

LEILA MODANEZ

**DAS SEQUÊNCIAS DE PADRÕES GEOMÉTRICOS
À INTRODUÇÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**PUC/SP
São Paulo
2003**

LEILA MODANEZ

**DAS SEQUÊNCIAS DE PADRÕES GEOMÉTRICOS
À INTRODUÇÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob orientação do Professor Doutor **Saddo Ag Almouloud**.

PUC/SP

São Paulo

2003

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força, coragem e luz em todos os momentos desta caminhada, principalmente nos mais difíceis.

Ao professor-doutor Saddo Ag Almouloud, pela competente orientação, paciência e incentivos constantes.

Aos professores-doutores da Banca Examinadora, Antonio Carlos Brolezzi e Ana Paula Jahn, pela atenção, comentários e sugestões que tanto contribuíram para evolução deste trabalho.

Às amigas de mestrado Irene Pataki, Sônia Regina Facco e Luciane Lopes Rodrigues pelas contribuições constantes durante todo o processo de aplicação e análises da sequência didática desta dissertação.

À coordenação e ao corpo docente do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP, pelo convívio apoio e compreensão.

Agradeço em especial à minha família. Minha mãe e pai queridos que me apoiaram e me incentivaram em todos os momentos da minha vida. Ao meu irmão pelas colaborações técnicas e a meu grande amor pela paciência, incentivo e carinho constantes em todos os momentos.

À CAPES...

...muito obrigada.

RESUMO

DAS SEQÜÊNCIAS DE PADRÕES GEOMÉTRICOS À INTRODUÇÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO

O objetivo dessa pesquisa é o estudo da introdução ao pensamento algébrico, por meio de seqüências de padrões geométricos. Além disso, apresenta uma proposta de ensino da pré-álgebra, no Ensino Fundamental, e uma reflexão sobre a aprendizagem desse conteúdo, por meio de uma seqüência didática, envolvendo oito atividades elaboradas a partir do uso de seqüências de padrões geométricos.

Procuramos responder à seguinte questão: *Uma seqüência de ensino por meio de padrões geométricos pode proporcionar ao aluno a introdução ao pensamento algébrico?* Baseamo-nos nas seguintes hipóteses:

Acreditamos que a introdução ao pensamento algébrico pode ser atingida se a seqüência de ensino,

- engajar o aluno em atividades que inter-relacionem diferentes aspectos da Álgebra, como resolução de problemas e não só para encontrar o valor numérico de uma expressão algébrica ou atividades meramente mecânicas;
- propuser situações em que o aluno possa investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas, identificando suas estruturas para que possa descrevê-los simbolicamente;
- propuser situações que levem o aluno a construir noções algébricas pela observação de regularidades, e não somente manipulações mecânicas de expressões algébricas.

A pesquisa fundamentou-se principalmente nas teorias sobre Mudanças de Quadros, de Régine DOUADY (1987), e Registros de Representação Semiótica, de Raymond DUVAL (1993). A metodologia adotada seguiu os princípios da engenharia didática. A pesquisa envolveu professores e alunos de 6ª série do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: ensino-aprendizagem – pensamento algébrico – seqüências – padrões geométricos.

ABSTRACT

FROM SEQUENCES OF GEOMETRICAL PATTERNS TO THE INTRODUCTION TO ALGEBRAIC THOUGHT

The aim of this research is to study the introduction to the geometrical thought by means of sequences of geometrical patterns. Furthermore, we present an approach to pre-algebra in the elementary education and a discussion on the learning of such subject by means of a didactical series consisting of eight activities elaborated from the use of a series of geometrical patterns.

We aim to answer the following question: *Can a teaching sequence by means of geometrical patterns promote the introduction of the student to the algebraic thought?*

Our discussion is based on the following hypothesis:

- To engage the student in activities that promotes the relationship among different aspects of the Algebra, such as problem solving, and not only to find the value of an algebraic expression or merely mechanical activities.
- To propose situations through which the students may investigate patterns, in numerical series as much as in geometrical representations, identifying their structures so that the students can describe them symbolically.
- To propose situations that allows the students to construct algebraic notions through the observation of regularities, and not only mechanical manipulations of algebraic expressions.

The research is based mainly on the theories about Changing of Pictures of Régine DOUADY (1987) and Registries of Semiotic Representation of Raymond DUVAL (1993). The adopted methodology follows the principles of the didactical engineering. The research evolved teachers and students of the 6th grade of elementary education.

Key-words: teaching-learning – algebraic thought – sequences – geometrical patterns.

