir para o debate sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

O objetivo do presente trabalho foi investigar o envolvimento de alunos da 1ª.série do Ensino Médio em processos de construção de conjeturas e provas, a fim de responder à seguinte questão de pesquisa: que dificuldades apresentam os alunos diante de situações de argumentação e prova envolvendo o teorema de Pitágoras?

Para responder à questão de pesquisa, adotamos como metodologia de pesquisa alguns elementos da engenharia didática. Uma seqüência de ensino foi elaborada com questões sobre argumentação e prova, envolvendo o teorema de Pitágoras e aplicada a alunos de uma escola particular do interior do Estado de São Paulo.

Os trabalhos de Robert (1998) e Duval (2002) contribuíram para a concepção das atividades e os de Balacheff (1988) para a análise dos tipos de provas dos alunos.

As produções dos alunos ao final das atividades mostram que uma seqüência de ensino concebida para produzir argumentações e provas favoreceu a passagem de uma etapa onde as validações são predominantemente empíricas para uma outra etapa onde as validações são dedutivas.

Outros trabalhos abordando diferentes tópicos de matemática e que tratem do ensino e aprendizagem da prova tornam-se cada vez mais necessários para compreender a complexidade desse processo.

PALAVRAS-CHAVE: Argumentação, Prova, Dificuldades, Teorema de Pitágoras, Educação Matemática.

ABSTRACT

The National Curriculum Parameters (Brazil, 1998), acknowledge and recommend that the Mathematics syllabus should necessarily cover activities and experiences which enable learners to develop and effectively communicate with valid mathematical argumentation. However, there is consensus among Mathematics Education researchers, in several countries, as to the inherent difficulties of teaching and learning proof.

This research is inserted in the AprovaME project, in the Mathematics Education area at PUC-SP, which has as one of its goals to foster debate over the teaching and learning of proof in Mathematics.

The objective of the present study was to investigate the involvement of first-year students at high school in processes of conjecture and proof construction, aiming to answer the following research question: what difficulties do students present when faced with argumentation and proof situations involving the Pythagorean Theorem?

In order to answer the research question, we adopted some elements from the didactic engineering as the research methodology. A teaching sequence was then elaborated with questions on argumentation and proof involving the Pythagorean Theorem and applied to students from a private school in a countryside city in the State of Sao Paulo.

The work by Robert (1998) and Duval (2002) contributed to the conception of activities, and the ones by Balacheff (1988), to the analysis of the types of proof from the students.

The production from the students, at the end of the activities, show that the teaching sequence conceived to produce argumentation and proof advantaged the passing of a step where validations are predominantly empirical into another step, in which validation takes on a deductive character.

Other studies approaching different mathematics topics and which treat teaching and learning of proof have become more and more needed for understanding the complexity surrounding this process.

KEYWORDS: Argumentation, Proof, Difficulties, Pythagorean Theorem, Mathematics Education.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I:

Problemática

1.1.	Introdução.....	11
1.2.	Justificativa.....	13
1.3.	Descrição do AprovaME.....	17
1.4.	Descrição do trabalho.....	20
1.5.	Levantamento bibliográfico.....	21
1.6.	Delimitação do problema.....	31
1.7.	Fundamentação teórica.....	31
	1.7.1. Balacheff.....	32
	1.7.2. Duval.....	34
	1.7.3. Robert.....	38
1.8.	Questão de pesquisa e objetivos.....	40
1.9.	Metodologia.....	41

CAPÍTULO II:

Estudo histórico do Teorema de Pitágoras

2.1.	O nascimento do método demonstrativo.....	43
2.2.	O Teorema de Pitágoras na história antiga da matemática.....	44
2.3.	O surgimento da demonstração com Tales e Pitágoras.....	47
2.4.	O Teorema de Pitágoras na Obra de Euclides.....	51
2.5.	O Teorema de Pitágoras na obra de Clairaut.....	55
2.6.	O Teorema de Pitágoras na obra de Legendre.....	57
2.7.	Hilbert e Birkhoff.....	57
2.8.	Provas e teorema de Pitágoras em livros didáticos.....	62
	2.8.1 Livro 1.....	64
	2.8.2 Livro 2.....	67

2.8.3 Livro 3.....	69
2.8.4 Livro 4.....	70

CAPÍTULO III:

Concepções das atividades e análise *a priori*

3.1. Concepções das atividades.....	73
3.2. Análise <i>a priori</i>	74
3.2.1. Atividade 1.....	74
Análise da atividade 1.....	76
3.2.2. Atividade 2.....	82
Análise da atividade 2.....	83
3.2.3. Atividade 3.....	88
Análise da atividade 3.....	90
3.2.4. Atividade 4.....	98
Análise da atividade 4.....	100

CAPÍTULO IV:

Experimentação e análise *a posteriori* das atividades

4.1. Experimentação.....	113
4.2. Levantamento de dados.....	115
4.3. Análise <i>a posteriori</i> da atividade 1.....	116
4.4. Análise <i>a posteriori</i> da atividade 2.....	123
4.5. Análise <i>a posteriori</i> da atividade 3.....	138
4.6. Análise <i>a posteriori</i> da atividade 4.....	153

CAPÍTULO V:

Considerações finais	170
-----------------------------------	-----

Referências bibliográficas	175
---	-----

Anexos

Anexo I – Atividade 1.....	179
Anexo II – Atividade 2.....	181
Anexo III – Atividade 3.....	183
Anexo IV – Atividade 4.....	186

CAPÍTULO I

PROBLEMÁTICA

1.1 - Introdução

"O verdadeiro educador não se satisfaz com trabalhos de segunda ordem. Não se contenta com encaminhar seus estudantes a um padrão mais baixo do que o mais elevado que lhes é possível atingir". (Ellen White, 1827-1915)

Muitas vezes essas palavras serviram-nos de estímulo e incentivo para continuarmos firmes nessa difícil tarefa que é a de ensinar. Nossa formação inicial é em Licenciatura Curta em Ciências exatas e naturais no período de 1991 a 1993, e depois mais um ano específico de Licenciatura Plena em Biologia em 1994, única opção oferecida pela instituição em que estudávamos, na época. Como queríamos trabalhar com Matemática, logo em 1995 começamos o trabalho como professor do Ensino Fundamental II. Para trabalharmos com o Ensino Médio precisávamos continuar os estudos. Voltamos a estudar no período de 1999 a 2000 e concluímos a Licenciatura Plena em Matemática. Em 2004 começamos o trabalho com o Ensino Médio. Antes de ingressarmos no Mestrado, ainda cursamos uma especialização *Lato Sensu* em matemática pura em 2001 e 2002.

Nas aulas da formação inicial e principalmente na especialização, tivemos muitas aulas com demonstrações de teoremas e fórmulas. Podemos lembrar-nos de um professor de física no nosso primeiro ano de estudos. Ele enche a lousa com a demonstração de uma fórmula e em seguida aplica-a em um exemplo. A classe fica mais tranqüila quando ele fala que não cobraria aquela demonstração complicada na prova, só precisaríamos saber usar a fórmula. Claro que nas aulas de álgebra, geometria, etc., não escapávamos de ter que decorar algumas demonstrações, sem muitas vezes entendê-las, para reproduzi-las na hora da avaliação.

Geralmente durante os Ensinos Fundamental e Médio temos pouco ou nenhum contato com o processo demonstrativo, mas quando chegamos ao

Ensino Superior, dependendo da instituição de ensino, ou temos pouco ou quase nada de trabalhos com demonstrações, ou somos surpreendidos com aquelas aulas em que o próprio professor realiza demonstrações e mais demonstrações no quadro, apenas para verificar a veracidade de certas proposições, sem se preocupar em envolver o aluno com atividades que o ensine a construir as suas próprias demonstrações. Pressupõe-se que esse aluno já esteja acostumado com as demonstrações, o que, quase sempre, não é verdade. Assim, esse aluno acaba tendo que memorizar o texto da demonstração feita pelo professor, para reproduzi-lo na hora da avaliação.

Tradicionalmente é isto que acontece nas aulas de matemática. A demonstração é usada exclusivamente com a função de verificar a veracidade das afirmações matemáticas. Como afirma De Villiers (1999) "A idéia é que a demonstração é usada principalmente para remover a dúvida". Isto cria uma idéia negativa em relação às demonstrações. Os alunos têm dificuldades em compreender a necessidade das demonstrações, pois, não estão acostumados com elas, não são ensinados sobre elas, e por isso não as vêem com bons olhos e sempre que podem perguntam: "Por que é que temos que demonstrar isto?" Que professor já não experimentou uma sensação de frustração quando confrontado com essa pergunta?

Como professores de matemática hoje, diferente do que pensávamos enquanto aluno, entendemos que demonstrar é importante. A demonstração nos faz pensar e nos desenvolve o raciocínio. O professor e educador George Polya (1887 a 1985), autor do livro *A arte de resolver problemas*, afirmava, que para ensinar é preciso saber muito mais do que se ensina, é preciso conhecer sua matéria, ter interesse e entusiasmo por ela. Nós consideramos que saber demonstrar uma proposição é conhecê-la mais profundamente. Sempre que podemos, fazemos algumas demonstrações, mas vemos que não é interessante para os alunos. Ficamos surpresos quando aquele aluno mais interessado questiona certas proposições e interessa-se pedindo uma demonstração. Mas a pergunta imediata da classe é: "Isso vai cair na prova?".

Se os alunos questionam por terem que aprender certos conteúdos matemáticos, quanto mais questionarão sobre as demonstrações! Talvez, o que precisa mudar é a forma com que usamos a demonstração.

1.2 - Justificativa

O AprovaME, é um projeto da área de Educação Matemática da PUC-SP, o qual visa fazer um mapeamento das concepções de provas de alunos brasileiros, e sobre o qual daremos mais detalhes no próximo item. Quando fomos convidados a participar desse projeto duas coisas impulsionaram-nos a aceitar o convite. A primeira foi que poderíamos conhecer mais sobre essa discussão dos problemas com a prova no ensino de matemática, a segunda foi que desde cedo poderíamos receber orientações a fim de conhecermos, organizarmos, e discutirmos em grupos, referências bibliográficas para nossa pesquisa. Durante o período de um ano e meio tivemos o privilégio de poder estudar e discutir com nossos colegas e professores, pesquisas existentes sobre o assunto de provas no ensino de matemática, o que nos enriqueceu bastante. Do que vimos nas nossas leituras e discussões, podemos concluir que a questão da inserção da prova nos currículos desde a Educação Básica, já é tema de debates em alguns países como Inglaterra, França e Itália.

No Brasil, o tema sobre a inserção da prova no ensino de matemática, ainda é considerado pouco difundido, basta considerar o baixo número de trabalhos existentes nessa área, como os de Vianna (1988), Cury (1988), Gouvêa (1988), todos do mesmo período e os de Gravina (2001) e Vaz (2004), que foram realizados mais de uma década depois. Mesmo assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, destacam a importância da inclusão de atividades com argumentação e prova nos currículos de matemática, já nos ciclos 3 e 4 (fundamental II). Sugerem experimentos concretos que levantem conjecturas, mesmo que esses experimentos não constituam provas matemáticas, mas que sejam elementos desencadeadores de conjecturas e processos que levem a justificativas mais formais. Além de considerar que:

A **argumentação** está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação por conteúdos matemáticos e se for possível responder aos contra-argumentos ou réplicas que lhe forem impostos.

Uma **argumentação** não é, contudo, uma **demonstração**. A **argumentação** é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a **demonstração** tem por objetivo a prova dentro de um referencial assumido. Assim, a **argumentação** está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a **demonstração**.

Se por um lado a prática da **argumentação** tem como contexto natural o plano das discussões, na qual se podem defender diferentes pontos de vista, por outro ela também pode ser um caminho que conduz à **demonstração**.

Assim, é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a **argumentação**, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das **demonstrações** em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (PCN, 1998, p. 70). (*negritos nossos*)

Em relação à inclusão da prova no currículo de matemática da educação básica, as perguntas que surgem, dentre outras, são: "É a prova tão crucial na cultura matemática para ser incluída no currículo escolar?". Como responder quando os alunos questionam "Porque é que temos que demonstrar isto?". "Os alunos compreendem a necessidade e a função (significado, objetivo e utilidade) da demonstração?". "É possível superar as dificuldades tão freqüentemente descritas pelos professores quando introduzem provas para os alunos?".

Questões desse tipo têm de certa forma orientado os trabalhos de alguns educadores em Educação Matemática a respeito da prova. Pietropaolo (2005) faz uma análise de pesquisas existentes nesta área e destaca os seguintes estudos realizados: análises de dificuldades de alunos da Educação Básica no

processo de aprendizagem de provas (Ballachef, 1988); estudos das concepções de provas pelos alunos (Healy e Hoyles, 2000); a estrutura do raciocínio dedutivo e a aprendizagem da demonstração (Duval, 1991); concepções de professores sobre provas (Knuth, 2002 e Dreyfus 2000); relações entre argumentações e provas formais (Ballachef, 1988, Duval 1992 e 1993, Boero, 1997 e Mariotti, 2001).

Pietropaolo (2005) ainda acrescenta que apesar dos enfoques diferentes dessas pesquisas, em nenhuma delas, os pesquisadores deixaram de enfatizar a necessidade de introduzir a prova em qualquer nível de ensino. Podemos citar como exemplo Mariotti (2001), que é enfática em afirmar que “não se pode ensinar matemática sem introduzir a demonstração”.

Essa frase de Mariotti (2001), que pode até ter uma pitada de exagero, nos parece muito séria, e como professores de matemática ficamos muito preocupados com relação ao que estamos realizando em nossas aulas. Será que estamos realmente “ensinando” matemática?

Para amenizar a situação para os professores de matemática, achamos importante destacar que, os mesmos pesquisadores que enfatizam a necessidade de introduzir a prova em qualquer nível de ensino, também consideram não ser essa uma tarefa fácil.

Fonseca (2000) considera que "demonstrar é um processo que serve para validar, esclarecer, sistematizar o conhecimento matemático, por isso um tal processo deve ser utilizado com as crianças, desde que começam a aprender matemática".

Parece claro que, há consenso entre os pesquisadores da educação matemática, quanto à necessidade de inclusão das provas nos currículos, mas há consenso também quanto às dificuldades associadas ao ensino de prova, que envolve o trabalho dos professores e quanto às dificuldades associadas à aprendizagem de prova, que envolve o trabalho do aluno.

Segundo Pietropaolo (2005), entre os educadores matemáticos ainda não há pleno acordo sobre os próprios significados de prova. Alguns deles, como Hanna (1990), Balacheff (1998), Rezende e Nasser (1994), a fim de fazer

diferenciação, procuram classificar os tipos de prova de acordo com os níveis de rigor. Segundo Nasser e Tinoco (2001), dependendo da faixa etária e do nível de raciocínio dos alunos, o professor deve aceitar, e até mesmo estimular certas justificativas, como parte do processo de construção do raciocínio dedutivo e citam Veloso, (1998, p. 360) que afirma:

"A prática freqüente pelos alunos da argumentação, da justificação das próprias afirmações e da procura de uma explicação em defesa das conjeturas que formulam, no decorrer das atividades de investigação, constituem modos válidos para melhorar o seu discurso matemático e as formas de exprimir os seus raciocínios"

Diante dessa problemática, surge a pergunta: No Brasil, quais têm sido os esforços feitos para se colocar em prática, na matemática escolar, os trabalhos com provas? Como já foi dito, nos Planos Curriculares isto já é algo estabelecido. Bastaria a inclusão do trabalho de provas nos conteúdos dos livros didáticos? E os professores brasileiros, quais as suas concepções em relação às provas matemáticas? E as concepções de alunos brasileiros?

A fim de buscar respostas a essas perguntas, é concebido um projeto de pesquisa denominado "Argumentação e Prova na Matemática Escolar" (AprovaMe), tendo por coordenação a Professora Doutora Siobhan Victoria Healy, que compõe o Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TECMEM) da PUC-SP. Além dela participam do projeto o(a)s professore(a)s: Dra. Ana Paula Jahn, Dra. Celina A. A. P. Abar, Dra. Janete Bolite Frant, Dra. Sônia Pitta Coelho, Dr. Vincenzo Bongiovanni. Os seis professores supracitados constituem o que o AprovaME denomina de grupo de pesquisadores. Vinte e sete estudantes do curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática da PUC-SP integram a equipe como professores-colaboradores.

Assim, esta pesquisa justifica-se por ser um trabalho que visa investigar sobre argumentação e prova na matemática escolar do Brasil e por fazer parte do AprovaME.

1.3 – Descrição do AprovaME.

O AprovaME visa fazer um mapeamento das concepções de provas de alunos brasileiros, a fim de subsidiar propostas e abordagens de ensino especificamente endereçadas à realidade brasileira, sem deixar de lado a aceitação e apropriação pelos professores de tais situações de ensino. Visa também investigar as possibilidades oferecidas pelos ambientes computacionais, nessas situações de aprendizagem da prova.

Os objetivos do AprovaMe são:

1. Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado de São Paulo.

2. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjeturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.

3. Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.

4. Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.

5. Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.

6. Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar.

7. Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

A duração prevista para o AprovaME é de dois anos. O projeto está organizado em duas fases, a primeira (fase 1) envolvendo um levantamento de

concepções de alunos na faixa etária de 14 a 16 anos, e a segunda (fase 2), subsidiada pela primeira, envolvendo a elaboração e avaliação de situações de aprendizagem.

Os trabalhos da fase 1 começaram no segundo semestre de 2005, com a elaboração de um questionário (denominado Q1) baseado naquele concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizado em outros países (França, Taiwan, Israel, Austrália). O Q1 é composto de itens que visam avaliar em que medida os alunos aceitam evidências empíricas como prova, distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos, compreendem o domínio de validade de uma prova e são capazes de construir argumentos válidos. Além disso, pretende identificar a influência da forma de representação da prova (língua natural, língua formal, representações visuais e figurativas, etc.) na compreensão dos argumentos. Geometria e Álgebra são os domínios matemáticos contemplados nas questões do Q1, as quais estão organizadas em 2 grupos. São eles: 1) avaliação de vários argumentos apresentados como provas de uma dada afirmação e, 2) construção de provas. A definição dos argumentos apresentados nos itens do Q1 está fundamentada no modelo de concepções sobre tipos de prova de Balacheff (1988).

O Q1 foi aplicado em um total de 45 turmas do Ensino Fundamental e Médio, de escolas públicas e particulares do estado de São Paulo. Inicialmente, 15 dos professores-colaboradores indicaram, cada um, de 6 a 10 turmas, das quais 3 são escolhidas por sorteio. Um espaço virtual (Teleduc) foi criado para facilitar as comunicações entre os membros da equipe no compartilhamento das decisões e ações sobre o projeto. Ao longo da fase 1, foram realizados encontros de trabalho presencial, com frequência quinzenal, reunindo pesquisadores e professores-colaboradores. Concomitante à aplicação do Q1 junto aos alunos, foi aplicado junto aos professores de Matemática de cada turma um segundo questionário (Q2), que além dos mesmos itens relacionados à prova em Matemática de Q1, compreende questões sobre a escola, sobre o perfil dos alunos da turma e do próprio professor e sobre os materiais didático-pedagógicos utilizados no ensino de Matemática.

Os dados coletados foram organizados e classificados pela equipe de professores-coordenadores, utilizando critérios inspirados em Healy e Hoyles (ibid.) e em seguida foram analisados segundo a construção de um modelo multi-nível, para considerar a correlação de respostas entre os sujeitos que compartilham experiências comuns (Goldstein, 1987). Os resultados dessa análise permitiram uma avaliação das áreas de compreensão de prova dos alunos. Aquelas áreas que merecem maior atenção serviram de base para o trabalho da fase 2 do projeto. Os trabalhos da fase 1 se encerraram no 1º. Semestre de 2006, quando começou a Fase 2.

Esta fase visou contemplar dois eixos inter-relacionados de investigação: a aprendizagem e o ensino. Em relação ao eixo da aprendizagem o objetivo principal foi a elaboração e avaliação de situações, especificamente destinadas às áreas de dificuldades e limitações de compreensão de prova identificadas com o mapeamento elaborado na fase 1. No eixo relativo ao ensino, a atenção se voltou ao professor, e sua contribuição no processo de elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas em ação, considerando que essas situações foram propostas pelos professores em suas salas de aula. A estratégia para essa fase compreendeu um desenvolvimento colaborativo e contínuo entre pesquisadores e professores-colaboradores. Mais precisamente, o desenvolvimento das situações de aprendizagem seguiu um ciclo segundo a organização de 5 grupos com 3 professores-colaboradores e, pelo menos, 2 pesquisadores. Cada grupo desenvolveu situações de aprendizagem, envolvendo ou objetos geométricos representados no software Cabri-géomètre ou o uso de planilhas eletrônicas (como por exemplo, o Excel) para explorar problemas algébricos. Ao longo da fase 2, os grupos se reuniam semanalmente, alternando encontros presenciais e também à distância por meio do espaço virtual Teleduc criado na fase 1. A fase 2 foi constituída de 3 etapas. Na primeira, as situações foram elaboradas por cada grupo e, em seguida, testadas/aplicadas em uma pequena amostra de alunos, e por fim, discutidas e reformuladas em cada grupo. Na segunda etapa, dando seqüência ao processo de elaboração das situações, as produções de cada grupo foram colocadas à

disposição no ambiente virtual, de maneira que cada professor-colaborador pudesse desenvolver, pelo menos, duas atividades elaboradas pelos outros grupos (uma em geometria e a outra em álgebra), em uma de suas turmas, para fazerem observações a fim de melhorar essas atividades. Nesta fase também ocorreu a aplicação dessas atividades aos alunos para posterior análise. Essa aplicação de atividades foi no 1º. Semestre de 2007. A terceira e última etapa da fase 2, os alunos participantes da Fase 2 responderam ao questionário Q1 elaborado na Fase 1. Essas respostas foram organizadas e analisadas gerando um mapa, que por sua vez, foi comparado àquele resultante da Fase 1. É importante observar que os alunos pesquisados nas duas fases foram de 8ª. série (9º. ano atualmente) e 1º. ano do Ensino Médio, e como a Fase 1 investigou alunos de 2005, esses alunos não constam da pesquisa da Fase 2, já que esta investiga alunos de 2007.

Para as situações de aprendizagens elaboradas na Fase 2, foram concebidas seqüências didáticas, envolvendo alguns temas de geometria e de álgebra.

Algumas dessas seqüências didáticas elaboradas no AprovaME, foram indicadas como tema de trabalho final de dissertação de mestrado, a alguns professores-colaboradores do projeto.

1.4 – Descrição do Trabalho

A presente investigação está organizada em cinco capítulos, sendo que no primeiro apresentamos a problemática da pesquisa, ou seja, a justificativa da escolha do tema, a descrição do projeto AprovaME, o levantamento bibliográfico a fundamentação teórica, a questão de pesquisa e os procedimentos metodológicos.

No capítulo 2 apresentamos um breve histórico relacionado ao teorema de Pitágoras, baseando-nos nas obras de Euclides, Clairaut, Legendre, Hilbert e Birkhoff. No final do capítulo fazemos uma análise de quatro livros didáticos.

O capítulo 3 inclui as concepções das atividades que compõem a seqüência didática usada na pesquisa e uma análise *a priori* dessa seqüência.

O capítulo 4 trata da organização e aplicação da seqüência didática e da sua análise *a posteriori*.

No capítulo 5 são colocados em destaque os resultados obtidos e as considerações finais sobre a investigação realizada.

1.5 – Levantamento Bibliográfico

A fim de oferecer apoio e dar subsídios aos trabalhos que fazem parte do AprovaME, são sugeridas para leitura, várias referências obtidas da literatura a respeito de *demonstração* e *provas* no ensino de matemática. Trata-se de uma bibliografia composta de pesquisas publicadas na área da Educação Matemática, do Brasil e do Exterior.

Neste item, apresentamos uma síntese de algumas dessas leituras.

1.5.1 – Gravina

Gravina (2001), trata sobre a demonstração considerando as dificuldades dos alunos nesse processo, e as possíveis contribuições do uso de um software de geometria dinâmica na demonstração.

Em sua pesquisa os sujeitos da investigação são 13 alunos da disciplina Geometria I, do curso de licenciatura em matemática da UFRGS. Portanto, alunos ingressantes da universidade.

Ela considera que o processo de *prova* é central no desenvolvimento do conhecimento matemático e que esse processo, na geometria euclidiana, apresenta grandes obstáculos aos alunos. Cita como um desses obstáculos, a dificuldade em fazer a transição, necessária, do conhecimento de natureza empírica, que o aluno já adquiriu, e aquele a ser construído: o da geometria euclidiana enquanto modelo teórico, organizado em axiomas, teoremas e demonstrações.

Para Gravina (2001) o conhecimento empírico, constitui-se, a partir das impressões e experiências proporcionadas pelo mundo sensível e imediato, sobretudo, das impressões visuais.

Ela mapeia, em sua investigação, dificuldades inerentes ao processo de aprendizagem da geometria, e sinaliza o potencial dos ambientes de geometria dinâmica na superação das dificuldades.

Uma das dificuldades consideradas por ela, no processo de aprendizagem da geometria, é o entendimento do sentido de demonstração, o perceber a diferença entre argumento de natureza empírica e argumento de natureza dedutiva.

Gravina (2001) considera um trabalho de Harel, G. e Sowder, L. (1991), que registram comportamentos de alunos, já no final do estudo secundário e mesmo no início de estudos universitários, no qual: a) a verificação empírica é suficiente para garantir a veracidade de uma propriedade; b) a demonstração é tomada como garantia de verdade somente na situação particular do desenho representativo do teorema em questão – após terem trabalhado com a demonstração que garante que "os pontos médios dos lados de um quadrilátero formam um paralelogramo" eles vacilam para responder se a propriedade aplica-se um quadrilátero diferente do inicialmente representado.

Quanto ao software de geometria dinâmica, Gravina (2001) utiliza o Cabri Geometry II. Ao inserir o software em sua pesquisa, a autora, visa investigar duas questões:

- Como os ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para que os alunos entendam o significado de demonstração?
- Como os ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para que os alunos construam suas próprias demonstrações?

Gravina (2001) considera ter detectado, no desenrolar da sua experimentação, o progresso dos alunos, que:

- Compreenderam o propósito e a necessidade da demonstração.
- Mostraram atitudes que caracterizam o "pensar matemático" – formular conjecturas, errar, realizar muitos experimentos de pensamento e então

avançar no processo de demonstração; desenvolveram competências para o tratamento do desenho suporte à argumentação dedutiva: *reinterpretações / reconstruções / extensões* de desenho. A variedade de soluções e demonstrações por eles apresentadas são indicadores de autonomia no processo de demonstração.

Para Gravina (2001) nem sempre a produção final de demonstrações se apresentou satisfatória; mas tentativas e insucessos são aspectos que participam do processo de criação em matemática, o que também foi experimentado pelos alunos.

Quanto à geometria dinâmica, Gravina considera que sua utilização favoreceu a ascensão de patamar de conhecimento geométrico; a partir do patamar de conhecimento ainda empírico, os alunos ascenderam àquele em que a geometria é entendida como um modelo teórico. Neste novo patamar com "os desenhos em movimento" os alunos desenvolveram progressivamente habilidades para construir suas próprias demonstrações; a utilização do ambiente também favoreceu os pensamentos de natureza visual, fonte de *insights* para a construção de demonstrações.

Sendo recente o uso da tecnologia informática no cotidiano da sala de aula, Gravina (2001) considera necessário mais investigações para que se defina o adequado uso dos ambientes de geometria dinâmica.

1.5.2 - Gouvêa

Gouvêa (1998) baseada nas dificuldades apresentadas por alunos no Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar - SARESP implantado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo em 1996, e considerando que entre os aspectos de maior dificuldade para o aluno, detectados através de um questionário respondido pelos alunos, estava a "forma pela qual o professor ensinavam a matéria dada (19,25% no curso noturno; 18,51% no diurno)", apresenta seu trabalho de pesquisa que foi realizado na perspectiva de contribuir para a prática pedagógica do professor de Matemática, abrangendo especificamente conteúdos estudados em Geometria no ensino fundamental.

Dentre os objetivos da pesquisa de Gouvêa (1998), está o de reconquistar o aspecto da descoberta para que o aluno sinta a necessidade de provar o que tenha conjeturado. Para isto foi elaborada uma seqüência de ensino para alunos na faixa dos 13 a 15 anos de idade, da qual professores participaram vivenciando como se realiza esse processo dando sua opinião a todo tempo, validando ou não a proposta de ensino, assim o professor se colocava no lugar do aluno.

Segundo Gouvêa (1998), a maioria dos professores que participaram de sua pesquisa, perguntava: “Que estratégias devem ser usadas, para superar os obstáculos que se acham no ensino-aprendizagem da demonstração? Como levar o aluno a sentir a demonstração como um instrumento eficiente de prova? Como agir para que a dificuldade de expressão de certo alunos não se transforme em dificuldade relacionada à geometria?”

Para a própria pesquisa de Gouvêa (1998), não há resposta pronta para todas essas preocupações, mas considera, que “o conhecimento dos obstáculos mais importantes encontrados pelos alunos, podem ser levados em conta na aprendizagem da demonstração.”

Gouvêa (1998) ainda considera que, uma das dificuldades encontradas pelos alunos, como relataram os professores durante a seqüência, é o procedimento de resolução: Como começar? Quais conhecimentos a serem utilizados? O aluno tem a tendência de utilizar as propriedades estudadas recentemente, mas tem dificuldade para utilizar seus conhecimentos anteriores. Diante disso ou ele pede explicações ao professor antes de começar o trabalho, ou se desencoraja ou dá uma resposta absurda.

Para Gouvêa (1998) o professor, nas atividades de demonstração, muitas vezes se satisfaz com um ensino-aprendizagem por analogia. O aluno, colocado diante de um modelo de demonstração, procura observar e em seguida, imitar o método de resolução numa situação aproximada. Acrescenta que essa aprendizagem por imitação não tem nada evidente para os alunos: a maioria deles tem dificuldade em começar um problema. A demonstração não pode ser apresentada como um produto pronto para os alunos, mas, sim, como um

processo que é construído a partir de problemas que tomam sentido na vida prática. Considera, por outro lado, não haver método geral que se aplique à situação e é difícil para o professor resolver o trabalho para o aluno. Adverte que dar uma “mãozinha” ao aluno nessa situação de bloqueio é dar parte da resposta.

Na pesquisa Gouvêa (1998) ainda considera como um dos problemas para o processo de demonstração, o da linguagem. Os resultados do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar (SARESP, 1996) fazem menção ao baixo desempenho alcançado pelos alunos do ensino fundamental também em Língua Portuguesa. Isto resulta na falta de competência em compreender os enunciados dos problemas de matemática e em elaborar uma resposta com argumentos articulados dentro de um texto coerente. Muitos alunos, como alertam os professores pesquisados, têm o raciocínio correto e percebem a solução do problema, mas têm dificuldade na formulação da resposta com argumentos precisos.

Gouvêa conclui que o professor deve propor uma série variada de atividades que venham favorecer um comportamento de pesquisa, a elaboração de conjeturas, despertando assim o raciocínio dedutivo.

1.5.3 – De Villiers

De Villiers (2001) trata de uma apresentação da importância e do caráter indispensável da demonstração no conhecimento matemático, e das várias funções que assume, nomeadamente em presença de programas de geometria dinâmica como o *Sketchpad*.

De Villiers (2001) considera, que a dificuldade que os alunos têm em compreender a necessidade da demonstração, é bem conhecido dos professores do ensino secundário, e é identificada em toda a investigação em educação, sem exceção, como um dos maiores problemas no ensino da demonstração.

De Villiers (2001) descreve algumas funções importantes da demonstração, e discute brevemente algumas implicações para o seu ensino.

Ele apresenta um modelo relativo à função da demonstração, que considera ser uma ampliação ligeira da distinção original de Bell (1976) entre as funções de verificação, iluminação e sistematização. O modelo está abaixo, sem que a ordem signifique ordem de importância.

- verificação (dizendo respeito à verdade da afirmação)
- explicação (fornecendo explicações quanto ao fato de ser verdadeira)
- sistematização (a organização dos vários resultados num sistema).
- descoberta (descoberta ou invenção de novos resultados).
- comunicação (a transmissão do conhecimento matemático).
- desafio intelectual (a realização pessoal/gratificação, resultantes da construção de uma demonstração).

Quanto ao ensino da demonstração com os *Sketchpad*, De Villiers (2001) declara que quando os alunos já investigaram com cuidado uma conjectura geométrica por meio de uma variação contínua, com um *software* como o *Sketchpad*, têm pouca necessidade de adquirir maior convicção ou de proceder à sua verificação. Assim, conclui que a verificação não serve ou serve de pouca motivação para fazer uma demonstração. Mas afirma ter constatado que é relativamente fácil suscitar nova curiosidade ao perguntar porque razões pensam que um resultado específico é verdadeiro: ou seja, desafiá-los a tentar *explicá-lo*.

De Villiers (2001), considera que é aconselhável introduzir cedo a função de descoberta da demonstração e acrescenta que a função de verificação deve ficar reservada apenas para os resultados em relação aos quais os alunos mostrem de modo genuíno ter dúvidas. Para ele:

Embora alguns alunos possam não sentir a demonstração como um desafio intelectual, são capazes de apreciar que assim seja para outros. Além disso, na matemática real, como qualquer pessoa com um pouco de experiência pode testemunhar, a função pura de sistematização apenas se torna presente num estágio avançado da prática da demonstração, pelo que deve ser evitada num curso introdutório sobre a demonstração.

1.5.4 – Nasser e Tinoco

Nasser e Tinoco (2001) apresentam **estratégias** para o desenvolvimento da habilidade de argumentação, em turmas desde a 5ª. Série (atual 6º. ano) até o final do ensino médio.

Consideram que, quase todos os professores de matemática incluem em seus planejamentos, como um dos objetivos, o de desenvolver o raciocínio lógico. Observam entretanto, que “apesar disto, os alunos passam pela escola sem vivenciar atividades que desenvolvam esse tipo de raciocínio ou que os preparem para o domínio do processo dedutivo”.

Para Nasser e Tinoco (2001) isto vem sendo observado em todos os níveis de escolaridade, incluindo alunos universitários de matemática, ou ainda, entre professores de matemática em exercício. Consideram que o tipo de ensino que é ministrado na maioria das escolas é sem incentivo ao questionamento ou às explicações, o que faz com que os alunos não desenvolvam o raciocínio lógico e não os preparem para o domínio do processo dedutivo.

Nasser e Tinoco (2001) desenvolveram seu trabalho contando com a participação de professores do ensino fundamental e médio e de licenciandos e tendo como base a pesquisa desenvolvida na Inglaterra pela Dra. Célia Hoyles (1997). E os primeiros experimentos que realizaram em turmas cujos professores não costumavam trabalhar com argumentação, com questões do teste utilizado por Hoyles, mostraram que os alunos não eram capazes de justificar qualquer afirmação, por mais simples que fosse, tanto no campo geométrico como no algébrico.

Na investigação, partiram do pressuposto de que “a habilidade de argumentar deve ser trabalhada desde as primeiras séries”.

As estratégias que as pesquisadoras utilizaram e que segundo elas se mostraram eficientes são as seguintes:

- Após tentar resolver uma tarefa individualmente e de ouvir a explicação do professor, os alunos trabalham em grupos, discutindo soluções para o mesmo problema.

- Avaliar justificativas apresentadas por outros estudantes.

- Propor problemas do tipo desafio, que requerem raciocínio lógico, não importando o tópico que esteja sendo abordado.

- O mesmo problema é proposto tanto a estudantes que já aprenderam o conteúdo matemático correspondente quanto àqueles que ainda não adquiriram esse conhecimento, a fim de observar a variação de formas de argumentação.

- Uso do computador (geometria dinâmica) para verificar se uma afirmativa é verdadeira ou falsa. Depois de convencidos da verdade (ou não), os alunos são levados a justificá-la, ou a procurar um contra-exemplo.

- Atividades que ajudam a diferenciar a hipótese da tese de uma afirmativa.

Nasser e Tinoco (2001) chegaram às seguintes conclusões:

- É necessário um trabalho contínuo durante um longo período para que haja um progresso sensível no nível de argumentação dos alunos.

- A habilidade de argumentar e provar resultados de um certo campo da matemática como, por exemplo, o geométrico, não se transfere para os outros campos, como o numérico e o algébrico.

- O trabalho freqüente com problemas-desafio que envolvem um raciocínio lógico, mas não estão diretamente ligados a conteúdos matemáticos favorece o desenvolvimento da habilidade de argumentar e de demonstrar resultados matemáticos.

- O desenvolvimento das habilidades de argumentação e prova em matemática está estreitamente ligado ao domínio da língua materna e à atribuição de significado aos conteúdos matemáticos pelos alunos.

1.5.5 - Fonseca

Já Fonseca (2005) trata a questão da prova com enfoque na formação inicial de professores de matemática.

Considera que, como a investigação aponta no sentido de que os professores tendem a ensinar do mesmo modo em que foram ensinados, mais do que como foram ensinados a ensinar (e.g. Carrilo & Contreras, 2000; Chapman, 2000; Hefendehl-Hebeker, 1998; Thompson, 1985, 1992) para que os

professores venham a utilizar métodos, técnicas e materiais adequados é necessário que durante a formação inicial ou contínua possam passar pelas mesmas experiências que se deseja usem com os seus alunos.

Ela propõe os seguintes problemas e questões:

- Como se poderão caracterizar o nível de sofisticação dos argumentos construídos pelos futuros professores quando pretendem demonstrar?

- Que dificuldades revelam futuros professores de matemática quando elaboram demonstrações?

- Que relações se podem estabelecer entre o ambiente de formação inicial e as competências em demonstração dos futuros professores?

- Que aspectos da formação inicial foram percebidos pelos jovens professores como tendo sido integrados na sua prática profissional?

Ainda considera que:

(...) para os alunos desenvolverem apreciação pela demonstração matemática é necessário tempo, muitas e variadas experiências em todos os conteúdos e anos de escolaridade, orientação para desenvolver a habilidade para construir argumentos válidos e para avaliar os argumentos construídos por si e pelos outros.

Para Fonseca (2005) a formação inicial deve proporcionar aos futuros professores experiências enriquecedoras e desafiadoras, permitindo-lhes ser criativos, tanto na resolução de problemas e nas investigações, como na formação de novos conceitos. E ainda sugere que, na formação inicial de professores, o ensino da matemática deve basear-se na resolução de problemas não rotineiros, onde se inclui a construção de demonstrações.

1.5.6 – IREM de Grenoble e de Rennes

Os IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) são institutos de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática, fundados na década de 60, na França. Sua missão consiste em “pesquisar sobre o ensino de Matemática, elaborar e difundir documentos relativos a ele e contribuir tanto para a formação universitária inicial quanto para a reciclagem contínua dos professores de Matemática.”

Em uma de suas publicações, os IREM de Grenoble e de Rennes, que doravante denominaremos IREM de G & R, nas páginas 84 a 99, que foram traduzidas pelos professores do projeto AprovaMe, Dra. Ana Paula Jahn, Dra. Sônia Pitta Coelho e Dr. Vincenzo Bongiovanni em fevereiro de 2006, fazem uma seleção de atividades que exploram o ensino-aprendizagem de demonstração.

Os IREM de G & R afirmam que essas atividades não são descritas de forma detalhada, mas dão idéia de como devem ser trabalhadas. Advertem que para colocar em prática alguma delas, é necessário ter o máximo de informação sobre as razões de escolha dos idealizadores da atividade. Para conseguir essas informações, os autores convidam o leitor a consultar os artigos onde ela é descrita.

Segundo os IREM de G & R, as atividades são compostas de tarefas. O termo tarefa designa aqui o trabalho que o aluno deve realizar, isto é, o fim perseguido, os procedimentos possíveis para aí chegar, os parâmetros e os auxílios que são propostos.

Dentre as muitas tarefas que os IREM de G & R apresentam está uma relativa aos enunciados de teoremas. Consideram que o domínio de teoremas é evidentemente um ponto importante da aprendizagem. Indicam que o teorema pode ser introduzido como uma conjectura que é preciso validar ou rejeitar. Mas é necessário nesse caso conceber um cenário que conduz os alunos a se interessarem realmente a esta conjectura.

Os IREM de G & R observam que não é fácil fazer nascer uma verdadeira conjectura, isto é, fazer descobrir aos alunos uma propriedade da qual eles não estão certos, que crie um verdadeiro conflito na classe e que faz muitos alunos ter vontade de procurar uma prova.

Como exemplo do tipo de tarefas relativas aos enunciados de teoremas, eles citam os seguintes:

- Para o teorema dos pontos médios, a utilização do Cabri-géomètre coloca em evidência que o comprimento do segmento que une os pontos médios

de dois lados é constante quando se desloca o vértice comum; essa experiência torna os alunos curiosos de compreender porque esse fenômeno se produz.

- Para introduzir o teorema de Pitágoras, os IREM G & C citam Etienne Thépôt que propôs uma longa seqüência. Essa seqüência comporta em particular trabalhos sobre puzzles e a idéia interessante sobre figuras em perspectiva cavaleira. Para os IREM de G & R, essa proposição pediria sem dúvida um trabalho de validação. Mas em seguida advertem que se a duração da seqüência proposta for muito longa, pode desencorajar bem os professores.

Os IREM de G & R citam Robert Noirfalise que explica como uma seqüência sobre o teorema de Pitágoras muito orientada sobre a decomposição de área pode fazer desaparecer aos olhos dos alunos a relação entre os comprimentos dos lados, que é no entanto o ponto central do teorema visto na sétima série (atual 8º. ano).

1.6 - Delimitação do problema

Os professores pesquisadores que compõem o AprovaME, elegeram alguns conteúdos de álgebra e geometria, para serem temas de seqüências de ensino, a fim de explorar a argumentação e a prova no ensino de matemática, como reza um dos objetivos do AprovaME.

As seqüências de ensino, antes mesmo de serem elaboradas, são indicadas como tema de trabalho final de dissertação de mestrado, aos professores-colaboradores. Portanto, como um dos professores-colaboradores do AprovaME, preferimos, para esta pesquisa, trabalhar com um tema de geometria, neste caso, com o teorema de Pitágoras.

1.7 – Fundamentação Teórica

Esta investigação usa como fundamentação teórica os trabalhos de Balacheff (1998), Duval (2001) e Robert (1998). Os trabalhos de Balacheff, referente aos tipos de provas, foram utilizados durante a análise *a posteriori* das atividades, onde podemos classificar, quando possível, os tipos de prova que são apresentados pelos alunos. A contribuição de Duval é para a concepção da

atividade 3. Segundo ele, a demonstração de um teorema é uma seqüência de passos, em que cada passo tem uma hipótese e uma tese. Ao provar cada passo, considera-se provado o teorema em questão. Já o trabalho de Robert é utilizado como base para a concepção da atividade 4, na qual procuramos incluir exercícios nos vários níveis de dificuldades, segundo essa autora. Apresentamos abaixo essas idéias.

1.7.1 - Balacheff

Balacheff (1988), ao considerar o trabalho dos alunos no âmbito da demonstração, propõe a existência de três níveis iniciais de sofisticação: **explicação**, **prova** e **demonstração**. A **explicação** situa-se no nível do indivíduo "falante" que estabelece e garante para si a validade dos raciocínios. A **prova** surge subdividida em quatro níveis, sendo a validade dos raciocínios garantida:

- no *empirismo ingênuo*, pela exibição de alguns casos particulares em que a proposição se verifica, sem questionamento quanto a particularidades. Ou seja, o aluno tira da observação de um pequeno número de casos, a certeza da verdade de uma afirmação. Este modo ainda pouco desenvolvido, reconhecidamente insuficiente, é uma das primeiras formas do processo de generalização, e perdura ao longo do processo de desenvolvimento do pensamento geométrico.

- na *experiência crucial*, pela verificação da afirmação em causa num caso particular tido como típico. É um método de validação no qual o indivíduo coloca explicitamente o problema da generalização. Se isto vale então vale sempre. A prova continua sendo fundamentalmente empírica, mas distingue-se do *empirismo ingênuo* justamente pela generalização que é feita.

- no *exemplo genérico* pela apresentação de propriedades aplicadas sobre um caso típico. Este nível consiste na explicitação das razões que validam uma propriedade que encerra uma generalidade mesmo, fazendo uso de um representante particular do objeto geométrico.

- na *experiência mental* pela apresentação de deduções lógicas baseadas em propriedades. A argumentação não é mais através de situações particulares, como no *exemplo genérico*.

Na **demonstração** a validade dos raciocínios é garantida pelo referencial adotado (conceitos primitivos e postulados) e é um tipo de prova com forma estritamente codificada e formal.

A presente investigação baseia-se na categorização de **prova** de Balacheff.

A fim de compreendermos mais claramente os níveis que subdividem a **prova**, apresentamos abaixo um relato de uma experiência que ilustra os diferentes níveis.

Gravina (2001) cita de Balacheff (1987), um relato onde o problema proposto é relativo ao número de diagonais de um polígono.

No *empirismo ingênuo*, os alunos determinam experimentalmente que o número de diagonais de um certo pentágono é 5; modificam a forma do pentágono e conferem novamente a constatação inicial; daí concluem decisivamente que um hexágono tem 6 diagonais.

Na *experiência crucial* os alunos fazem experiência com um polígono de muitos vértices (uma imensa figura), buscando deduzir generalização empírica, buscando a validação em outros casos particulares.

No *exemplo genérico* os alunos utilizam o caso particular do hexágono para explicação, mas se desprendem de particularidades, o que dá indícios de pensamento dedutivo: "num polígono com seis vértices, em cada vértice temos 3 diagonais. Assim são 18 diagonais; mas como uma diagonal une dois pontos, o número de diagonais é 9. O mesmo acontece com 7 vértices, 8, 9..."

E finalmente na *experiência mental* os alunos se desprendem do caso particular, o que transparece na argumentação; "em cada vértice o número de diagonais é o mesmo de vértices, menos os dois vértices vizinhos; é preciso multiplicar isto que encontramos pelo número de vértices, porque em cada vértice parte o mesmo número de diagonais. Mas estamos contando cada

diagonal duas vezes; o número de diagonais que procuramos se encontra dividindo por 2 e obtemos uma vez cada diagonal".

1.7.2 – Duval

Duval (2002) ao tratar sobre a aprendizagem da prova em geometria, faz alguns questionamentos e apresenta suas considerações sobre eles, depois afirma que a maioria das pesquisas surge no âmbito de apenas duas dessas questões. São elas:

(1) Quais propriedades, ou teoremas, devem ser usados a fim de provar alguma conjectura dada?

(2) Como fazer com que provas matemáticas convençam os estudantes?

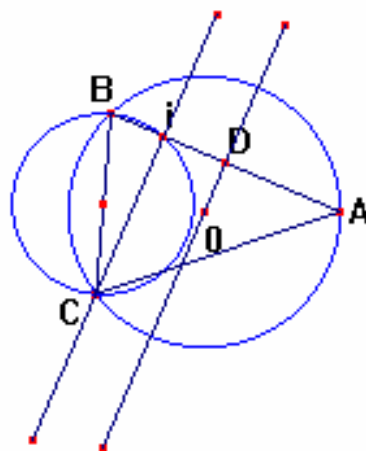
(a) Como organizar o ensino a fim de convencer estudantes por meio de uma prova matemática?

Para ele, se o ensino fornecesse problemas apropriados e situações estimulantes de trabalho, então a maioria dos estudantes não teria problemas com provas matemáticas.

A seguir está a produção de um aluno, que, segundo Duval (2002), recolhe todas as dificuldades recorrentes que muitos alunos não conseguem transpor. Ele lembra que, esse aluno foi treinado previamente a escrever provas esclarecendo a categoria de cada declaração, usando três termos: hipóteses, propriedade, e conclusão.

Num círculo de centro O , marque três pontos A , B , C . O círculo de diâmetro $[BC]$ intersecta (AB) em I . Seja D o ponto médio de $[AB]$.

Prove que a reta **(OD)** e **(CI)** são paralelas.



A figura do aluno de 13 anos.

ESCRITA DE UM ALUNO DE 13 ANOS

Hipóteses: Tem-se (OD) perpendicular a [AB]

Propriedades: Se uma reta é perpendicular a um segmento no seu ponto médio então ela é a mediatriz desse segmento.

Conclusão: (OD) é perpendicular a [AB]

Para Duval (2002), os erros recorrentes são indicadores da profunda brecha entre o raciocínio comum e processos válidos do raciocínio e mostram também a dura interação entre olhar uma representação visual e entender a declaração, quando ambos são referentes à mesma coisa.

A partir daí Duval (2002) começa a discorrer sobre características cognitivas do raciocínio válido numa prova geométrica. Afirma que um raciocínio liga várias proposições juntas de tal forma que progressões tornam-se intrinsecamente necessárias das primeiras à última. Daí considera que um raciocínio válido envolve dois níveis de organização discursiva: o nível da organização de várias proposições em um passo dedutivo e o nível de organização de diversos passos em uma prova. Para esta investigação citaremos apenas sobre o segundo nível.

Duval (2002) afirma que muito freqüentemente provas requerem mais do que um passo da dedução. O ponto básico é ligar dois passos a fim de mover-se para a conclusão. Essa ligação específica tem três características.

- A conclusão de um passo é repetida no próximo passo, mas deixa de ser uma conclusão para ser uma premissa. Assim premissas de um passo devem ser conclusões do anterior.

- De um passo para o seguinte, apenas a conclusão é mantida, e suas outras indicações devem ser esquecidas.

- Desde a primeira conclusão têm-se como alvo a conclusão **do raciocínio dedutivo válido avançando através de substituições sucessivas de conclusões intermediárias**. Assim, neste nível, o raciocínio válido funciona exatamente como uma **computação**.

A fim de compreendermos melhor como funciona a divisão de um raciocínio em passos, apresentamos em seguida, um exemplo que o próprio Duval (2002) coloca, baseado no problema que já foi apresentado anteriormente e que repetimos abaixo:

Num círculo de centro O , marque três pontos A, B, C . O círculo de diâmetro $[BC]$ intersecta (AB) em I . Seja D o ponto médio de $[AB]$.

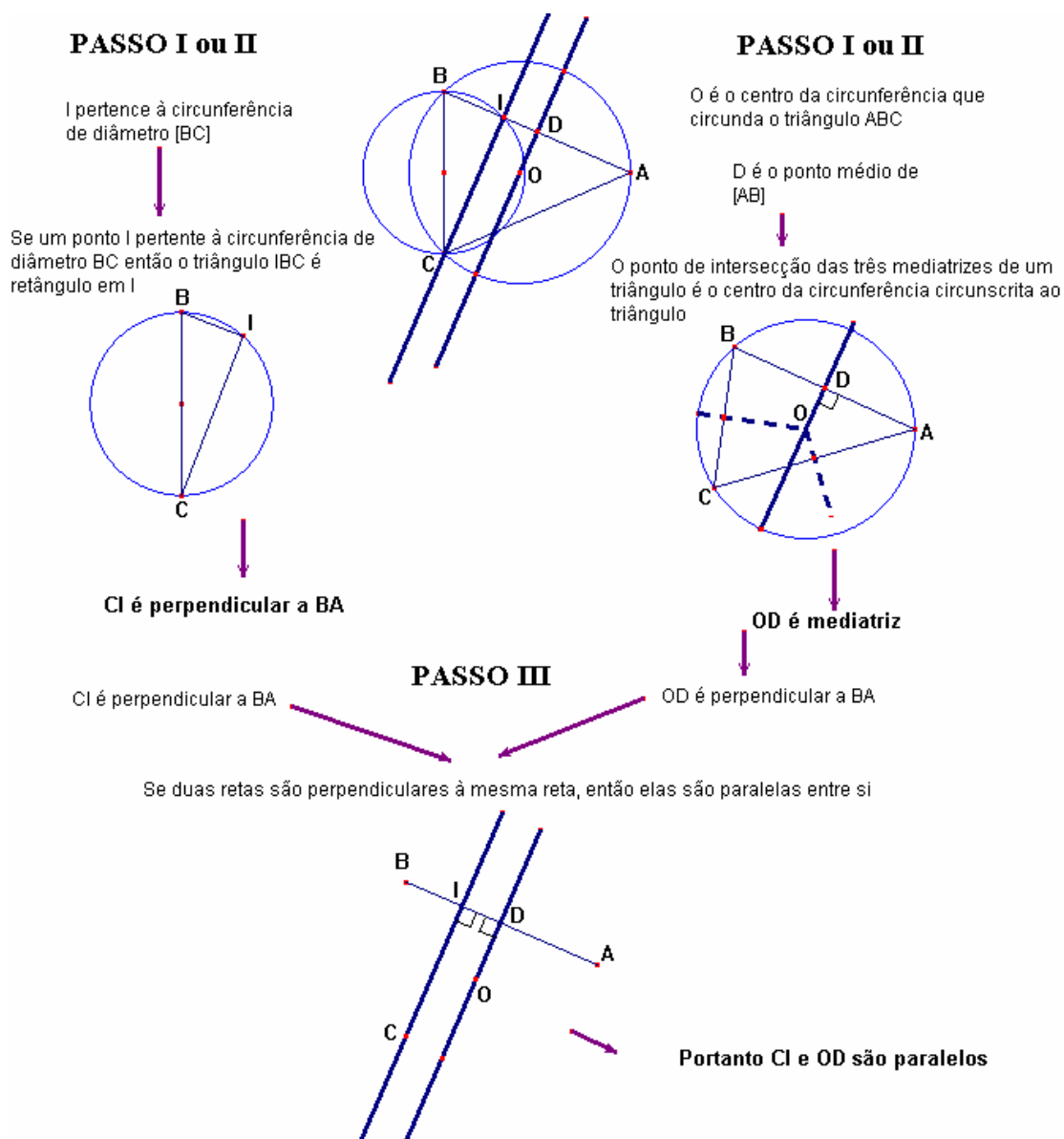
Prove que **a reta (OD) e (CI) são paralelas**.

Nesse exemplo Duval (2002) considera que temos três passos e um quarto poderia ser esclarecido, mas não apresenta indicações. Em todo caso, considera que, o ponto básico é ligar dois passos a fim de avançar na direção do alvo, que é a conclusão.

Ele observa também, a possibilidade de seqüências paralelas de passos dedutivos, como faz nesse exemplo apresentado. Neste caso, ele considerou os passos I e II paralelamente, ou seja, o passo I é o da esquerda e o passo II o da direita ou vice-versa e a conclusão dos passos I e II são hipóteses do passo III.

Destacamos que a figura que apresentamos a seguir, que ilustra o nosso exemplo, é uma construção nossa, feita com os recursos do software Cabri, mas

é uma reprodução literal do conteúdo da figura que foi apresentada por Duval (2002). Destacamos que para cada passo as conclusões estão em negrito. Repetições de proposições ressaltam ligação entre dois passos. Por meio dessas repetições, a categoria da proposição muda.



1.7.3 – Robert

Robert (1998) classifica o funcionamento de conhecimentos pelos alunos em 3 níveis: *técnico*, *mobilizável* e *disponível*.

O aluno põe em funcionamento um conhecimento de nível **técnico** quando resolve uma questão simples que corresponde a uma aplicação imediata de um teorema, de uma propriedade, de uma definição ou de uma fórmula. Em geral, há indicações dos métodos a utilizar.

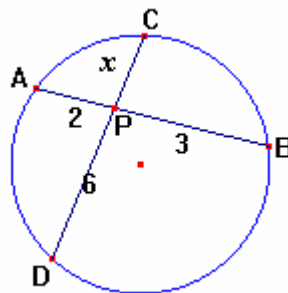
No nível de funcionamento **mobilizável** os conhecimentos que serão utilizados são bem identificados, mas necessitam de alguma adaptação ou de alguma repetição antes de serem colocados em funcionamento.

O nível de funcionamento **disponível** corresponde a resolver uma questão proposta sem nenhuma indicação ou sugestão fornecida pelo professor. É preciso achar nos conhecimentos anteriores o que favorece a resolução da questão.

A fim de compreendermos melhor a diferença entre os três níveis, damos a seguir um exemplo em geometria referente ao assunto relações métricas num círculo.

Nível Técnico

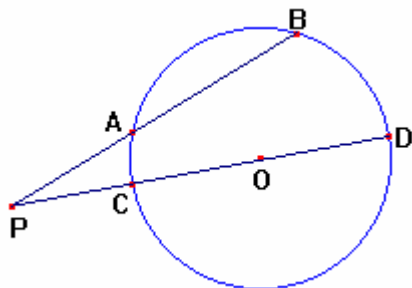
Obter o valor de x na figura.



É uma simples aplicação da fórmula: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Nível Mobilizável

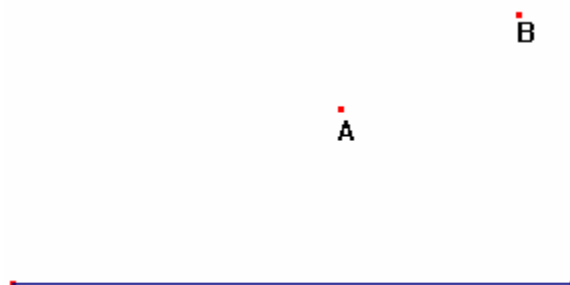
Na circunferência de centro O e raio 5 temos $PA = 3\text{cm}$ e $AB = 4\text{cm}$.
Obter a distância de P ao centro O.



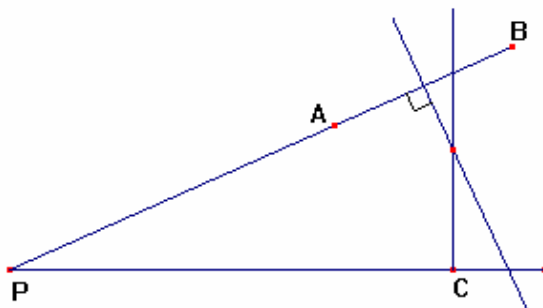
Uma Pequena adaptação deve ser feita antes de aplicar a fórmula. $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ Nesse caso deveríamos escrever $PA \cdot PB = (PO - R) \cdot (PO + R)$ ou $PA \cdot PB = PC \cdot (PC + 10)$.

Nível Disponível

Descrever um método que permite construir uma circunferência passando por A e B e tangente à reta dada.



Nesse caso, o problema aparentemente não está ligado ao assunto, mas uma análise mostra que para obter o ponto C basta utilizar a relação $PA \cdot PB = PC^2$. A partir do ponto C levanta-se uma perpendicular à reta.



A intersecção dessa reta com a mediatriz do segmento AB dará o centro da circunferência procurada.

1.9 - Metodologia

Para responder à questão de pesquisa, escolhemos como metodologia, alguns elementos da engenharia didática.

A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se em primeiro lugar por um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” em sala de aula, ou seja, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino. (Artigue, 1988, p. 285).

Na engenharia didática a investigação é organizada em quatro fases. Apoiados em Artigue, (1988, p. 285), apresentamos essas fases da seguinte forma:

Primeira fase: Análise preliminar.

Segunda fase: Concepção da seqüência didática e análise *a priori*.

Terceira fase: Experimentação.

Quarta fase: Análise *a posteriori* e validação de hipóteses.

A primeira fase compreende a busca de subsídios para o tratamento do problema sob investigação, os quais também indicam a relevância do problema. Alguns dos aspectos que podem fazer parte dessa fase são: análise histórica do conteúdo objeto de ensino; análise das propostas curriculares; análise de restrições presentes nas realizações didáticas; a análise da forma como é tratado usualmente o assunto no ensino.

No capítulo II fazemos um histórico sobre a evolução das demonstrações matemáticas, dando destaque à demonstração do teorema de Pitágoras, e também uma análise de como é apresentado em livros didáticos o tema teorema de Pitágoras, no que tange à sua demonstração.

Um reforço a esta primeira fase são as leituras e as discussões, relativas à argumentação e à prova na matemática escolar, realizadas ao longo da execução do AprovaMe,

Na segunda fase, ocorre o delineamento de atividades a serem propostas para os alunos. São feitas escolhas didáticas em função dos problemas

analisados na fase preliminar. A análise *a priori* tem caráter de predição e dá suporte ao enunciado de hipóteses que poderão ser validadas na quarta fase. A análise *a priori* indica de que forma as atividades propostas propiciarão a aprendizagem almejada. Nesta investigação, a segunda fase, foi executada dentro das atividades do AprovaME, e envolveu vários meses de discussões e pesquisas, em encontros quinzenais, dos grupos de professores pesquisadores e professores-colaboradores. Após muitas "idas e vindas" foi definida a estrutura da seqüência didática, a qual utiliza como conteúdo matemático o Teorema de Pitágoras. A concepção e análise *a priori* da seqüência didática, estão apresentadas no capítulo III.

A terceira fase compreende a organização e a aplicação da seqüência didática.

Na aplicação faz-se a coleta de dados, que podem constar de: gravação de áudio ou vídeo a fim de se ter os diferentes momentos da produção dos alunos, suas tentativas e dificuldades; a produção dos alunos em material escrito; observações dos comportamentos e diálogos das duplas e dos diálogos entre duplas e professor.

A quarta fase compreende a análise *a posteriori* e validação de hipóteses. Os dados coletados na terceira fase constituem o material utilizado na análise *a posteriori*, que é realizada levando-se em consideração a análise *a priori* e as hipóteses formuladas inicialmente. Nessa "confrontação entre análise *a priori* e análise *a posteriori*" (Artigue, p. 286) é que se processa a validação.

A análise *a posteriori* e a validação, nesta pesquisa, são apresentadas no capítulo IV.

CAPÍTULO II

ESTUDO HISTÓRICO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Neste capítulo apresentamos um estudo histórico sobre o teorema de Pitágoras e demonstrações dadas em diferentes períodos e por diferentes matemáticos.

Logo em seguida, apresentamos uma análise do Teorema de Pitágoras, apresentado em alguns livros didáticos, indicados e utilizados no ensino brasileiro.

2.1 – O nascimento do método demonstrativo

A visão estática do antigo Oriente, sobre as coisas, tornou-se insustentável com as mudanças e chegadas de novas civilizações nos últimos séculos antes de Cristo. Numa atmosfera de racionalismo crescente, pela primeira vez, o homem começou a indagar como e por quê. "*Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?*" e "*Por que o diâmetro de círculo divide esse círculo ao meio?*". Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes para responder questões na forma de *como*, já não bastavam para as indagações mais científicas sob a forma de *por quê*, das novas civilizações espalhadas ao longo das costas da Ásia Menor e, mais tarde, na parte continental da Grécia, na Sicília e no litoral da Itália. O método demonstrativo começou com algumas experiências que foram se substanciando e se impondo ao método empírico. Foi assim que a matemática, no sentido como a conhecemos hoje, nasceu nessa esfera de racionalismo.

A matemática tem sido freqüentemente comparada a uma árvore, pois cresce numa estrutura acima da terra que se espalha e ramifica sempre mais, ao passo que ao mesmo tempo suas raízes cada vez mais se aprofundam e alargam, em busca de fundamentos sólidos. (Boyer, 1996, p. 414).

Esse crescimento da matemática deve-se ao desenvolvimento da matemática demonstrativa, desenvolvida por seus grandes personagens, desde alguns séculos antes de Cristo, começando com Tales, Pitágoras e os pitagóricos.

Apresentamos abaixo o teorema de Pitágoras, desde a chamada história antiga da matemática até os tempos modernos.

2.2 – O Teorema de Pitágoras na história antiga da matemática

"A geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro; o segundo a uma jóia preciosa." Kepler (1571-1630).¹

Como professores de matemática, fica fácil compreendermos nas palavras de Kepler, a grande importância atribuída ao Teorema de Pitágoras. Quão grande é a quantidade de situações em que o aplicamos. Podemos citar como exemplos, as seguintes:

- Cálculo de diagonal de quadrado, retângulo, losango, trapézio (dependendo dos dados);
- Altura de triângulo equilátero, isósceles, trapézio;
- comprimento de segmentos de tangente, cordas;
- relações entre lado, apótema e raio para polígonos inscritos e circunscritos;
- construção com régua e compasso de segmentos de medidas $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, etc.;
- distância entre dois pontos no plano cartesiano; equação de uma circunferência;
- estabelecimento da relação $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
- diagonal de cubo, paralelepípedo, prismas em geral;

¹ Boyer (1996, p.35) cita essa escrita lírica de Kepler.

- relação entre altura, apótema da base e apótema de pirâmides regulares;
- relação entre altura, raio do círculo circunscrito à base e aresta lateral em pirâmides regulares;
- relação entre altura, geratriz e raio da base num cone reto;
- distância de um plano secante, ao centro de uma esfera, em relação ao raio da esfera e ao raio da secção;
- módulo de um número complexo;
- numa elipse de eixo maior medindo $2a$, eixo menor $2b$ e distância focal $2c$;
- numa hipérbole quando a medida do eixo real é $2a$, a medida do eixo imaginário é $2b$ e a distância focal é $2c$.

Como sabemos, o enunciado do Teorema de Pitágoras diz que: "A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos."

Se b , c são as medidas dos catetos e a é a medida da hipotenusa, o enunciado equivale a afirmar que $a^2 + b^2 = c^2$.

Segundo Boyer (1996) e Eves (2004) essa relação já havia sido testada, em determinados triângulos retângulos, por diversas culturas antigas. Documentos históricos mostram que os egípcios e babilônios muito antes dos gregos conheciam casos particulares desse teorema, expressos em relações como:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad \text{e} \quad 1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(1\frac{1}{4}\right)^2.$$

Os babilônios muito antes de Pitágoras conheciam essa relação. O desenho a seguir é uma adaptação de uma tabuinha de argila nomeada YBC² 7289 da época paleo-babilônica de 1800-1600 a.C.

² YBC 7289 (YBC = Yale Babylonian Collection) publicado em O. Neugebauer e A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts*. New Haven, 1945. p. 42. Citado em Aaboe A., *Episódios da História Antiga da Matemática*, 2002, p. 27.

"Tome o quadrado do primeiro lado e o quadrado do segundo e os some; a raiz quadrada dessa soma é a hipotenusa".

Destacamos abaixo, matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento das demonstrações em matemática, especificamente do desenvolvimento da geometria, e as demonstrações dadas ao teorema de Pitágoras.

2.3 O Surgimento da demonstração com Tales e Pitágoras

Pitágoras, ao que parece, nasceu por volta de 572 a.C., na ilha de Samos, na Grécia. Não há registros de relatos originais sobre sua vida e trabalhos, mas há muitos mitos e lendas sobre sua figura, o que deixa muitas dúvidas a respeito de sua vida. Pitágoras parece ter viajado bastante até se estabelecer em Crotona, uma colônia grega situada no sul da Itália. Ali, fundou uma escola, muito conhecida hoje pelo nome escola pitagórica. Além de ser um centro de estudos de filosofia, matemática e ciências naturais, essa escola era também uma irmandade. Seu lema era "Tudo é número".

Apesar de seu conteúdo ser conhecido de muitos séculos antes por babilônios, egípcios e chineses, o teorema hoje recebe o nome de Pitágoras. Qual teria sido o motivo desse fato?

O que parece certo é que nenhum desses povos sabia demonstrar o teorema. O que se observa é que egípcios e babilônios calculavam por meio de "receitas", que produziam respostas corretas e eram passadas de geração a geração, sem que ninguém questionasse o porquê delas.

Para Pitágoras e os Pitagóricos, como são denominados hoje os membros da suposta escola fundada por Pitágoras, era importante entender os números, suas relações e não meramente utilizá-los. Como afirmar a veracidade do teorema para uma infinidade de triângulos retângulos? Isso só se tornou possível quando Pitágoras lançou-se em busca de uma demonstração matemática. Tudo indica que ele, foi o primeiro a prová-lo ou alguém da sua escola o fez, o que dá no mesmo, pois o conhecimento científico no grupo era

propriedade comum. E por isto o nome Teorema de Pitágoras³. Isto evidencia a importância da demonstração no meio matemático. Os matemáticos sempre buscaram fundamentos sólidos para a matemática. No caso de Pitágoras o ponto de partida pode ter sido o conhecimento de casos particulares advindos dos egípcios, babilônios e chineses.

As demonstrações na época de Pitágoras não eram comuns, ele pode ter aprendido de Tales (600 a.C). Como é provável que era 50 anos mais novo e morava perto de Mileto, é bem possível que tenha sido discípulo de Tales. Este último, segundo (Boyer, 1996, p.31 e Eves, 2004, p.95), foi o primeiro grego com interesses científicos em matemática e o maior sábio da época.

Segundo a tradição, a ele se atribui o começo da organização dedutiva da geometria. Credita-se a ele a prova dos seguintes teoremas:

1. Um ângulo inscrito num semi-círculo é um ângulo reto.
2. Um círculo é bissectado por um diâmetro.
3. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
4. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
5. Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes.

Segundo (Boyer, 1996, p. 32), não há documento antigo que contenha o registro das provas desses teoremas por Tales.

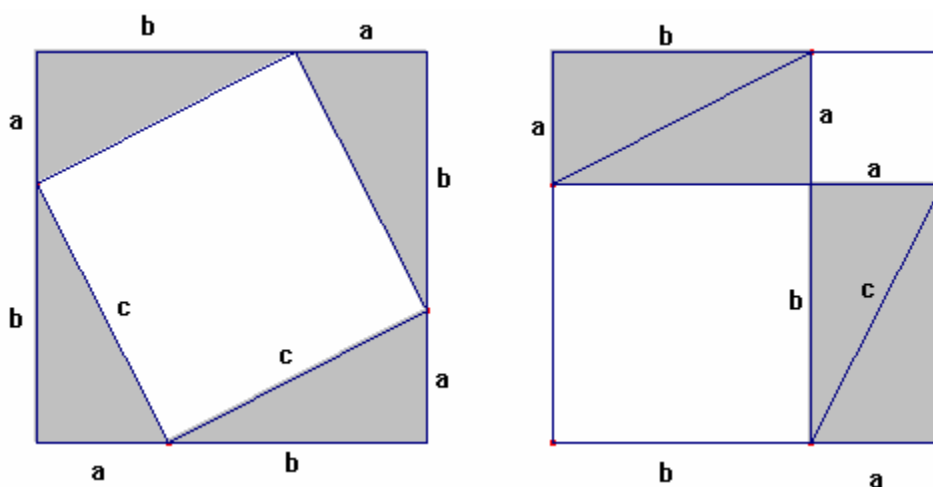
Inclusive, pode ter sido na época em que era aluno de Tales, que Pitágoras obteve a prova do teorema.

Qual teria sido a demonstração dada por Pitágoras? Como ele não deixou trabalhos escritos, não se sabe ao certo, por isto, muitas conjeturas têm sido feitas quanto à demonstração que ele poderia ter dado. Uma dessas conjeturas é a de que Pitágoras deu uma demonstração por decomposição, como a que se

³ "Sugeriu-se, como justificativa para chamá-lo teorema de Pitágoras, que foram os pitagóricos os primeiros a dar uma demonstração dele; mas não há meios de se verificar essa conjetura." (Boyer, 1996 p. 34)

segue ilustrada na figura abaixo, baseada em comparação de áreas⁴. Mas também poderia ser por semelhança de triângulos ou até mesmo outro tipo de demonstração. Por que não?

Do quadrado que tem $a + b$ como lado, retiremos 4 triângulos iguais ao dado. Se fizermos isto como na figura à esquerda, obteremos um quadrado de lado c . Mas se a mesma operação for feita como na figura à direita, restarão dois quadrados, de lados a e b , respectivamente. Logo, a área do quadrado de lado c é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem a e b .

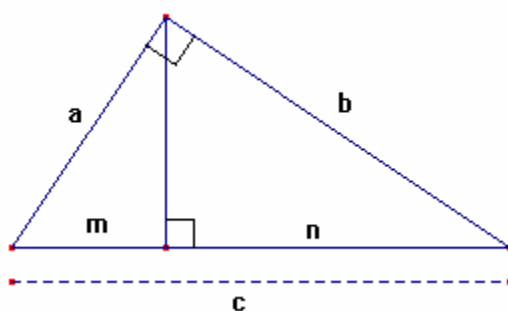


O professor de Matemática Elisha Scott Loomis, da cidade de Cleveland, estado de Ohio, nos Estados Unidos, já falecido, reuniu em um livro intitulado *The Pythagorean proposition*, publicado em 1927 como primeira edição, 230 demonstrações do teorema de Pitágoras; e na segunda edição do livro, publicada em 1940, este número aumentou para 370 demonstrações. O professor Loomis classifica as demonstrações do Teorema de Pitágoras em basicamente dois tipos: "provas algébricas" (baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos) e "provas geométricas" (baseadas em comparações de áreas).

⁴ Comentário retirado de ROSA, E. 1983. Mania de Pitágoras. *Revista do Professor de Matemática*, no. 2, pp. 14-17. Sociedade Brasileira de Matemática.

A demonstração apresentada acima como uma suposta utilizada por Pitágoras, segundo a classificação de Loomis seria geométrica. Apesar de ser considerada uma bela demonstração, para Loomis não pareceu ser, pois no seu livro ela aparece sem maior destaque, como variante de uma das provas dadas, não sendo sequer contada entre as 370 numeradas.⁵

Abaixo apresentamos a seguir outra demonstração do teorema de Pitágoras, devida a Bháskara (Eves, 2004, p. 103), do tipo algébrico, é uma prova curta e também muito conhecida. Baseia-se na seguinte consequência da semelhança de triângulos retângulos:



"Num triângulo retângulo, cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela". Assim, como ilustra o desenho acima, se m e n são respectivamente as projeções dos catetos a e b sobre a hipotenusa c , temos $a^2 = mc$, $b^2 = nc$, enquanto $m+n=c$. Somando as duas igualdades, vem $a^2 + b^2 = c^2$.

Os pitagóricos (incluindo Pitágoras) também deram outras contribuições às demonstrações matemáticas. Para se ter idéia, grande parte de uma obra de grande importância na matemática, datada do século III, d.C., é devida aos pitagóricos. (Boyer, 1996, p. 36).

Proclo (410-485)⁶, ao descrever sobre Tales, segundo (Boyer, 1996, p. 33) diz o seguinte:

⁵ Comentário retirado de ROSA, E. 1983. Mania de Pitágoras. *Revista do Professor de Matemática*, no. 2, pp. 14-17. Sociedade Brasileira de Matemática.

⁶ Proclo, segundo (Eves, 2004, p. 213), foi um filósofo e matemático neoplatônico, que teve acesso a trabalhos históricos e críticos (ou comentários sobre eles) que se perderam para nós. O

Pitágoras que veio depois dele, transformou essa ciência numa forma liberal de instrução, examinando seus princípios desde o início e investigando os teoremas de modo imaterial e intelectual. Descobriu a teoria das proporcionais e a construção de figuras cósmicas.[Thomas, 1939, p.149.]

Boyer, 1996, p. 33, ainda acrescenta que, é evidente que os pitagóricos desempenharam um papel importante, talvez crucial, na história da matemática.

São atribuídas aos pitagóricos as seguintes descobertas:

- A fundamentação científica da música.
- O teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.(Este teorema é atribuído a Pitágoras por Eudemus no livro *História da Geometria*)
- A descoberta de grandezas incomensuráveis.
- A construção dos sólidos regulares (figuras cósmicas)
- A teoria das proporcionais (teoria das médias)
- Classificação dos números (par, ímpar, amigo, perfeito, deficiente, abundante, primo, composto).
- A criação dos números figurados (números triangulares, números oblongos, números quadrangulares, números pentagonais,...).
- A divisão de um segmento em média e extrema razão.
- A obtenção de ternos pitagóricos.
- A esfericidade da Terra

2.4 – O Teorema de Pitágoras na obra de Euclides

Pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides. Sua data e local de nascimento também são desconhecidos. Da natureza do trabalho dele pode-se presumir que tivesse estudado com discípulos de Platão, se não na

seu Sumário Eudemiano, é uma de nossas principais fontes de informação sobre a história dos primeiros tempos da geometria elementar. Proclo estudou em Alexandria, no séc. V. a.C., tornou-se líder da escola ateniense e morreu em Atenas no ano de 485 com a idade de setenta e cinco anos.

própria Academia. Foi chamado para ensinar matemática em Alexandria, por isso é conhecido hoje como Euclides de Alexandria. Ele foi autor de vários trabalhos, mas sua fama repousa principalmente sobre o qual foi chamado de "*Os Elementos*".

Em (Eves, 2004, p. 167 e Boyer, 1996, p. 69), lemos sobre uma história mencionada no *Sumário Eudemiano*⁷ de Proclo. Essa história conta que Ptolomeu uma vez perguntou a Euclides se havia um caminho mais curto, para a geometria, que o estudo de *Os Elementos*, e Euclides lhe respondeu que não havia estrada real para a geometria.

Os trabalhos apresentados nos *elementos* de Euclides, por volta de 300 a.C., foram de tamanha grandeza, que os outros escritos gregos dos 300 anos anteriores acabaram sendo descartados a ponto de se perderem para nós. Esse fato demonstra a importância dessa obra de Euclides, ainda hoje explorada. Para David Hilbert (1862-1943), citado por Eves, (2004, p.96), pode-se medir a importância de um trabalho científico pelo número de publicações anteriores tornadas supérfluas por ele. Existiram outros *Elementos* anteriores ao de Euclides, o primeiro foi de Hipócrates de Quio e o seguinte foi de Leôn. A academia de Platão também tinha seus *Elementos* – uma coleção admirável e muito elogiada escrita por Teúdio de Magnésia. Esta última, deve ter sido a precursora imediata dos *Elementos* de Euclides, e deve ter tido acesso a ela, ainda mais se de fato foi aluno da escola de Platão. Os trabalhos importantes de Teeteto e Eudoxo também deviam estar disponíveis às consultas de Euclides. É possível que o sucesso alcançado pelos *Elementos* de Euclides, seja atribuído, à boa seleção das proposições e tê-las colocado numa seqüência lógica. Nenhuma descoberta nova é atribuída a ele, mas era hábil em expor.⁸ Para Eves (2004, p. 168) não há dúvidas de que Euclides teve de dar muitas demonstrações e aperfeiçoar outras tantas. Talvez a maneira formal como

⁷ Segundo (Boyer, 1996, p. 97), esse *Sumário Eudemiano*, escrito por Proclo (410-485), consiste nas páginas de abertura do Comentário sobre Euclides, Livro I, e é um breve resumo do desenvolvimento da geometria grega desde seus primeiros tempos até Euclides.

⁸ Boyer, C.B. **História da Matemática**, 1995, p. 72.

Euclides apresentou os conteúdos, tenha tornado o seu trabalho tão importante. Isto impressionou tanto as gerações seguintes que a obra se tornou um modelo de demonstração matemática rigorosa. De fato, os *Elementos* de Euclides tornaram-se o protótipo da forma matemática moderna.⁹

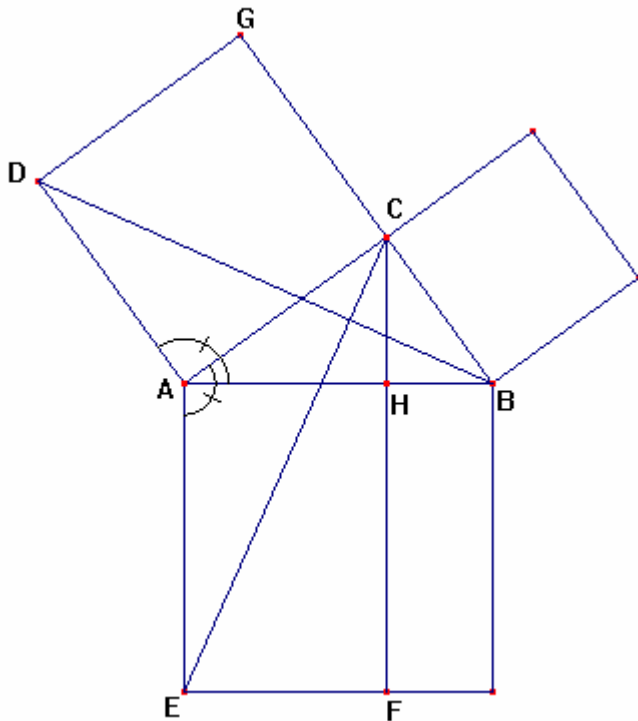
Nessa obra Euclides também apresenta uma demonstração do teorema de Pitágoras, e como a demonstração do teorema de Pitágoras têm muito a ver com esta pesquisa, escolhemos encerrar as considerações sobre Euclides, destacando a sua demonstração para a proposição 47 do livro I, que é exatamente o Teorema de Pitágoras cujo enunciado é o seguinte:

Em triângulos retângulos, o quadrado construído sobre o lado que subtende o ângulo reto, isto é, a hipotenusa, é igual à soma dos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto. (Aaboe, 2002, p. 71)

A demonstração de Euclides¹⁰ é como segue: Sobre os três lados de um triângulo retângulo ABC ($C = 90^\circ$) são construídos quadrados (Veja a figura a seguir).

⁹ Eves, H. **Introdução à História da Matemática**, 2004, p. 178

¹⁰ A demonstração está baseada na apresentada por Aaboe, no livro **Episódios da História Antiga da Matemática**, 2002, p. 71.