SUMÁRIO

ÍNDICE DE FIGURAS	9
ÍNDICE DE TABELAS	10
INTRODUÇÃO	11
CAPÍTULO I: Estudos preliminares	14
1.1 Análise de estudos realizados sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico	16
1.2 O que propõem os PCNs	21
1.3 Análise de alguns livros didáticos.....	23
1.3.1 Análise dos livros de 5 ^a série	25
1.3.2 Análise dos livros de 6 ^a série	26
1.3.3 Análise dos livros de 7 ^a série	27
1.3.4 Análise dos livros de 8 ^a série	28
CAPÍTULO II: Problemática	30
2.1 Questão investigada.....	31
2.2 Hipóteses da pesquisa	31
2.3 Fundamentos teóricos que justificam as escolhas feitas.....	32
2.4 Procedimentos metodológicos	38
CAPÍTULO III: Experimentação	40
3.1 Justificativas e quadro teórico	40
3.1.1 Experimentação com relação ao quadro teórico	43
3.1.2 Justificativa das escolhas feitas	44
3.1.3 Justificativa do dispositivo experimental com relação à problemática.....	45
3.2 Condição da experimentação.....	46

3.3 Panorama dos conhecimentos disponíveis dos alunos.....	48
3.4 Análise a priori das situações propostas, aplicação da sequência didática e análise dos resultados	48
CAPÍTULO IV: Considerações Finais	85
BIBLIOGRAFIA	89
ANEXOS	92

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1 - COMPOSIÇÃO DE UMA SEQÜÊNCIA DE FIGURAS.....	34
FIGURA 2 - TRANSFORMAÇÃO DAS FIGURAS DA SEQÜÊNCIA POR COMPOSIÇÃO.....	34
FIGURA 3 - PROBLEMA Nº 6 DO PAPIRO DE MOSCOU	35
FIGURA 4 - PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 1.....	54
FIGURA 5 - PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 2.....	58
FIGURA 6 - PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 3.....	63
FIGURA 7 - PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 4.....	67
FIGURA 8 - PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 5.....	71
FIGURA 9 - SOMA DE FIGURAS	74
FIGURA 10 - PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 6.....	75
FIGURA 11 - PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 7.....	80
FIGURA 12 - PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 8.....	82
FIGURA 13 - PROTOCOLO DE UM ALUNO (FRENTE E VERSO) REFERENTE À ATIVIDADE 8	83
FIGURA 14 - PROTOCOLO DE UM ALUNO (FRENTE E VERSO) REFERENTE À ATIVIDADE 8	83
FIGURA 15 - PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 8.....	84

ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 1 -	ÍNDICE DE PERCEPÇÃO ENTRE POSIÇÃO PAR COM ELEMENTO QUE TEM BOLINHA PARA BAIXO E POSIÇÃO ÍMPAR COM ELEMENTO QUE TEM BOLINHA PARA CIMA.....	55
TABELA 2 -	ÍNDICE DE PERCEPÇÃO ENTRE AS POSIÇÕES MÚLTIPLAS DE TRÊS E O ELEMENTO LOSANGO DA SEQUÊNCIA.....	58
TABELA 3 -	ÍNDICE DE PERCEPÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO TOTAL DE BOLINHAS DE CADA FIGURA E A POSIÇÃO QUE CADA FIGURA OCUPA NA SEQUÊNCIA.....	65
TABELA 4 -	ÍNDICE DE PERCEPÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO TOTAL DE BOLINHAS DE CADA FIGURA E A POSIÇÃO QUE CADA FIGURA OCUPA NA SEQUÊNCIA	69
TABELA 5 -	ÍNDICE DE PERCEPÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO TOTAL DE QUADRADINHOS DE CADA FIGURA E A POSIÇÃO QUE CADA FIGURA OCUPA NA SEQUÊNCIA.....	72
TABELA 6 -	ÍNDICE DE PERCEPÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO DE QUADRADINHOS DA BORDA DE CADA FIGURA E A POSIÇÃO QUE CADA FIGURA OCUPA NA SEQUÊNCIA.....	77
TABELA 7 -	ÍNDICE DE PERCEPÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO DE QUADRADINHOS DA BORDA DE CADA FIGURA E A POSIÇÃO QUE CADA FIGURA OCUPA NA SEQUÊNCIA.....	81
TABELA 8 -	ÍNDICE DE VERIFICAÇÃO DO APRENDIZADO DA CONSTRUÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA.....	84

INTRODUÇÃO

Desde quando iniciamos o mestrado, nosso desejo era trabalhar com o ensino de Álgebra, mais especificamente, como pode ser desenvolvido o pensamento algébrico em alunos de 6ª série do Ensino Fundamental.

Esse desejo surgiu em 1994, quando no CAEM (Centro de Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática) do IME-USP, foi oferecido um curso para professores de matemática. O assunto a ser abordado nesse curso era “Como seqüências de padrões geométricos poderiam ser úteis no ensino-aprendizagem da Álgebra”.

Fizemos o curso e resolvemos aplicá-lo aos alunos da 6ª série do Ensino Fundamental da escola em que trabalhávamos. Esses alunos ainda não tinham tido contato algum com Álgebra, motivo este pelo qual fizemos essa escolha.

O resultado foi tão surpreendente que resolvemos retornar ao CAEM e mostrá-lo às professoras Eliane Reame de SOUZA e Maria Ignez de Souza Vieira DINIZ, coordenadoras do curso. Estas professoras analisaram os resultados obtidos por nossos alunos e, juntamente com nossos depoimentos, escreveram o livro “Álgebra: Das Variáveis às Equações e Funções”, volume 5 do CAEM.

A partir daí, nos envolvemos e nos preocupamos com o ensino-aprendizagem da Álgebra, que de maneira geral, tem sido objeto de inúmeras pesquisas em diferentes linhas teóricas, as quais serão abordadas nos estudos preliminares do nosso trabalho.

Assim, com o intuito de desenvolver um trabalho de construção do pensamento algébrico a partir da própria necessidade do aluno, resolvemos

reestruturar a proposta de SOUZA & DINIZ, adequando-a ao público alvo de uma escola pública da Grande São Paulo, escolhida por nós.

Nosso trabalho objetiva a construção do pensamento algébrico por meio da utilização de seqüências de padrões geométricos. Dessa forma, tomamos como referenciais teóricos “Mudanças de Quadros”, de Régine DOUADY (1987), e “Registros de Representação Semiótica”, de Raymond DUVAL (1993).

No primeiro capítulo do trabalho, é feita a apresentação dos estudos preliminares, em que realizamos uma análise de estudos feitos sobre a evolução do pensamento algébrico, procurando mostrar a relação entre o pensamento algébrico, a aritmética e a heurística.

Foi realizado, também, um estudo crítico sobre os PCNs, nos referimos às tendências atuais no ensino da Álgebra.

Além disso, foram revistos alguns livros didáticos atuais, a fim de verificar como está sendo abordada a introdução ao pensamento algébrico no terceiro ciclo do Ensino Fundamental.

No segundo capítulo apresentamos a problemática da pesquisa, em que abordamos a questão investigada e as hipóteses da pesquisa.

Em seguida expomos um estudo sobre as idéias de DUVAL (1993) e DOUADY (1987), ou seja, registros de representação semiótica e mudanças de quadros, procurando mostrar como as seqüências de padrões geométricos ficam melhores compreendidas enquanto instrumento para o surgimento da letra. Os procedimentos metodológicos também são apresentados neste capítulo.

No terceiro capítulo é apresentada a experimentação do trabalho, bem como as justificativas das escolhas feitas tanto em relação ao quadro teórico como em relação à problemática. Ainda neste capítulo fazemos a análise a priori da seqüência didática, sua aplicação e relato dos resultados obtidos.

Deixamos para o quarto e último capítulo as considerações finais, em que abordamos a importância da metodologia adotada, os resultados da pesquisa e,

finalizando, a importância da pesquisa para o ensino da Álgebra na educação matemática.

CAPÍTULO I

1. ESTUDOS PRELIMINARES

Após várias leituras feitas de pesquisas realizadas sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra escolar, percebemos que *a Álgebra é uma constante fonte de confusão e atitudes negativas consideráveis entre os alunos* (BOOTH, 1994:23), sendo esse fato objeto de consenso também entre a maioria dos professores de matemática.

Acreditamos que a partir da análise feita sobre os erros dos alunos, podemos identificar algumas das razões que tornam a aprendizagem da Álgebra tão difícil.