A altura CH a partir de C é traçada e prolongada até F. São traçados os segmentos DB e CE.

Observe em primeiro lugar que o triângulo DAB é congruente ao triângulo CAE, pelo caso LAL de congruência de triângulo; para ver isso, observe que se fizermos um deles girar de 90° em torno de A ele cobrirá exatamente o outro.

Ora, o quadrado sobre AC é duas vezes o triângulo DAB, pois têm a mesma base (AD) e estão situados entre as mesmas retas paralelas (proposição 41 do livro I)¹¹; semelhantemente, vemos que o retângulo AEFH é duas vezes o triângulo CAE, pois têm também a mesma base (AE) e estão situados entre as mesmas retas paralelas. Como os dois triângulos são congruentes, o quadrado sobre AC é igual ao retângulo AEFH.

Segue-se, exatamente da mesma maneira, que o quadrado sobre BC é igual ao retângulo sob HB, e desta maneira a soma dos quadrados sobre AC e

¹¹ A proposição 41 do livro I dos Elementos garante que se um paralelogramo e um triângulo têm a mesma base e estão entre duas paralelas dadas, então o paralelogramo tem duas vezes a área do triângulo. Hoje poderíamos considerar que o quadrado e o triângulo têm a mesma base AD e mesma altura AC, é fácil ver que a área do quadrado é o dobro da área do triângulo.

BC é igual à soma dos dois retângulos; mas isso é exatamente o quadrado sobre AB.

Para Aaboe essa demonstração de Euclides é muito elegante, e inclusive desaprova a observação feita por Schopenhauer.¹² Particularmente, achei muito agradável realizá-la nesta pesquisa e tive a mesma consideração de Aaboe.

Inúmeras análises críticas subseqüentes revelaram muitos defeitos na estrutura lógica da obra de Euclides. Mas, esta serviu de inspiração e avanços em toda a matemática e grande parte da matemática moderna tem suas raízes, principalmente nos *Elementos*. Seria realmente notável, diz Eves, 2004, p. 655, se os *Elementos* de Euclides, sendo uma tentativa tão antiga e monumental de aplicar o método postulacional, não apresentasse defeitos lógicos.

2.5 – O Teorema de Pitágoras na obra de Clairaut

Alexis Clairaut (1713 – 1765) é conhecido como anti-Euclidiano. Muitos autores tentaram fazer revisões na obra de Euclides, porém, Clairaut em 1741, publicou uma obra intitulada “Elementos de Geometria” onde apresenta uma geometria fora dos padrões de “Os *Elementos*” de Euclides. Não apresentou axiomas ou postulados, mas proposições dispostas ordenadamente.

A evolução das proposições ocorre utilizando proposições anteriores ou provas evidentes, sem o rigor da obra de Euclides, em linguagem natural mais acessível ao aluno.

No prefácio da sua obra, Clairaut afirma:

“Propus-me remontar ao que podia ser a fonte da geometria. Tratei de lhe desenvolver os princípios por um método tão natural que parecesse o empregado pelos inventores, fugindo entretanto de todas as falsas tentativas que eles necessariamente fizeram. A medida de terrenos me pareceu mais própria para dar origem às primeiras proposições de

¹² Schopenhauer a chama de "demonstração ratoeira" e também "dês Eukleides stelzbeiniger, ja, hinterlistiger Beweis"; em tradução livre, isso significa "A demonstração artificial, forçada, em verdade, maliciosa e desonesta de Euclides". Aaboe, O, **Episódios da História Antiga da Matemática**, 2002, p. 177,

geometria; e é efetivamente daí que provém esta ciência, pois que geometria significa *medida de terreno*.”

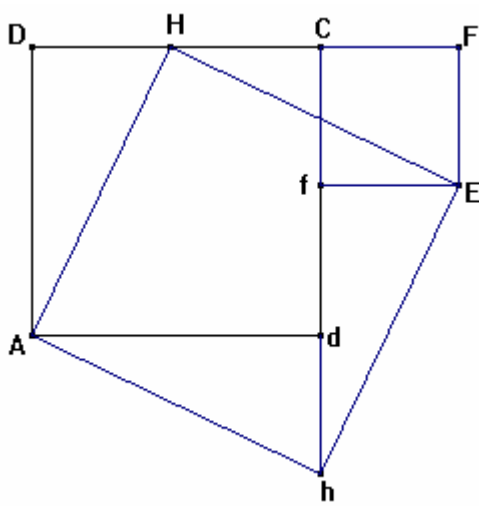
Clairaut tenta dar um aspecto prático e simples à geometria. Para ele se os primeiros matemáticos apresentaram suas primeiras descobertas sob a forma de teoremas, foi sem dúvida para dar à suas produções um aspecto mais maravilhoso.

Na segunda parte de seu livro, item XVIII, Clairaut faz uma demonstração para o teorema de Pitágoras, que ele enuncia da seguinte forma:

“A hipotenusa de um triângulo retângulo é seu grande lado. O quadrado deste lado é igual à soma dos quadrados feitos sobre os outros dois”.

Antes de apresentar a demonstração, Clairaut apresenta um método para “fazer um quadrado igual à soma de dois outros distintos”.

Ele parte de dois quadrados distintos ADCd e CFEf, como mostra figura abaixo, e prova que AHEh, é um quadrado igual a soma dos dois quadrados iniciais.



Para provar o teorema de Pitágoras, a partir das seguintes considerações:

“Se notarmos que os dois quadrados ADCd, CFEf são feitos respectivamente sobre AD, lado médio do triângulo ADH, e sobre EF, igual a DH, pequeno lado do mesmo triângulo ADH; se notarmos ainda

que o quadrado AHEh, igual aos outros dois, é descrito sobre o grande lado AH, comumente chamado hipotenusa do triângulo retângulo, descobriremos logo esta famosa propriedade dos triângulos retângulos: O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados construídos sobre os outros dois lados.”

Essa demonstração pareceu-nos interessante e inusitada até aqui.

2.6 – O Teorema de Pitágoras na obra de Legendre

Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833) foi professor na escola militar de Paris. Em 1794 publicou sua obra intitulada Elementos de Geometria (Éléments de Géométrie), que foi escrita para uso escolar e acadêmico.

Legendre faz um aprimoramento pedagógico dos Elementos de Euclides, que foi amplamente difundido nos Estados Unidos da América e no Brasil.

Nessa obra, que é constituída de oito livros, Legendre, atualiza e simplifica as proposições de *Os Elementos* de Euclides.

Na página 72, do livro III, Legendre trata do assunto teorema de Pitágoras. É a proposição XI, que apresentamos abaixo.

“TEOREMA – O quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados construídos sobre os outros dois lados”

A demonstração dada por Legendre a esse teorema, é exatamente a mesma dada por Euclides, e já foi apresentada acima nesta pesquisa.

2.7 – Hilbert e Birkhoff

David Hilbert (1862-1943), foi considerado um matemático excepcionalmente abrangente e talentoso, por suas muitas e importantes contribuições a diversas áreas do conhecimento.

Em 1898-1899 ele publicou o seu *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de geometria), foi um volume pequeno mas que ficou famoso. Traduzida nas principais línguas essa obra exerceu forte influência na matemática do século vinte.

Foi principalmente nessa obra de Hilbert que pela primeira vez foi apresentado um sistema completo de axiomas para a geometria euclidiana. Segundo (Boyer, 1996, p. 424), os *Elementos* de Euclides tinham uma estrutura dedutiva, certamente, mas estavam cheias de hipóteses ocultas, definições sem sentido e falhas lógicas. Hilbert estava preocupado em melhorar ou completar o trabalho de Euclides, ele pretendia apresentar uma geometria que eliminasse as deficiências lógicas apresentadas nos *Elementos*. No texto de introdução dos *grundlagen* ele apresenta a sua intenção com esse trabalho, por meio dos seguintes dizeres:

“A presente investigação é um novo ensaio para construir a Geometria, sobre um sistema completo de axiomas, o mais singelo possível, deduzindo os mais importantes teoremas, de maneira tal, que nesse processo apareçam com a máxima clareza a interpretação dos distintos grupos de axiomas e a relação das conseqüências que isoladamente se derivem de cada um dos elos”. (Hilbert, 1899, citado por Hilbert, 1953, p. 1).

Ele formulou para sua geometria, segundo (Boyer, 1996, p. 424) uma coleção de vinte e um axiomas, conhecidos como axiomas de Hilbert, em lugar dos cinco axiomas (ou noções comuns) de Euclides e cinco postulados. O desenvolvimento dado por ele à geometria dava ênfase a que não se devem assumir, para os termos não definidos na geometria, propriedades além das indicadas nos axiomas. Ele percebeu que nem todos os termos em matemática podem ser definidos e por isso começou seu tratamento da geometria com três objetos não definidos: ponto, reta e plano e três relações não definidas: estar sobre, estar entre, ser congruente.

Através de seus *grundlagen*, Hilbert se torna o principal representante da "escola axiomática".¹³

Para (Eves, 2004, p. 682) Hilbert aguçou o método matemático, levando-o da axiomática material dos tempos de Euclides à axiomática formal dos dias

¹³ Essa é uma denominação dada por (Boyer, 1996, p. 424), já em (Eves, 2004, p. 682) é dada a denominação "Escola formalista".

atuais. A obra de Hilbert foi pioneira, seguida de outras coleções de axiomas que foram propostas por outros, assim o caráter puramente dedutivo e formal da geometria, como dos outros ramos da matemática, fica completamente estabelecido desde o começo do século vinte.

Birkhoff (1884-1944), segundo Moise & Downs (1971, p. 84), foi um dos matemáticos mais produtivos e versáteis da sua geração. Em sua vida escreveu cento e noventa trabalhos de pesquisa em vários ramos de matemática pura e aplicada.

Em 1932, Birkhoff introduz um sistema de axiomas, equivalente ao de Hilbert, onde incorpora o conjunto dos números reais. Esses axiomas, ao contrário dos de Hilbert, introduzem a idéia de medida desde o início. Os segmentos e os ângulos são medidos com números reais.

A fim de compreendermos melhor essa idéia de medida introduzida por Birkhoff, apresentamos abaixo os dois postulados que caracterizam essa axiomática.

Postulado I - Dois pontos A e B numa reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais x_A, x_B tais que $d(A,B) = |x_B - x_A|$ para todos os pontos A e B.

Postulado III – As semi-retas m e n por um ponto O, podem ser colocadas em correspondência biunívoca com os números reais x_m e x_n tais que se A e B são pontos de m e n diferentes de O, a diferença $|x_m - x_n|$ é a medida do ângulo AOB.

Observa-se que ele centralizou seu sistema nos números reais, para fundamentar a geometria.

Moise (1976) que adaptou e difundiu em seus livros a axiomática de Birkhoff, compara os enfoques dados pelas geometrias de Euclides, Hilbert e Birkhoff.

Para ele o enfoque chamado de "sintético", diz respeito à geometria de Euclides/Hilbert, cuja estrutura é composta por ponto, reta, plano, uma relação de separação e uma relação indefinida de congruência para segmentos e ângulos. Já no enfoque que ele chama de "métrico", a estrutura é composta por ponto, reta, plano, distância e medida angular e é referente ao sistema proposto por Birkhoff.

Birkhoff apresenta a demonstração do teorema de Pitágoras que ele chama de:

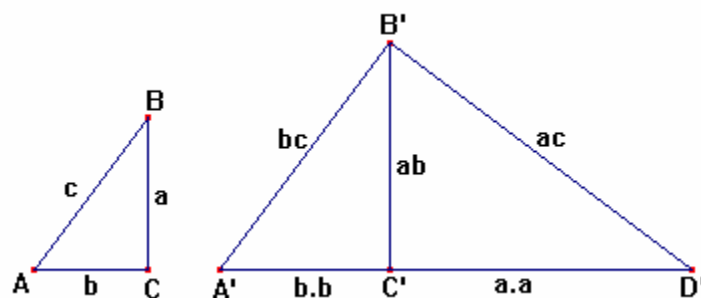
Princípio 12 – O TEOREMA DE PITÁGORAS. Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados; e reciprocamente.

A prova, a seguir, apresentada por Birkhoff é baseada na semelhança de triângulos, pois um de seus postulados é o caso LAL de semelhança de triângulos, mas não usa diretamente as fórmulas prontas das relações métricas de um triângulo retângulo, como se costuma fazer hoje. Está abaixo uma tradução livre do inglês¹⁴ da prova do teorema.

Dado: Triângulo ABC (figura abaixo) no qual o ângulo C é igual a 90° .

Provar que: $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$, ou $c^2 = b^2 + a^2$.

Sejam a , b , e c os comprimentos dos lados do triângulo ABC dado, como mostra a figura abaixo.



¹⁴ Do livro *Basic Geometry*, p. 92

Esse triângulo pode ser ampliado de tal forma que cada lado do novo triângulo $A'B'C'$ é b vezes a medida do anterior. Veja a figura acima.

Agora construamos um triângulo $B'C'D'$ tal que o ângulo $C'B'D' = \hat{A}$ e o ângulo $B'C'D' = 90^0$. Veja a figura acima.

Assim, segue do caso 2 de semelhança¹⁵ que cada lado do triângulo $B'C'D'$ é a vezes o lado correspondente do triângulo ABC .

Agora prove que o ângulo $A'B'D'$ é igual a 90^0 .¹⁶

Já que o ângulo $A'B'D'$ é igual ao ângulo C (Por que?)¹⁷, e já que o ângulo A' é igual ao ângulo A , por construção, dois ângulos do triângulo $A'B'D'$ são iguais respectivamente a dois ângulos do triângulo ABC , e portanto os triângulos $A'B'D'$ e ABC são semelhantes, pelo Caso 2 de semelhança.

Mas $A'B' = c.b = c.AC$, indicando que o fator de proporcionalidade é c .

Portanto, $A'D' = c.AB$, ou c^2

Mas $A'D'$ é também igual a $b^2 + c^2$.

Portanto $c^2 = b^2 + a^2$

Ao lermos o livro "Basic Geometry" publicado em 1948, esperávamos que no enunciado do teorema de Pitágoras, Birkhoff incluísse as frases "medida da hipotenusa" ou "medida dos outros dois lados", já que ele introduziu a idéia de medida no seu sistema de axiomas, mas curiosamente, isto não ocorre. Todavia entendemos que nas frases "o quadrado da hipotenusa" e "quadrados dos outros dois lados", está implícita a palavra "medida" visto que ele inicia a sua prova tomando os comprimentos dos lados do triângulo.

¹⁵ Birkhof e Beatley (1959) chamam de princípio 6. CASO 2 DE SEMELHANÇA. Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são iguais a dois ângulos do outro. (Tradução do autor)

¹⁶ basta considerar que os ângulos A e B são complementares e são respectivamente congruentes aos ângulos $C'B'D'$ e $A'B'C'$.

¹⁷ $C = 90^0$ por hipótese e o ângulo $A'B'D'$ é igual a 90^0 como foi visto no parágrafo anterior

2.8 - Provas e teorema de Pitágoras em livros didáticos

Neste estudo pesquisamos em livros didáticos, a forma como é abordado o Teorema de Pitágoras. Como esse conteúdo costuma ser trabalhado na sétima série (8º. ano) e na oitava série (9º. ano) do Ensino Fundamental, escolhemos coleções relativas a essas duas séries. Analisamos aqueles indicados pelo PNLD – Programa Nacional do Livro Didático, coordenado pela Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação do Brasil. Alguns desses livros dizem-se reformulados conforme os. Por isto, antes de iniciarmos este trabalho, buscamos no texto dos PCN quais as orientações propostas, relativas à demonstração.

Encontramos algumas orientações para o terceiro ciclo (5ª.e 6ª. séries) e quarto ciclo (7ª. e 8ª. séries) do Ensino Fundamental, em relação à demonstração em geometria. Destacamos as seguintes:

As atividades em Geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas.(PCN, 1998, p. 126)

(...) Apesar da força de convencimento para os alunos que possam ter esses experimentos com material concreto ou com a medição de um desenho, eles não se constituem provas matemáticas. Ainda que essas experiências possam ser aceitas como "provas" no terceiro ciclo, é necessário, no quarto ciclo, que as observações do material concreto sejam elementos desencadeadores de conjecturas e processos que levem às justificativas mais formais.

No caso do teorema de Pitágoras, essa justificativa poderá ser feita com base na congruência de figuras planas e no princípio da aditividade para as áreas. Posteriormente, os alunos poderão também demonstrar esse teorema quando tiverem se apropriado do conceito de semelhança de triângulos e estabelecido as relações métricas dos triângulos retângulos.(PCN, 1998, p. 127)

Embora no quarto ciclo se inicie um trabalho com algumas demonstrações, com o objetivo de mostrar sua força e significado, é desejável que não se abandonem as verificações empíricas, pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos.(PCN, 1998, p. 87)

Ao desenvolver a capacidade de buscar soluções favorece a que o aluno passe a reconhecer a necessidade de construir argumentos plausíveis.

A argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação por conteúdos matemáticos e se for possível responder aos contra-argumentos ou réplicas que lhe forem impostos.

Uma argumentação não é, contudo, uma demonstração. A argumentação é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a demonstração tem por objetivo a prova dentro de um referencial assumido. Assim, a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a demonstração.

Se por um lado a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, na qual se podem defender diferentes pontos de vista, por outro ela também pode ser um caminho que conduz à demonstração.

Assim, é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (PCN, 1998, p. 70).

Ainda sobre o Teorema de Pitágoras os PCN reiteram:

Nenhuma verificação experimental ou medição feita com objetos físicos poderá, por exemplo, validar matematicamente o Teorema de Pitágoras ou o teorema relativo à soma dos ângulos de um triângulo. Deve-se,

ênfatizar, contudo, o papel heurístico que têm desempenhado os contextos materiais como fontes de conjeturas matemáticas. (p. 26).

Em Matemática existem recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade. Um exemplo bastante conhecido é a representação do Teorema de Pitágoras mediante figuras que permitem "ver" a relação entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos (p. 45).

Para a análise escolhemos duas coleções de livros. A primeira é denominada "Matemática hoje é feita assim" do autor Antonio José Lopes Bigode e a segunda é denominada "Matemática: idéias e desafios" das autoras Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga.

Destacamos que, nosso objetivo aqui, é analisar o conteúdo teorema de Pitágoras e sua demonstração. Por isso vamos analisar apenas os dois livros de 7^a. e 8^a. Séries de cada coleção.

2.8.1 - Livro 1

Coleção: Matemática hoje é feita assim

Autor: Antonio José Lopes Bigode

Série: 7^a. série.

Editora: FTD, 2000.

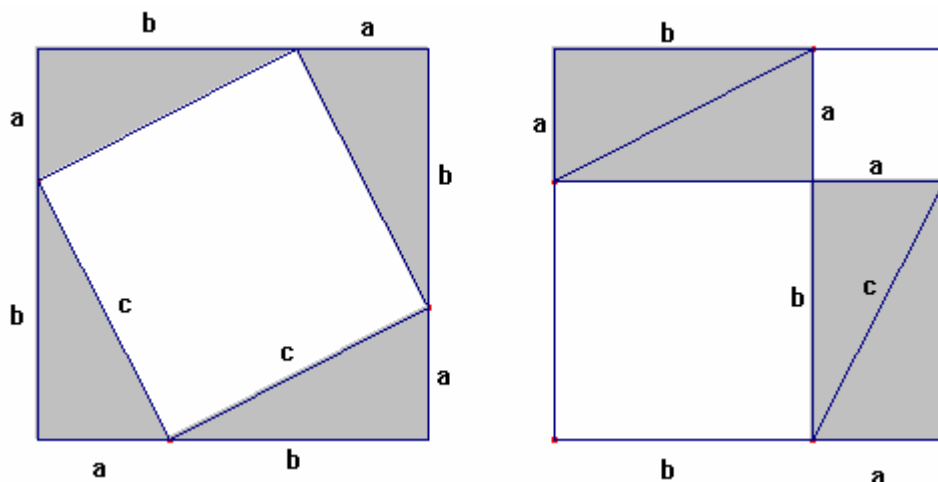
Este livro inicia-se com a biografia do autor. Em seguida dá alguns recados na tentativa de estimular o aluno na sua jornada. Os conteúdos apresentam-se divididos em 14 blocos, numerados de 1 a 14, e nas últimas páginas são apresentados um glossário e uma sessão "para saber e gostar mais de matemática". Cada bloco apresenta atividades distribuídas durante o seu estudo e ao final uma sessão denominada "Retomando" que traz mais exercícios e também a chamada "Revistinha" que conta um pouco da história do conteúdo.

O teorema de Pitágoras é trabalhado no bloco 12, logo após triângulos e quadriláteros (bloco 10) e Simetria (bloco 11). Inicia-se com um breve histórico intitulado "Dos egípcios aos gregos". Afirma que os egípcios usavam, para construir um ângulo reto, uma corda contendo 13 nós eqüidistantes e três estacas. Com essa corda, eles construíam um triângulo de lados 3, 4 e 5, o que garantia que um dos ângulos era reto.

Em seguida, o livro leva o aluno a uma atividade. Nos três primeiros exercícios eles devem realizar experiências parecidas com a dos egípcios com um barbante e três alfinetes, a fim de construir ângulos de 90 graus. No exercício 4 eles devem, com régua e compasso, construir triângulos a partir de ternas dadas e observarem quais são retângulos.

Após essa atividade os alunos são convidados a voltarem à terna 3, 4 e 5 dos egípcios, para observarem que essa terna satisfaz a relação $3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + 16 = 25$. Em seguida afirma, em outras palavras, que nesse triângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa (lado maior) é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos (lados menores), ilustrando com um desenho em que os quadrados estão divididos em quadradinhos, a fim de facilitar a visualização das áreas. Depois dá exemplos de ternas que não satisfazem a relação também ilustrando com desenhos. Para as ternas que satisfazem a relação, ela dá o nome de ternas pitagóricas. O exercício 5 pede para indicar dentre várias ternas, as que são pitagóricas e na atividade 6, pede para indicar dentre três ternas, quais podem ser os comprimentos de lados de um triângulo retângulo.

Depois apresenta uma demonstração para o teorema de Pitágoras, aquela que já apresentamos acima neste capítulo II desta pesquisa, cuja ilustração é feita pela figura a seguir.



Finalmente, sugere ao aluno construir modelos em cartolina que ilustram a relação de Pitágoras, por meio de dois quebra-cabeças. Além da atividade 7 que também é semelhante. Encerra-se com os exercícios do Retomando e a revistinha com um pouco da história de Pitágoras e seu teorema.

Análise

Sobre a importância da introdução histórica, destacam-se nos PCN vários argumentos, como os seguintes:

A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino-aprendizagem dessa área do conhecimento.

(...) Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer idéias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno.(p. 42-43)

Logo na introdução o autor preocupa-se brevemente com o aspecto histórico do teorema de Pitágoras, ao fazer alusão à utilização por povos antigos, no caso os egípcios, da terna (3, 4 e 5). Depois ao final, apresenta uma breve biografia de Pitágoras.

Um aspecto importante, é que o aluno trabalha bastante o empírico da demonstração, como orientam os PCN, para essa série.

Algo importante que podemos observar, neste livro é que se trabalha muito o recíproco ou a contra-positiva, mais do que o teorema em si. Por

exemplo: Quando o aluno usa a terna dos egípcios (3, 4 e 5) para construir ângulos retos eles estão usando a recíproca; quando as ternas não satisfazem a relação pitagórica o triângulo não é retângulo, isto é a contra-positiva. Entretanto, o aluno faz esse trabalho achando que está usando o teorema.

O livro apresenta também uma demonstração para o teorema do tipo geométrico, por reconfiguração¹⁸ e conceito de área.

Se observarmos, muitas ou a maior parte das demonstrações do teorema de Pitágoras correspondem a diferentes empregos da reconfiguração. O livro foge daquela seqüência tradicional que apresenta o texto, exercícios resolvidos e exercícios propostos. Consideramos que as atividades exploram bem o texto.

2.8.2 - Livro 2

Coleção; Matemática hoje é feita assim

Autor: Antonio José Lopes Bigode

Série: 8ª. série.

Editora: FTD, 2000.

Os conteúdos estão divididos em 14 blocos.

O bloco 9 trata de congruência e semelhança e o bloco 10 trata do Teorema de Pitágoras. Inicia-se com uma atividade experimental que apresentamos abaixo:

- 1º.) Pegue uma folha de papel de formato retangular (sulfite ou caderno).
- 2º.) Faça uma única dobra na folha, de modo a obter um triângulo retângulo.
- 3º.) Recorte o triângulo obtido.
- 4º.) Use uma régua para medir os lados do triângulo.
- 5º.) Calcule o quadrado das medidas dos lados.
- 6º.) Some os quadrados das medidas dos catetos e compare com o quadrado da medida da hipotenusa.

¹⁸ Segundo Padilla, (1992) citado por Bastian, (2000), a reconfiguração é um tipo de apreensão operatória. Consiste em repartir uma figura em várias subfiguras igualmente geométricas e agrupar, isto é, reorganizar todas ou algumas delas de modo a formar uma nova figura.

7º.) Compare seu resultado com o de seus colegas.

A atividade leva o aluno a perceber a relação pitagórica, mas questiona sobre possíveis erros nesse experimento, devido a falhas que podem ocorrer nos recortes. E sugere a necessidade de uma demonstração, apresentando em seguida a demonstração por semelhança de triângulo, que também já apresentamos acima, neste mesmo capítulo. O autor considera que essa demonstração é atribuída a Pitágoras.

Em seguida apresenta as atividades 1 a 3, com exercícios de aplicação. Depois apresenta um tópico que ele chama de Problemas clássicos & o teorema de Pitágoras, que apresenta dentre outros os seguintes: diagonal do quadrado, altura do triângulo equilátero, cálculo do apótema. As atividades 6 a 11 são de aplicações e depois volta ao cálculo da diagonal do cubo e da diagonal do bloco retangular, distância entre dois pontos, com novos exercícios de aplicação do 12 ao 14. Encerram o assunto um comentário sobre a espiral pitagórica, Pitágoras e a calculadora e volta ao tratamento de ternas pitagóricas, seguidos de novos exercícios de aplicação. No final tem uma generalização do teorema para triângulos, retângulos, semicírculos, construídos a partir dos lados do triângulo retângulo, aquela que é uma generalização feita por Euclides nos *Elementos*. E depois apresenta a sessão Retomando, que são exercícios gerais sobre tudo que foi tratado. Apresenta, ainda, uma página bem discreta sobre Pitágoras.

Análise

Nesse livro, talvez por ser uma continuação da 7ª. série não há registro do aspecto histórico, exceto uma muito breve biografia no final de tudo.

Aqui o conteúdo do Teorema de Pitágoras vem apresentado logo após o tópico, "Relações métricas no triângulo retângulo", talvez com o objetivo de utilizar essas relações métricas para a demonstração da relação pitagórica. Geralmente é nessa ordem que esses conteúdos são apresentados nos livros didáticos de 8ª. série (9º. ano), dando a impressão que as relações métricas no triângulo retângulo devem obrigatoriamente preceder a relação de Pitágoras, o que não é verdade. É bom lembrarmos que a presente pesquisa dá uma mostra de que o Teorema de Pitágoras poderia ser um pré-requisito para as relações

métricas do triângulo retângulo. Sobre essa questão de um conhecimento preceder outro, há uma citação nos PCN que apresentamos abaixo:

Embora se saiba que alguns conhecimentos precedem outros e que as formas de organização sempre indicam um certo percurso, não existem, por outro lado, amarras tão fortes como algumas que podem ser observadas comumente, tais como: apresentar a representação fracionária dos racionais, para introduzir posteriormente a decimal; desenvolver o conceito de semelhança, para depois explorar o Teorema de Pitágoras.(p.22).

No livro a demonstração por semelhança de triângulos é atribuída a Pitágoras, o que nesta pesquisa foi atribuída a Bháskara.

O livro explora bastante o teorema quando o aplica para deduzir várias outras fórmulas da geometria, como a diagonal do quadrado, etc. Mas "entrega" todas as deduções, sem deixar que o próprio aluno o faça. Talvez fosse mais interessante deixar que o próprio aluno realizasse algumas. Não é dada a oportunidade para que ele realize uma demonstração mais formal que a da 7ª. série, como orientam os PCN.

2.8.3 - Livro 3

Coleção: Matemática: *Idéias e desafios*

Autores: Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga.

Série: 7ª. série.

Editora: Saraiva, 2002.

Este livro está dividido em 10 unidades. E na unidade 1 que trata de Números não-rationais e figuras geométricas, apresenta um tópico denominado "ângulos retos e o teorema de Pitágoras".

Há uma referência a ângulos retos e em seguida fala de esquadros, incluindo aí o esquadro egípcio, que é a terna (3, 4 e 5) por meio da corda com 13 nós. Em seguida, denomina os lados do triângulo retângulo como hipotenusa

e catetos. Através de desenhos em papel quadriculados de triângulos retângulos cujos lados são números naturais o texto conduz o aluno ao teorema de Pitágoras. E parte para exercícios de aplicação, inclusive utilizando triângulos com lados de medidas racionais.

Ao final apresenta um brevíssimo histórico de Pitágoras e realiza uma atividade com recortes, onde há a montagem de um quebra-cabeça para verificar a relação pitagórica

Análise

Sobre o aspecto histórico, este livro faz uma referência muito breve sobre o esquadro dos egípcios. E ao final do estudo, é apresentada uma pequena biografia de Pitágoras. Depois em um exercício explora o trabalho com as cordas dos egípcios.

Não realiza nenhuma validação mais formal, apenas com desenhos em papel quadriculado de triângulos retângulos mostra a relação pitagórica, mas depois usa um quebra-cabeça para que o aluno através de recortes verifique o teorema.

O livro chega a explorar o texto através de atividades, mas é caracterizado por apresentar grande número de exercícios.

2.8.4 - Livro 4

Coleção: Matemática: *Idéias e desafios*

Autores: Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga.

Série: 8^a. série.

Editora: Saraiva, 2002.

Este livro, está dividido em 9 unidades.

Não há uma unidade específica para o estudo do teorema de Pitágoras, ele aparece apenas como leitura na unidade 2 que trata sobre o estudo dos radicais, onde é feita uma verificação do teorema de Pitágoras usando área, aquela cujas figuras aparecem acima no relato do livro da 7^a. série. Também na página seguinte é feita uma breve relação entre radicais e o teorema de

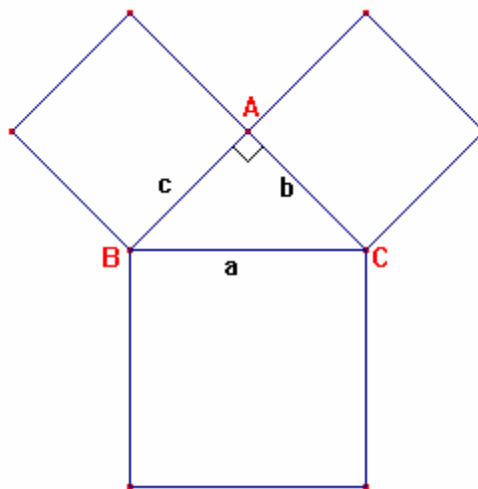
Pitágoras. Já em um tópico da unidade 8 que trata de Semelhança e medidas, há um tratamento mais prolongado do teorema. O texto o introduz da seguinte forma:

O teorema de Pitágoras

Sem dúvida, o teorema de Pitágoras é um dos mais famosos da Geometria.

No decorrer dos séculos surgiram muitas demonstrações desse teorema. Por volta do ano 300 a.C., por exemplo, Euclides, um matemático grego, usou áreas de quadrados em sua demonstração. Veja

Euclides desenhou um triângulo retângulo e relacionou as áreas de quadrados construídos junto aos lados desse triângulo. A figura era parecida a que segue:



Aparece uma figura de Euclides perguntando: O que você imagina que eu concluí? E o texto afirma que Euclides concluiu e demonstrou uma propriedade que nós já conhecemos:

A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

$$\text{Ou seja: } a^2 = b^2 + c^2$$

E continua, afirmando que essa conclusão, que pode ser observada comparando-se as áreas dos quadrados desenhados sobre os lados de um triângulo retângulo, é um teorema da Geometria que pode ser demonstrado por

meio das relações métricas estudadas. Então, realiza a demonstração por semelhança de triângulos, que já conhecemos e fizemos acima, neste capítulo II.

Depois apresenta novamente o teorema escrito na seguinte forma: O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Logo após, considera possível demonstrar a recíproca do teorema, mas não o faz.

O livro traz atividades que exploram o texto e também exercícios. São mais de trinta exercícios, sem contar aqueles que apresentam itens a, b, c..., só sobre aplicação do teorema de Pitágoras.

Análise

No aspecto histórico o livro se apresenta muito "pobre", apenas uma tímida referência a Euclides como tendo demonstrado o teorema, não dando importância às orientações dos PCN.

Em seguida apresenta uma demonstração, usando as relações métricas no triângulo retângulo.

O livro caracteriza-se por apresentar pouco texto e um grande número de exercícios. Consideramos que não há preocupação com a argumentação do teorema e sim com a sua aplicação.

Comentários gerais sobre os quatro livros.

No geral, nos livros citados há apenas validações empíricas. Não é dada nenhuma oportunidade ao aluno de realizar por ele mesmo uma validação mais dedutiva.

Os alunos são levados somente a fazer conjeturas por meio de questões postas nos exercícios.

CAPÍTULO III

CONCEPÇÕES DAS ATIVIDADES E ANÁLISE A PRIORI

3.1 - Concepções das atividades

Pretendemos, neste capítulo, apresentar primeiramente as escolhas didáticas para as concepções das atividades que compõem a seqüência didática e em seguida fazer análise *a priori* dessas atividades.

Depois de muitas reuniões, discussões e sucessivas mudanças, chegamos ao final da elaboração da seqüência didática. A cada reunião traziam-se novas idéias e novas propostas a serem discutidas e inseridas.

Levamos em consideração as pesquisas analisadas, as orientações dos IREM de Grenoble e de Rennes sobre como elaborar atividades com prova e demonstração, os tipos de provas, etc. A intenção é envolvermos os alunos em processos de prova, envolvendo o teorema de Pitágoras.

A primeira atividade concebida é a de um puzzle pré-fabricado no Cabri, em que o aluno deve relacionar as áreas dos quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo em questão. São utilizados nove triângulos diferentes para que os alunos possam ter opções diferentes de escolha, podendo até testar em vários deles. Ao perceber a relação pitagórica, o aluno será questionado sobre a confiabilidade e certeza desse experimento. Para fazer mais conjecturas, ele deve construir seu próprio triângulo retângulo no Cabri e procurar confirmar a relação obtida com o puzzle.

A seguir concebemos a atividade dois, que visa encaminhar o aluno a uma argumentação de natureza mais dedutiva do teorema de Pitágoras. Ao final dessa atividade o aluno deve comparar os dois processos de verificação (da atividade 1 e da atividade 2) e indicar qual dos dois melhor justifica o Teorema de Pitágoras.

A atividade 3 visa envolver novamente o aluno numa atividade de natureza empírica no Cabri, onde ele próprio constrói um triângulo retângulo e com os recursos de medidas e de cálculo disponíveis no Cabri ele obtém as

relações métricas do triângulo retângulo. Depois ele é levado a provar essas relações.

Algumas dessas provas são subdivididas em passos, de acordo com Duval (2002), onde cada passo constitui-se num pequeno teorema com hipótese e tese. O aluno só precisa justificar cada passo, ao final, tendo justificado todos os passos, tem justificado o teorema inicial. Deixamos algumas provas a cargo do aluno e não fazemos a subdivisão em passos. A intenção é observarmos se ele faz uma imitação da prova por passos ou usa outras formas.

Destacamos que, em geral, os livros didáticos de 8^a. série (9^o. ano), usam as relações métricas do triângulo retângulo, deduzidas a partir do conceito de semelhança, para provar o Teorema de Pitágoras. Já esta atividade usa o Teorema de Pitágoras, para provar as relações métricas do triângulo retângulo.

A atividade quatro é concebida, a fim de explorar o teorema de Pitágoras e o trabalho com provas, por meio de exercícios. Escolhemos abordar nesses exercícios, os níveis de dificuldades sugeridos por Robert (1998).

No geral, a idéia da seqüência didática, é partir de casos particulares ou concretos e chegar ao geral ou abstrato.

3.2 - Análise *a priori*

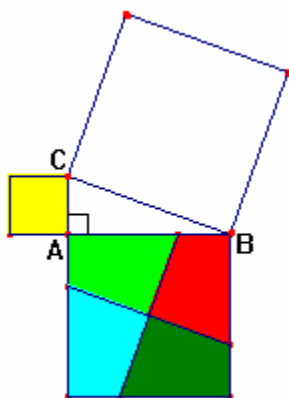
Esta análise é feita por atividade, começando sempre com a apresentação do seu enunciado. Pretendemos, sempre que possível, para cada atividade incluir o seu objetivo, os pré-requisitos, as possíveis dificuldades dos alunos e as possíveis resoluções para a questão proposta. Na atividade 4 identificamos também os níveis de conhecimentos dos alunos de acordo com a classificação de Robert (1998).

3.2.1. Atividade 1.

No Cabri, abra o arquivo denominado “puzzle.fig” o qual contém vários puzzles diferentes.

Os 3 quadriláteros dessa figura são quadrados que foram construídos a partir dos lados do triângulo ABC, retângulo em A, o qual aparece no centro da

figura. Um dos quadrados, o construído a partir de um dos catetos do triângulo, foi dividido em 4 peças (polígonos) que foram coloridas, como também foi colorido o outro quadrado construído a partir do outro cateto, como mostra a figura abaixo.



Agora, por superposição, cubra, sem deixar falhas ou remonte, o quadrado construído a partir da hipotenusa com as cinco peças coloridas, sem que haja remonte ou sobra. Para isto, selecione um desses polígonos por vez, clicando sobre um de seus lados e depois digitando “control C” e “control V” seguidamente. A cópia do polígono se deslocará da posição original parecendo dois polígonos, arraste-a então, sem alterar a sua posição ou forma, colocando-a sobre o quadrado grande. É como montar um quebra-cabeça. Cuidado para não arrastar os polígonos pelo vértice para não deformá-lo, mas caso isso aconteça, desfça a ação (menu editar-desfazer) e repita o processo. Obs: Dependendo do polígono que você tentar selecionar, pode aparecer uma lista de objetos, geralmente é o último da lista, se não for, selecione o penúltimo e assim por diante.

Faça o que se pede abaixo:

a) O que você observou? Relacione as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. O que você conclui?

b) Represente a medida da hipotenusa do triângulo retângulo pela letra a , e por b e c as medidas de cada cateto. Relacione as três medidas a , b e c .

c) A verificação feita com os puzzles é confiável, suficiente e dá certeza de que a relação obtida no item b é sempre válida em qualquer triângulo retângulo? Justifique.

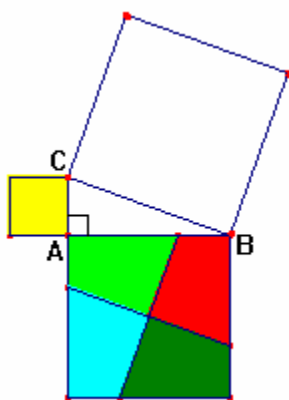
d) No Cabrì, construa um triângulo retângulo ABC qualquer. Com a ferramenta “distância ou comprimento” meça os lados de seu triângulo e com a calculadora verifique a relação percebida anteriormente. O que você conclui?

e) A verificação feita no item d, garante que a relação vale sempre para qualquer triângulo retângulo? Justifique.

Análise da Atividade 1

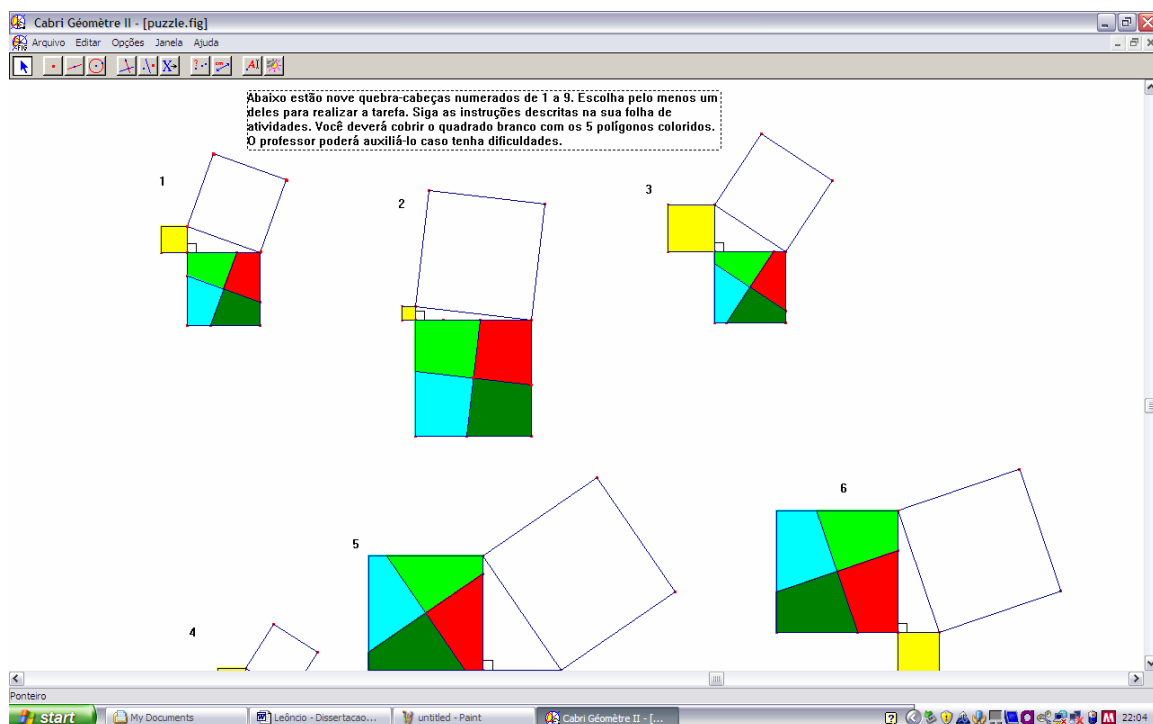
No Cabrì, abra o arquivo denominado “puzzle.fig”, o qual contém vários puzzles diferentes.

Os 3 quadriláteros dessa figura são quadrados que foram construídos a partir dos lados do triângulo ABC, retângulo em A, o qual aparece no centro da figura. Um dos quadrados, o construído a partir de um dos catetos do triângulo, foi dividido em 4 peças (polígonos) que foram coloridas, como também foi colorido o outro quadrado construído a partir do outro cateto, como mostra a figura abaixo.

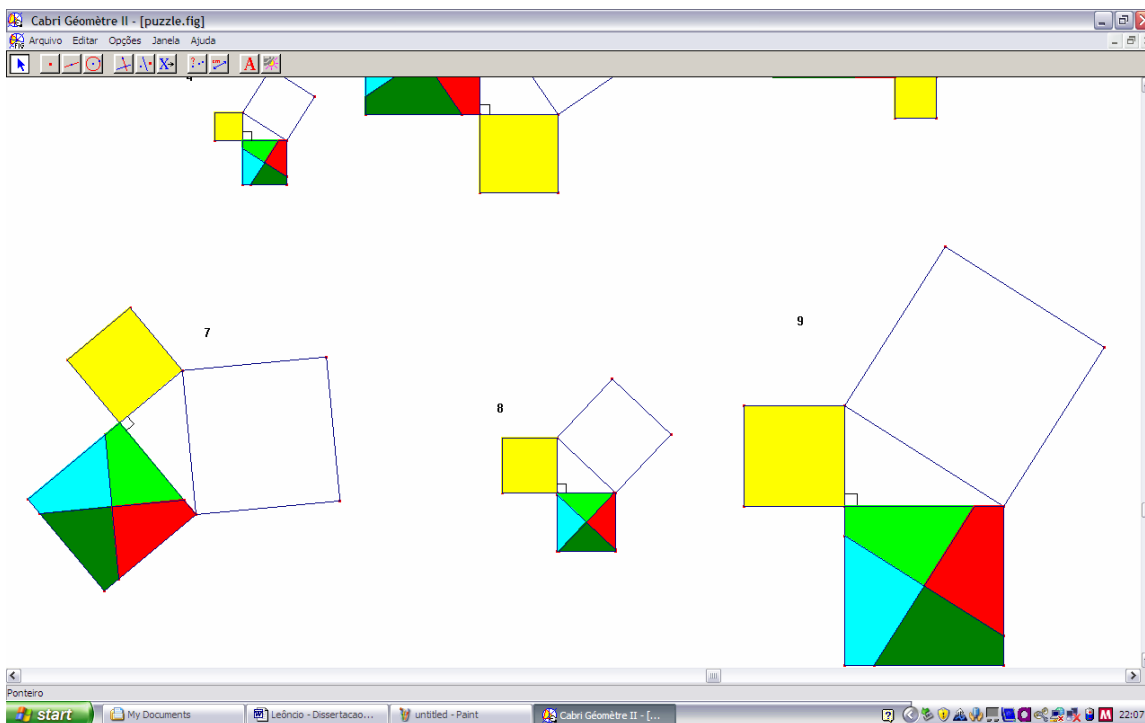


Agora, por superposição, cubra, sem deixar falhas ou remonte, o quadrado construído a partir da hipotenusa com as cinco peças coloridas, sem que haja remonte ou sobra. Para isto, selecione um desses polígonos por vez, clicando sobre um de seus lados e digitando “control C” e “control V” seguidamente. A cópia do polígono se deslocará da posição original parecendo dois polígonos, arraste-a então, sem alterar a sua posição ou forma, colocando-a sobre o quadrado grande. É como montar um quebra-cabeça. Cuidado para não arrastar os polígonos pelo vértice para não deformá-lo, mas caso isso aconteça, desfça a ação (menu editar-desfazer) e repita o processo. Obs: Dependendo do polígono que você tentar selecionar, pode aparecer uma lista de objetos, geralmente é o último da lista, se não for, selecione o penúltimo e assim por diante.

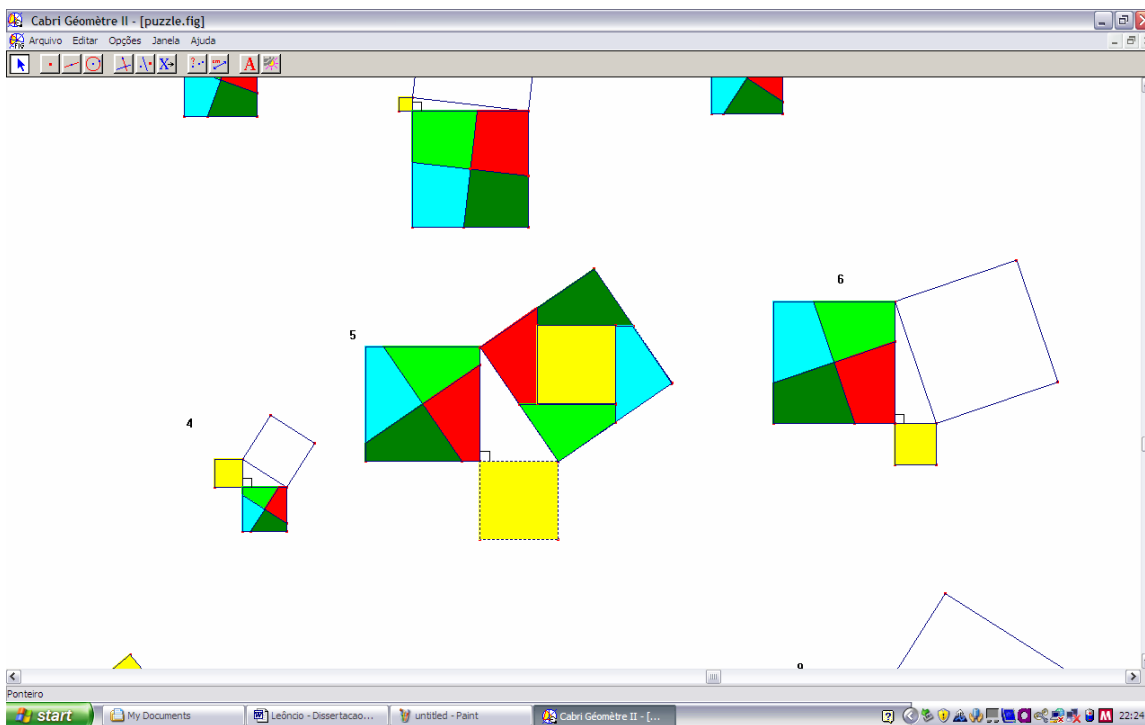
Ao abrir o arquivo do puzzle, os alunos têm a sua frente a seguinte tela do cabri, que dá uma visão parcial dos puzzles.



Utilizando a barra de rolagem, podemos visualizar os outros puzzles, como a seguir:



Como exemplo de resolução de um desses puzzles, mostramos abaixo a resolução do puzzle 5, que está ao centro da tela.



O **objetivo** deste início da atividade 1 é colocar o aluno numa situação empírica que o leve a perceber a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. A atividade faz uso de puzzles, que se diferenciam pelos triângulos retângulos a partir dos quais foram construídos. O aluno terá a sua disposição um arquivo contendo os puzzles pré-construídos no software Cabri, com os quais poderá realizar a tarefa solicitada, e que o auxiliarão a responder as questões seguintes da atividade. São puzzles construídos a partir de vários triângulos, para que o aluno tenha oportunidade de testar em triângulos diferentes.

Nesta tarefa, pode ser que a maior **dificuldade** que os alunos poderão enfrentar, será a de arrastar os polígonos sem deformá-lo, quando da montagem do puzzle. No arrastar dos polígonos, estes podem deformar-se e perderem suas propriedades iniciais, neste caso, o aluno deverá desfazer a operação e começá-la novamente, conforme está orientado no texto.

O **pré-requisito** é uma familiarização com o Cabri, o que será realizado em trabalho prévio às atividades.

Após a atividade do puzzle, os alunos devem responder a alguns questionamentos, conforme a seguir:

Item a

O que você observou? Relacione as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. O que você conclui?

O **objetivo** aqui é desafiar o aluno a construir explicações sobre suas observações. Que ele escreva em linguagem comum a relação que se espera que tenha observado durante a manipulação do puzzle.

Talvez a **dificuldade** que encontrarão será a de se expressar corretamente com palavras.

As possíveis **respostas** à pergunta são:

- A área dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa.
- As áreas são iguais.
- As áreas dos dois quadrados menores são iguais à área do quadrado grande.
- Os polígonos preenchem o quadrado grande exatamente.

Item b

Represente a medida da hipotenusa do triângulo retângulo pela letra a, e por b e c as medidas de cada cateto. Relacione as três medidas a, b e c.

O **objetivo** aqui é que o aluno faça uma mudança na sua escrita, passando da linguagem natural para a linguagem algébrica, da relação que ele apresentou no item a. Na escrita algébrica ele deverá utilizar as letras a, b e c como as respectivas medidas da hipotenusa e dos dois catetos e escrever a relação na forma $a^2 = b^2 + c^2$.

O **conhecimento disponível** do aluno deve ser o de área de quadrados e familiaridades.

Nesta atividade espera-se que o aluno não apresente **dificuldades** por já ter algum conhecimento sobre essa relação.

A **solução esperada** é a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$.

Item c

A verificação feita com os puzzles é confiável, suficiente e dá certeza de que a relação obtida no item b é sempre válida em qualquer triângulo retângulo? Justifique.

O **Objetivo** é levantar dúvidas no aluno sobre a validade ou não dessa relação em qualquer triângulo retângulo, conduzindo-o a fazer conjeturas e sentir a necessidade de investigar a validade dessa relação em outros casos particulares de triângulos.

Possíveis soluções:

- Não, os puzzles podem apresentar falhas mesmo que muito pequenas, na sua construção, o que poderiam levar a conclusões falsas.
- Sim, pois em todos os puzzles a relação se confirmou.
- Sim, pois já sabemos que essa relação é verdadeira.

Item d

No Cabri, construa um triângulo retângulo ABC qualquer. Com a ferramenta “distância ou comprimento” meça os lados de seu triângulo e com a calculadora verifique a relação percebida anteriormente. O que você conclui?

Objetivo – Oferecer ao aluno um novo processo de validação para a relação pitagórica, a partir de uma construção própria no Cabri.

Consideramos necessário para a realização desta atividade, algum **conhecimento prévio** sobre o manuseio de algumas ferramentas do cabri como: a calculadora, a medida e comprimento, e outras necessárias na construção de triângulos retângulos. Com isto **dificuldades** podem surgir causando um pouco de demora na execução dessa atividade.

O que se espera como uma **possível resposta** dos alunos para esta atividade é semelhante a seguinte:

Conclui-se que a relação percebida anteriormente, é válida para este triângulo também.

Item e

A verificação feita no item d, garante que a relação vale sempre para qualquer triângulo retângulo? Justifique.

Objetivo – Verificar se o aluno faz generalização apenas a partir da verificação feita num caso particular.

É provável que alunos apresentem **dificuldades** em responder essa questão, por não terem experiências em sala de aula, relativas ao trabalho com

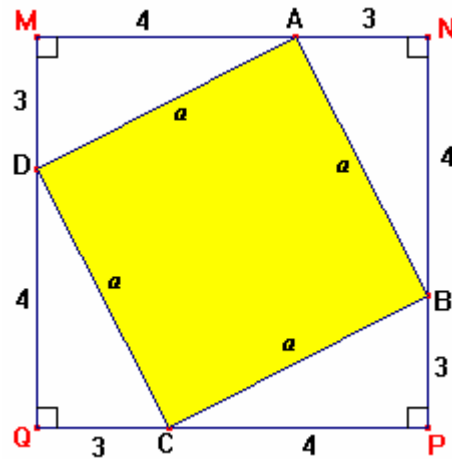
demonstração. Assim podem responder afirmativamente que a relação vale sempre, mas terão dificuldades para justificar.

Uma **solução esperada** seria a seguinte:

Não, pois este é mais um caso particular.

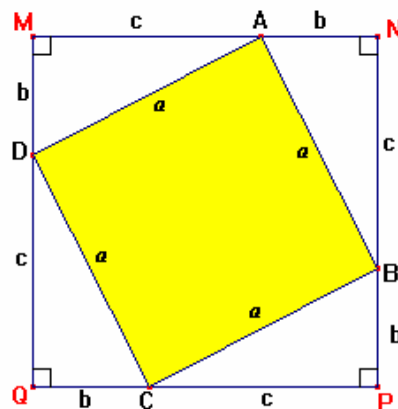
3.2.2. Atividade 2

a) Na figura abaixo o quadrilátero ABCD, é um quadrado. Justifique.



b) Calcule o valor de a , da figura do item a, utilizando o conceito de área. Justifique.

c) Observe o desenho abaixo e calcule o valor de a em função de b e c usando apenas o conceito de área.



Compare com o resultado obtido na atividade 1 letra b. O que você observa?

d) Compare a conclusão obtida na atividade 1 com a conclusão obtida na atividade 2 e responda:

- i) As duas conclusões são equivalentes? (iguais?)
- ii) Em qual dos dois processos (da atividade 1 ou da atividade 2) você considera ter efetuado uma prova para a relação $a^2 = b^2 + c^2$? Justifique.

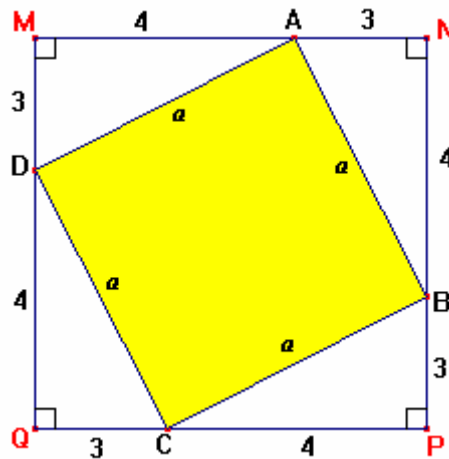
Análise da atividade 2

O **objetivo** desta atividade é conduzir o aluno a uma prova para a relação pitagórica, utilizando o conceito de área.

Vamos analisar cada item dessa atividade separadamente.

Item a

Na figura abaixo o quadrilátero ABCD, é um quadrado. Justifique.



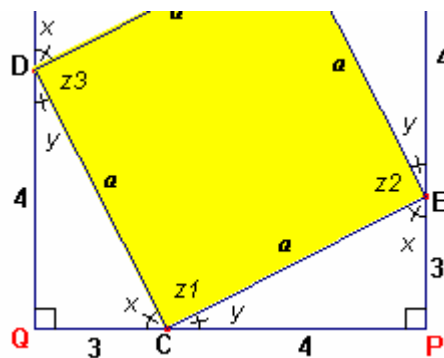
O **objetivo** é que o aluno verifique que o quadrilátero de lado a , na figura, é um quadrado.

Para isto, são necessários alguns **conhecimentos disponíveis**, como a definição de quadrado, a soma dos ângulos internos de um triângulo e o conceito ângulo raso, congruência de triângulos.

Uma **possível resolução** que se espera do aluno é a seguinte:

Sejam x e y as medidas dos ângulos agudos dos triângulos retângulos que compõem a figura. Temos que $x + y = 90^\circ$, pois x e y são ângulos complementares, e sejam z_1, z_2, z_3 e z_4 as medidas dos ângulos internos do quadrilátero ABCD em questão. Temos que mostrar que $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 90^\circ$ (ângulos retos). Observando a figura abaixo, que é um recorte da figura do exercício apresentado, temos que $x + y + z_1 = 180^\circ \Rightarrow z_1 = 180 - (x + y) = 180 - 90 = 90$ graus. Neste caso consideramos que os quatro triângulos são congruentes pelo caso LLL de congruência de triângulo.

Repetindo o mesmo processo para z_2, z_3, z_4 , podemos concluir que são ângulos retos e portanto, o quadrilátero ABCD é um quadrado. Pois tem os quatro lados iguais e os quatro ângulos internos iguais a 90 graus.



item b

Calcule o valor de a , (na figura do item a) usando apenas o conceito de área. Justifique.

O **objetivo** é uma preparação do aluno para o item c. A orientação feita para usar o conceito de área, além de ser um direcionamento para o item

seguinte, é também uma forma de evitar que o aluno já aplique aqui a relação pitagórica, sem ao menos tê-la provado.

Os **conhecimentos disponíveis** para esse exercício são o conceito de área de triângulos e retângulos, congruência de triângulos, potenciação e radiciação.

Uma **possível dificuldade** dos alunos, poderá ser na percepção de que a área da figura pode ser expressa de duas formas diferentes.

Apesar de ser orientado a fazer uso do conceito de área, o uso direto da relação de Pitágoras, ainda deve aparecer como uma **possível estratégia** de alguns alunos.

Uma **resolução** para esse item pode ser a seguinte:

A figura é um quadrado cujo lado mede $4 + 3 = 7$ e cuja área mede $7 \cdot 7 = 49$, mas esse mesmo quadrado é subdividido em um outro quadrado menor cujo lado mede a e cuja área mede a^2 e 4 triângulos congruentes, pelo caso LLL, cuja área é $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ cada um. Portanto podemos escrever a seguinte relação:

$$a^2 + 4 \cdot 6 = 49$$

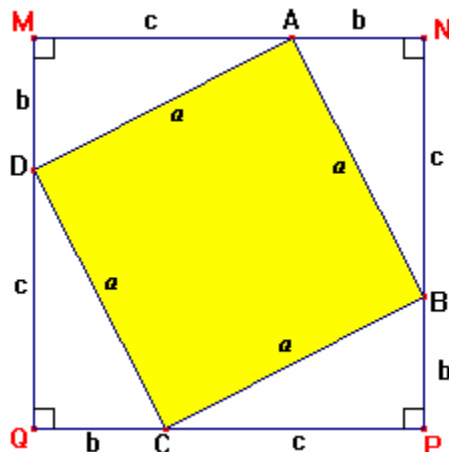
$$a^2 = 49 - 24$$

$$a = \sqrt{25} = 5$$

Caso o aluno tenha muita dificuldade em encontrar uma estratégia de resolução, o aplicador poderá sugerir que ele compare a área do quadrado MNPQ com as áreas do quadrado ABCD e dos quatro triângulos retângulos.

item c

Observe o desenho abaixo e calcule o valor de a , em função de b e c usando apenas o conceito de área.



Compare com o resultado obtido na atividade 1, letra b. O que você observa?

O **objetivo** é levar o aluno a uma comprovação da relação pitagórica, seguindo o mesmo raciocínio e os mesmos passos utilizados no item b, mas agora, algebricamente, com mais rigor. É bom destacar que o exercício pede para calcular o valor de a , sem referir-se explicitamente a provar a igualdade em questão e sem ao menos citar o nome da relação que conhecemos como Teorema de Pitágoras.

O **conhecimento disponível** é o de produtos notáveis, cálculo de área, congruência de triângulos, potenciação e radiciação.

Como o raciocínio da resolução é similar à do item anterior, supõe-se que os alunos encontrarão **dificuldades** somente no cálculo algébrico.

Uma **possível resolução** para essa questão seria a seguinte:

Observando que a figura é um quadrado cujo lado mede $(b+c)$, temos que sua área mede $(b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$. Por outro lado, essa mesma figura é formada por um quadrado cujo lado mede a e cuja área mede a^2 e por quatro triângulos congruentes, pelo caso LLL, cuja área mede $\frac{b \cdot c}{2}$ cada um. Portanto, podemos escrever a seguinte igualdade.

$$a^2 + 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} = b^2 + 2 \cdot b \cdot c + c^2$$

$$a^2 + 2 \cdot b \cdot c = b^2 + 2 \cdot b \cdot c + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

item d

Compare a conclusão obtida na atividade 1 com a conclusão obtida na atividade 2. Responda:

- i) As duas conclusões são equivalentes? (iguais?)**
- ii) Em qual dos dois processos (da atividade 1 ou da atividade 2) você considera ter efetuado uma prova para a relação $a^2 = b^2 + c^2$? Justifique.**

O **objetivo** desta última questão da atividade 2, é conhecer do aluno suas concepções sobre o que é uma prova e o que é uma simples verificação ou validação. Também é objetivo saber se o aluno reconhecerá quando um argumento constitui-se numa prova.

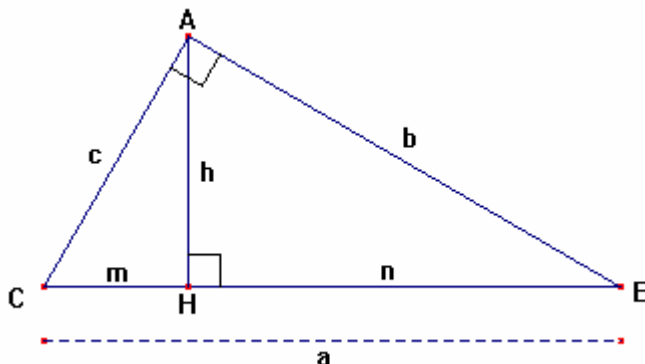
Este é o momento em que o aplicador deverá fazer uma **institucionalização** daquilo que se pretende alcançar com essas atividades, que é levar o aluno a reconhecer a diferença entre uma verificação e uma prova. Pode ser que os alunos respondam sim, que a atividade do item c representa uma prova, mas terão **dificuldades** em justificar sua resposta.

Uma **possível solução** seria:

- i) Sim, são equivalentes.
- ii) A atividade 2, pois o triângulo escolhido não é um caso particular, com medidas conhecidas, mas sim um caso geral, em que as medidas a, b e c representam medidas quaisquer.

3.2.3. Atividade 3

a) No Cabri, construa um triângulo retângulo qualquer ABC, retângulo em A e trace a altura AH relativa ao lado BC. Considere a, b, c, h, m e n as respectivas medidas dos segmentos BC, AB, AC, AH, CH e BH, como ilustra a figura abaixo.



Com a ferramenta “medida ou comprimento” obtenha e anote abaixo, as medidas a, b, c, h, m e n da sua figura.

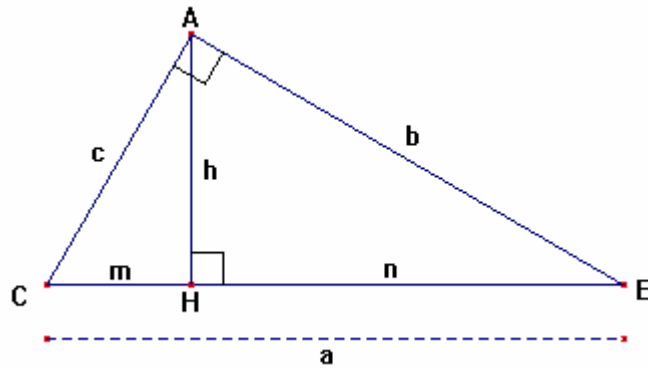
a = b = c = h = m = n =

Com a calculadora (Cabri ou qualquer outra) obtenha os valores abaixo e relacione a coluna da esquerda de acordo com a direita.

$h^2 =$	$a.h =$
$b^2 =$	$m.a =$
$c^2 =$	$m.n =$
$b.c =$	$n.a =$

Anote abaixo as relações obtidas.

b) No triângulo ABC a seguir, retângulo em A, a, b e c são as medidas dos lados do triângulo e h é a sua altura relativa ao lado BC, m e n são as projeções ortogonais sobre o lado BC dos respectivos lados AC e AB. Um triângulo semelhante ao que você construiu no item a.



Para justificar que $h^2 = m \cdot n$, um aluno utilizou-se dos seguintes passos. Justifique cada um desses passos. Observe a figura acima.

Passo 1 - Se o triângulo ABC é retângulo em A então $a^2 = b^2 + c^2$. Justifique.

Passo 2 - Se $a^2 = b^2 + c^2$ então $(m+n)^2 = b^2 + c^2$. Justifique.

Passo 3 - Se $(m+n)^2 = b^2 + c^2$ então $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$. Justifique.

Passo 4 - Se $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$ então $2h^2 = 2mn$. Justifique.

Passo 5 - Se $2h^2 = 2mn$ então $h^2 = mn$. Justifique.

c) Para justificar que $b^2 = a \cdot n$, um outro aluno utilizou-se dos seguintes passos. Justifique cada um desses passos. Observe a figura no item b.

Passo 1 - Se o triângulo ABH é retângulo em H, então $b^2 = h^2 + n^2$. Justifique.

Passo 2 - Se $b^2 = h^2 + n^2$ então $b^2 = m \cdot n + n^2$. Justifique.

Passo 3 - Se $b^2 = m \cdot n + n^2$ então $b^2 = n \cdot (n + m)$. Justifique.

Passo 4 - Se $b^2 = n \cdot (n + m)$ então $b^2 = n \cdot a$. Justifique.

d) Como você justificaria a igualdade $c^2 = a \cdot m$? Observe a figura do item b.

e) Para provar que $bc = ah$, outro aluno procedeu da seguinte maneira. Justifique cada passo. Observe a figura do item b.

Passo 1 - Se $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$ então $b^2 c^2 = a \cdot n \cdot a \cdot m$. Justifique

Passo 2 - Se $b^2 c^2 = a \cdot n \cdot a \cdot m$ então $b^2 c^2 = a^2 mn$. Justifique.

Passo 3 - Se $b^2c^2 = a^2mn$ então $b^2c^2 = a^2h^2$. Justifique.

Passo 4 – Se $b^2c^2 = a^2h^2$ então $bc = ah$. Justifique.

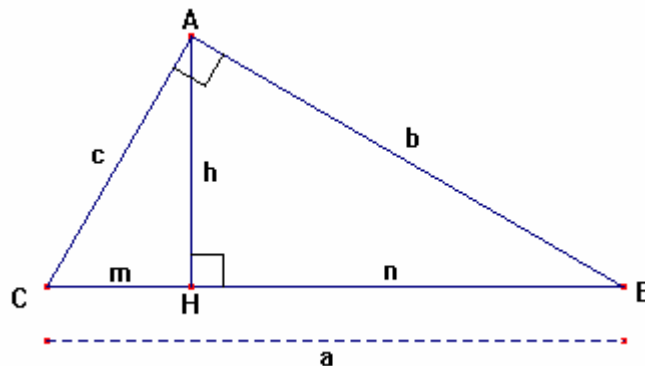
f) Encontre uma outra prova para a relação $bc = ah$ usando o conceito de área. Observe novamente a figura no item b.

Análise da atividade 3

O **objetivo** é de conhecer um pouco mais sobre o comportamento e a reação do aluno, em mais um trabalho de argumentação e prova.

A atividade está subdividida em vários itens, que analisaremos abaixo separadamente.

a) No Cabrì, construa um triângulo retângulo qualquer ABC, retângulo em A e trace a altura AH relativa ao lado BC. Considere a, b, c, h, m e n as respectivas medidas dos segmentos BC, AB, AC, AH, CH e BH, como ilustra a figura abaixo.



Com a ferramenta “medida ou comprimento” obtenha e anote abaixo, as medidas a, b, c, h, m e n da sua figura.

a = b = c = h = m = n =

Com a calculadora (Cabrì ou qualquer outra) obtenha os valores abaixo e relacione a coluna da esquerda de acordo com a direita.

$$\begin{array}{ll} h^2 = & a.h = \\ b^2 = & m.a = \\ c^2 = & m.n = \\ b.c = & n.a = \end{array}$$

Anote abaixo as relações obtidas.

Objetivo – Levar o aluno a fazer validações das relações métricas num triângulo retângulo, a partir de um caso particular de triângulo retângulo, que ele próprio constrói.

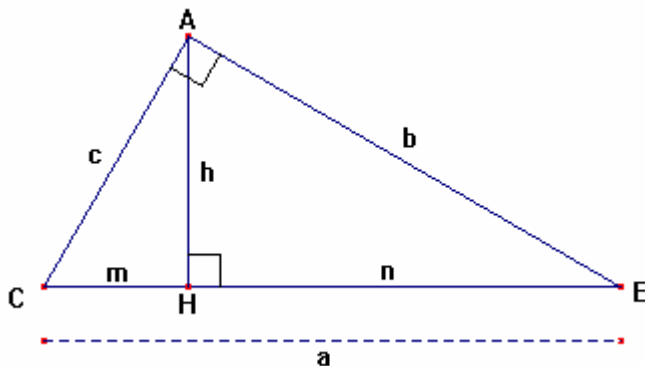
Pode ser que haja alguma **dificuldade** no manuseio de ferramentas do cabrì e com os muitos cálculos com números decimais.

Pré-requisitos – Conhecimentos de Cabrì, cálculo com números decimais.

Possível solução – As respostas para os valores de a, b, c, h, m e n são abertas, pois dependem do triângulo que cada um constrói. Já as relações obtidas deverão ser todas iguais, como abaixo:

$$\begin{array}{l} h^2 = m.n \\ b^2 = n.a \\ c^2 = m.a \\ bc = ah \end{array}$$

b) No triângulo ABC a seguir, retângulo em A, a, b e c são as medidas dos lados do triângulo e h é a sua altura relativa ao lado BC, m e n são as projeções ortogonais sobre o lado BC dos respectivos lados AC e AB. Um triângulo semelhante ao que você construiu no item a.



Para justificar que $h^2 = m \cdot n$, um aluno utilizou-se dos seguintes passos. Justifique cada um desses passos. Observe a figura acima.

Passo 1 - Se o triângulo ABC é retângulo em A então $a^2 = b^2 + c^2$. Justifique.

Passo 2 - Se $a^2 = b^2 + c^2$ então $(m+n)^2 = b^2 + c^2$. Justifique.

Passo 3 - Se $(m+n)^2 = b^2 + c^2$ então $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$. Justifique.

Passo 4 - Se $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$ então $2h^2 = 2mn$. Justifique.

Passo 5 - Se $2h^2 = 2mn$ então $h^2 = mn$. Justifique.

Objetivo – Desenvolver no aluno a capacidade de argumentação e de prova e obter dados para analisar seu desempenho.

As **possíveis dificuldades** poderão ser: na escrita, na interpretação algébrica da figura do triângulo, na justificativa do passo 3 em que exige o uso do teorema de Pitágoras duas vezes.

Se houver muita dificuldade que impeçam o aluno de prosseguir, o aplicador poderá sugerir alguma estratégia que o permita continuar.

Os **pré-requisitos** são: Teorema de Pitágoras e produtos notáveis.

Uma **possível resolução** seria como a seguir:

Passo 1 - Se o triângulo ABC é retângulo em A **então** $a^2 = b^2 + c^2$.
Justifique.

Justificativa - Pelo Teorema de Pitágoras.

Passo 2 - Se $a^2 = b^2 + c^2$ **então** $(m+n)^2 = b^2 + c^2$. Justifique.

Basta observar na figura que $a = m + n$ e fazer a substituição.

Passo 3 - Se $(m+n)^2 = b^2 + c^2$ **então** $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$.

No 1º. Membro da igualdade $(m+n)^2 = b^2 + c^2$ desenvolve-se o produto $(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$.

No 2º. Membro da igualdade $(m+n)^2 = b^2 + c^2$, observando a figura e aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se que $b^2 = h^2 + n^2$ e que $c^2 = h^2 + m^2$.

Substituindo no 1º. e 2º. Membros da igualdade da hipótese, obtêm-se a seguinte igualdade:

$$m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$$

Passo 4 - Se $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$ **então** $2h^2 = 2mn$.
Justifique.

Basta fazer subtrair m^2 e n^2 de cada membro da igualdade $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$.

Passo 5 - Se $2h^2 = 2mn$ **então** $h^2 = m.n$. Justifique.

Basta dividir ambos os membros da igualdade por 2.

c) Para justificar que $b^2 = an$, um outro aluno utilizou-se dos seguintes passos. Justifique cada um desses passos. Observe a figura no item b.

Passo 1 - Se o triângulo ABH é retângulo em H, **então** $b^2 = h^2 + n^2$.
Justifique.

Passo 2 - Se $b^2 = h^2 + n^2$ **então** $b^2 = m.n + n^2$. **Justifique.**

Passo 3 – Se $b^2 = mn + n^2$ **então** $b^2 = n(n+m)$. **Justifique.**

Passo 4 – Se $b^2 = n(n+m)$ **então** $b^2 = na$. **Justifique.**

Objetivo - Desenvolver no aluno a capacidade de argumentação e de prova e obter dados para analisar seu desempenho.

Pré-requisitos – Teorema de Pitágoras, a relação $h^2 = m.n$ provada no item b), fatoração de expressões algébricas.

Uma **possível dificuldade** do aluno poderá ser no passo 2 onde foi utilizada a relação $h^2 = m.n$ recém provada, e também na fatoração realizada no passo 3.

Uma **possível resolução** está abaixo:

Passo 1 - Se o triângulo ABH é retângulo em H, **então** $b^2 = h^2 + n^2$.
Justifique.

Basta aplicar o Teorema de Pitágoras.

Passo 2 - Se $b^2 = h^2 + n^2$ **então** $b^2 = mn + n^2$. **Justifique.**

Usando a igualdade provada no item b), basta substituir h^2 por mn no segundo membro.

Passo 3 – Se $b^2 = mn + n^2$ **então** $b^2 = n(n+m)$. **Justifique.**

Basta colocar n em evidência no segundo membro da igualdade.

Passo 4 – Se $b^2 = n(n+m)$ **então** $b^2 = na$. **Justifique.**

Observando na figura que $n+m = a$, faz-se a substituição no segundo membro para obter que $b^2 = na$.

d) Como você justificaria a igualdade $c^2 = am$? Observe a figura do item b.

Objetivo – Proporcionar ao aluno exercício de prova e observar sua iniciativa e suas estratégias.

É provável que haja certa **dificuldade** para dar a partida. Talvez ele procure comparar essa relação com as outras já provadas, para tentar imitar a sua prova.

Pré-requisitos - Teorema de Pitágoras, a relação $h^2 = mn$ provada no item b), fatoração de expressões algébricas, equações.

Uma **possível solução** seria por imitação ao item c, como segue.

Passo 1 - Se o triângulo ACH é retângulo em H, **então** $c^2 = m^2 + h^2$

Passo 2 – Se $c^2 = m^2 + h^2$ **então** $c^2 = m^2 + mn$

Justificativa: $h^2 = mn$ conforme já foi provado.

Passo 3 – Se $c^2 = m^2 + mn$ **então** $c^2 = m.(m+n)$

Justificativa: colocou-se o m em evidência no segundo membro da igualdade.

Passo 4 – Se $c^2 = m.(m+n)$ **então** $c^2 = ma$

Justificativa: Observando a figura no item b, temos que $m+n=a$ e substituímos no segundo membro da igualdade.

Outra solução possível seria a seguinte, que se diferencia por não usar a subdivisão em passos:

Na figura do item b, tem-se que o triângulo ACH é retângulo em H, e portanto pelo Teorema de Pitágoras $c^2 = m^2 + h^2$. (I)

Mas já foi provado no item b que $h^2 = m.n$, substituindo h^2 em (I) obtém-se a igualdade $c^2 = m^2 + mn$ (II).

Colocando m em evidência a igualdade (II) fica $c^2 = m.(m+n)$ (III).

Ainda, pela figura do item b, observa-se que $m+n=a$, logo pode-se substituir a em (III) e $c^2 = ma$.

e) Para provar que $b.c = a.h$, outro aluno procedeu da seguinte maneira. Justifique cada passo. Observe a figura do item b.

Passo 1 – Se $b^2 = an$ e $c^2 = am$ então $b^2c^2 = an.am$. Justifique.

Passo 2 – Se $b^2c^2 = an.am$ então $b^2c^2 = a^2mn$. Justifique.

Passo 3 - Se $b^2c^2 = a^2mn$ então $b^2c^2 = a^2h^2$. Justifique.

Passo 4 – Se $b^2c^2 = a^2h^2$ então $bc = ah$. Justifique.

Objetivo – Desenvolver a capacidade de reconhecer estratégias de provas e observar seu crescimento em relação aos 3 itens anteriores.

Pré-requisitos - Radiciação, propriedades da relação de igualdade.

Uma **possível dificuldade** será no passo 1, em que há um produto de igualdades e no passo 4 na extração da raiz quadrada de ambos os membros da igualdade.

Uma **possível solução** é a seguinte:

Passo 1 – Se $b^2 = an$ e $c^2 = am$ então $b^2c^2 = an.am$

Justificativa. Basta multiplicar os membros correspondentes das duas igualdades.

Passo 2 – Se $b^2c^2 = an.am$ então $b^2c^2 = a^2mn$.

Justificativa. No segundo membro $aa = a^2$

Passo 3 - Se $b^2c^2 = a^2mn$ então $b^2c^2 = a^2h^2$. Justifique.

Justificativa. Como $h^2 = m.n$ pode-se substituir no segundo membro da igualdade.

Passo 4 – Se $b^2c^2 = a^2h^2$ então $b.c = a.h$. Justifique.

Justificativa. Considerando que a , b , c e h são medidas de segmentos, logo números positivos, então basta extrair a raiz quadrada de ambos os membros da igualdade.

f) Encontre uma outra prova para a relação $bc = ah$ usando o conceito de área. Observe novamente a figura no item b.

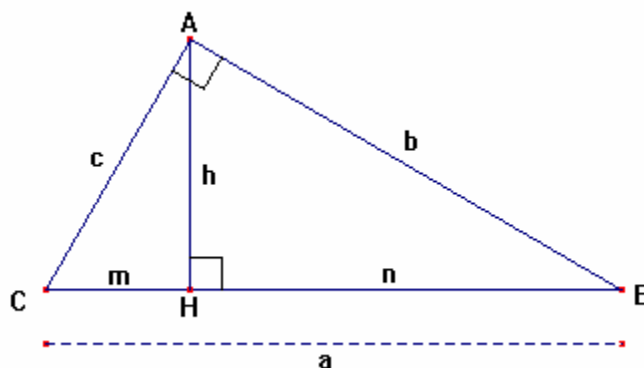
Objetivo – Colocar o aluno diante de novas estratégias de prova.

Pré-requisitos – Área de triângulos, cálculo com frações.

Possíveis dificuldades – Estabelecer relação de área nos três triângulos.

Uma **possível solução** é a seguinte:

Pela figura tem-se que a área do triângulo ABC é igual à soma das áreas dos triângulos ACH e ABH.



Por outro lado, tem-se que:

Área do triângulo ABC é igual a $\frac{b.c}{2}$

Área do triângulo ACH é igual a $\frac{m.c}{2}$

Área do triângulo ABH é igual a $\frac{n.h}{2}$

Daí podemos escrever que $\frac{b.c}{2} = \frac{m.h}{2} + \frac{n.h}{2} = \frac{h.(m+n)}{2} = \frac{h.a}{2} \rightarrow b.c = h.a.$

Está provado.

3.2.4. Atividade 4

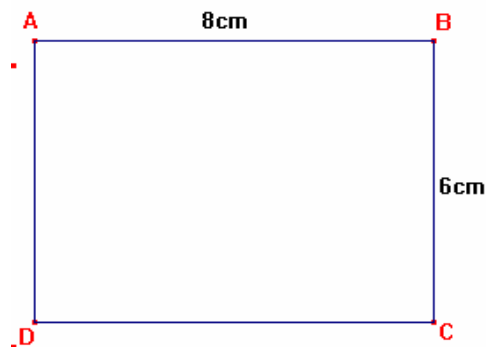
- a) Calcule a medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede 2cm.
 b) Dado um segmento AB de medida 1cm, apresente um método para construir um segmento de medida $\sqrt{2}$ cm.

c) Calcule a altura de um triângulo eqüilátero de lado medindo 2cm.