Segundo BOOTH (1994), os erros que geralmente aparecem estão relacionados às idéias dos alunos sobre aspectos como:

o foco da atividade algébrica e a natureza das “respostas” ;

Diferentemente da Aritmética, na qual o foco é encontrar uma resposta numérica particular, na Álgebra é estabelecer procedimentos, relações e expressá-los numa forma geral simplificada.

o uso da notação e da convenção em álgebra;

O foco está na dificuldade de interpretação dos símbolos pelos alunos. Por exemplo, os alunos têm dificuldade em aceitar uma expressão do tipo $2x+3y$ como resposta para um determinado problema. Para a maioria dos alunos, a ação efetiva associada ao símbolo adição é juntar os termos, resultando daí $5xy$ como resposta. Isso talvez seja decorrente das idéias primárias de adição, desenvolvidas na Aritmética.

o significado das letras e das variáveis;

Uma das maiores dificuldades encontradas no ensino-aprendizagem da Álgebra é a utilização de letras para indicar valores. Por exemplo, na Aritmética a letra “g” pode ser utilizada para representar “gramas”, na Álgebra, a letra “g” pode representar o número de “gramas”.

Um outro aspecto importante que se constitui em dificuldade no ensino-aprendizagem da Álgebra, é a idéia de “variável”. Há uma forte tendência entre os alunos em considerar que as letras representam valores específicos únicos, como em “ $a+5=8$ ” e não números genéricos ou variáveis como em “ $a+b = b+a$ ”.

Na Aritmética, os símbolos que representam quantidades sempre significam valores únicos, por exemplo, o valor representado pelo símbolo “8”. Assim, na Álgebra, há dificuldades decorrentes dessa visão, pois para muitos alunos “ $a+b+c$ ” nunca pode ser igual a “ $d+e+f$ ”.

os tipos de relações e métodos usados em aritmética.

A Álgebra não é isolada da Aritmética, portanto, é necessário que a generalização das relações e procedimentos aritméticos sejam bem apreendidos no contexto aritmético, para que seu desempenho no contexto algébrico não seja afetado. Por exemplo, se um aluno geralmente não determina o número total de elementos de 48 e 29, utilizando a noção de adição, como $48+29$, mas resolve o problema por meio da contagem, é pouco provável que para esse aluno, o número total de elementos de dois conjuntos que têm x e y elementos seja representado por “ $x + y$ ” elementos.

Uma vez que o objetivo da Álgebra está na dedução de procedimentos e relações e na apresentação destes de forma simples e geral, a utilização da Álgebra na resolução de problemas é imprescindível.

Assim, apresentamos neste capítulo algumas possibilidades de desenvolvimento do pensamento algébrico, visando evitar as frustrações encontradas no processo ensino-aprendizagem da grande maioria dos alunos ao iniciarem o trabalho com Álgebra.

1.1 Análise de estudos realizados sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico

Optamos por iniciar este trabalho pelo estudo histórico-epistemológico da Álgebra, a fim de fundamentar a seqüência de atividades apresentadas.

Alguns dos processos cognitivos envolvidos na aprendizagem da Álgebra escolar encontram suas raízes no desenvolvimento histórico da Álgebra como um sistema simbólico.

Segundo HARPER (1987:75-90), a evolução da Álgebra se deu a partir de três estágios:

O primeiro estágio é o *retórico*, que pertence ao período antes de DIOFANTE (séc. III). Este período foi caracterizado pelo uso de expressões em linguagem natural, pois não existiam símbolos para representar as incógnitas.

Alguns papiros, como o de Rhind e Moscou, apresentam problemas da vida cotidiana e suas resoluções; a maioria deles é do tipo aritmético, porém alguns deles são do tipo algébrico e apresentavam resoluções de maneira amplamente retórica, embora usassem alguns símbolos como o da adição e o da subtração.

O segundo estágio é o *sincopado*, que foi iniciado por DIOFANTE. Nesse estágio surgem os símbolos na Álgebra para representar as quantidades incógnitas. Nesse período, a necessidade maior dos algebristas era descobrir a identidade das letras, ao invés de tentar expressar o geral.

Vale lembrar que nesse estágio os sinais ainda são do tipo abreviatura, ou seja, são mais que símbolos algébricos no sentido atual. São sinais especiais para as incógnitas, potências, sinais de menos e os demais sinais das operações, bem como algumas abreviações para palavras muito freqüentes.

O terceiro estágio, que é o da Álgebra *simbólica*, surgiu com FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603). Nesse estágio, a letra significava o que era dado; também significava a quantidade incógnita e finalmente passou a representar soluções gerais. Foi nesse período que a Álgebra passou a funcionar também como ferramenta que expressa regras e que regem relações numéricas.

Um estudo do desenvolvimento histórico da Álgebra nos permite entender que a Álgebra é um ramo da Matemática que trata da simbolização de relações numéricas gerais, bem como das estruturas matemáticas e de como operar sobre essas estruturas.