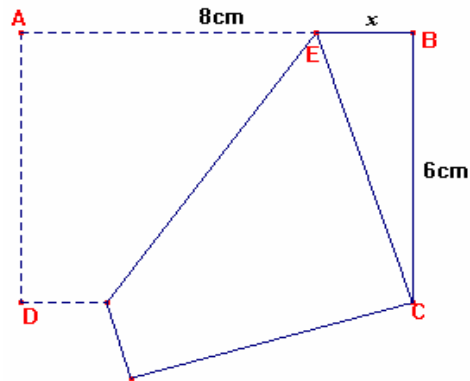
d) Mostre que a altura de um triângulo eqüilátero de lado medindo ℓ cm é

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

e) Considere o retângulo ABCD representado pelo desenho abaixo.

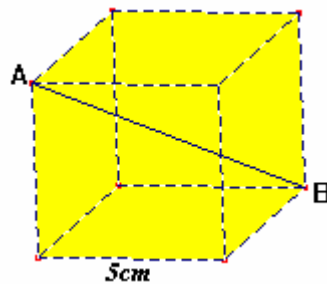


Dobre o retângulo de modo que o vértice A coincida com o vértice C, como o desenho a seguir:



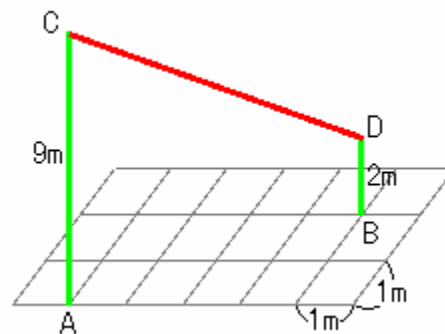
Calcule a medida x do segmento EB.

- f) Calcule o comprimento da diagonal AB do cubo de aresta igual a 5cm conforme a figura abaixo:

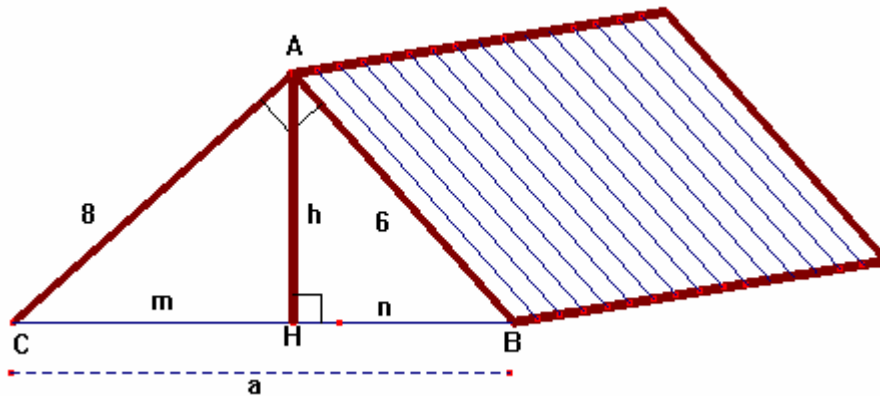


- g) Sendo D uma diagonal do cubo cuja aresta mede a , prove que $D = a\sqrt{3}$.

- h) Existem dois postes AC e BD perpendiculares a um plano, como mostra a figura. O plano está dividido em quadrados cujos lados medem 1m. $AC = 9$ m, $BD = 2$ m. Encontre o comprimento de CD.



i) A figura abaixo representa o projeto da cobertura de uma casa. O futuro proprietário deseja que essa cobertura, vista de frente, tenha a forma de um triângulo retângulo, cujo ângulo reto fique na cumeeira do telhado (ponto A). Ele ainda almeja que um lado do telhado meça 8m e o outro lado meça 6m. O arquiteto responsável pelo projeto está com algumas dúvidas e precisa do teu auxílio para saná-las. Ajude-o. Veja abaixo:



- i1) Qual deve ser a largura a desse telhado?
- i2) Qual a medida m do comprimento do segmento \overline{CH} ?
- i3) Qual a medida n do comprimento do segmento \overline{HB} ?
- i4) Qual deve ser a altura h desse telhado?

Análise da atividade 4

Objetivo – Oferecer oportunidade de o aluno aplicar os conhecimentos adquiridos nas atividades 1, 2 e 3. Observar o seu desempenho após terem passado por uma atividade de prova.

Vamos analisar cada um dos exercícios que compõem essa atividade 4.

a) Calcule a medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede 2cm.

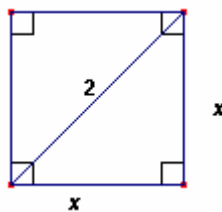
Objetiva-se verificar se o aluno consegue perceber que a diagonal de um quadrado é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são os lados do quadrado e então aplicar o Teorema de Pitágoras.

Segundo a classificação de Robert (1998), podemos classificar este exercício no **nível disponível**, pois não há, no enunciado da questão, nenhuma indicação para se aplicar o Teorema de Pitágoras.

O que pode trazer **dificuldades** para o aluno neste exercício, é a ausência de uma figura no enunciado da questão.

Resolução:

Se o aluno inicialmente fizer a representação do quadrado poderá decompô-lo em dois triângulos retângulos e depois “matematizar” a situação, como abaixo:



$$2^2 = x^2 + x^2$$

$$4 = 2x^2$$

$$x^2 = \frac{4}{2}$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

O valor obtido para o lado do quadrado, é um número irracional, é possível que os alunos tentem calcular a raiz de 2.

b) Dado um segmento AB de medida 1cm, apresente um método para construir um segmento de medida $\sqrt{2}$ cm.

Objetivo – Colocar o aluno diante de um problema de incomensurabilidade e levá-lo a reconhecer a importância do Teorema de Pitágoras nesta construção.

Este exercício está no **nível disponível** de Robert (1998), pois não há nenhuma indicação ou sugestão.

Observa-se que os dados do problema não vêm representados por um registro de desenho, isto constituirá numa **possível dificuldade** para o aluno.

Possíveis resoluções:

- O aluno talvez tente usar a calculadora para extrair o valor de $\sqrt{2}$ e então construir com régua esse segmento de medida aproximada. Neste caso ele (o aluno) não usa o segmento AB como pede a questão.

- A hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem ambos 1cm tem medida igual a $\sqrt{2}$ cm. Portanto, basta construir um triângulo retângulo cujos catetos sejam iguais ao segmento AB e depois traçar a hipotenusa. Neste caso a hipotenusa será o segmento pedido de medida $\sqrt{2}$ cm.

c) Calcule a altura de um triângulo equilátero de lado medindo 2cm.

Objetivo – Neste caso o objetivo é envolver o aluno em um processo de prova, no nível que Balacheff (1988) chama de *exemplo genérico* e também preparar o raciocínio do aluno para resolver com maior desenvoltura o exercício seguinte. Espera-se que o aluno faça uso do Teorema de Pitágoras para o cálculo da altura do triângulo equilátero, a qual é um dos catetos de um triângulo retângulo. Mas pode ser que eles usem o conceito de trigonometria na sua resolução.

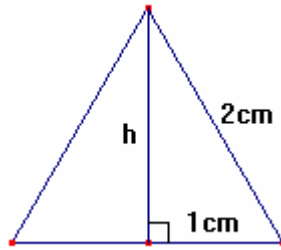
Consideramos este um exercício de **nível disponível** da classificação de Robert (1998), visto que não está sendo dada nenhuma indicação ou sugestão de que o aluno deverá usar o teorema de Pitágoras.

Uma **possível dificuldade** do aluno pode ser em representar o problema em forma de figura.

Um **pré-requisito** – O conceito de altura de um triângulo.

Uma **possível resolução** é a seguinte:

Traçando-se uma altura do triângulo equilátero de lado medindo 2cm, obtemos a seguinte figura:



Daí, aplicando a relação de Pitágoras, vem que:

$$2^2 = 1^2 + h^2$$

$$4 - 1 = h^2$$

$$h = \sqrt{3}$$

Portanto, a altura do triângulo equilátero de lado medindo 2cm é $\sqrt{3}$ cm.

d) Mostre que a altura de um triângulo equilátero de lado medindo

$$\ell \text{ cm é } h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

Objetiva-se neste exercício que o aluno aplique o raciocínio do item anterior para obter um fórmula para o cálculo da altura de um triângulo equilátero em função de seu lado ℓ . Este exercício também visa envolver o aluno em um processo de prova no nível que Balacheff (1988) chama de *experiência mental*.

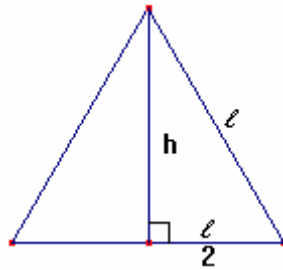
Observa-se que não é dada nenhuma dica de que este exercício é semelhante ao anterior. Entretanto, por causa dessa semelhança com o exercício anterior consideramos que este exercício está no **nível mobilizável** pois neste caso os conhecimentos a serem utilizados estariam bem identificados. Mas poderíamos classificá-lo também no **nível disponível** caso o aluno não perceba que há semelhança com o exercício anterior.

Pré-requisitos – Cálculo algébrico, cálculo com frações e com radicais.

Talvez a **dificuldade** dos alunos será no cálculo algébrico e no cálculo com fração.

Uma **possível resolução** segue os passos do item anterior, que se faz abaixo:

Considerando-se um triângulo eqüilátero de lado ℓ , traça-se a sua altura para obter a figura abaixo:



Aplicando Pitágoras tem-se

$$\ell^2 = h^2 + (\ell/2)^2$$

$$\ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4}$$

$$4h^2 = 4\ell^2 - \ell^2$$

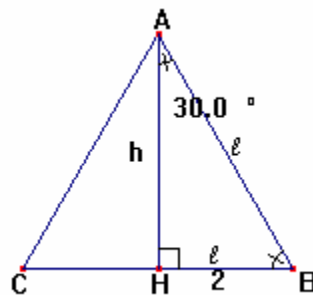
$$4h^2 = 3\ell^2$$

$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Está mostrado.

Outra **possível resolução** é com o uso de trigonometria. Considerando que os ângulos do triângulo eqüilátero são de 60 graus, podemos calcular observando a figura abaixo

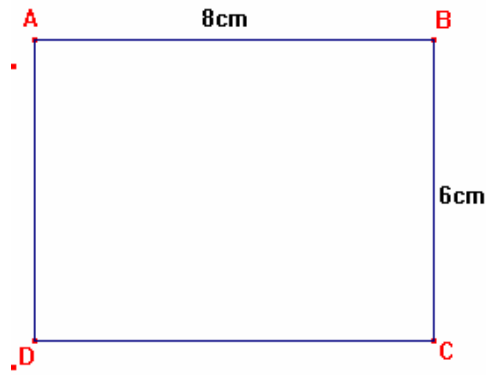


$$\cos(30^\circ) = \frac{h}{\ell} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{\ell} \rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}. \text{ Está mostrado.}$$

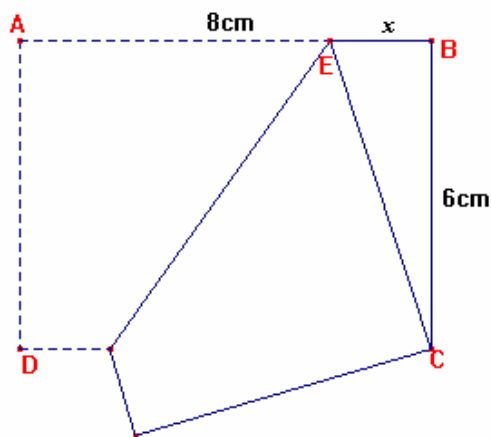
O aluno ainda pode provar usando o ângulo B, que mede 60 graus, da seguinte forma:

$$\text{sen}60^\circ = \frac{h}{l} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{l} \rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

e) Dado o retângulo ABCD representado pelo desenho abaixo.



Dobre o retângulo de modo que o vértice A coincida com o vértice C, como o desenho abaixo.



Calcule a medida x do segmento EB.

Objetivo – Também é uma aplicação do Teorema de Pitágoras.

Consideramos este um exercício do **nível mobilizável** da classificação de Robert (1998), visto que os conhecimentos que são utilizados são bem identificados, pois é uma aplicação do Teorema de Pitágoras, mas é necessária alguma adaptação.

Pré-requisitos – Cálculo algébrico.

As **possíveis dificuldades** que os alunos podem encontrar é a de visualização e transferência de medidas. Ele tem que visualizar, por exemplo, que os segmentos EC e AE têm medidas iguais e medem $(8 - x)$ cm.

Uma **possível resolução** é a seguinte:

Observando a figura, temos que $AE \equiv EC \equiv (8 - x)$

O triângulo BCE é retângulo em B, pois ABCD é um retângulo. Logo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras. Assim, temos que:

$$(8 - x)^2 = x^2 + 6^2$$

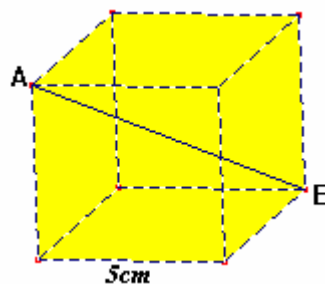
$$64 - 16x + x^2 = x^2 + 36$$

$$64 - 16x = 36$$

$$16x = 28$$

$$x = \frac{28}{16} = \frac{7}{4} = 1,75$$

f) Calcule o comprimento da diagonal AB do cubo de aresta igual a 5cm conforme a figura abaixo:



O **objetivo** deste exercício é preparar o raciocínio do aluno para o exercício seguinte. Ao realizar esta tarefa, o aluno estará realizando uma prova, no *exemplo genérico*, para a fórmula da diagonal de um cubo.

Consideramos que este exercício é do **nível disponível** de acordo com Robert (1998), visto que não é dada nenhuma sugestão referente ao teorema de Pitágoras.

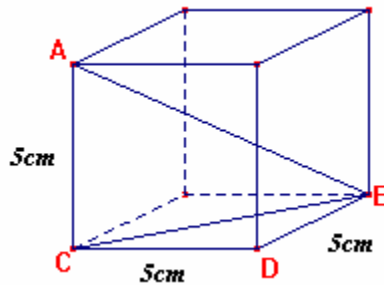
As **possíveis dificuldades** devem acontecer na visualização, pois o aluno tem que traçar a diagonal de uma das faces para perceber que o

segmento AB é hipotenusa de um triângulo retângulo que tem como um dos catetos a diagonal traçada. Além disso, tem que efetuar cálculos envolvendo potência de radical.

Os **pré-requisitos** são potenciação, radiciação e propriedades do cubo.

Uma **resolução possível** é a seguinte:

Traçando-se sobre a base do cubo a projeção ortogonal do segmento AB, obtemos a seguinte figura



Considere o triângulo BCD, que é retângulo em D, pelas propriedades do cubo. Pelo Teorema de Pitágoras temos que:

$$BC^2 = CD^2 + BD^2$$

$$BC^2 = 5^2 + 5^2$$

$$BC = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\text{cm}$$

Por outro lado, considere o triângulo ABC, que é retângulo em C, pelas propriedades do cubo. Aplicando o teorema de Pitágoras temos que:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = 5^2 + (5\sqrt{2})^2 = 25 + 25 \cdot 2 = 25 + 50 = 75$$

$$AB = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\text{cm}$$

g) Sendo D uma diagonal do cubo cuja aresta mede a, prove que $D = a\sqrt{3}$.

Objetivo – Desenvolver o cálculo algébrico, muito importante na atividade de prova.

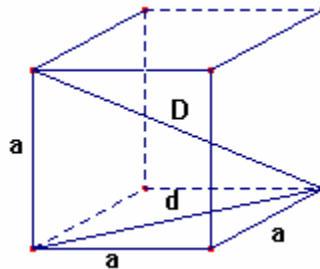
Se considerarmos que este exercício é semelhante ao da letra f, podemos classificá-lo no **nível mobilizável**, pois neste caso os conhecimentos que são utilizados são bem identificados, como afirma Robert (1998), entretanto, se o considerarmos isoladamente, sem a dica do exercício anterior, podemos classificá-lo no nível disponível.

As **dificuldades possíveis** são as de interpretação do enunciado, a representação do mesmo em figuras, o cálculo algébrico e o cálculo com radicais.

Pré-requisitos – propriedades do cubo, cálculo algébrico e cálculo com radicais.

Uma **possível resolução** é a seguinte:

Considerando a figura abaixo em que d representa a diagonal da base do cubo e D representa uma diagonal do cubo.



Pelo Teorema de Pitágoras e considerando as propriedades de um cubo, observando a figura, temos que

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

Novamente, observando a figura, considerando as propriedades de um cubo e pelo Teorema de Pitágoras, temos que

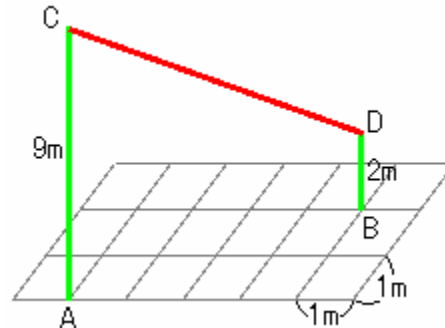
$$D^2 = a^2 + d^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$$

$$D^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$$

$$D = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

Assim, está provado.

h) Existem dois postes AC e BD perpendiculares a um plano, como mostra a figura. O plano está dividido em quadrados cujos lados medem 1m. AC = 9 m, BD = 2 m. Encontre o comprimento de CD.



Objetivo – Desenvolver a capacidade do aluno em aplicar os recursos disponíveis (o Teorema de Pitágoras) na resolução de problemas.

A questão proposta não apresenta nenhuma indicação ou sugestão, por isto, a classificamos no **nível** de funcionamento **disponível** da classificação de Robert (1998).

Pré-requisitos – Cálculo com radicais.

Aqui as **possíveis dificuldades** deverão acontecer somente nos processos de cálculo, visto que com os dois exercícios anteriores os alunos já terão adquirido certa maturidade na visualização de triângulos retângulos.

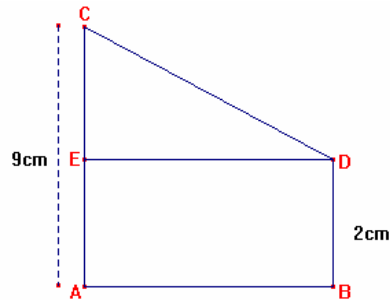
Uma **possível solução** é a seguinte:

Observando a figura, observa-se que o segmento AB é hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 4m e 2m, portanto pelo Teorema de Pitágoras temos que:

$$AB^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$$

$$AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\text{cm}$$

Para Calcular CD, basta imaginar a seguinte figura

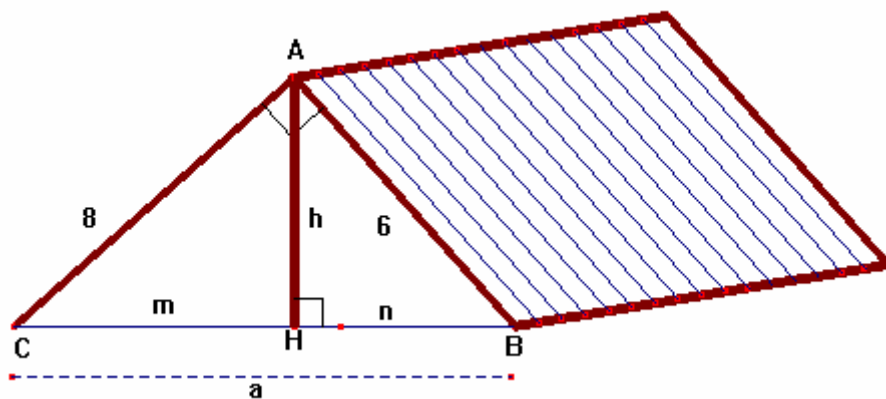


Na qual temos que os segmentos AB e ED são paralelos e congruentes por construção. Neste caso temos o triângulo CED , retângulo em E , cujos catetos ED e EC medem respectivamente $2\sqrt{5}$ cm e 7cm. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras temos que:

$$CD^2 = ED^2 + EC^2 = (2\sqrt{5})^2 + 7^2 = 4 \cdot 5 + 49 = 20 + 49 = 69$$

$$CD = \sqrt{69}$$

i) A figura abaixo representa o projeto da cobertura de uma casa. O futuro proprietário deseja que essa cobertura, vista de frente, tenha a forma de um triângulo retângulo, cujo ângulo reto fique na cumeeira do telhado (ponto A). Ele ainda almeja que um lado do telhado meça 8m e o outro lado meça 6m. O arquiteto responsável pelo projeto está com algumas dúvidas e precisa do teu auxílio para saná-las. Ajude-o. Veja abaixo:



i1) Qual deve ser a largura a desse telhado?

i2) Qual a medida m do comprimento do segmento \overline{CH} ?

i3) Qual a medida n do comprimento do segmento \overline{HB} ?

i4) Qual deve ser a altura h desse telhado?

Objetivo – Colocar o aluno diante de uma situação em que possa aplicar as relações que foram provadas a partir do Teorema de Pitágoras. Observar o desempenho do aluno em exercícios de aplicação, após executar atividades com provas.

Consideramos esse exercício no **nível técnico** de Robert (1998), visto que os alunos poderão apenas utilizar as fórmulas obtidas na atividade 3.

Os **pré-requisitos**, as **possíveis dificuldades** e as **possíveis resoluções** estão apresentados logo abaixo, separadamente por item.

Para esta atividade será permitido o uso de calculadora.

i1) Qual deve ser a largura a desse telhado?

Pré-requisitos – Teorema de Pitágoras e cálculos com raiz quadrada.

Considera-se que o aluno **não terá dificuldade** neste item.

Possível resolução

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, tem-se que $a^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow a = \sqrt{100} \Rightarrow a = 10$. Logo a largura do telhado deve ser de 10 metros.

i2) Qual a medida m do comprimento do segmento \overline{CH} ?

Pré-requisitos – Relações métricas no triângulo retângulo.

Consideramos que o aluno **não terá dificuldade** neste item.

Possível resolução

Observando o telhado e aplicando uma das relações métricas no triângulo retângulo ABC, tem-se que $8^2 = m \cdot a \Rightarrow m \cdot a = 64$, como $a = 10$, $m = \frac{64}{10} = 6,4$

Logo, o comprimento m é 6,4 metros.

i3) Qual a medida n do comprimento do segmento \overline{HB} ?

Possíveis **pré-requisitos** – Subtração ou relações métricas no triângulo retângulo.

Consideramos que o aluno **não terá dificuldade** neste item.

Soluções Possíveis.

1. Como pela figura do telhado $a = m + n$ e já sabemos que $a = 10$ e $m = 6,4$ tem-se que $n = a - m = 10 - 6,4 = 3,6$. Assim o comprimento n é 3,6 metros.
2. Observando o telhado e aplicando uma das relações métricas no triângulo retângulo ABC, tem-se que $6^2 = n.a \Rightarrow na = 36$, como $a = 10$, $n = \frac{36}{10} = 3,6$. Logo o comprimento n é 3,6 metros.

i4) Qual deve ser a altura h desse telhado?

Possíveis **pré-requisitos** - relações métricas no triângulo retângulo, radiciação com números decimais e Teorema de Pitágoras.

Uma **possível dificuldade** pode ser a extração da raiz quadrada de números decimais.

As **possíveis resoluções** são:

1. Pela relação $h^2 = m.n = 6,4 \cdot 3,6 = 23,04 \Rightarrow h = \sqrt{23,04} = 4,8$. Logo o comprimento h é 4,8 metros.
2. No triângulo retângulo ABH temos pelo Teorema de Pitágoras que $6^2 = h^2 + n^2 \Rightarrow h^2 = 36 - n^2 = 36 - 3,6^2 = 36 - 12,96 = 23,04 \Rightarrow h = \sqrt{23,04} = 4,8$. Logo o comprimento h é 4,8 metros.
3. No triângulo retângulo ACH temos pelo Teorema de Pitágoras que $8^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow 64 = h^2 + 6,4^2 \Rightarrow h^2 = 64 - 40,96 = 23,04 \Rightarrow h = \sqrt{23,04} = 4,8$. Logo, o comprimento h é 4,8 metros.
4. Aplicando a relação $a.h = b.c$. Então, $10h = 6.8 \Rightarrow h = \frac{48}{10} = 4,8$.

CAPÍTULO IV

EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE *A POSTERIORI* DAS ATIVIDADES

Neste capítulo apresentamos um relato sobre a fase de experimentação da seqüência didática, o público alvo e a análise *a posteriori* de cada atividade.

4.1. Experimentação

Optamos por aplicar a seqüência didática apenas a alunos da 1ª. série do Ensino Médio, por conveniência, já que esses alunos pertenciam às turmas do próprio professor aplicador, que é também o professor pesquisador.

Mesmo conhecendo os alunos, encontramos dificuldades para conseguir um número suficiente de participantes. A atividade deveria ser aplicada em horário diferente do horário normal de aula dos alunos. Assim, no período vespertino aplicaríamos as atividades para alunos do horário matutino, e no período matutino aplicaríamos para os alunos do período vespertino.

O convite foi estendido a três turmas, sendo duas turmas de escola particular da cidade de Itapeverica da Serra, município do interior do Estado de São Paulo, e uma turma de escola pública estadual, localizada no Capão Redondo, bairro da periferia da zona sul da Capital Paulista.

Os alunos da escola pública não se dispuseram a participar, justificando-se que não teriam tempo disponível fora do horário normal de aula, e quando desafiados a realizarem a tarefa no próprio período de aula, durante as aulas de matemática, se esquivaram, desculpando-se por não terem facilidade para realizar tais tarefas. Inclusive em conversa particular com dois alunos considerados “bons” em matemática, percebemos uma falta de vontade em participar, demonstrando-se receosos.

Já alunos das duas classes de escola particular, uma do período matutino (turma A) e a outra do período vespertino (turma B), demonstraram ter boa vontade, mas se desculpavam em não poder participar em horário diferente ao seu horário normal de aula.

Na turma A, apenas três duplas se dispuseram a participar, mas logo em seguida um aluno desistiu e então ficamos apenas com 5 alunos. Formamos então uma dupla e um trio.

Devido às dificuldades de se trabalhar em horário diferente do horário normal das aulas, resolvemos que na turma B, por ter número reduzido de alunos, aplicaríamos as atividades no próprio horário da aula de matemática, o que também não foi fácil, pois na rotina da sala de aula, alguns alunos tendem a não colaborar e não levar a sério. Portanto, escolhemos limitar a aplicação a apenas 5 duplas. Abaixo apresentamos as duplas de trabalho.

Dupla (Gui, Yu) manteve-se até o final das atividades

Trio (Pep, Ma, Lou) manteve-se até o final.

Dupla (Rau, Ped) manteve-se até o final, um dos componentes faltou em um dos encontros.

Dupla (Wil, Ary) manteve-se até o final.

Dupla (Nat, Tha) manteve-se até o final.

Dupla (Jo, Gui) manteve-se até o final, mas com ausência freqüente de um dos componentes.

Dupla (Vi, Tha) manteve-se até o final.

Na dupla (Wil, Ary) o aluno Wil em certos momentos, por conta própria, resolveu trabalhar sozinho, mas ao final voltou ao trabalhar em duplas.

Usamos para a nossa análise a dupla (Gui, Yu) e o trio (Pep, Ma, Lou), que, por comodidade, algumas vezes chamaremos de dupla e trio, respectivamente. Escolhemos esses dois grupos por terem trabalhado em horário diferente do seu horário de aula, permitindo um maior controle dos registros de suas discussões.

Sempre que for necessário, faremos comentários sobre os outros grupos.

A dupla (Gui, Yu) completou os trabalhos em três encontros. No primeiro, realizou a atividade 1 que durou 26 minutos e também a atividade 2 que durou 45 minutos, nesse mesmo encontro iniciou a atividade 3, por insistência deles. No segundo encontro, a dupla reiniciou a atividade 3, que durou 72 minutos,

incluindo o tempo gasto no primeiro encontro. No terceiro e último encontro, realizou a atividade 4, que durou 70 minutos.

O trio (Pep, Ma, Lou) completou as atividades em 4 encontros. No primeiro, realizou a atividade 1, em 30 minutos, a atividade 2 em 50 minutos e também iniciou a atividade 3, por insistência do próprio trio. No segundo encontro, retomou a atividade 3 e a concluiu em 77 minutos, incluindo o tempo gasto no primeiro encontro. No terceiro encontro, que durou 90 minutos realizou a atividade 4.

Para a realização das atividades, em cada encontro, era entregue aos alunos somente o questionário referente à atividade daquele encontro, mas podiam usar o software, quando necessitassem. Nesse questionário teriam que registrar suas respostas e ao final devolver ao professor pesquisador. Os grupos foram orientados a não apagar nada do que escrevessem, mesmo que errado, para isto aconselhamos a utilização de caneta.

Antes da realização das tarefas, os alunos se familiarizaram com o software Cabri Géomètre II. Esse trabalho de familiarização foi realizado em aulas particulares com as duplas, durante as aulas de matemática do professor pesquisador.

4.2 Levantamento de dados

Os dados utilizados na análise *a posteriori* constam de:

a) Observações e anotações das falas dos alunos, das discussões entre eles no grupo, das dificuldades que encontraram ao realizar as tarefas e dos diálogos entre grupo e professor.

b) Produção dos grupos na forma de material escrito, nas folhas de atividades.

c) Discussões no grupo, obtidas através de aparelho de gravação de voz. Duas duplas foram gravadas.

4.3 Análise a posteriori da atividade 1

A atividade 1 é introduzida por meio de 9 puzzles construídos a partir de triângulos retângulos diferentes (vide pág. 68 e 69). Os alunos poderiam escolher quantos puzzles achassem necessários e por superposição, deveriam cobrir, sem deixar falhas ou remonte, o quadrado construído a partir da hipotenusa com as cinco peças que constituem os quadrados construídos sobre os catetos.

O objetivo dessa atividade é que os alunos, através de uma situação empírica, percebam que os quadrados construídos sobre os catetos se encaixam no quadrado construído sobre a hipotenusa.

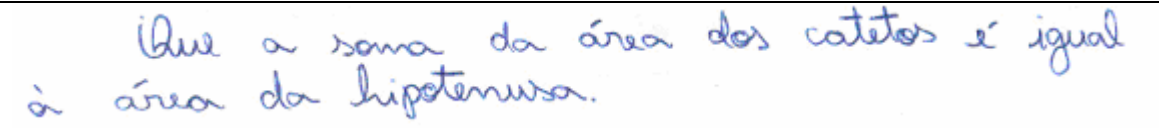
Observamos que, apesar de terem nove puzzles à sua disposição, os alunos se contentam em utilizar apenas um puzzle para concluir a relação. Assim concluímos, pelas discussões entre eles, que isto ocorreu, não só por confiarem plenamente no experimento empírico, mas por já conhecerem essa relação. Em discussão nos grupos ouvíamos eles falarem “É o teorema de Pitágoras!”.

Concluímos neste início que o software não foi bem explorado pelos alunos, mas cremos que isto ocorreu devido ao conhecimento prévio desses alunos, em relação ao teorema de Pitágoras. Ficou patente que o puzzle só serviu para eles (os alunos) confirmarem o que já sabiam. Assim, o potencial do software não foi bem explorado.

Em seguida a atividade faz alguns questionamentos, que estão a seguir:

a) O que você observou? Relacione as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. O que você conclui?

A dupla (Gui,Yu) respondeu:



Que a soma da área dos catetos é igual à área da hipotenusa.

Já o trio T1 respondeu:

Que a área construída sobre a hipotenusa é resultado da soma das áreas construídas sobre os catetos.

Entendemos que os dois grupos compreenderam bem o que deveriam responder, mas cometem falhas na forma como se expressam. A dupla (Gui, Yu) escreveu “área dos catetos”, e o trio (Pep, Ma, Lou) escreveu: “área construída sobre a hipotenusa” e “áreas construídas sobre os catetos”.

Aproveitamos a boa oportunidade para discutir com os grupos, a fim de esclarecê-los que, cateto e hipotenusa são segmentos e portanto têm área nula. E demos dicas da forma como poderiam ter se expressado. Eles questionaram, mas chegamos à conclusão de que não construímos áreas e sim calculamos áreas. Que área é um número real positivo. Consideramos termos obtido proveito nessa discussão.

Com o objetivo de fortalecermos a idéia de que, o conhecimento prévio dos alunos em relação ao teorema de Pitágoras, influenciou nas suas respostas, vamos incluir a resposta dada a este item a, pela dupla (Jo,Gui). Essa dupla apresentou a seguinte conclusão:

Observamos que por, $Hip^2 = Cat^2 + Cat^2$; a área/volume da hipotenusa é igual a dos catetos; por isso foi possível transportar os 2 quadrados (formados a partir das medidas dos catetos) para o maior quadrado (formado a partir da medida da hipotenusa).

Mais uma vez fica claro que esses alunos usaram o teorema de Pitágoras como premissa para as suas conclusões, pois em outras palavras dizem que foi possível montar os puzzles porque o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Vamos continuar observando o próximo item.

b) Represente a medida da hipotenusa do triângulo retângulo pela letra a , e por b e c as medidas de cada cateto. Relacione as três medidas a , b e c .

Em relação ao item b, consideramos que o objetivo foi alcançado, pelos dois grupos analisados, que deram a resposta esperada $a^2 = b^2 + c^2$, como mostramos abaixo.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(Gui, Yu)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(Pep, Ma, Lou)

c) A verificação feita com os puzzles é confiável, suficiente, e dá certeza de que a relação obtida no item b é sempre válida em qualquer triângulo retângulo? Justifique.

As respostas obtidas da dupla e do trio, respectivamente, são as seguintes:

Sim. Pois em qualquer triângulo retângulo, a medida da hipotenusa será a base do quadrado, e qual se descobre pela área dos outros dois menores (dos catetos).

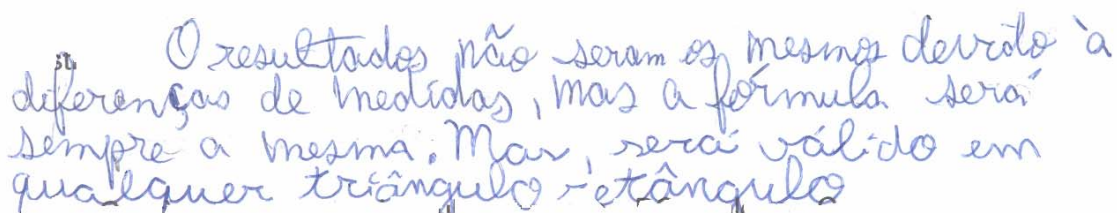
Sim, porque as letras contidas na fórmula são variáveis, podem se ajustar as medidas de todos os triângulos retângulos.

Como vemos, os dois grupos concordam que o experimento empírico é confiável e que garante a validade do teorema de Pitágoras para qualquer triângulo retângulo. Mas as suas justificativas não são as que gostaríamos que fossem.

Analisando separadamente cada grupo, consideramos que a dupla já conhecia o teorema de Pitágoras e se apoia nesse conhecimento para fazer sua conclusão. Ao invés de afirmarem que a relação é verdadeira por confiarem no experimento que realizaram, eles afirmam que o experimento é confiável, pois em qualquer triângulo retângulo a relação é válida. Assim, ficou claro que a conclusão deles baseou-se no conhecimento prévio do teorema de Pitágoras e não no experimento em si, mesmo porque o experimento foi pouco explorado, mostrando que os alunos não tinham dúvidas sobre essa relação.

Já o trio, respondeu que sim, que o experimento com os puzzles é confiável e que garante a validade da relação em qualquer triângulo retângulo, mas justificou-se tentando fazer uma generalização baseada também no teorema de Pitágoras, afirmando até de forma interessante, que as letras “podem se ajustar às medidas de todos os triângulos retângulos”, mas os puzzles nem apresentam tais letras, que segundo o trio se ajustam em qualquer triângulo! Neste caso, podemos também concluir que, o trio apoia-se no conhecimento prévio do teorema de Pitágoras. Em suma, poderíamos escrever a resposta do trio da seguinte forma: Sim, o experimento é confiável, pois o teorema de Pitágoras é válido.

Uma justificativa, que pareceu-nos muito interessante, foi novamente da dupla (Jo,Gui), que diz:



Os resultados não foram os mesmos devido à diferenças de medidas, mas a fórmula será sempre a mesma. Mas, será válido em qualquer triângulo retângulo

Essa dupla mostra certa desconfiança na verificação com os puzzles, quando declara que “os resultados não serão os mesmos, devido às diferenças de medidas”, o que consideramos uma ótima conclusão, e bem próxima da resposta que esperávamos, pois eles parecem ter percebido pequenas falhas nesse processo de verificação com os puzzles. Todavia, o que causou-nos certa decepção, foi a forma como concluíram, pois a frase “mas a fórmula será sempre a mesma”, mostra que eles estão apoiados no teorema de Pitágoras.

O objetivo deste item, é levantar dúvidas sobre a confiabilidade desse método empírico de prova, e também conduzir o aluno a novas conjeturas e investigações em outros casos particulares de triângulos. Mas os alunos, ao que parece, não compreenderam bem a questão.

Concluindo a análise deste item, parece-nos mais provável que, ao responderem “sim”, os alunos demonstram uma confiança mais baseada no conhecimento prévio do teorema de Pitágoras, do que no método de verificação feita com os puzzles. Nossa expectativa era que os alunos questionassem a verificação empírica da relação pitagórica e fossem percebendo a necessidade de provas mais confiáveis e que fossem adquirindo essa confiança, aos poucos, à medida que realizassem as futuras tarefas. Entretanto, vamos aguardar quais comportamentos terão mais adiante.

d) No Cabri, construa um triângulo retângulo ABC qualquer. Com a ferramenta “distância ou comprimento” meça os lados de seu triângulo e com a calculadora verifique a relação percebida anteriormente. O que você conclui?

Resposta dada pela dupla.

dos catetos ao quadrado e é igual à hipotenusa ao quadrado $(a^2 = b^2 + c^2)$.
 HIPOTENUSA cateto 1 cateto 2

Ou a soma dos catetos ao quadrado é igual à hipotenusa ao quadrado

Concluimos
 que a fórmula $(a^2 = b^2 + c^2)$ pode ser aplicada em qualquer
 triângulo retângulo independente do tamanho dos seus catetos
 e hipotenusa.

Resposta dada pelo trio.

O objetivo deste item é oferecer ao aluno um novo processo de validação para a relação pitagórica, a partir de uma construção própria no Cabri.

O que esperávamos era apenas que os alunos concluíssem que, para esse novo triângulo retângulo construído, a relação observada anteriormente também é válida.

O trio demonstra-se muito confiante em relação à sua construção, a ponto de generalizar, pois concluem que “a fórmula $(a^2 = b^2 + c^2)$ pode ser aplicada em qualquer triângulo retângulo independente do tamanho dos seus catetos e hipotenusa”.

Já a dupla, apenas apresenta a sua conclusão sem fazer generalização, o que consideramos uma resposta mais correta.

Achamos importante destacar o que ocorre com a dupla (Rau, Ped), durante a execução desta tarefa (item d), e que está registrado na gravação.

O professor percebeu que essa dupla (Rau, Ped) estava bastante adiantada, por ter passado muito rapidamente por esse exercício do item d. Assim, ao ser interrogada, pelo professor, sobre sua rapidez, a dupla disse que, neste item d, não precisaram realizar a construção do triângulo com o software, pois já sabiam que “de qualquer jeito a hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos”.

Esse fato, mostra que os alunos não tiveram curiosidade em realizar a tarefa, por conhecerem o teorema de Pitágoras.

e) A verificação feita no item d, garante que a relação vale sempre para qualquer triângulo retângulo? Justifique.

Respostas:

Dupla (Gui, Yu)

Sim. Afinal de contas, depois de testes, prova-se que a fórmula será sempre correta.

Trio (Pep, Ma, Lou)

Sim, pois as letras contidas na forma são variáveis

Como prevíamos, os dois grupos consideraram que a relação é válida sempre para qualquer triângulo retângulo.

Consideramos uma resposta absolutamente aceitável para essa situação dos alunos e mostra que esses alunos não conhecem níveis mais sofisticados de provas.

A dupla justifica que depois dos testes feitos já poderiam considerar uma prova. Essa justificativa pode ser uma demonstração da confiança desses alunos nos experimentos com o software.

Para De Villiers (2001), “quando os alunos já investigaram com cuidado uma conjectura geométrica, por meio de uma variação contínua, têm pouca necessidade de fazer maior investigação”. Seria essa a situação desses alunos? Pode ser, mas não temos muita certeza, pois não chegaram a fazer uma investigação cuidadosa, a ponto de adquirirem tanta confiança. É provável também que essa confiança deva-se ao conhecimento prévio do teorema de Pitágoras, como já temos citado. Mas o que é importante destacar é que a resposta dessa dupla mostra, que eles não sentem necessidade de mais provas.

Já o trio também considera válida a relação pitagórica em qualquer triângulo retângulo e justifica que isto ocorre porque “as letras contidas na forma são variáveis”. Mas este era um caso particular de triângulo e também não aparecem tais letras das quais o trio se refere, ao escrever sobre as “letras

contidas na forma”. Talvez os alunos do trio tenham sido influenciados pelo item b, na qual usaram letras para representar os lados do triângulo. Também, poderíamos considerar que, esses alunos consideraram o experimento como válido para qualquer triângulo retângulo, por estarem num nível de prova que Balacheff (1988) chama de *Exemplo genérico*.

Referente à dupla (Rau,Ped) que não realizou a tarefa do item d, como citamos na análise do item anterior, respondem que “Sim, por que é uma fórmula que garante que $a^2 = b^2 + c^2$ ”. Mas eles não realizaram a tarefa, como chegaram a essa conclusão?

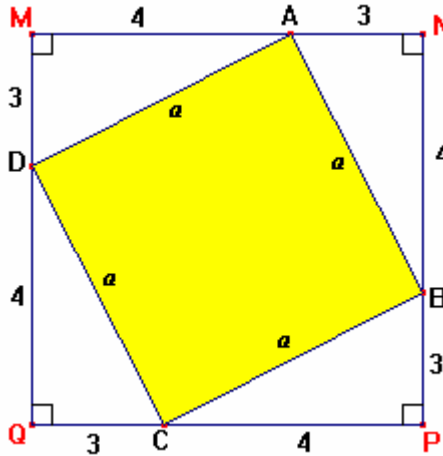
Concluindo a atividade 1, consideramos que os alunos, em geral, tiveram um desempenho dentro do esperado, e todos apresentaram resultados bem semelhantes. Mas não que esse desempenho seja considerado o melhor. Consideramos que foi o esperado, por estar dentro do que dizem a maioria das pesquisas, que pregam sobre as dificuldades dos alunos em relação às provas, em particular sobre a dificuldade que os alunos têm de reconhecer a necessidade de provas.

Passemos à análise da atividade 2. Vamos observar se os alunos mudarão de idéia, em relação à alta confiança que demonstraram ter, no método empírico de verificação.

4.4. Análise *a posteriori* da Atividade 2

Esta atividade visa conduzir o aluno a uma prova para a relação pitagórica, utilizando o conceito de área. A atividade apresenta quatro itens, os quais analisaremos abaixo:

a) Na figura abaixo o quadrilátero ABCD, é um quadrado. Justifique.



Neste item a, da atividade 2, acontece algo curioso, com a dupla (Gui, Yu). Na discussão entre os dois componentes, podemos ouvir por meio da gravação, o seguinte:

Ao ler a questão, Gui diz em tom de deboche: “Tem que justificar? Está de brincadeira! Se aqui está dizendo que todos os lados são iguais, então logicamente que é um quadrado!”

Já Yu complementa sorrindo com Gui: “Um quadrilátero é um quadrado”.

Gui pergunta em seguida: “Quem foi que elaborou isso aqui?”

Após uma pequena pausa, Gui solicita a presença do professor aplicador, e insiste dizendo com certa liberdade: “Dá licença, né? Na figura abaixo o quadrilátero, ou seja, quatro lados iguais...”. “Não!” O professor interrompe dizendo: “Não. Um quadrilátero é uma figura de quatro lados, mas não significa que tem quatro lados iguais”.

Gui insiste dizendo: “Mas é um quadrado. Se na figura, os quatro lados medem a , significa que todos são iguais. Não é meio lógico?”

“Para um quadrilátero ser quadrado, basta ter lados iguais?” Questiona o professor, dando exemplo do losango.

Yu, mostrando-se convencido, responde: “É verdade Gui”. Mas Gui ainda não convencido diz: “É sim. Quadrado é só lados iguais”. Mas em seguida desculpa-se e completa: “É verdade, precisa ter ângulos iguais, também”.

A gravação mostra que, em seguida, a dupla argumentou, por algum tempo, tentando buscar a justificativa de que o quadrilátero ABCD era um

quadrado, mas desiste, para tentar resolver o item b. Essa idéia de partir para o item b, sem resolver o item a, partiu de Gui, que se justificou dizendo: “Vamos fazer o item b e calcular o valor de a da figura. Cálculo é mais legal, depois voltamos para o item a”.

Isso mostra que os alunos não gostam de trabalhos com demonstrações por considerarem algo difícil, preferindo aqueles exercícios com cálculos, como normalmente são as aulas de matemática.

Observamos que de todos os grupos investigados, somente a dupla (Gui, Yu) solicitou a presença do professor pesquisador, a fim de questionar sobre o item a. Os outros grupos não fizeram nenhum tipo de argumentação, e, simplesmente, passaram ao item b. Mas, ao serem questionados, uns diziam que não tinham o que justificar, pois no enunciado do item a, já está afirmando que o quadrilátero é um quadrado; outros diziam que a figura mostra claramente que é um quadrado, pois tem lados iguais e os ângulos de 90 graus; outros consideravam ser uma questão muito difícil.

Quando ouvimos a gravação de voz da dupla (Rau, Ped), percebemos que os alunos lêem a questão e logo concluem que o quadrilátero ABCD é um quadrado por ter lados iguais e ângulos iguais, mas chegam à essa conclusão apenas olhando para a figura. Eles falam “Todos os lados são iguais e os quatro ângulos são iguais.”

Ao perceber a dificuldade, e afim de não deixar que essa questão passasse em branco e perdesse seu objetivo, o professor aplicador, orientou os alunos, de que bastava mostrar que os ângulos internos do quadrilátero ABCD eram todos iguais a 90 graus, já que os lados já são iguais. Mesmo assim, os alunos continuaram com dificuldades, então foi dada uma nova sugestão, a de observarem que os dois ângulos agudos dos triângulos da figura são complementares e que seria melhor atribuir um valor a cada um desses ângulos, como por exemplo o valor x e o valor y.

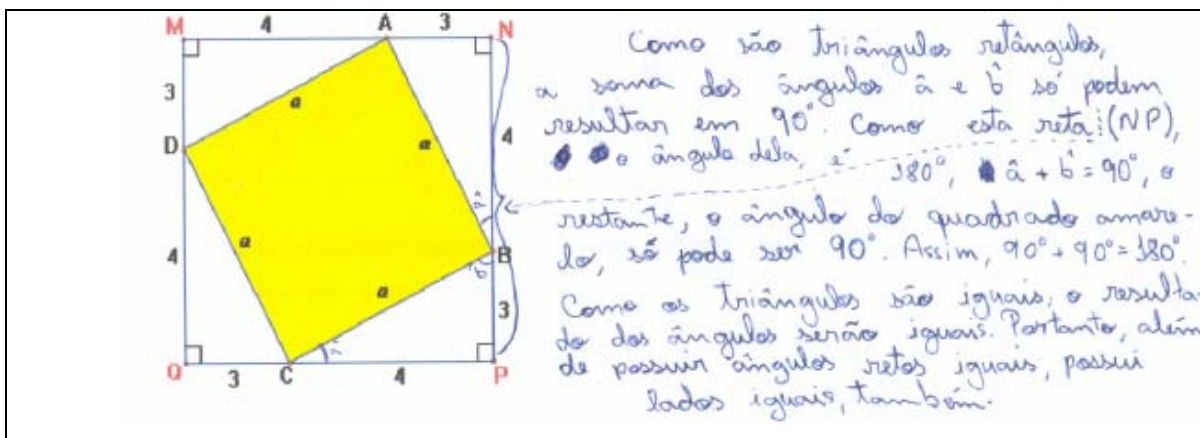
Depois dessas dicas, alguns grupos conseguiram mostrar, pelo menos para um dos ângulos, que media 90 graus. Devido ao longo tempo envolvido com esse primeiro ângulo, os alunos acabam esquecendo-se de considerar a

demonstração como válida para os outros três ângulos do quadrilátero. Outro fato que utilizam, sem justificar, é o de que os triângulos são congruentes.

Alguns grupos, por causa da dificuldade, teimavam em não realizar a tarefa, pois consideravam óbvio que o quadrilátero tinha lados iguais e visualmente os ângulos mediam 90 graus.

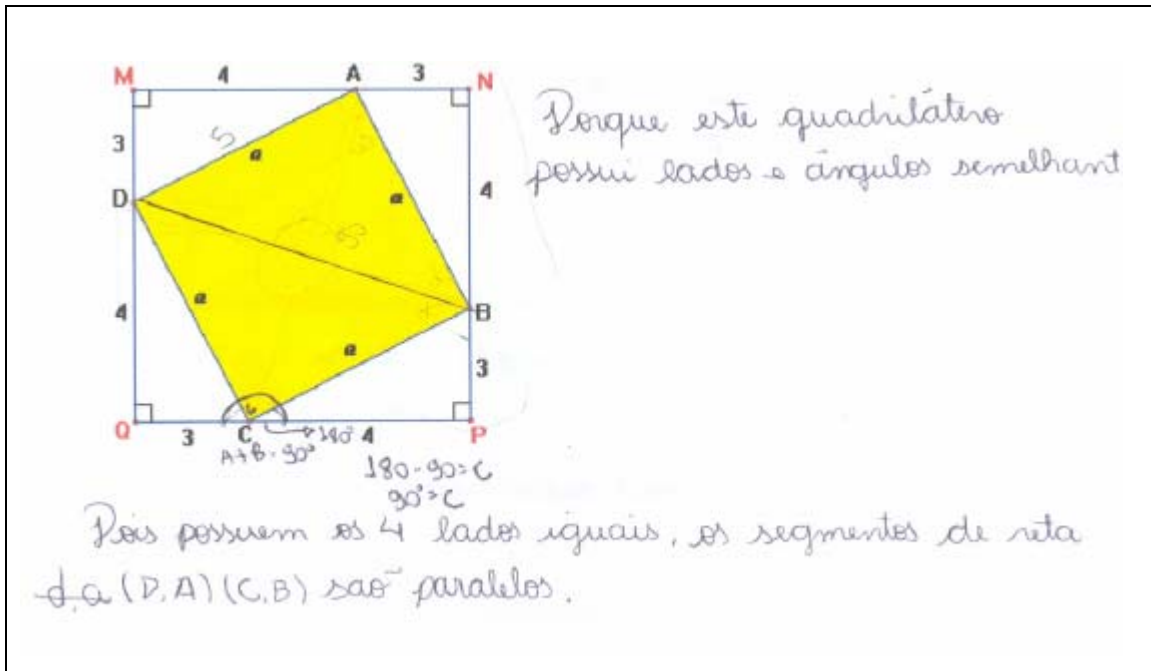
Apresentamos a seguir as respostas dadas pelos dois grupos que estamos dando destaque nesta análise.

A dupla (Gui, Yu) apresentou a seguinte justificativa:



Mesmo tendo recebido sugestões, ainda podemos considerar essa, uma excelente justificativa. Basta notar que essa dupla justifica, corretamente, que os quatro ângulos medem 90 graus. Considera que “os triângulos são iguais”, onde poderia considerar que “os triângulos são congruentes”, mostrando ter uma linguagem diferente. Enfim, consideramos que essa é uma prova bem elaborada, e talvez dentro do nível que Balacheff (1988) chama de *exemplo genérico*, pois é uma prova que utiliza propriedades de ângulos complementares e de ângulos rasos, e também faz uma explicitação das razões porque o quadrilátero é um quadrado. E, por fazer uso de uma figura, que nos parece ser um representante particular, é que a classificamos neste nível e não no nível da *experiência mental*. Mas pode ser que se enquadre neste último.

O trio (Pep, Ma, Lou), apresentou a seguinte justificativa:



Observa-se que o trio justifica corretamente que o ângulo C mede 90 graus, mas falha em não considerar o mesmo, para os outros três ângulos A, B e D, visto que ao justificar “Porque este quadrilátero possui lados e ângulos semelhantes”, o trio está, implicitamente, considerando que esses ângulos A, B e D, medem 90 graus. Entendemos isto como uma das dificuldades que os alunos apresentam, quando realizam provas. Eles não escrevem os detalhes daquilo que concluem em cada passo do seu processo de prova, mas utilizam essas conclusões anteriores em passos posteriores.

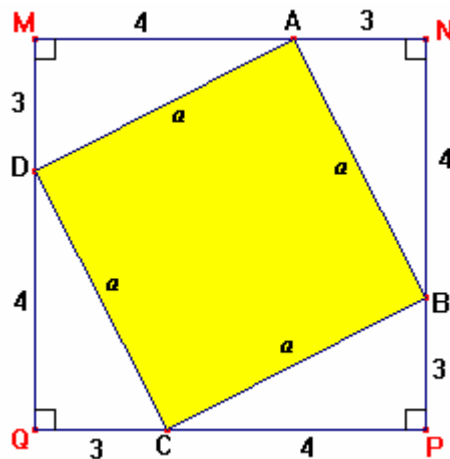
Durante a execução desse item a, o trio demonstrou ter muitas dificuldades, mesmo com todas as sugestões do professor aplicador. Até apresenta também uma outra justificativa, a qual não compreendemos bem, que foi a seguinte: “Pois possuem os 4 lados iguais, os segmentos de reta (D,A) (C,B) são paralelos”.

Observa-se, também, que esses alunos (do trio) traçaram o segmento BD, mostrando terem tentado outras formas de argumentação, o que mostra que tentaram outros caminhos, o que é interessante, mas parece não terem alcançado sucesso.

Concluimos nesta tarefa do item a, que, no geral, os alunos não vêem necessidade de buscar uma justificativa. Alguns, por não compreenderem o enunciado da questão, outros, por considerarem que a própria figura já é suficiente. E aqueles, que reconhecem a necessidade de justificar, mostram ter grandes dificuldades em encontrar uma argumentação inicial. E é talvez essa dificuldade inicial de que cita Gouvêa (1998) quando considera que uma das dificuldades encontradas pelos alunos, é o “procedimento de resolução: Como começar? Quais conhecimentos a serem utilizados?” E para Gouvêa (1998), quando essa dificuldade surge, ou o aluno busca a ajuda do professor antes de tentar resolver sozinho ou se desanima sem apresentar nenhuma resposta, ou por fim escolhe dar uma resposta absurda.

b) Calcule o valor de a , da figura do item a, utilizando o conceito de área. Justifique.

Para facilitar, vamos incluir a figura do item a.



Ao observarmos as respostas dos alunos, concluimos que todos eles calculam o valor de a , sem dificuldades, mas, infelizmente, utilizando o teorema de Pitágoras e não o conceito de área, como pede a questão.

Já estava previsto nesta pesquisa, que, apesar da orientação para usarem o conceito de área, alguns alunos ainda usariam diretamente o teorema de Pitágoras, mas não esperávamos isso de todos os alunos.

Ao questionarmos com vários desses grupos, alguns disseram ter usado o teorema de Pitágoras por não lerem atentamente o enunciado da questão, mas outros disseram ter usado, por não saberem o significado da expressão “conceito de área”.

Essa dificuldade dos alunos, de não compreenderem o significado da expressão “conceito de área”, não está prevista nesta pesquisa, mas chama-nos a atenção, para o fato de que a linguagem pode tornar-se um empecilho a mais para o aluno, quando da resolução de um exercício. Neste caso, uma frase que nos parecia muito óbvia, para o aluno foi obscura.

Na gravação de voz da dupla (Gui,Yu), ouvimos os alunos questionando, dizendo: “Mas que conceito de área é esse? Eu nem sei que conceito de área é esse!” Isso mostra que a dupla compreendeu bem o enunciado, e percebeu que tinha que usar o tal “conceito de área”, mas não soube o que isto significava, e por isso utilizou o teorema de Pitágoras, pois foi o caminho mais simples.

Para não perder o objetivo da questão, o professor aplicador insiste para que a dupla resolva o exercício da forma correta, ou seja, utilizando o “conceito de área”. Para isto pergunta aos alunos da dupla, se sabem calcular área de triângulos e quadrados. Eles respondem que sim, e dão exemplos, mostrando que realmente sabem. Então o professor aplicador esclarece-lhes que isto é o “conceito de área”, do qual fala o enunciado do exercício. “É isto?” Pergunta surpreso, Guy, e parte para tentar resolver a questão.

Depois disto, a dupla ainda precisa de algumas sugestões.

Ao final, um dos componentes da dupla diz: “Era maior fácil e a gente ficou quebrando a cabeça”.

A resposta da dupla (Gui,Yu) é a seguinte:

$3^2 + 4^2 = a^2$
 $9 + 16 = a^2$
 $25 = a^2$
 $5 = a$

49
 $- 24$
 $\hline 25$
 $\sqrt{25} = 5 = a$

Área do quadrado maior
 49
 Área dos triângulos retângulos
 6
 $\times 4 \rightarrow 24$

Retirando a área dos Triângulos da área do quadrado maior, restará somente a área do quadrado menor (amarelo). Como é um quadrado, seu lados são, obviamente, iguais. Sendo assim, o lado seria a raiz da área.

Observa-se na parte superior esquerda a resolução pelo teorema de Pitágoras e à direita a resolução correta.

A dupla considera a área do quadrado maior, igual a 49, depois a área do triângulo retângulo igual a 6, multiplicando por 4 e obtendo 24. Depois considera que “retirando a área dos triângulos da área do quadrado maior, restará somente a área do quadrado menor (amarelo)”. Neste caso, a dupla está considerando que $49 - 24 = 25$, que é a área do quadrado menor (amarelo).

Depois, corretamente, a dupla justifica que: “como é um quadrado, seus lados são, obviamente, iguais. Sendo assim, o lado seria a raiz da área”.

E nos cálculos, mostra corretamente, que $\sqrt{25} = 5 = a$.

Essa dupla, desde o início, surpreendeu-nos, por se expressar de forma clara e bem detalhada.

Já o trio (Pep, Ma, Lou) também não compreendeu o significado da expressão “conceito de área”, e também achou mais conveniente utilizar o teorema de Pitágoras. Mas da mesma forma que faz com a dupla (Gui, Yu), o professor aplicador o incentiva o trio a realizar essa tarefa da forma correta.

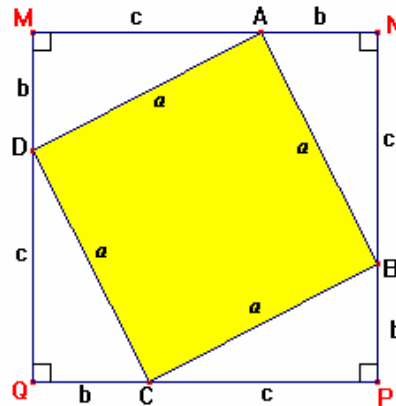
Sua justificativa é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 \\
 a^2 &= 3^2 + 4^2 \\
 A_{\Delta} &= \frac{4 \cdot 3}{2} \\
 A_{\Delta} &= 6 \\
 A_{\square a} &= a \cdot a \\
 A_{\square a} &= a^2 \\
 A_t &= 7 \cdot 7 \\
 A_t &= 49 \\
 A_t &= A_{\Delta} + A_{\square a} \\
 A_t &= 24 + a^2 \\
 49 &= 24 + a^2 \\
 49 - 24 &= a^2 \\
 25 &= a^2 \\
 a &= \sqrt{25} \\
 a &= 5
 \end{aligned}$$

O trio usa a nomenclatura A_{Δ} para área dos triângulos, A_t para área total, referindo-se ao quadrado maior MNPQ, e A_a para área do quadrado ABCD amarelo. Assim, utiliza corretamente a igualdade $A_t = A_{\Delta} + A_a$, e fica fácil compreender a sua resposta que foi $a = 5$.

Antes de continuarmos a análise, lembramos que este item b, prepara o aluno para o item c. Seria um exercício do nível de prova que Balacheff (1988) chama de *exemplo genérico*.

c) Observe o desenho abaixo e calcule o valor de a em função de b e c usando apenas o conceito de área.



Compare com o resultado obtido na atividade 1 letra b. O que você observa?

Neste exercício espera-se que os alunos imitem o processo utilizado no exercício anterior. Assim, seu objetivo é provar a relação pitagórica, de forma algébrica e mais rigorosa, seguindo o mesmo raciocínio e os mesmos passos utilizados no item b. Por fim, os alunos devem comparar esse resultado com aquele obtido empiricamente na atividade 1, por meio do uso de puzzles.

Ao realizar esta tarefa, o aluno está realizando uma prova no nível da *experiência mental* da classificação de Balacheff (1988).

Observando os resultados obtidos dos alunos, vemos que a maioria apresenta a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$ como resposta. Novamente usaram diretamente o teorema de Pitágoras. Estes são exatamente os que não conseguiram realizar o exercício anterior utilizando o conceito de área.

Naturalmente, a dupla (Gui,Yu) e o trio (Pep,Ma,Lou), por terem conseguido realizar com sucesso a tarefa anterior, foram os que conseguiram realizar esta tarefa.

A resposta apresentada pela dupla (Gui,Yu) foi a seguinte:

$$c^2 + 2cb + b^2 - \left[\frac{4cb}{2} \right] = a^2 \rightarrow c^2 + 2cb + b^2 - [2cb] = a^2$$

$$-2c^3b - 4c^2b^2 - 2cb^3 = a^2 \rightarrow c^2 + 2cb + b^2 - 2cb = a^2 \rightarrow \boxed{c^2 + b^2 = a^2}$$

c) Observe o desenho abaixo e calcule o valor de a em função de b e c usando apenas o conceito de área.

$$\sqrt{(c+b)^2 - \left[4 \left(\frac{c \cdot b}{2} \right) \right]} = a \rightarrow \text{ERRADO}$$

$$\sqrt{(c+b)^2 - \left[4 \left(\frac{c \cdot b}{2} \right) \right]} = a \rightarrow \text{CERTO}$$

Compare com o resultado obtido na atividade 1 letra b. O que você observa?

Os ambos resultados são iguais.

$$\begin{matrix} \text{cateto, ao} & & \text{cateto, ao} & & \text{hipotenusa ao} \\ \text{quadrado} & + & \text{quadrado} & = & \text{quadrado} \\ c^2 & + & b^2 & = & a^2 \end{matrix}$$

A fim de compreendermos melhor essa justificativa, vamos organizá-la.

$$\sqrt{(c+b)^2 - \left[4 \cdot \left(\frac{c \cdot b}{2} \right) \right]} = a$$

$$c^2 + 2cb + b^2 - \left[\frac{4cb}{2} \right] = a^2$$

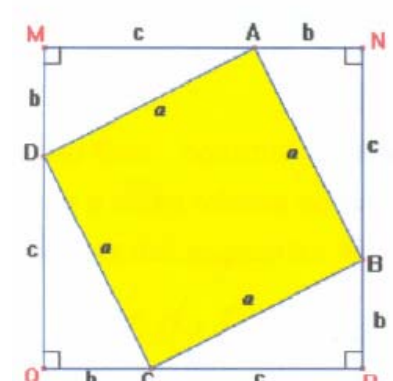
$$c^2 + 2cb + b^2 - 2cb = a^2$$

$$c^2 + b^2 = a^2$$

A solução final que esperávamos era $a = \sqrt{b^2 + c^2}$. Essa dupla, inicia escrevendo na forma correta, isolando o a , mas logo em seguida muda de idéia, representando na forma a^2 , talvez visando obter a relação pitagórica.

Consideramos que foi bom o desempenho da dupla (Gui,Yu), que ao comparar com o resultado obtido na atividade 1, letra b, observa que “ambos os resultados são iguais”, isto é, $a^2 = b^2 + c^2$.

Já a resposta do trio (Pep, Ma, Lou), é a seguinte:



$A_{\Delta} = \frac{c \cdot b}{2}$ $A_{\text{quad}} = a \cdot a$ $A_t = c \cdot b$
 $A_t = \frac{c \cdot b}{2} \cdot 4$ $A_t = \frac{c \cdot b \cdot a^2 \cdot 4}{2}$
 $A_t = (b+c) \cdot (b+c)$ \rightarrow
 $A_t = b^2 + bc + cb + c^2$
 $A_t = b^2 + c^2 + 2bc$

$b^2 + c^2 + 2bc = c \cdot b \cdot a^2 \cdot 2$
 $2 =$
 $\frac{b^2 + c^2}{2a^2} = 2bc - 2bc$

$A_t = 4 \cdot \frac{c \cdot b}{2} + a^2 \Rightarrow A_t = 2cb + a^2$
 $b^2 + c^2 + 2bc = 2cb + a^2$
 $b^2 + c^2 + \cancel{2bc} - \cancel{2bc} = a^2$
 $a^2 = b^2 + c^2$
 $A_t = b^2 + c^2 + 2bc$

Compare com o resultado obtido na atividade 1 letra b. O que você observa?
 Que é a mesma fórmula.

Observa-se que o trio segue o mesmo processo que utilizou para o item anterior, calculando separadamente as áreas: Dos quatro triângulos

($4 \cdot \frac{cb}{2} = 2cb$), do quadrado amarelo (a^2) e do quadrado maior ($b^2 + c^2 + 2bc$).

Mas comete, inicialmente, uma falha, ao considerar que a área do quadrado maior é igual ao produto da área dos quatro triângulos pela área do quadrado amarelo, da forma como apresentamos abaixo:

$$b^2 + c^2 + 2bc = c \cdot b \cdot a^2 \cdot 2$$

E ainda comete outra falha, ao realizar uma operação estranha no passo seguinte:

$$b^2 + c^2 + 2bc = c \cdot b \cdot a^2 \cdot 2$$

$$\cancel{2} \cdot 2 =$$

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2} = 2bc - 2bc$$

Mas o trio, parece ter percebido a sua falha, desconsiderando em seguida essa operação. Talvez a linha vermelha esteja cancelando a operação, pois logo em seguida, ele volta com a operação correta. Mas, ao final obtém a relação pitagórica e não o valor de $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ como pede a questão.

Ao fazer a comparação do resultado obtido neste item, com o obtido na atividade 1, letra b, o trio conclui corretamente “que é a mesma fórmula”.

A dificuldade dos alunos neste item, novamente, foi utilizar o conceito de área na resolução.

Passemos à análise do item d.

d) Compare a conclusão obtida na atividade 1 com a conclusão obtida na atividade 2 e responda:

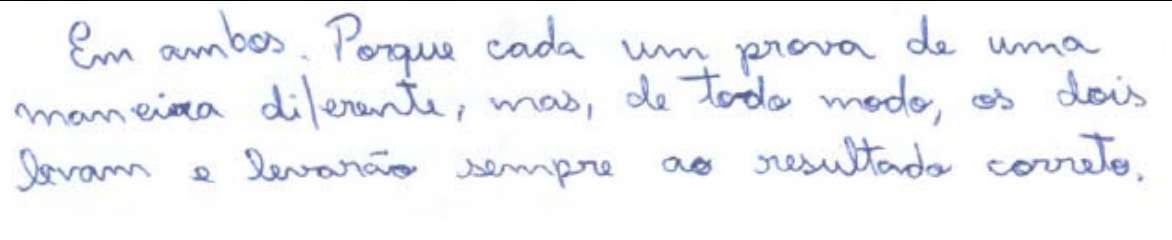
i) As duas conclusões são equivalentes? (iguais?)

ii) Em qual dos dois processos (da atividade 1 ou da atividade 2) você considera ter efetuado uma prova para a relação $a^2 = b^2 + c^2$? Justifique.

Para a primeira pergunta deste item d (pergunta i), todos os grupos são unânimes em responder “sim”. Esta pergunta não foi influenciada pelos erros que os alunos cometeram nos itens anteriores (que não usaram o conceito de área), porque os resultados que obtiveram foram todos iguais $a^2 = b^2 + c^2$. Por isto, responderam de forma correta.

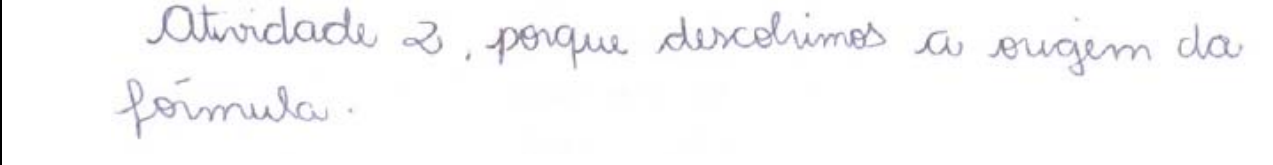
Já para a segunda pergunta (pergunta ii), resolvemos apresentar a resposta de cada grupo de alunos, por considerarmos uma pergunta crucial para esta pesquisa, visto que por meio dela, temos a oportunidade de observar sobre as concepções que os alunos têm de diferentes tipos de prova.

A dupla (Gui, Yu) respondeu como abaixo:



Em ambos. Porque cada um prova de uma maneira diferente, mas, de toda modo, os dois levam e levarão sempre ao resultado correto.

O trio (Pep, Ma, Lou) respondeu como abaixo:



Atividade 2, porque escolhimos a origem da fórmula.

A dupla (Rau, Ped) respondeu que “Na 1 eu provo que funciona, na dois eu a uso.”

A dupla (Wil, Ary) respondeu que “nas duas, porque nas duas quer saber a hipotenusa e para isso é a mesma fórmula.”

A dupla (Nat, Tha) respondeu que “nas duas. Porque para se descobrir a hipotenusa usa-se a mesma fórmula.”

A dupla (Jo, Gui) respondeu que “O processo da atividade 1.”

A dupla (Vi, Tha) respondeu que “Nos dois, porque nós usamos o mesmo procedimento em cada um.”

Observando as respostas dos alunos, percebemos que a maioria considera os dois processos como provas para a relação pitagórica, sem fazer nenhuma diferenciação entre os dois métodos. Destacamos como exemplo, a dupla (Gui, Yu) que se justifica dizendo que são apenas maneiras diferentes de se provar a mesma coisa.

Essa justificativa apresentada pelos alunos, de que não há diferenças entre os dois tipos de argumentação, pode ser uma confirmação, às considerações de Gravina (2001). Essa pesquisadora considera, como uma das dificuldades inerentes ao processo de aprendizagem da geometria, o perceber, por parte do aluno, a diferença entre argumento de natureza empírica e argumento de natureza dedutiva.

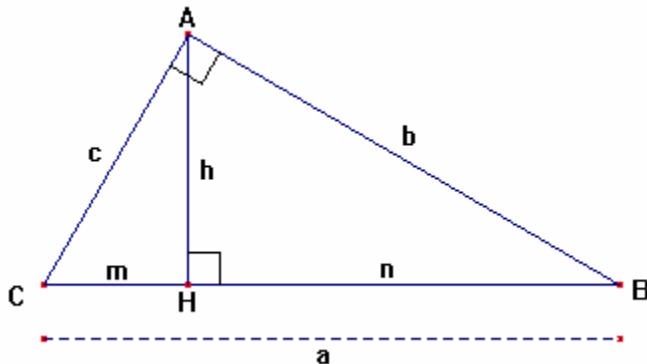
A dupla (Jo, Gui), que na atividade 1, considerou haver diferenças de medidas no experimento com os puzzles, surpreendentemente, considera a referida atividade 1, como uma prova e não a atividade 2. Talvez essa conclusão seja porque a dupla não conseguiu desenvolver corretamente a prova da atividade 2.

O trio (Pep, Ma, Lou) é o único grupo a considerar que, apenas a atividade 2 é uma prova. Mas, entendemos que a sua justificativa “porque descobrimos a origem da fórmula” não foi convincente. Achamos que essa justificativa não é suficiente para concluirmos que o trio sabe reconhecer a diferença entre uma verificação empírica de uma verificação dedutiva. Ou se sabe, não se justificou de forma convincente.

Concluindo, até aqui, diríamos que os alunos da pesquisa, não reconhecem o maior valor matemático que há no argumento puramente dedutivo em relação ao argumento empírico. Para eles tudo é prova.

4.5. Análise *a posteriori* da atividade 3

a) No Cabri, construa um triângulo retângulo qualquer ABC, retângulo em A e trace a altura AH relativa ao lado BC. Considere a, b, c, h, m e n as respectivas medidas dos segmentos BC, AB, AC, AH, CH e BH, como ilustra a figura abaixo.



Com a ferramenta “medida ou comprimento” obtenha e anote abaixo, as medidas a, b, c, h, m e n da sua figura.

a = b = c = h = m = n =

Com a calculadora (Cabri ou qualquer outra) obtenha os valores abaixo e relacione a coluna da esquerda de acordo com a direita.

$h^2 =$	$a.h =$
$b^2 =$	$m.a =$
$c^2 =$	$m.n =$
$b.c =$	$n.a =$

Anote abaixo as relações obtidas.

Os alunos executaram bem esta tarefa, que é uma validação das relações métricas do triângulo retângulo, onde cada grupo realiza sua própria construção. Mesmo utilizando triângulos diferentes, todos os grupos chegaram à mesma conclusão.

Apresentamos a seguir os resultados dos dois grupos que estamos destacando nesta pesquisa.

A dupla (Gui,Yu) construiu seu triângulo obtendo os seguintes valores para as medidas a, b, c, h, m e n:

$$a = 8,60 \text{ cm} \quad b = 7,53 \text{ cm} \quad c = 4,84 \text{ cm} \quad h = 4 \text{ cm} \quad m = 2,72 \text{ cm} \quad n = 5,88 \text{ cm}$$

Ao fazer as contas indicadas, relaciona corretamente as duas colunas de valores, como mostramos abaixo:

$$\begin{array}{l}
 h^2 = 16 \text{ cm} \\
 b^2 = 50,57 \text{ cm} \\
 c^2 = 23,42 \text{ cm} \\
 b.c = 34,42 \text{ cm}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \rightarrow a.h = 34,42 \text{ cm} \\
 \rightarrow m.a = 23,42 \text{ cm} \\
 \rightarrow m.n = 34,57 \text{ cm} \\
 \rightarrow n.a = 74 \text{ cm}
 \end{array}$$

$34,57 \text{ cm} \rightarrow 16,03 \text{ cm}$
 $74 \text{ cm} \rightarrow b.c = 34,42 \text{ cm}$
 $50,57$

E as relações obtidas por essa dupla foram:

$$\begin{array}{l}
 c^2 = m.a \\
 b.c = a.h \\
 b^2 = n.a \\
 h^2 = m.n
 \end{array}$$

Já o trio (Pep, Ma, Lou), que construiu uma figura diferente, obteve os seguintes valores para as medidas a, b, c, h, m e n.

$$a = 11,01 \quad b = 9,84 \quad c = 4,92 \quad h = 4,40 \quad m = 2,20 \quad n = 8,81$$

Ao fazer as contas indicadas, o trio relaciona corretamente as duas colunas de valores, como mostramos a seguir:

$h^2 = 19,38 \text{ cm}^2$	$a.h = 48,46 \text{ cm}^2$
$b^2 = 96,92 \text{ cm}^2$	$m.a = 24,23 \text{ cm}^2$
$c^2 = 24,23 \text{ cm}^2$	$m.n = 19,38 \text{ cm}^2$
$b.c = 48,46 \text{ cm}^2$	$n.a = 96,92 \text{ cm}^2$

E as relações obtidas por esse trio foram as seguintes:

$h^2 = m.n$
$b^2 = n.a$
$c^2 = m.a$
$b.c = a.h$

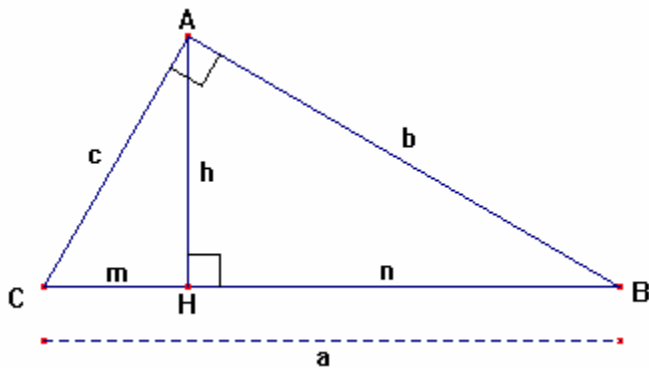
É importante destacar nesta atividade a importância do uso de um software de geometria dinâmica. Com o software Cabri os alunos puderam: Construir sua própria figura; corrigir eventuais erros ou até reiniciar a construção; medir segmentos de forma bastante precisa, neste caso com duas casas decimais, o que não seria possível com régua; a facilidade do uso da calculadora do próprio software, (no cabri basta clicar sobre o número, sem precisar digitá-lo), e puderam também alterar o seu triângulo retângulo, obtendo outro diferente, apenas arrastando os seus vértices, sem ter que construir um novo, percebendo que as relações se mantinham.

Se observarmos os resultados que os dois grupos citados acima obtiveram para este item a da atividade 3, vemos que os valores dados para as medidas de a, b, c, h, m e n, são diferentes de um grupo para o outro. Entretanto, os dois grupos chegaram à mesma conclusão final. Este fato tornou essa tarefa bastante interessante, pois no início, alguns alunos, ao perceberem que os seus valores não coincidiam com os dos colegas de outros grupos, achavam que alguém estava cometendo algum erro, assim, conferiam os seus resultados a fim de verificar erros e discutiam com os colegas, questionando quem estava certo ou errado. Mas ao final descobriam que todos estavam

corretos, pois chegavam ao mesmo resultado final e que essa diferença nos valores ocorria apenas por causa dos diferentes triângulos retângulos que cada grupo construiu.

Em seguida, os alunos estiveram trabalhando com as demonstrações dessas relações métricas, que eles mesmos obtiveram no item a. Vamos analisar o que fizeram.

b) No triângulo ABC abaixo, retângulo em A, a, b e c são as medidas dos lados do triângulo e h é a sua altura relativa ao lado BC, m e n são as projeções ortogonais sobre o lado BC dos respectivos lados AC e AB. Um triângulo semelhante ao que você construiu no item a.



Para justificar que $h^2 = m \cdot n$, um aluno utilizou-se dos seguintes passos. Justifique cada um desses passos. Observe a figura acima.

Passo 1 - Se o triângulo ABC é retângulo em A então $a^2 = b^2 + c^2$. Justifique.

Passo 2 - Se $a^2 = b^2 + c^2$ então $(m+n)^2 = b^2 + c^2$. Justifique.

Passo 3 - Se $(m+n)^2 = b^2 + c^2$ então $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$. Justifique.

Passo 4 - Se $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$ então $2h^2 = 2mn$. Justifique.

Passo 5 - Se $2h^2 = 2mn$ então $h^2 = m \cdot n$. Justifique.

O objetivo deste item é desenvolver no aluno, a capacidade de argumentar e de provar, dividindo a demonstração em vários passos, em que

cada passo constitui-se em um pequeno teorema com hipótese e tese. Esse método de provar por meio da subdivisão em passos, foi baseado naquele, apresentado por Duval (2002).

As justificativas da dupla (Gui,Yu) são as seguintes:

Passo 1 - Se o triângulo ABC é retângulo em A então $a^2 = b^2 + c^2$. Justifique.
 Em todos os triângulos retângulos podemos usar essa fórmula para descobrir a "a", ou seja, a hipotenusa. Enquanto "c" e "b" são catetos.

Passo 2 - Se $a^2 = b^2 + c^2$ então $(m+n)^2 = b^2 + c^2$. Justifique.
 "a" é a soma de "m" e "n", então é correto afirmar que $a = m+n$. Pode-se ver isso nitidamente na figura.

Passo 3 - Se $(m+n)^2 = b^2 + c^2$ então $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$. Justifique.
 Este triângulo retângulo é composto por outros dois. Assim:
 → resolve-se " $(m+n)^2$ " → $m^2 + 2mn + n^2$.
 → " $h^2 + n^2$ " é a hipotenusa "b" ("h" e "n" são catetos)
 → " $h^2 + m^2$ " é a hipotenusa "c" ("h" e "m" são catetos)
 $\left. \begin{array}{l} \text{ soma-se os dois} \\ \rightarrow "h^2 + n^2" \text{ é a hipotenusa "b" ("h" e "n" são catetos)} \\ \rightarrow "h^2 + m^2" \text{ é a hipotenusa "c" ("h" e "m" são catetos)} \end{array} \right\} m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$

Passo 4 - Se $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$ então $2h^2 = 2mn$. Justifique.
 Resolve-se a equação → $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$
 $2mn = 2h^2$

Passo 5 - Se $2h^2 = 2mn$ então $h^2 = m \cdot n$. Justifique.
 Termina-se a equação: $\frac{2h^2}{2} = \frac{2mn}{2}$
 $h^2 = 2mn \rightarrow$ ERRADO
 $h^2 = mn$

Essa dupla, expressou-se muito bem, teve facilidade para justificar cada passo e teve um bom desempenho.