Assim, iniciamos nossa pesquisa sobre a introdução ao pensamento algébrico, procurando fundamentar nossa seqüência didática a partir de diferentes concepções do ensino de Álgebra, as quais foram agrupadas em três categorias:

Na primeira categoria está a visão mais clássica do ensino de Álgebra, ou seja, o pensamento algébrico aparece como *desenvolvimento ou ampliação do pensamento aritmético*.

Alguns pesquisadores foram destacados nesta categoria:

Segundo CHEVALLARD (1989:53), ... *a aritmética constitui, num primeiro nível de instrução, um conjunto coerente e relativamente completo. Ela é, num segundo nível, o alicerce sobre o qual a aprendizagem da álgebra se apóia*. Assim, o autor deixa claro que a álgebra é um instrumento de generalização da aritmética.

Percebemos, no entanto, que segundo CHEVALLARD (1989), o ensino-aprendizagem da Álgebra não deve acontecer isoladamente em relação ao ensino-aprendizagem da Aritmética, mas como uma ampliação deste.

Para KIERAN (1992:6), *as exigências cognitivas envolvidas no trabalho com expressões algébricas, como objetos com operação que são assaz distintas das operações da aritmética, são claramente remanescentes das lutas intelectuais que ocorreram durante o desenvolvimento histórico da Álgebra, quando interpretações processuais abriram caminho para as estruturais*. O ensino-aprendizagem da Álgebra deve ser desenvolvido a partir do ensino-aprendizagem da Aritmética. Para a autora, o estudo da Álgebra escolar pode ser interpretado como um ciclo de evolução processual-estrutural.

Segundo a autora, o termo *processual* refere-se às operações aritméticas realizadas sobre números para produzir números. Por exemplo, se na expressão " $7a+5b$ " substituirmos o a por 2 e o b por 1, o resultado é 19. No exemplo,

aparentemente algébrico, os objetos trabalhados não são as expressões algébricas, mas suas instanciações numéricas. Além disso, as operações realizadas produzem um resultado numérico.

Por outro lado, o termo *estrutural* refere-se a um conjunto de operações, não sobre números, mas sobre expressões algébricas. Por exemplo, se tomarmos a expressão algébrica " $10t+4h-6t$ ", esta pode ser simplificada para " $4t+4h$ ". No exemplo os objetos trabalhados são expressões algébricas. Além disso, o resultado obtido é uma expressão algébrica.

Entendemos, no entanto, que para KIERAN (1992), o aluno deve primeiro trabalhar as operações aritméticas realizadas sobre números, a fim de produzir números, e só então passar a desenvolver um conjunto de operações, não sobre números, mas sim sobre expressões algébricas.

Na segunda categoria, propomos a visão da *Álgebra e a Aritmética com desenvolvimento inter-relacionado*.

Destacamos nessa categoria, LINS & GIMENEZ (2000:10), que afirmam ser "*preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra*".

Segundo essa visão, LINS & GIMENEZ (2000) propõem que o ensino-aprendizagem da Álgebra seja desenvolvido concomitantemente com a Aritmética. Permanece assim, uma relação muito forte entre a Álgebra e a Aritmética.

Na terceira categoria, procuramos constatar uma *origem semi-independente dos pensamentos algébrico e aritmético*.

Essa idéia de certa independência do pensamento algébrico frente à aritmética pode ser encontrada nos trabalhos de AZARQUIEL et al. (1993:15). Estes afirmam que as dificuldades de assimilação do método algébrico "*... não se devem unicamente a uma assimilação deficiente dos processos matemáticos prévios, mas também à natureza dos elementos e da própria atividade algébrica*".

Nesta explicação há manifestação de semi-independência da atividade algébrica, frente aos processos matemáticos prévios (Aritmética).

Caracterizando a origem de semi-independência dos pensamentos algébrico e aritmético, temos:

NEVES (1995) e AZARQUIEL et al. (1993), atribuem à lógica, o papel fundamental do pensamento algébrico, podendo distingui-lo do pensamento aritmético. Se a álgebra tem essa origem relativamente independente da aritmética, então precisamos procurar outras relações que estejam fundamentando o pensamento algébrico. E é exatamente segundo essa linha de pensamento que direcionamos nosso trabalho.

NEVES (1995) destaca também três aspectos que distinguem o pensamento algébrico de outras formas de pensamento: intenção de refletir sobre os próprios procedimentos utilizados (caráter analítico); tendência em proceder a partir de elementos internos (caráter internalista); atuação sobre as relações estabelecidas entre os objetos (caráter operativo).

Ao fazer essa caracterização do pensamento algébrico, NEVES (1995) parece atribuir grande importância às relações lógicas (formais e informais) na constituição do pensamento algébrico.