Já as justificativas do trio (pep, Ma, Lou), são as seguintes:

Passo 1 - Se o triângulo ABC é retângulo em A então $a^2 = b^2 + c^2$. Justifique.

Porque é um triângulo retângulo

Passo 2 - Se $a^2 = b^2 + c^2$ então $(m+n)^2 = b^2 + c^2$. Justifique.

Porque $(m+n) = a$

Passo 3 - Se $(m+n)^2 = b^2 + c^2$ então $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$. Justifique.

Porque $(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$

Passo 4 - Se $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$ então $2h^2 = 2mn$. Justifique.

$$\begin{aligned} m^2 + 2mn + n^2 &= h^2 + n^2 + h^2 + m^2 \\ 2mn + \cancel{n^2} + \cancel{m^2} &= \cancel{h^2} + \cancel{n^2} + \cancel{m^2} + 2h^2 \\ 2h^2 &= 2mn \end{aligned}$$

Passo 5 - Se $2h^2 = 2mn$ então $h^2 = m \cdot n$. Justifique.

$$\begin{aligned} \frac{2h^2}{2} &= mn \\ h^2 &= mn \end{aligned}$$

O trio também teve um bom desempenho, mas mostra-se com um pouco de dificuldade para chegar às suas conclusões. No passo 4, esqueceu-se do sinal de igualdade.

Observa-se também que, no passo 1, o trio justifica “Porque é um triângulo retângulo”, sem se referir ao teorema de Pitágoras. Parece ter deixado a cargo do leitor concluir que, por ser um triângulo retângulo, vale o teorema de Pitágoras.

No geral, os grupos realizaram essa tarefa com sucesso. Isto nos dá dicas de que, esse método de dividir uma demonstração em passos, facilitou bastante o trabalho de demonstração para os alunos.

De todos os grupos, o que nos chamou a atenção durante a aplicação, foi a dupla (Vi, Tha) que tentava justificar, fazendo contas, substituindo as letras pelos seus respectivos valores, conforme obtidos no item a. Ou seja, estava apenas verificando a validade das igualdades. Por exemplo, no passo 1, em que aparece a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$, a dupla apresenta o seguinte:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$49,2 = 36,1 + 13,1$$

Já no passo 3, aparece a igualdade $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$, então, eles apresentaram o seguinte:

$$m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$$

$$49,1 = 49,1$$

Isto mostra que o grupo tentou argumentar de forma diferente dos outros, talvez por interpretarem de forma diferente essa questão.

Durante a execução das tarefas, tínhamos percebido que esse grupo estava utilizando essa estratégia, sem apresentar as justificativas corretas. Foi quando chamamos a sua atenção, para que também apresentasse as justificativas. A partir daí, o grupo deixou de fazer as verificações e passou a apresentar somente as justificativas.

c) Para justificar que $b^2 = a.n$, um outro aluno utilizou-se dos seguintes passos. Justifique cada um desses passos. Observe a figura no item b.

Passo 1 - Se o triângulo ABH é retângulo em H, **então** $b^2 = h^2 + n^2$. Justifique.

Passo 2 - Se $b^2 = h^2 + n^2$ **então** $b^2 = m.n + n^2$. Justifique.

Passo 3 - Se $b^2 = m.n + n^2$ **então** $b^2 = n.(n+m)$. Justifique.

Passo 4 - Se $b^2 = n.(n+m)$ **então** $b^2 = n.a$. Justifique.

Neste item c, pela grande semelhança com o item anterior, os alunos foram ainda melhores.

O objetivo da tarefa, também é tentar desenvolver no aluno, a sua capacidade de argumentação e prova.

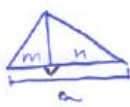
Apresentamos, a seguir, apenas as justificativas da dupla (Gui,Yu), que representam bem as justificativas dos outros grupos.

Passo 1 - Se o triângulo ABH é retângulo em H, então $b^2 = h^2 + n^2$. Justifique.
"b" é a hipotenusa do triângulo ABH e "h" e "n" são os catetos. Usa-se, então, o teorema de Pitágoras.

Passo 2 - Se $b^2 = h^2 + n^2$ então $b^2 = m \cdot n + n^2$. Justifique.
Haive a substituição de "h" por "m.n", já que $h^2 = m \cdot n$.

Passo 3 - Se $b^2 = m \cdot n + n^2$ então $b^2 = n \cdot (n+m)$. Justifique.
Fatoreu-se "m.n+n²", resultando em "n.(n+m)". Assim, " $b^2 = (m+n) \cdot n$ " \Rightarrow " $b^2 = n \cdot (m+n)$ " \Rightarrow " $b^2 = n(n+m) = b^2 = h^2 + n^2$ ".

Passo 4 - Se $b^2 = n \cdot (n+m)$ então $b^2 = n \cdot a$. Justifique.
Substitui-se "n+m" por "a", já que "n+m=a". É "m+n=a" porque na figura, a medida "a" é a soma das partes "m" e "n".



Isto mostra mais uma vez, que o método da subdivisão prévia em passos, pode facilitar o trabalho de prova.

d) Como você justificaria a igualdade $c^2 = a \cdot m$? Observe a figura do item b.

O objetivo deste item d, é dar oportunidade de argumentação ao aluno. Observar sua capacidade de tomar iniciativa e que estratégias utilizam.

Durante a aplicação deste item, observamos que os alunos, em geral, tentam argumentar, a fim encontrar uma justificativa. Mas, vimos que têm grandes dificuldades.

Alguns grupos, tiveram a idéia de imitar as demonstrações anteriores, usando a subdivisão por passos, mas mesmo assim encontraram dificuldades e desistiram, deixando a questão em branco ou quase em branco.

Por exemplo a dupla (Wil, Ary) escreve “ $c^2 = a.m$ então $c^2 = a.(b+c)$ ” o que mostra claramente que, esses alunos tentaram imitar a demonstração com subdivisão em passos.

De forma semelhante, a dupla (Nat, Tha) inicia a sua justificativa escrevendo “Porque se $c^2 = a.m$ então $c^2 = a.(b+c)$ ”, confirmando o que afirmamos, que tentaram imitar as demonstrações recentes que utilizaram na subdivisão em passos.

A pesquisa de Gouvêa (1998) chama a atenção para o professor que, nas atividades de demonstração, muitas vezes se satisfaz com um ensino-aprendizagem por imitação, que coloca o aluno diante de um modelo de demonstração, para que ele (o aluno) observe e em seguida, imite o método de resolução numa situação aproximada. Para essa pesquisadora, esse tipo de aprendizagem por imitação não tem nada evidente para os alunos.

Achamos importante destacar que, já era previsto que os alunos tentassem imitar a demonstração por passos, por terem experimentado esse tipo de demonstração, recentemente, nos itens anteriores. Mas destacamos que, não era objetivo dessa pesquisa utilizar-se desse método de demonstração por imitação, mesmo porque, no enunciado da questão, não foi dada nenhuma indicação nessa direção e não foi feita nenhuma exigência nesse sentido. Além de que, indicamos e apresentamos previamente, que há outra justificativa diferente.

Talvez, esse insucesso dos alunos em tentar imitar a demonstração por passos, nesta pesquisa, seja uma confirmação de que esse tipo de aprendizagem por imitação, realmente não tem nada evidente para os alunos.

Mas, por outro lado, poderíamos concluir que o aluno que consegue provar pelo menos por imitação, já está realizando um grande feito.

Uma outra dupla, denominada (Vi, Tha), tenta iniciar sua justificativa, argumentando que $a.m = m^2 + h^2$. O que é correto, pois essa igualdade é equivalente à igualdade $c^2 = a.m$, que a dupla queria justificar. Mas, infelizmente, parou por aí.

Essa dupla parece não ter tentado imitar a demonstração por passos.

Já a dupla (Jo, Gui), argumenta de uma maneira que não compreendemos, mas achamos importante apresentar sua justificativa, que não utiliza a subdivisão em passos e foi a seguinte:

“Não substituí. Nesse triângulo as medidas são de um triângulo, e a multiplicação de a e m , a raiz encontra o resultado de c .”

Essa dupla parece ter encontrado dificuldades para expressar-se corretamente, o que é uma das dificuldades que se acham no ensino-aprendizagem da demonstração.

A dupla (Gui, Yu), da qual fizemos gravação de voz, discute bastante para resolver essa questão, mas não consegue encontrar uma justificativa. No início de sua argumentação, o componente Yu, diz: “Agora complica”. O componente Gui pede calma, dizendo: “Calma, a gente tem que olhar nas entrelinhas”. E o próprio Gui argumenta dizendo: “ $b^2 = n.a$, certo? Estamos olhando nas entrelinhas!”, e continua, “ele substituiu $m+n$ por a , certo?”. Aqui, Gui está se referindo ao passo 4, do item c, que apresenta o seguinte:

Passo 4 – Se $b^2 = n.(n+m)$ então $b^2 = n.a$. Justifique.

Ele parece tentar achar uma argumentação em cima do que é feito nesse passo 4. E acaba concluindo que teria que usar a demonstração por passos, expressando-se, com certa decepção, da seguinte forma:

“Agora nós vamos fazer a mesma droga de caminho até aqui”.

Ao perceber a discussão da dupla, o professor aproximou-se, mas os componentes mostrando-se não ter desistido de buscar uma resposta, dizem ao professor: “Não fala nada professor, porque senão, vão dizer que o senhor nos ajudou”.

Essa dupla, continuou argumentando e ao final, apresentou a seguinte justificativa:

$$\begin{array}{l}
 c^2 = a \cdot m \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 (m \cdot a) = (m+n) \cdot m \\
 m \cdot (m+n) = (m+n) \cdot m \\
 m^2 + mn = m^2 + mn \\
 mn = mn
 \end{array}$$

Em princípio, essa justificativa pareceu-nos interessante, mas logo percebemos que a dupla faz a substituição de c^2 por $m \cdot a$, o que não deveria ter feito, visto que era exatamente a igualdade $c^2 = m \cdot a$ a ser provada.

Ao ser questionada sobre essa substituição, a dupla respondeu que já tinha provado que $c^2 = m \cdot a$. E apresentou a seguinte justificativa, que é uma verificação da igualdade $c^2 = m \cdot a$, fazendo a substituição das letras por seus valores numéricos:

→ Com as medidas da letra "a" e a relação, percebe-se que " $c^2 = m \cdot a$ ".

$$\begin{array}{l}
 4,84^2 = 2,72 \cdot 5,88 \\
 23,42 = 23,42
 \end{array}$$

O professor diz que tudo bem, mas interroga os alunos, se aceitam ou não essa verificação, como uma prova para a igualdade $c^2 = m \cdot a$. O componente Yu, reclama: "Mas foi a gente que fez, professor!". Já o componente Gui, causando risos na discussão, responde: "Aceito! Eu aceito!". E referindo-se à justificativa com números, conclui dizendo: "Nós fizemos aqui, nós tiramos a prova."

Essa insistência da dupla em considerar que sua verificação numérica, vale como uma prova para a igualdade $c^2 = m.a$, só confirma a sua consideração feita na atividade 1, onde afirma não haver diferenças entre o argumento empírico e o argumento dedutivo. Essa prova, que utiliza um caso particular de triângulo, pode ser classificada como do nível *empirismo ingênuo*, de acordo com Balacheff (1988).

Esta questão foi considerada muito difícil pelos alunos, mas desta vez eles mostraram-se mais confiantes, e pelo menos tentaram argumentar.

Passemos para o item e.

e) Para provar que $b.c = a.h$, outro aluno procedeu da seguinte maneira. Justifique cada passo. Observe a figura do item b.

Passo 1 – Se $b^2 = a.n$ e $c^2 = a.m$ então $b^2.c^2 = a.n.a.m$. Justifique

Passo 2 – Se $b^2.c^2 = a.n.a.m$ então $b^2.c^2 = a^2.mn$. Justifique.

Passo 3 – Se $b^2.c^2 = a^2.mn$ então $b^2.c^2 = a^2.h^2$. Justifique.

Passo 4 – Se $b^2.c^2 = a^2.h^2$ então $b.c = a.h$. Justifique.

Neste item e, os grupos voltaam a realizar com sucesso as suas justificativas. Vamos apresentar o desempenho do dois grupos que estamos destacando na pesquisa.

A dupla (Gui,Yu) apresentou o seguinte resultado.

Passo 1 – Se $b^2 = a.n$ e $c^2 = a.m$ então $b^2.c^2 = a.m.a.n$. Justifique

$b^2 = a.n$ e $c^2 = a.m$

" b^2 " e " c^2 " são hipotenusas de seus triângulos menores do maior, do qual são catetos. Então, " $b^2.c^2 = [a.m.a.n]$ " → essa operação é a combinação das duas igualdades.

errado.

Passo 2 – Se $b^2c^2 = am \cdot an$ então $b^2c^2 = a^2mn$. Justifique.

Nome: *R*

Resume-se a operação, fazendo a multiplicação ↓

$$a \cdot m \cdot n \cdot a = a^2 \cdot mn$$

Passo 3 – Se $b^2c^2 = a^2mn$ então $b^2c^2 = a^2h^2$. Justifique.

Porque "mn" é igual a "h²".

Passo 4 – Se $b^2c^2 = a^2h^2$ então $b \cdot c = a \cdot h$. Justifique.

Foi tirada a raiz de ambos os lados.

O trio (Pep, Ma, Lou) apresentou a seguinte justificativa:

Passo 1 – Se $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$ então $b^2c^2 = am \cdot an$. Justifique

$$(b^2 = a \cdot m), (c^2 = a \cdot n)$$

Porque somando as letras antes do sinal de igualdade (b^2 e c^2) resulta em b^2c^2 , e $a \cdot m + a \cdot n$ é igual $am \cdot an$.

Passo 2 – Se $b^2c^2 = am \cdot an$ então $b^2c^2 = a^2mn$. Justifique.

$b^2c^2 = a^2 \cdot m \cdot n$
 $b^2c^2 = a^2 \cdot m \cdot n$

Passo 3 – Se $b^2c^2 = a^2mn$ então $b^2c^2 = a^2h^2$. Justifique.

Porque $m \cdot n = h^2$

Passo 4 – Se $b^2c^2 = a^2h^2$ então $b \cdot c = a \cdot h$. Justifique.

$b^2c^2 = a^2h^2$
 $b \cdot c = a \cdot h$

Os grupos, em geral, pelo sucesso obtido nesse tipo de demonstração com divisão em passos, dão indicações de que esse método facilita bastante o trabalho de demonstração. Entretanto, é importante destacar que, como concluímos do item anterior, os alunos têm dificuldades de utilizar esse método, quando o problema não vem previamente subdividido em passos. Por isto, no próximo item os alunos tem oportunidade de realizar uma demonstração que não faz utilização da subdivisão em passos. Vamos observar o que acontece.

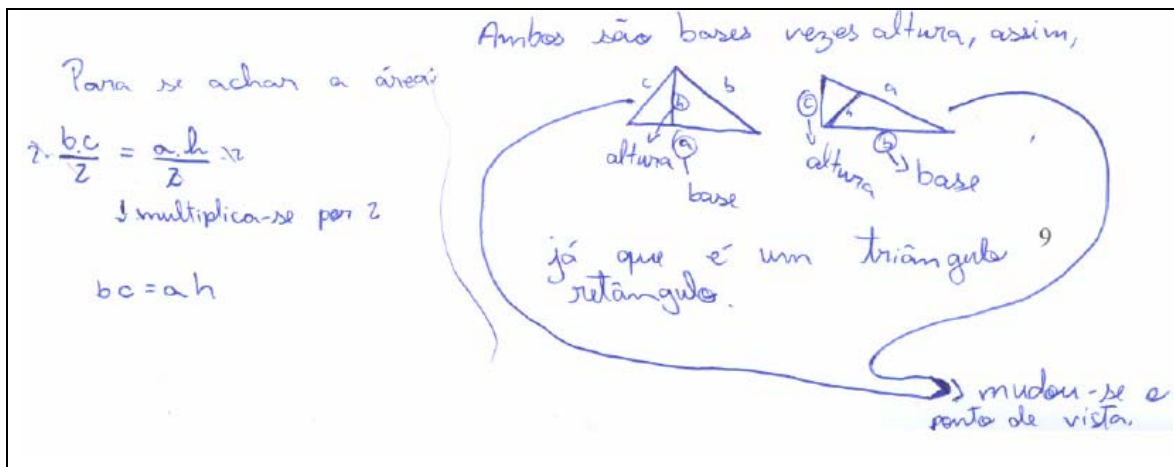
f) Encontre uma outra prova para $b \cdot c = a \cdot h$ usando o conceito de área. Observe novamente a figura no item b.

Neste item, o aluno é colocado novamente diante de um trabalho de prova, mas não com subdivisão em passos. Aqui, já vem indicado que o aluno deverá usar o conceito de área. Queremos verificar o desempenho desses alunos, após terem passado por situação semelhante na atividade 2, em que tiveram dificuldades em utilizar o conceito de área.

A dupla (Gui, Yu) apresentou uma prova bem curta e inteligente, e desta vez, com uma argumentação de natureza dedutiva, diferente daquela que utilizou no item d, em que fez apenas uma verificação.

Mas apesar de essa dupla ter apresentado uma prova curta, não significa que realizou a tarefa com facilidade. O grupo argumentou durante um bom período de tempo, até chegar a essa resposta. A gravação de voz que obtivemos dessa dupla, mostra-nos que o grupo, em princípio, não estava utilizando o conceito de área, e somente com a indicação do professor, foi que começou a pensar em usá-lo. Mesmo assim, os alunos encontraram dificuldades. O mérito dessa dupla foi a persistência.

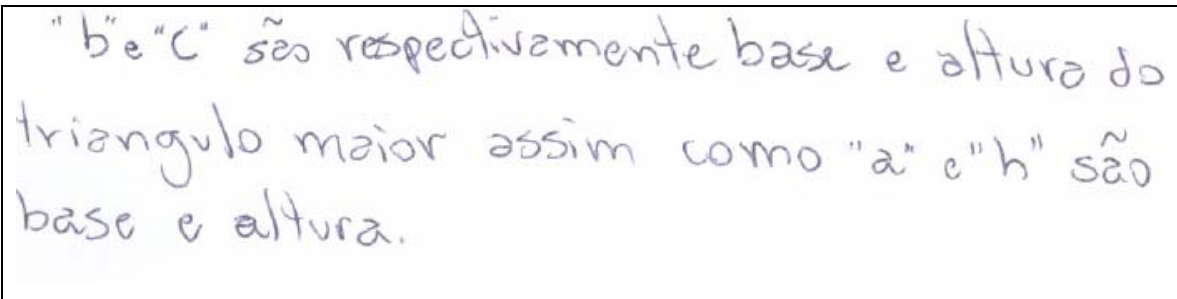
Sua demonstração foi a seguinte, e resume-se em calcular a área do triângulo ABC de duas maneiras diferentes, e depois igualando essas duas áreas obtidas, já que são equivalentes:



Observamos que essa dupla preocupou-se em apresentar um desenho, que mostra o triângulo ABC de duas maneiras diferentes, de forma que, visualmente, é possível fazer uma demonstração da igualdade $a \cdot h = b \cdot c$.

Na análise do item d, havíamos considerado que essa dupla estaria no nível do *empirismo ingênuo*. Entretanto, aqui, a mesma dupla faz uma prova no nível da *experiência mental*. Neste caso perguntaríamos: Pode um mesmo aluno “passear” pelos vários níveis de prova? Pelo que vimos, a resposta é sim. Afinal, essa mesma dupla já mostrou anteriormente que, seja empírico ou seja dedutivo, qualquer argumento prova.

Já o trio (Pep, Ma, Lou) parece ter tido a mesma idéia, mas faz uma justificativa utilizando a linguagem natural. Sua justificativa foi a seguinte:



"b" e "c" são respectivamente base e altura do triangulo maior assim como "a" e "h" são base e altura.

O grupo parece ter compreendido bem o problema e encontrou a solução, mas deixa para o leitor a tarefa de concluir.

Já o grupo (Rau, Ped), argumenta de forma semelhante, como a seguir: "Tanto c como h podem ser a altura e tanto b como a podem ser a base." Mas deixa também a cargo do leitor a conclusão.

Essa dificuldade de não concluir corretamente é uma das dificuldades que podemos considerar nesta pesquisa.

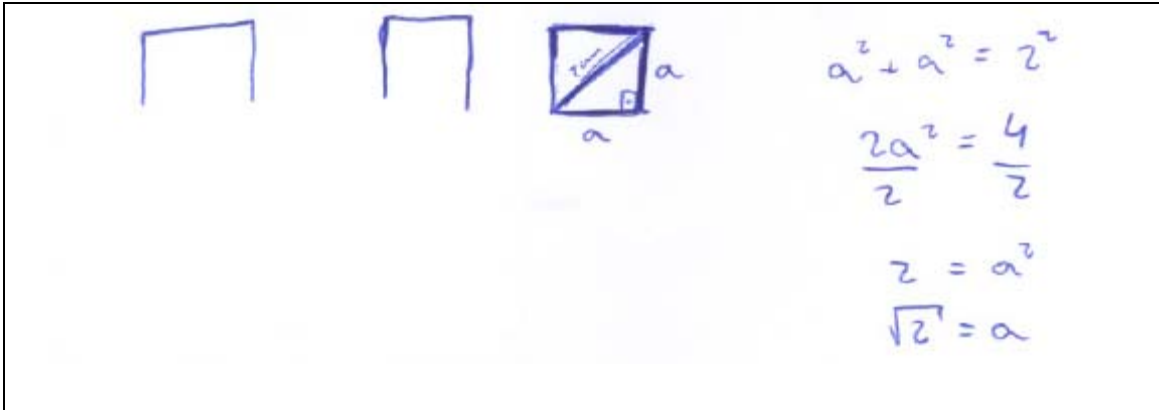
De todos os grupos pesquisados, somente esses três, citados acima, apresentaram uma resposta para o item f. Os outros deixaram totalmente em branco. Isto, talvez, seja uma indicação da dificuldade que os alunos têm em iniciar uma argumentação.

4.6. Análise *a posteriori* da atividade 4

Esta é uma atividade de aplicação. Seu objetivo é dar suporte às nossas observações, em relação ao desempenho dos alunos, após terem realizado uma atividade envolvendo provas e demonstrações.

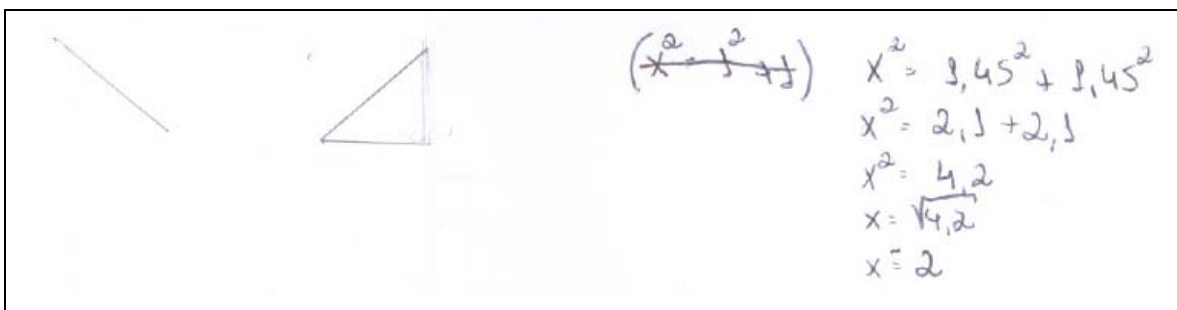
a) Calcule a medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede 2cm.

Para responder a essa questão a dupla (Gui, Yu) parece não ter encontrado dificuldades, e apresentou a seguinte resolução:



Observamos, em suas discussões gravadas, que a dupla percebeu imediatamente que deveria usar o teorema de Pitágoras. O componente Gui ao ler a questão, diz “Impressionante! Então os dois catetos são iguais”. E continua dizendo: “Vamos fazer um desenho para o professor entender melhor.”

Já o trio (Pep, Ma, Lou) apresentou a seguinte solução:



Essa solução parece ter sido feita por aproximação. Partindo de um quadrado, cujo lado mede 1,45cm, o trio obteve um valor que se aproxima de 2, para a medida da diagonal desse quadrado.

Pelos registros apresentados, vemos, claramente, que esse grupo, primeiramente utilizou o quadrado de lado 1, e só depois utilizou o quadrado de lado 1,45cm. O que indica que o grupo estava procurando um valor mais próximo de 2, para a diagonal do quadrado. Entretanto, esse grupo, não concluiu bem sua resposta. Esquecem de indicar qual a medida do lado do quadrado cuja diagonal mede 2cm. Talvez, esta seja uma das dificuldades que há no ensino-aprendizagem da prova. Esta pode ser mais uma indicação de que os alunos

conseguem raciocinar corretamente, percebem a solução do problema, mas se esquecem ou não conseguem formular a resposta final.

Pode ser que esse esquecimento de apresentar a resposta final, seja uma dificuldade que vá diminuindo com o tempo, à medida que os alunos forem se acostumando com esse tipo de trabalho. Mas, como conclui Nasser e Tinoco (2001) em sua pesquisa, “é necessário um trabalho contínuo durante um longo período para que haja um progresso sensível no nível de argumentação dos alunos.”

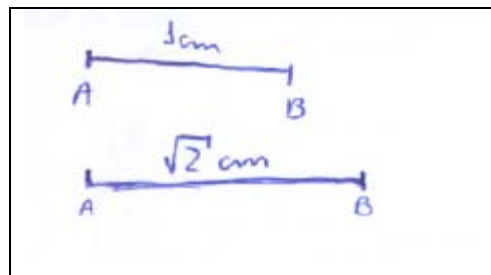
No geral, neste item a, da atividade 4, os alunos tiveram um bom nível de raciocínio. Mas tiveram dificuldades na apresentação do resultado final.

b) Dado um segmento AB de medida 1cm, apresente um método para construir um segmento de medida $\sqrt{2}$ cm.

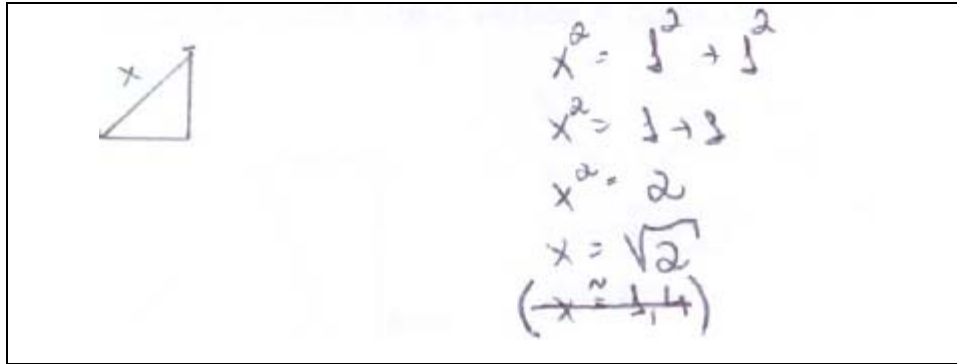
Esse exercício foi considerado muito difícil pelos alunos. A maioria dos grupos não conseguiu apresentar, se quer, um rabisco de uma possível resposta, e deixaram a questão totalmente em branco. Todos buscaram ajuda ao professor aplicador, mas este não deu nenhuma sugestão.

Poucos grupos, persistiram, argumentaram e conseguiram apresentar alguma solução.

A dupla (Gui,Yu), por exemplo, apresentou a seguinte argumentação:



Já o trio (Pep, Ma, Lou) apresentou o seguinte:



Vemos que os dois grupos não deixam passar em branco a questão e gastam certo tempo argumentando.

A dupla parece não ter tido sucesso em seu raciocínio, mas usou o segmento AB de medida 1cm, tentando construir o segmento $\sqrt{2}$ cm.

Já o trio, novamente não foi claro na sua resposta. Onde deveria ser apresentado um método de construção para o segmento de medida $\sqrt{2}$ cm, o grupo apresenta um cálculo da diagonal de um triângulo retângulo, cujos catetos medem 1cm. Consideramos que este é um raciocínio correto, mas não é uma construção, como pede a questão. Entretanto, o triângulo que aparece na resposta do trio, parece ser a construção do segmento de medida $\sqrt{2}$ cm. Isto mostra que o trio descobriu o método de construção, mas teve dificuldades, novamente, de apresentar a resposta final.

Esse trio, mais uma vez, demonstra ter dificuldades na formulação correta de suas respostas.

A fim de enriquecermos nossa análise, achamos importante incluir o resultado de um grupo, que se aproximou bem da resposta esperada, pelo menos na maneira de se expressar. Foi a dupla (Ra,Ped), que apresentou o seguinte método:

“É só medir o lado de um quadrado com diagonal de 2cm. E descobrir o lado do quadrado.”

Essa resposta não está correta, pois não faz uso do segmento AB de medida 1cm, e sim do segmento de medida 2cm. Mas parece-nos uma argumentação válida, apesar de que o método apresentado, não dá orientações

sobre a construção do quadrado. Os alunos podem ter se baseado no item a, onde calcularam a medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede 2cm, e cuja resposta obtida foi $\sqrt{2}$ cm.

Esse, nos parece um método difícil de se executar, mas que é verdadeiro.

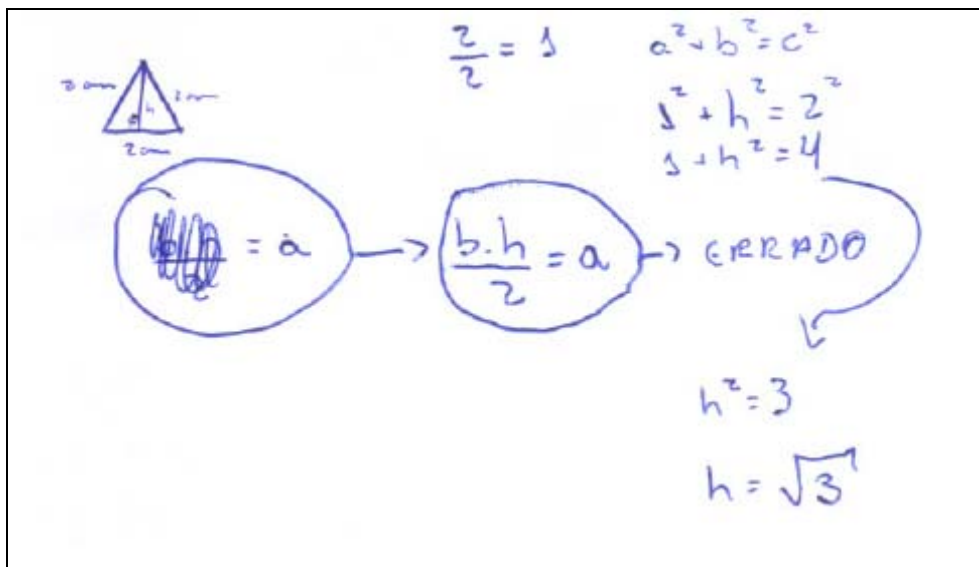
Assim, vemos que esses alunos dão uma mostra de que um trabalho com argumentação e prova, mesmo sendo considerado difícil, ainda é passível de sucesso, mesmo que parcialmente.

c) Calcule a altura de um triângulo eqüilátero de lado medindo 2cm.

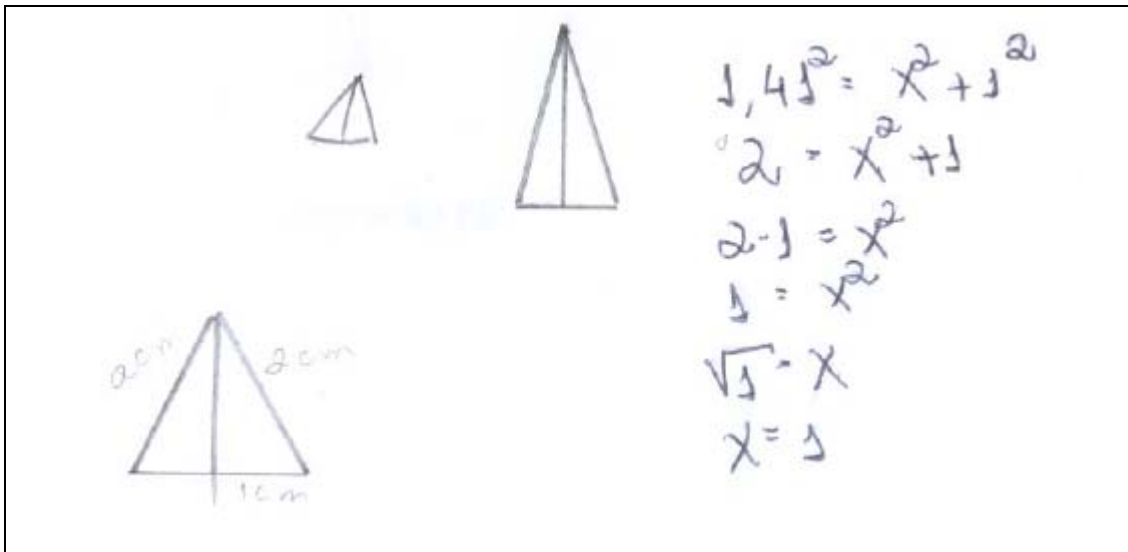
Este exercício tem como objetivo, preparar o raciocínio do aluno para o exercício seguinte, onde terá que fazer uma generalização, obtendo uma fórmula para o cálculo da altura de um triângulo eqüilátero qualquer. Eles (os alunos) poderiam utilizar o teorema de Pitágoras ou até fazer uso da trigonometria.

Este exercício seria um *exemplo genérico* do item seguinte. Aqui os alunos usam um representante particular de triângulo eqüilátero.

A dupla (Gui,Yu) apresentou um argumento correto, o qual está abaixo:



Já o trio (Pep, Ma, Lou) não apresentou uma resposta correta, como vimos a seguir:



Desses dois grupos, a dupla (Gui,Yu), por ter acertado, tem maior possibilidade de obter sucesso no próximo item, já que respondeu corretamente este item.

O trio apresentou um desenho bem representativo do enunciado da questão, demonstrando ter entendido o exercício, mas acabou realizando cálculos que utiliza medidas estranhas às medidas apresentadas no desenho. Não entendemos o que o levou a fazer isto.

Essa deve ser mais uma das dificuldades inerente ao trabalho com argumentação e prova. Os alunos fazem boa interpretação do enunciado da questão, conseguem até traduzir o problema por meio de figura, mas têm dificuldades para utilizar esses dados de forma correta, fazem confusão e não conseguem concluir seu raciocínio de forma coerente.

Naturalmente, esse trio terá dificuldades para realizar o item d, o qual analisamos a seguir.

d) Mostre que a altura de um triângulo equilátero de lado medindo l cm é

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Consideramos que este exercício representa uma prova no nível da *experiência mental* da classificação de Balacheff (1988), pois nele os alunos necessitam apresentar deduções lógicas baseadas em propriedades e não é uma situação particular.

As respostas obtidas dos dois grupos analisados foram as seguintes:

Dupla (Gui, Yu)

$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 = l^2$
 $\frac{l^2}{4} + h^2 = l^2$
 $\frac{l^2}{4} = l^2 - h^2$
 $l^2 = 4l^2 - 4h^2$
 $-\frac{3l^2}{-4} = \frac{-4h^2}{-4}$
 $-\frac{3l^2}{-4} = h^2$
 $\frac{3l^2}{4} = h^2$
 $\frac{\sqrt{3}l}{2} = h$

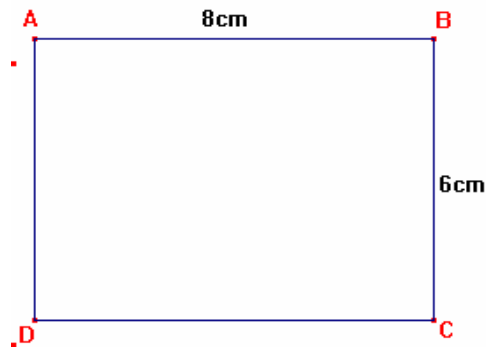
Do trio (Pep, Ma, Lou)

$l^2 = h^2 + \frac{l^2}{2}$
 $\frac{h^2}{4} = \frac{2l^2}{4} + \frac{h^2}{4} = 2l^2$
 $l^2 - h^2 = \frac{l}{4}$
 $\frac{h^2 - l^2}{4} = \frac{l}{4}$

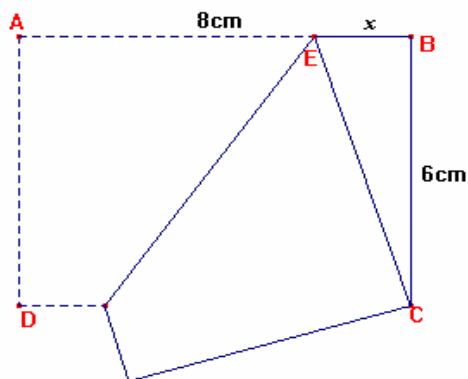
Como já comentamos no item anterior, a dupla (Gui,Yu) realizou com sucesso essa tarefa, naturalmente por ter tido sucesso no item anterior. Outros dois grupos também responderam corretamente utilizando a trigonometria. Neste caso os três realizaram uma prova no nível da *experiência mental*.

Já o Trio (Pep,Ma,Lou) novamente argumentou corretamente, mas teve dificuldade na realização dos cálculos. O que confirma a sua dificuldade do item anterior, onde mostra compreender o problema, interpreta-o corretamente, mas se perde durante o processo de prova, e não consegue concluir corretamente.

e) Considere o retângulo ABCD representado pelo desenho abaixo.



Dobre o retângulo de modo que o vértice A coincida com o vértice C, como o desenho abaixo.

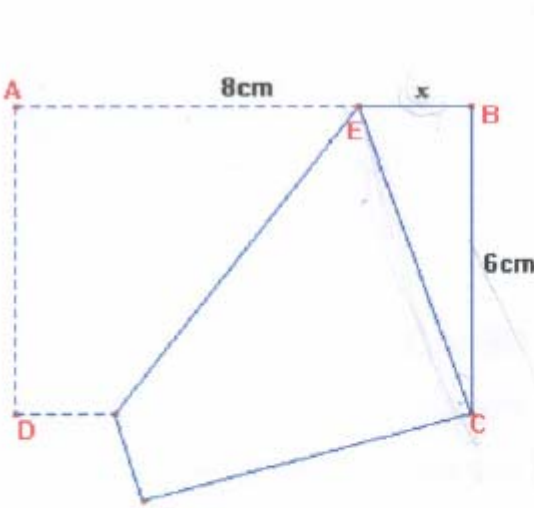


Calcule a medida x do segmento EB.

A dupla (Gui,Yu) conseguiu realizar bem essa questão, mas vamos destacar aqui a resposta apresentada pelo trio (Pep,Ma,Lou), que encontrou a dificuldade que estava prevista na análise *a priori*.

Estava previsto que os alunos poderiam encontrar dificuldade de visualizar na figura, que o segmento AE é congruente ao segmento EC e que esses segmentos medem $(8 - x)$ cm.

O trio apresentou a seguinte resposta:



Handwritten calculations:

$$x^2 = 8^2 + 6^2$$

$$x^2 = 64 + 36$$

$$x = \sqrt{100}$$

$$x = 10$$

Calcule a medida x do segmento EB.

Handwritten answers:

$$x = 10 - 8$$

$$x = 20 \text{ cm}$$

Observa-se que essa resposta, na parte inicial, parece utilizar, erradamente, que 8cm é a medida do segmento EC, o que não é verdade. Além disso, apresenta erros na utilização do teorema de Pitágoras, ao considerar x como hipotenusa, quando na verdade é cateto. E no final obtém, como medida para o segmento x , 10cm. Entretanto, na parte final, faz mais uma confusão com o valor de x , ao concluir que:

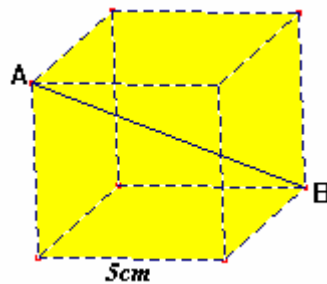
$$x = 10 - 8$$

$$x = 2 \text{ cm}$$

Mais uma vez, esse grupo mostra que entendeu o problema, reconheceu que poderia utilizar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BCE, mas teve dificuldades no processo de resolução.