O estudo feito por SOUZA e DINIZ (1994:8), apontava para uma concepção do ensino-aprendizagem da álgebra como não totalmente dependente da aritmética, quando propõe como uma das funções da álgebra sua utilização nos processos de resolução de problemas do tipo: *“o tempo que se gasta para ir de Santos ao Rio de Janeiro, a uma velocidade média de 60 km/h, é igual a duas horas a mais do que o tempo que se gasta para se fazer a mesma viagem a uma velocidade média de 80 Km/h. Qual é a distância entre Santos e o Rio de Janeiro?”*. Entretanto, restringem sua utilização ao uso de incógnitas para representar valores numéricos desconhecidos.

Na reestruturação da proposta de SOUZA e DINIZ (1994), pretendemos propor que a construção do pensamento algébrico seja tratada de maneira mais

independente da educação aritmética, situando-a mais no campo da heurística ou da resolução de problemas.

Para SCHOEN (1994:141), a recomendação é: *“Ensinar e modelar processos heurísticos específicos como auxiliares para a compreensão e resolução de problemas”*. Este autor recomenda que é importante enfatizar a estrutura matemática de um certo problema, permitindo que o aluno perceba porque uma equação ou um sistema de equações, por exemplo, podem ser bons modelos para a resolução desse problema.

Na mesma linha, FALCÃO (1992) explora a idéia de álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas, destacando o aspecto de ruptura de procedimento que a álgebra estabelece em relação à aritmética, colocando-o no núcleo epistemológico da álgebra enquanto campo conceitual, em contraponto à idéia de continuidade entre álgebra e aritmética.

A sugestão de introdução ao pensamento algébrico por meio de resolução de problemas foi trabalhada também por SUTHERLAND & ROJANO (1991), como forma de preencher o espaço entre as abordagens não-algébricas e algébricas.

FILLOY & ROJANO (1989), desenvolvem também a idéia de que a resolução de equações seria uma forma de transição da aritmética para a álgebra.

FILLOY & ROJANO (1989), aprofundam seus estudos criando uma distinção maior entre álgebra e resolução de problemas, mostrando, por meio de um estudo histórico, que é um erro considerar a manipulação simbólica da sintaxe da álgebra no ensino, antes de situações que lhe dêem significado.

Para a autora, a resolução de problemas envolve outros conhecimentos e habilidades que não são somente ligados à álgebra, chamando a atenção, por exemplo, para o fato de VIÈTE (1540 -1603) ter desenvolvido a álgebra simbólica e ao mesmo tempo ter utilizado os recursos concretos geométricos, ou algébricos, da matemática grega clássica, na resolução de problemas. Através disso, conclui que devem ser valorizados os conhecimentos, métodos e habilidades que os

estudantes já possuem, mesmo que informais, na introdução ao pensamento algébrico.

Nesse sentido é que situamos a abordagem proposta neste trabalho. Entendemos que a introdução ao pensamento algébrico não se reduz ao esforço por generalizar a aritmética, nem tampouco deve ficar restrito a uma relação de causa e efeito com a aritmética.

A resolução de problemas aponta para um campo de trabalho em que podemos situar a gênese do pensamento algébrico: a *heurística*.

Segundo ROJANO (1991), o estudo da história da Álgebra parece mostrar que o desenvolvimento epistemológico da Álgebra está ligado a um aspecto muito maior da atividade matemática, que é a geração de novos conhecimentos a partir da atividade de resolução de problemas, que não podem em um dado momento ser resolvidos com o conhecimento existente.

1.2 O que propõem os PCNs

Com a intenção de verificar como é proposto o ensino-aprendizagem da álgebra no Brasil, fizemos um estudo sobre os conteúdos que devem ser ensinados em álgebra no terceiro ciclo (5^a e 6^a séries) do Ensino Fundamental, sugeridos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1998).

No que diz respeito ao ensino da Álgebra escolar do Ensino Fundamental, os PCNs (1998: 64;81) se dispõem favoráveis à introdução e construção do conceito algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

(...) reconhecer que representações algébricas permitem generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações problemas e favorecer as possíveis soluções;

traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;

utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico;

observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis;

produzir e interpretar diferentes escritas algébricas – expressões, igualdades e desigualdades – identificando as equações, inequações e sistemas.