De todos os grupos pesquisados, somente duas duplas obtiveram sucesso nesta questão.

f) Calcule o comprimento da diagonal AB do cubo de aresta igual a 5cm conforme a figura abaixo:



Este exercício visa preparar o raciocínio do aluno para o próximo item da atividade. Sendo que neste item, o aluno está diante de um caso particular, e no próximo item, de um caso geral.

A dupla (Gui,Yu) fez os cálculos da diagonal da seguinte forma:

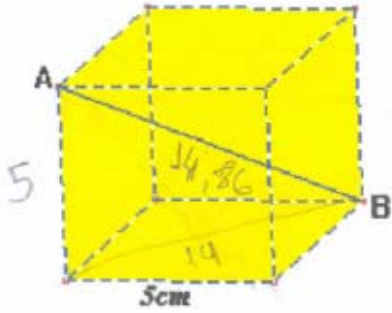
$$\begin{aligned}
 s^2 + s^2 &= h^2 \\
 2s + 2s &= h^2 \\
 50 &= h^2 \\
 \sqrt{50} &= h
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AC^2 + CB^2 &= AB^2 \\
 s^2 + \sqrt{50}^2 &= AB^2 \\
 2s + 50 &= AB^2 \\
 7s &= AB^2 \\
 \sqrt{7s} \cdot AB & \\
 \sqrt{5^2 \cdot 3} &= AB \\
 5\sqrt{3} &= AB
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 7s & 3 \\
 2s & 5 \\
 s & 5 \\
 \hline
 & 5^2 \cdot 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3s \\
 3 \\
 \hline
 4s
 \end{array}$$

Já o trio (Pep, Ma, Lou) realizou os seguintes cálculos:



$$\begin{aligned}
 x^2 &= 5^2 + 5^2 \\
 x^2 &= 50 \\
 x &= \sqrt{50} \\
 x &\approx 7,07
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 &= 7^2 + 5^2 \\
 x^2 &= 74 \\
 x &= \sqrt{74} \\
 x &\approx 8,6
 \end{aligned}$$

Observa-se que os dois grupos alcançam sucesso nesta tarefa. Destacamos que o trio utiliza valores aproximados para os radicais, assim obtém valor aproximado para a diagonal do cubo. Com a dupla isto não ocorre.

Vamos observar qual foi o desempenho desses dois grupos no caso geral apresentado a seguir.

g) Sendo D uma diagonal do cubo cuja aresta mede a, prove que $D = a\sqrt{3}$.

Este exercício é uma generalização para o cálculo do exercício anterior, e visa também envolver o aluno em cálculos algébricos, que são importantes em atividades de prova.

É importante compararmos os dois casos (itens f e g), a fim de observarmos se o sucesso obtido no caso particular é repetido no caso geral.

Como os dois grupos, citados no item anterior, obtiveram sucesso, têm grandes possibilidades de ter sucesso neste item. Vamos observar suas respostas.

A resposta da dupla (Gui, Yu) foi a seguinte:

$$\begin{aligned}
 D^2 &= a^2 + h^2 \\
 D^2 &= a^2 + (a\sqrt{2})^2 \\
 D^2 &= a^2 + a^2 \cdot 2 \\
 D^2 &= 3a^2 \\
 D &= a\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

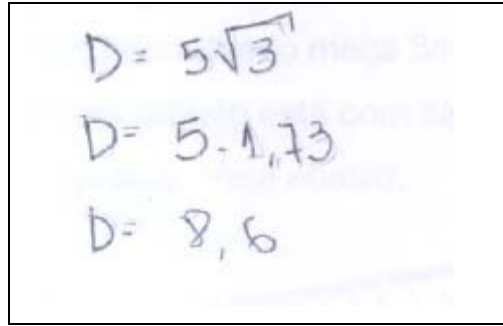
$$\begin{aligned}
 a^2 + a^2 &= h^2 \\
 \frac{2a^2}{2} &= \frac{h^2}{2} \\
 a^2 &= \frac{h^2}{2} \\
 a &= \frac{h}{\sqrt{2}} \Rightarrow a\sqrt{2} = h
 \end{aligned}$$

Esse grupo apresenta bom desempenho na interpretação do problema e também na realização dos cálculos. Aparentemente não utilizou figuras, talvez tenha utilizado a mesma do item anterior. Compreendemos bem essa resposta, mas talvez alguém com menos experiência tenha dificuldades em compreendê-la, pois ela não esclarece algumas coisas, como por exemplo, a letra h, não há indicação do que ela representa.

Essa dupla tem sido um destaque positivo nesse trabalho com argumentação e prova, mas, não raramente, comete falhas, ao utilizar-se de certos recursos, diretamente, sem justificá-los. Essa é, certamente, uma dificuldade muito comum dentro desse tipo de trabalho e pode acontecer até mesmo com os mais experientes.

Outros dois grupos também provam corretamente por meio da trigonometria. Portanto, os três grupos apresentam provas no nível da *experiência mental*.

Já resposta do trio (Pep, Ma, Lou) foi a seguinte:

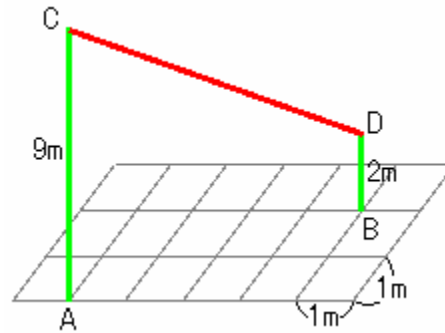


The image shows a rectangular box containing three lines of handwritten text. The first line is $D = 5\sqrt{3}$. The second line is $D = 5 \cdot 1,73$. The third line is $D = 8,6$.

O sucesso do grupo no item anterior, não contribuiu para o sucesso neste item. O grupo apresenta apenas um cálculo para a diagonal do cubo cuja aresta mede 5cm. Observa-se que nessa resposta, não há nenhuma argumentação, no sentido de tentar repetir a idéia utilizada no raciocínio anterior. Isto pode significar que esses alunos (o trio) não perceberam a relação deste exercício com o anterior.

O tratamento algébrico, que deveriam ter dado ao problema, poderia ter provocado dúvidas também, mas não parece ter sido essa a dificuldade, como prevíamos, pois sequer iniciaram uma argumentação nessa direção. Pode ser que o trio tenha usado o cubo de aresta 5cm, cuja medida da diagonal acabara de calcular, apenas como modelo para provar que a fórmula $D = a\sqrt{3}$ realmente é válida. Mas, mesmo assim, não faz nenhuma generalização. Se realmente pensou nesse sentido, o trio está garantindo a validade do raciocínio no nível do *empirismo ingênuo*, dos níveis de prova considerados por Balacheff (1988).

h) Existem dois postes AC e BD perpendiculares a um plano, como mostra a figura. O plano está dividido em quadrados cujos lados medem 1m. AC = 9 m, BD = 2 m. Encontre o comprimento de CD.



Observamos, durante a realização da atividade, que a grande dificuldade dos alunos, nesse exercício, foi perceber e calcular a medida do segmento AB, que é hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 4cm e 2cm e depois visualizar, na figura, o segmento DE, que é paralelo ao segmento AB, com $E \in AC$ e DE congruente a AB.

Apenas três grupos obtiveram sucesso neste exercício, dada a dificuldade apresentada no parágrafo anterior.

A fim de darmos uma mostra dessa dificuldade, incluímos abaixo, apenas a argumentação do trio (Pep, Ma, Lou).

$$x^2 = 4^2 + 2^2$$

$$x^2 = 20$$

$$x = \sqrt{20}$$

$$x = 4,47$$

$$X^2 = 4,47^2 + 7^2$$

$$X^2 = 68,9$$

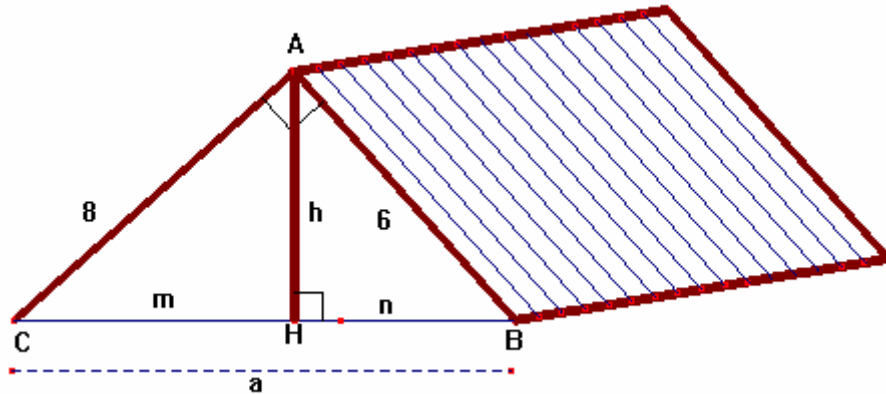
$$X = \sqrt{68,9}$$

$$X = 8,3$$

Observa-se que apesar de apresentar os cálculos corretamente, o grupo, representa na figura (em azul), um segmento que não é paralelo ao segmento AB. O que não é correto.

Talvez, esse erro de interpretação e visualização das figuras, seja uma das dificuldades, comuns, no trabalho com argumentação e prova, em geometria.

i) A figura abaixo representa o projeto da cobertura de uma casa. O futuro proprietário deseja que essa cobertura, vista de frente, tenha a forma de um triângulo retângulo, cujo ângulo reto fique na cumeeira do telhado (ponto A). Ele ainda almeja que um lado do telhado meça 8m e o outro lado meça 6m. O arquiteto responsável pelo projeto está com algumas dúvidas e precisa do teu auxílio para saná-las. Ajude-o. Veja abaixo:



- i1) Qual deve ser a largura a desse telhado?
- i2) Qual a medida m do comprimento do segmento \overline{CH} ?
- i3) Qual a medida n do comprimento do segmento \overline{HB} ?
- i4) Qual deve ser a altura h desse telhado?

Este é um exercício de aplicação direta de fórmulas das relações métricas no triângulo retângulo ou do teorema de Pitágoras. Esperava-se que os alunos não encontrassem dificuldades, por ser um tipo de exercício costumeiramente trabalhado em sala de aula.

Os grupos, em geral, realizaram essa tarefa com sucesso. Abaixo incluímos a resposta do trio (Pep, Ma, Lou), que representa bem as respostas dos outros grupos.

a) Qual deve ser a largura **a** desse telhado?

$$x^2 = 8^2 + 6^2$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \sqrt{100}$$

$$x = 10$$

b) Qual a medida **m** do comprimento do segmento \overline{CH} ?

$$8^2 = m \cdot 10 \quad 6,4 = m$$

$$\frac{64}{10} = m$$

c) Qual a medida **n** do comprimento do segmento \overline{HB} ?

$$n = 10 - 6,4$$

$$n = 3,6$$

d) Qual deve ser a altura **h** desse telhado?

h

$$6^2 = 3,6^2 + h^2$$

$$36 = 12,9 + h^2$$

$$36 - 12,9 = h^2$$

$$h^2 = 23,1$$

$$h = \sqrt{23,1}$$

$$h = 4,8$$

O grande sucesso dos alunos neste item, pode ser uma indicação de que estão habituados a esse tipo de atividade, onde aplicam fórmulas prontas sem a necessidade de muita argumentação.

Talvez, um trabalho contínuo envolvendo argumentação e prova, introduzido desde os primeiros anos de estudos, possa contribuir para o progresso dos alunos, em relação ao seu nível de argumentação.

CAPÍTULO V

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa tem como objetivo investigar o envolvimento de alunos em um processo de construção de conjecturas e provas. Por isso, realiza um estudo sobre argumentação e prova envolvendo o teorema de Pitágoras, com alunos ingressantes do Ensino Médio. Uma seqüência didática composta de 4 atividades, é o instrumento utilizado para nos dar subsídios para responder à seguinte questão de pesquisa:

Que dificuldades apresentam os alunos diante de situações de argumentação e prova envolvendo o teorema de Pitágoras?

Assim, neste capítulo, apresentamos os resultados da pesquisa, baseados na análise *a posteriori* do capítulo anterior. Fazemos comentários gerais, que achamos importantes, em relação à seqüência didática, os níveis de prova dos alunos, de acordo com Balacheff (1988), mas o nosso enfoque principal será nas dificuldades apresentadas pelos alunos.

É importante lembrar que o teorema de Pitágoras é apenas um pretexto para realizar um trabalho com argumentação e prova, e não o objeto de ensino. É natural que alunos do Ensino Médio já tenham estudado esse conteúdo anteriormente.

Em relação à seqüência didática, concluímos que o conhecimento prévio do teorema de Pitágoras por parte dos alunos, faz diminuir o potencial da atividade 1. Observamos que os alunos passam muito rápidos pelo experimento com os puzzles e já no primeiro, eles consideram a validade da relação pitagórica. Nessa mesma atividade 1, os alunos são solicitados a construir o seu próprio triângulo retângulo no Cabri II, para, novamente, verificarem empiricamente a validade da relação pitagórica. Mas um grupo argumenta dizendo: “É o teorema de Pitágoras”. Eles não sentem necessidade de verificar, pois já conheciam o teorema. Isto pode ser uma indicação de que alguns alunos não têm interesse em investigar sobre o que já conhecem. Por isso, sugerimos

que, em caso de uma nova utilização, essa atividade possa ser revista, para ser mais bem explorada e aproveitada.

Esses dois experimentos empíricos de validação do teorema de Pitágoras, que os alunos realizam na atividade 1, são considerados por eles (os alunos) como suficientes, para garantir a validade da relação em qualquer triângulo retângulo. Um dos grupos pesquisados responde que: “Sim. Afinal de contas, depois de testes, prova-se que a fórmula será sempre correta.” Dessa forma, os alunos demonstram aceitar argumentos de natureza empírica (os experimentos) como “provas”.

Em relação aos itens que propõem diretamente situações de provas, queremos observar, nas respostas dos alunos, os níveis de prova de Balacheff (1988). Assim, vamos destacar alguns desses itens.

Na atividade 3 temos: O item d, somente um dos grupos, o (Gui,Yu) consegue apresentar uma argumentação, a qual consideramos estar no nível do *empirismo ingênuo*. No item f, três grupos argumentam, mas somente a dupla (Gui,Yu) faz uma validação com características de uma *experiência mental*.

Na atividade 4 temos: O item d, três grupos apresentam uma validação no nível da *experiência mental*, outros não concluem ou não iniciam a argumentação. No item g, três grupos apresentam uma validação no nível da *experiência mental*, um grupo faz uma validação no nível do *empirismo ingênuo*, outros não concluem ou não argumentam.

Salientamos que os itens citados no parágrafo anterior, relativos à atividade 4, geralmente, são precedidos de exercícios semelhantes, mas em casos particulares (*exemplo genérico*). Talvez isto tenham contribuído para que as provas dos alunos apresentassem características de nível da *experiência mental*.

Sobre as dificuldades dos alunos, destacamos as seguintes:

- Dificuldade em perceber a necessidade de provar, quando uma figura já é o suficiente.

Diante de uma figura que mostra um quadrilátero de lados iguais, aparentemente um quadrado, mas sem indicação das medidas exatas dos

ângulos, os alunos têm apenas que provar que os ângulos internos são todos iguais a 90 graus. Entretanto, não vêem necessidade de uma prova. Uma dupla questiona em tom de deboche: “Tem que justificar? Está de brincadeira! Se aqui está dizendo que todos os lados são iguais, então logicamente que é um quadrado!”. Outro grupo (Rau, Ped), que parece conhecer bem as propriedades do quadrado (lados iguais e ângulos iguais), é iludido pela figura apresentada, e rapidamente conclui que o quadrilátero é um quadrado. Na sua gravação de voz, esses alunos dizem “todos os lados são iguais e os quatro ângulos são iguais.” Os alunos baseiam-se apenas na visualização da figura.

- Dificuldade de encontrar um argumento inicial.

Essa dificuldade é de grande importância, pois ela pode levar o aluno a desanimar ou até desistir. Referente ao problema citado na dificuldade anterior, mesmo após as orientações dadas pelo professor aplicador, de que deveriam provar que os ângulos do quadrilátero mediam 90 graus, os alunos não conseguem iniciar uma argumentação. Uma dupla chega a fazer a seguinte consideração: “Vamos fazer o item b e calcular o valor de a da figura. Cálculo é mais legal, depois voltamos para o item a”. Na atividade 3, da seqüência didática, algumas questões são previamente subdivididas em passos, da forma como considera Duval (2002), já outras são deixadas abertas, sem nenhuma sugestão, para que o próprio aluno decida que estratégia utilizar, podendo até escolher imitar a prova por meio de passos. Nas questões previamente subdivididas em passos, os alunos têm bom desempenho, mas nas questões abertas, o fracasso é geral. Isto pode ser mais uma indicação da dificuldade de encontrar um argumento inicial. Além disso, pode ser uma indicação de que dividir uma prova em passos, não é tarefa simples.

- Dificuldade de compreensão da linguagem utilizada no enunciado da questão proposta.

Uma das questões propostas aos alunos é considerada insolúvel por todos os grupos pesquisados. Ela orienta o uso do “conceito de área”. Mas eles não compreendem o que significam as palavras “conceito de área”. Uma dupla diz: “Mas que conceito de área é esse? Eu nem sei que conceito de área é

esse!”. Entendemos que a linguagem apresentada no enunciado da questão, dificulta para o aluno. Depois de esclarecida a dúvida, alguns grupos conseguem resolver a questão. No final, um aluno diz: “Era maior fácil e a gente ficou quebrando a cabeça”.

- Dificuldade em reconhecer validações dedutivas de validações empíricas.

Os alunos realizam argumentos de natureza empírica (atividade 1) e argumentos de natureza dedutiva (atividade 2). É-lhes solicitado que decidam entre os dois tipos de argumentação. Eles devem indicar aquele que consideram ser uma prova para o teorema de Pitágoras. As análises mostram que a maioria dos grupos de alunos decide pelos dois processos. Uma dupla, por exemplo, considera o seguinte: “Em ambos. Porque cada uma prova de uma maneira diferente, mas, de todo modo os dois levam e levarão sempre ao resultado correto.” Essa escolha da maioria, pelos dois processos, pode ser uma indicação de que os alunos têm dificuldades em reconhecer validações empíricas de validações dedutivas.

- Dificuldade de finalizar um argumento.

Observamos que alguns alunos conseguem raciocinar corretamente, percebem a solução do problema, realizam os cálculos referentes ao problema, obtém resultados corretos, mas se esquecem ou não conseguem formular a resposta final. Assim, suas respostas são confusas, e deixam a cargo do leitor a interpretação e conclusão. Podemos tomar como exemplo a resposta apresentada pelo trio (Pep, Ma, Lou), ao item f, da atividade 4, que incluímos na análise apresentada no capítulo anterior. Ele (o trio) faz os seus cálculos utilizando a letra x em duas situações, para representar segmentos diferentes, e ao final não esclarece o que a tal letra x representa. Não deixa claro qual a medida do segmento AB , solicitada. É possível que essa dificuldade vá diminuindo com o tempo, à medida que os alunos forem se adaptando a esse tipo de trabalho.

- Dificuldade no cálculo algébrico.

Os alunos fazem boa interpretação do enunciado da questão, conseguem representar o problema por meio de uma figura ou por meio de uma igualdade, mas a dificuldade em desenvolver os cálculos com letras, faz com que não consigam concluir. No capítulo anterior, podemos observar na análise *a posteriori* do item d, atividade 4, a resposta do trio (Pep, Ma, Lou). Ao tentar calcular a altura de um triângulo equilátero qualquer, o trio se complica no desenvolvimento algébrico e não consegue obter o resultado correto.

Um fato interessante, é a ausência de dificuldade, por parte de todos os grupos, na realização de exercícios de aplicação de fórmulas prontas, como no item i, da atividade 4. Esta pode ser uma indicação de que esses alunos estão habituados a esse tipo de trabalho nas aulas de matemática.

Para concluir, consideramos que além das dificuldades dos alunos, apresentadas anteriormente, observamos outra, que queremos relatar. É a dificuldade de aplicação desse tipo de trabalho que envolve argumentação e prova. Inicialmente os alunos colocam muitas barreiras, por não estarem habituados e por considerarem um trabalho muito difícil. Assim, eles tendem a desanimar e desistir. É necessário grande esforço para convencê-los a prosseguir. Como resolver esse problema? A resposta não parece tão simples, e encontrá-la, está além dos objetivos desta pesquisa.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) reconhecem e orientam que o currículo de Matemática deve necessariamente contemplar atividades e experiências que possibilitem aos aprendizes o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos. Mas os livros didáticos, em sua maioria, ainda parecem estar longe de contemplar atividades e experiências desse tipo.

Esperamos que os resultados obtidos nesta pesquisa possam subsidiar possíveis propostas interessadas em buscar soluções.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, A., *Episódios da História Antiga da Matemática*. (Coleção Fundamentos da Matemática). Rio de Janeiro, SBM (Sociedade Brasileira de Matemática). 2002.

ARTIGUE, M. *Ingénierie Didactique. Recherches en didactique des mathématiques*, vol 9/3, 281-308, Grenoble, La pensée Sauvage Éditions, 1988.

BALACHEFF, N. *Processus de Preuve et Situations de Validation*. Educacional Studies in Mathematics. vol. 18, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1987.

BALACHEFF, N. *Étude des processus de preuve chez des élèves de collège* (1988). Thèse de doctorat détat em-science. Grenoble; Université Joseph Fournier. Dezembro, 2000.

<http://www-cabri.image.fr/Preuve/indexFR.html>

BARBOSA, R. M. *Descobrimdo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos*. S. Paulo: Editora Atual, 1993.

BASTIAN, I. V. *O Teorema de Pitágoras*, Dissertação de mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2000.

BIGODE, A. J. L. *Coleção: Matemática hoje é feita assim*. 7^a. e 8^a séries. Editora FTD. São Paulo, 2002.

BIRKHOFF, G. D. & BEATLEY, R. *Basic Geometry*, third edition, Chelsea Publishing Company, New York, 1959.

BONGIOVANNI, V. *O Teorema de Pitágoras: Uma ligação entre uma propriedade angular e uma propriedade métrica*. Notas de aula do curso tópicos de geometria, 2004.

BOYER, C.B. 1996. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blucher.

BRASIL, Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), 5ª. a 8ª. Séries do Ensino Fundamental, 1998.

Cabri-geometry II, software de geometria dinâmica, <http://cabri.imag.fr>

CLAIRAUT, A. C. *Elementos de Geometria*. Tradução por José Feliciano. São Paulo:Typ. Augusto Siqueira & C., 1909. 161 p.

DE VILLIERS, M. D. (2002). *Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica*. *Actas do ProfMat 2002*. Viseu: APM.

DE VILLIERS, M.D. (1999). *Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad*. *Revista Educação e Matemática*, no. 62 - Março/Abril de 2001. Portugal.

DUVAL, R. (2002). *Proof understanding in MATHEMATICS: What ways for STUDENTS?* *Proceeding of 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, pp. 61-77.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas. Tradução por Hygino H. Domingues. Editora da Unicamp, 2004.

GRAVINA, M.A. *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo*. Porto Alegre, RS: UFRGS, 2001. Tese de doutorado.

FONSECA, L. *A demonstração e os futuros professores de matemática da Educação Básica*, ESSE de Viana do Castelo, 2005.

GOUVÊA, F. A. T. *"Aprendendo e Ensinando Geometria com a demonstração: Uma contribuição para a Prática Pedagógica do Professor de Matemática do Em Fundamental"*. Tese de mestrado, PUC-SP, 1998.

HILBERT, D. *Fundamentos de la geometria*. Tradução Francisco Cebrian. Editora Instituto Jorge Juan, Madri, 1953.

IREM de Grenoble et de Rennes, *Preuve et démonstration*: PPS. 84 a 99. Tradução: Ana Paula Jahn, Sônia Pitta Coelho e Vincenzo Bongiovanni – PUC-SP, fevereiro de 2006.

LEGENDRE, A. M. *Éléments de Géométrie*. 11.ed. Paris : Chez Firmin Didot, 1817. 465 p. Disponível em : <<http://www.ufpel.tche.br/bvm/>>. Acesso em : 21 maio de 2007.

LOOMIS, E.S. *The Pythagorean Proposition*. Washington D.C.: National council of teachers of mathematics, 1972.

PEREIRA, L.H.F. *Teorema de Pitágoras: lembranças e desencontros na matemática*. Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2002.

MORI, I. & ONAGA, D.S. *Coleção: Matemática idéias e desafios*. 7^a. e 8^a. séries. Editora Saraiva. São Paulo, 2004.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, Secretaria de Educação Básica, *Explorando o Ensino de Matemática*, coletânea de artigos da Revista do Professor de Matemática, vol. I.

MOISE, E. & DOWNS, F. L. *Geometria Moderna – Parte I*, Tradução Renate G. Watanabe e Dorival A. Mello, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, Colaboração da Universidade de Brasília, 1971.

MOISE, E, *Geometria Elemental desde um ponto de vista avanzado*, México, Compañia Editorial Continental S.A., 1976.

NASSER, L. & TINOCO, L. *Preparando o raciocínio dedutivo*, Projeto Fundação, IM/UFRJ, Projeto Fundação, Rio de Janeiro, 2001.

PIETROPAULO, R.C. *(Re) Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática*. Tese de doutorado, PUC-SP, 2005.

DOUADY, R. *A Universidade e a Didática da Matemática: Os IREM na França*. Caderno da Revista do Professor de Matemática, no. 1, pp. 1-4. Sociedade Brasileira de Matemática.

ROSA, E. 1983. *Mania de Pitágoras*. Revista do Professor de Matemática, no. 2, pp. 14-17. Sociedade Brasileira de Matemática.

ROBERT, A. *Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner*, Recherches em Didactique des Mathématiques, vol. 18, no. 2, pp 139-190, 1998.

VAZ, R. L. *O uso das isometrias do software Cabri-Gèomètre como recurso no processo de prova e demonstração*. Dissertação de mestrado, PUC-SP, 2004.

VIANNA, C.C. de S. *O papel do raciocínio dedutivo no ensino de matemática*. Dissertação de mestrado, UNESP – Rio Claro, SP, 1988.

ANEXO I – ATIVIDADE 1

Nome: _____ Série: _____

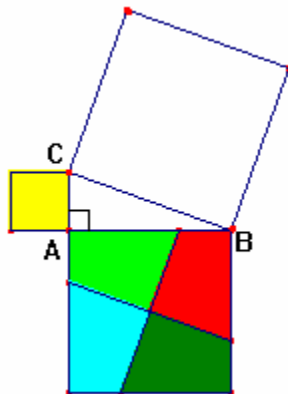
Nome: _____ Série: _____

Data: ___ / ___ / ___ Duração _____

Atividade 1

No Cabri, abra o arquivo denominado “puzzle.fig” o qual contém vários puzzles diferentes.

Os 3 quadriláteros dessa figura são quadrados que foram construídos a partir dos lados do triângulo ABC, retângulo em A, o qual aparece no centro da figura. Um dos quadrados, o construído a partir de um dos catetos do triângulo, foi dividido em 4 peças (polígonos) que foram coloridas, como também foi colorido o outro quadrado construído a partir do outro cateto, como mostra a figura abaixo.



Agora, por superposição, cubra, sem deixar falhas ou remonte, o quadrado construído a partir da hipotenusa com as cinco peças coloridas, sem que haja remonte ou sobra. Para isto, selecione um desses polígonos por vez, clicando sobre um de seus lados e depois digitando “control C” e “control V” seguidamente. A cópia do polígono se deslocará da posição original parecendo dois polígonos, arraste-a então, sem alterar a sua posição ou forma, colocando-a sobre o quadrado grande. É como montar um quebra-cabeça. Cuidado para

não arrastar os polígonos pelo vértice para não deformá-lo, mas caso isso aconteça, desfça a ação (menu editar-desfazer) e repita o processo. Obs: Dependendo do polígono que você tentar selecionar, pode aparecer uma lista de objetos, geralmente é o último da lista, se não for, selecione o penúltimo e assim por diante.

Faça o que se pede abaixo:

a) O que você observou? Relacione as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. O que você conclui?

b) Represente a medida da hipotenusa do triângulo retângulo pela letra a , e por b e c as medidas de cada cateto. Relacione as três medidas a , b e c .

c) A verificação feita com os puzzles é confiável, suficiente e dá certeza de que a relação obtida no item b é sempre válida em qualquer triângulo retângulo? Justifique.

d) No Cabri, construa um triângulo retângulo ABC qualquer. Com a ferramenta “distância ou comprimento” meça os lados de seu triângulo e com a calculadora verifique a relação percebida anteriormente. O que você conclui?

e) A verificação feita no item d, garante que a relação vale sempre para qualquer triângulo retângulo? Justifique.

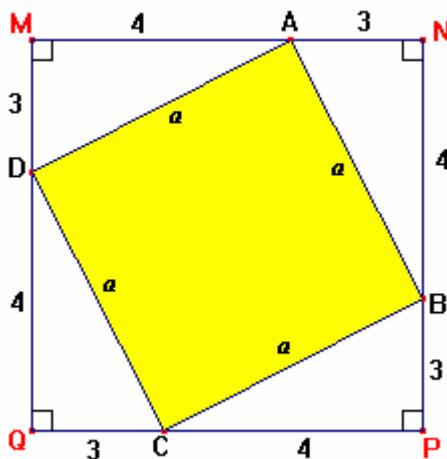
ANEXO II – ATIVIDADE 2

Nome: _____ Série: _____

Data: ___/___/___ Duração _____

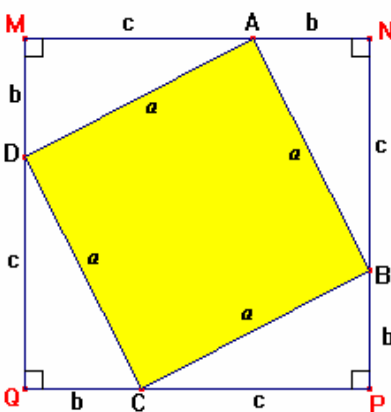
Atividade 2

a) Na figura abaixo o quadrilátero ABCD, é um quadrado. Justifique.



b) Calcule o valor de a , da figura do item a, utilizando o conceito de área. Justifique.

c) Observe o desenho abaixo e calcule o valor de a em função de b e c usando apenas o conceito de área.



Compare com o resultado obtido na atividade 1 letra b. O que você observa?

d) Compare a conclusão obtida na atividade 1 com a conclusão obtida na atividade 2 e responda:

- i) As duas conclusões são equivalentes? (iguais?)
- ii) Em qual dos dois processos (da atividade 1 ou da atividade 2) você considera ter efetuado uma prova para a relação $a^2 = b^2 + c^2$? Justifique.

ANEXO III – ATIVIDADE 3

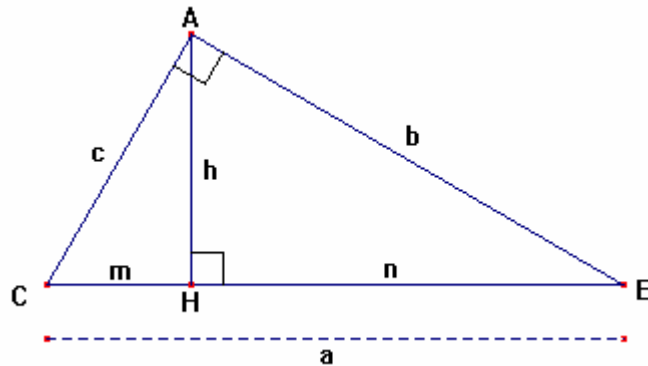
Nome: _____ Série: _____

Nome: _____ Série: _____

Data: ___ / ___ / ___ Duração _____

Atividade 3

a) No Cabrì, construa um triângulo retângulo qualquer ABC, retângulo em A e trace a altura AH relativa ao lado BC. Considere a, b, c, h, m e n as respectivas medidas dos segmentos BC, AB, AC, AH, CH e BH, como ilustra a figura abaixo.



Com a ferramenta “medida ou comprimento” obtenha e anote abaixo, as medidas a, b, c, h, m e n da sua figura.

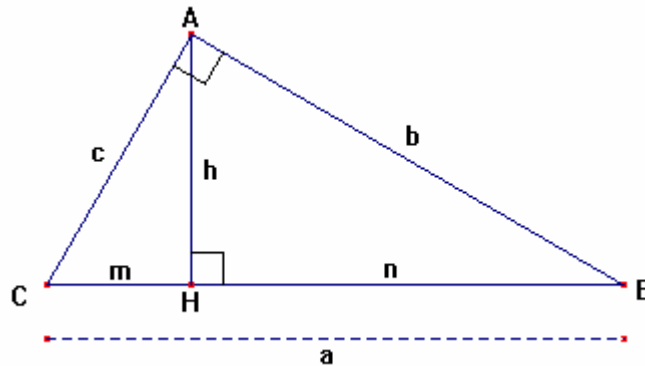
a = b = c = h = m = n =

Com a calculadora (Cabrì ou qualquer outra) obtenha os valores abaixo e relacione a coluna da esquerda de acordo com a direita.

$h^2 =$	$a.h =$
$b^2 =$	$m.a =$
$c^2 =$	$m.n =$
$b.c =$	$n.a =$

Anote abaixo as relações obtidas.

b) No triângulo ABC abaixo, retângulo em A, a, b e c são as medidas dos lados do triângulo e h é a sua altura relativa ao lado BC, m e n são as projeções ortogonais sobre o lado BC dos respectivos lados AC e AB. Um triângulo semelhante ao que você construiu no item a.



Para justificar que $h^2 = m.n$, um aluno utilizou-se dos seguintes passos. Justifique cada um desses passos. Observe a figura acima.

Passo 1 - Se o triângulo ABC é retângulo em A então $a^2 = b^2 + c^2$. Justifique.

Passo 2 - Se $a^2 = b^2 + c^2$ então $(m+n)^2 = b^2 + c^2$. Justifique.

Passo 3 - Se $(m+n)^2 = b^2 + c^2$ então $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$.

Justifique.

Passo 4 - Se $m^2 + 2mn + n^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$ então $2h^2 = 2mn$. Justifique.

Passo 5 - Se $2h^2 = 2mn$ então $h^2 = m.n$. Justifique.

c) Para justificar que $b^2 = a.n$, um outro aluno utilizou-se dos seguintes passos. Justifique cada um desses passos. Observe a figura no item b.

Passo 1 - Se o triângulo ABH é retângulo em H, então $b^2 = h^2 + n^2$. Justifique.

Passo 2 - Se $b^2 = h^2 + n^2$ então $b^2 = m.n + n^2$. Justifique.

Passo 3 - Se $b^2 = m.n + n^2$ então $b^2 = n.(n+m)$. Justifique.

Passo 4 – Se $b^2 = n.(n+m)$ então $b^2 = n.a$. Justifique.

d) Como você justificaria a igualdade $c^2 = a.m$? Observe a figura do item b.

e) Para provar que $b.c = a.h$, outro aluno procedeu da seguinte maneira.

Justifique cada passo. Observe a figura do item b.

Passo 1 – Se $b^2 = a.n$ e $c^2 = a.m$ então $b^2.c^2 = an.am$. Justifique

Passo 2 – Se $b^2.c^2 = an.am$ então $b^2.c^2 = a^2mn$. Justifique.

Passo 3 - Se $b^2.c^2 = a^2mn$ então $b^2.c^2 = a^2h^2$. Justifique.

Passo 4 – Se $b^2.c^2 = a^2h^2$ então $b.c = a.h$. Justifique.

f) Encontre uma outra prova para a relação $b.c = a.h$ usando o conceito de área.

Observe novamente a figura no item b.

ANEXO IV – ATIVIDADE 4

Nome: _____ Série: _____

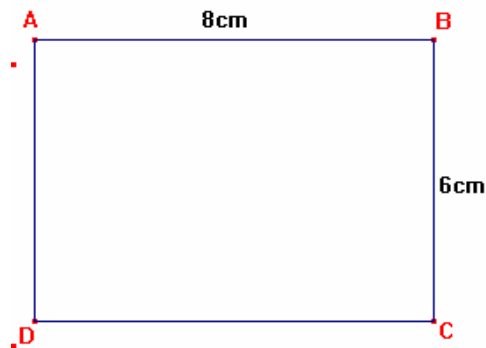
Data: ___/___/___ Duração _____

Atividade 4

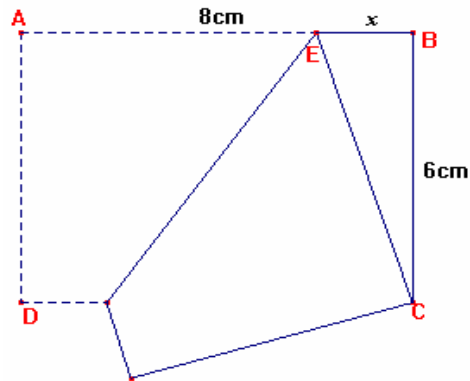
- a) Calcule a medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede 2cm.
- b) Dado um segmento AB de medida 1cm, apresente um método para construir um segmento de medida $\sqrt{2}$ cm.
- c) Calcule a altura de um triângulo eqüilátero de lado medindo 2cm.
- d) Mostre que a altura de um triângulo eqüilátero de lado medindo ℓ cm é

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

- e) Considere o retângulo ABCD representado pelo desenho abaixo.

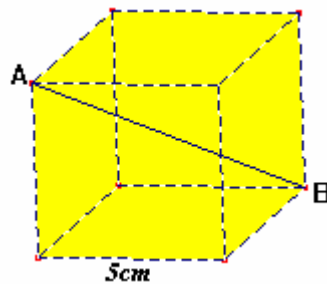


Dobre o retângulo de modo que o vértice A coincida com o vértice C, como o desenho a seguir.



Calcule a medida x do segmento EB.

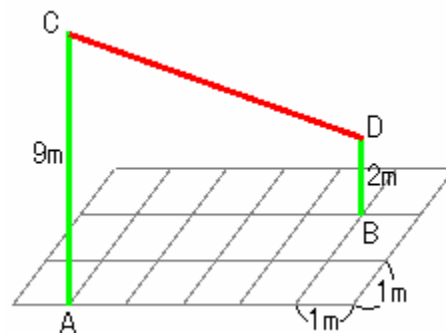
f) Calcule o comprimento da diagonal AB do cubo de aresta igual a 5 cm conforme a figura abaixo:



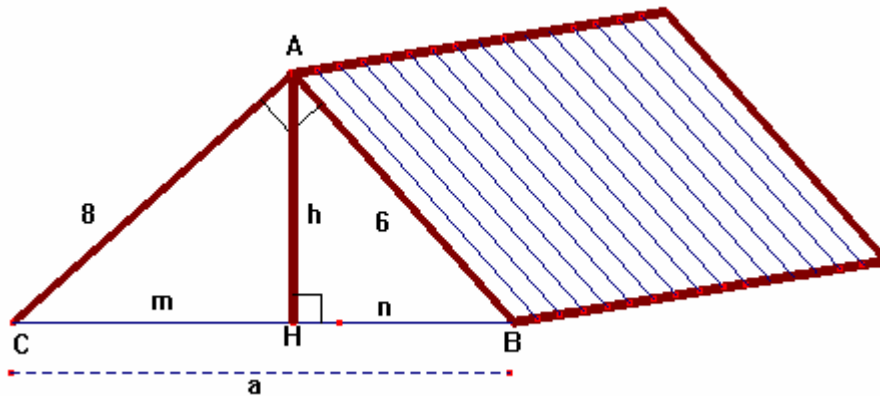
g) Sendo D uma diagonal do cubo cuja aresta mede a , prove que $D = a\sqrt{3}$.

h) Existem dois postes AC e BD perpendiculares a um plano, como mostra a figura. O plano está dividido em quadrados cujos lados medem 1 m.

AC = 9 m, BD = 2 m. Encontre o comprimento de CD.



i) A figura abaixo representa o projeto da cobertura de uma casa. O futuro proprietário deseja que essa cobertura, vista de frente, tenha a forma de um triângulo retângulo, cujo ângulo reto fique na cumeeira do telhado (ponto A). Ele ainda almeja que um lado do telhado meça 8m e o outro lado meça 6m. O arquiteto responsável pelo projeto está com algumas dúvidas e precisa do teu auxílio para saná-las. Ajude-o. Veja abaixo:



- i1) Qual deve ser a largura a desse telhado?
- i2) Qual a medida m do comprimento do segmento \overline{CH} ?
- i3) Qual a medida n do comprimento do segmento \overline{HB} ?
- i4) Qual deve ser a altura h desse telhado?