Segundo os PCNs (1998), os resultados do SAEB (Sistema de Avaliação do Ensino Brasileiro), infelizmente apontam que os itens referentes à Álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto, em muitas regiões do país. Por isso, entendemos que para haver maior compreensão do conteúdo algébrico, é necessário que se faça uma articulação entre as diferentes dimensões da álgebra escolar: *aritmética generalizada*, *funcional*, *equações* e *estrutural* os (PCNs, 1998:116) sugerem que:

Quanto à Álgebra como *aritmética generalizada*, podemos trabalhar o uso das letras como generalizações do modelo aritmético em que serão envolvidas as propriedades das operações e generalizações de padrões aritméticos.

Na *álgebra funcional*, as letras são trabalhadas como variáveis para expressar relações e funções em que será envolvida a variação de grandezas. Já nas *equações*, as letras são apresentadas como incógnitas para a resolução de equações.

Na *álgebra estrutural*, as letras são símbolos abstratos, que no cálculo algébrico são usadas para obtenção de expressões equivalentes.

O aluno desenvolve de forma bastante significativa a habilidade de pensar “abstratamente”, desde que lhe sejam proporcionadas experiências variadas envolvendo as várias concepções da álgebra, a partir das séries iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a aritmética e a resolução de problemas.

Os problemas podem ser de cunho geométrico, em que o aluno possa identificar e generalizar as propriedades das operações aritméticas, bem como estabelecer algumas fórmulas como, por exemplo, a área de uma figura plana.

É interessante, também, propor problemas em que o aluno possa investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas, permitindo ao aluno identificar as estruturas e construir a linguagem algébrica para descrevê-lo simbolicamente.

Segundo os PCNs (1998), problemas desse tipo favorecem ao aluno construir a idéia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades. Assim, acreditamos que o aluno adquira uma base mais sólida para a aprendizagem da Álgebra, que se torna mais rica e mais significativa.

1.3 Análise de alguns livros didáticos

Sabemos que “os livros didáticos de Matemática, assim como os livros das demais áreas do conhecimento, exercem grande influência sobre o processo ensino-aprendizagem” (PNLD: 3). Por isso, apresentamos uma análise de como é apresentada a passagem da Aritmética para Álgebra em alguns livros didáticos.

Escolhemos para análise, três coleções atualizadas de livros com idéias da Educação Matemática, livros estes recomendados pelo MEC por assumirem as propostas dos PCNs e traduzirem os critérios do PNLD.

BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática hoje é feita assim*: Ensino Fundamental. São Paulo: FTD, 2000.

PIRES, Célia Carolino; CURI, Edda; PIETROPAOLO, Ruy. *Educação Matemática*: Ensino Fundamental. São Paulo: Atual, 2002.

MENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. *Matemática para todos*: Ensino Fundamental. São Paulo: Scipione. 2002.

A partir daí, selecionamos quatro critérios para analisar os livros didáticos, os quais estão elencados no quadro a seguir:

QUADRO 1 - CRITÉRIOS SELECIONADOS PARA ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

CRITÉRIOS	DESCRIÇÃO DOS CRITÉRIOS
A	Verificar se utilizam abordagens alternativas específicas para a introdução ao pensamento algébrico.
B	Verificar se trabalham com o uso de seqüências de padrões geométricos.
C	Verificar se trabalham com o uso de seqüências de padrões geométricos para a introdução ao pensamento algébrico
D	Verificar se utilizam estratégias diferentes para apresentar a letra ao aluno como símbolo matemático.

O critério **A**, serve para mostrar que houve uma incorporação das tendências do ensino de Álgebra nos livros didáticos. Não analisamos, por meio desse critério, o uso de seqüências de padrões geométricos para a introdução ao pensamento algébrico, mas a utilização de abordagens alternativas específicas para o ensino-aprendizagem da pré-álgebra.

Quanto ao critério **B**, serve para verificar a simples presença do uso de seqüências de padrões geométricos, independentemente do seu objetivo, ou seja, para desenvolvimento do pensamento aritmético ou apenas como exercício.

O critério **C**, é o que vai mais ao encontro do objetivo principal do nosso trabalho, uma vez que nossa proposta é que se faça uso de padrões geométricos para introdução ao pensamento algébrico.

Com esse critério, verificamos se os livros utilizam esse enfoque sugerido pelos PCNs e também adotado pela nossa pesquisa.

O critério **D**, serve para verificar a presença da abordagem do uso da letra como símbolo matemático. Com isso, queremos mostrar que apesar dos livros apresentarem a letra como símbolo matemático, nem sempre fazem isso como coroamento de uma construção pedagógica. Para cada um desses quatro critérios, elaboramos uma escala a qual atribuímos valores simbólicos, conforme a legenda abaixo:

 não usa
  usa pouco
  usa regularmente
  usa muito

1.3.1 Análise dos livros de 5ª série

Analizamos o livro da 5ª série do Ensino Fundamental, de BIGODE (2000), e pudemos constatar que o autor tem uma preocupação em apresentar ao aluno algumas seqüências de padrões geométricos, dentre elas, a dos números triangulares e dos números quadrados.

No livro, as seqüências têm como objetivo estimular as habilidades para se fazer cálculos mentais, bem como levar o aluno a uma interpretação da seqüência por meio de cálculos aritméticos.

O autor, por si próprio, em uma das questões menciona a letra “n” para que o aluno escreva uma regra matemática, a partir da letra sugerida. Portanto, ao nosso ver, a letra pode ter aparecido porque o autor sugeriu o seu uso. Vale lembrar também que, no livro, até o momento não haviam sido propostos trabalhos com o uso de letras nos cálculos matemáticos.

No livro de 5ª série do Ensino Fundamental, de PIRES, CURI & PIETROPAOLO (2002), pudemos constatar que os autores trabalham as idéias e conteúdos matemáticos apenas na aritmética.

Quanto à coleção de IMENES & LELLIS (2002), observamos que no livro da 5ª série do Ensino Fundamental há uma preocupação com o desenvolvimento das habilidades de generalização, por isso os autores sugerem que esse desenvolvimento seja feito a partir da observação de seqüências de padrões geométricos e seqüências numéricas.

Nesse livro, a grande preocupação com o desenvolvimento das habilidades para generalização está no estudo de múltiplos e divisores de um número, portanto, nesta série, ainda não há uma preocupação explícita com o ensino-aprendizagem da álgebra propriamente dita, mas uma preocupação com a capacidade de abstração como um dos aspectos muito relevantes na introdução ao pensamento algébrico.

1.3.2 Análise dos livros de 6ª série

Ao analisarmos o livro da 6ª série do Ensino Fundamental, de BIGODE (2000), percebemos que a álgebra é apresentada ao aluno por meio do uso de balanças matemáticas para o estudo de equações de primeiro grau. Neste caso, a letra surge como incógnita e não como variável.

Para o estudo de equações de 1º grau, o próprio autor indica por “x” as quantidades desconhecidas, não deixando para o aluno a possibilidade de percepção da necessidade própria do uso da letra.

Na 6ª série do Ensino Fundamental, da coleção de PIRES, CURI & PIETROPAOLO (2002), os autores trabalham com seqüências numéricas, chamando sempre a atenção para a regularidade de cada seqüência, em que o objetivo principal de trabalhar com as seqüências numéricas é permitir que o aluno descubra algumas das regras de divisibilidade. Ainda neste mesmo livro, na unidade quatorze, os autores se propõem à introdução ao pensamento algébrico, por meio da resolução de problemas. No início da unidade é apresentado um texto sobre “O x do problema”, em que os autores explicitam que *“o uso de letras em Matemática nos ajuda a resolver problemas, a generalizar propriedades aritméticas, a expressar relações entre grandezas”* (p.156).

Depois dessa apresentação do uso de letras na Matemática, são apresentadas algumas atividades, dentre elas uma de seqüência de padrões geométricos, cujo objetivo é encontrar a expressão algébrica que determina a relação entre duas grandezas determinadas em cada atividade.

Percebemos que houve preocupação por parte dos autores em trabalhar a letra, tanto como incógnita, quando propõem o cálculo de equações, quanto como variável, quando propõem atividades envolvendo seqüências de padrões geométricos.

No livro da 6ª série do Ensino Fundamental, de IMENES e LELLIS (2002), novamente encontramos uma preocupação com o uso de seqüências de padrões geométricos, mas não como um caminho para o surgimento da “letra” nas expressões matemáticas, em que o próprio aluno sinta a necessidade do uso da

letra, mas as seqüências aparecem como exercícios para que o aluno pense na sua regra algébrica. No entanto, nesse momento a letra já havia sido apresentada ao aluno pelo autor, quando o mesmo inicia a unidade apresentando fórmulas matemáticas, mostrando a importância das letras nessas fórmulas.

1.3.3 Análise dos livros de 7ª série

No seu livro da 7ª série, BIGODE (2000) trabalha com seqüência de padrões geométricos, os quais objetivam a exploração de regularidades, bem como relações de dependência.

O autor também se preocupa e chama a atenção para a Geometria da configuração da seqüência, ponto de muita relevância também na nossa pesquisa, pois a observação da configuração geométrica da seqüência, assim como seu entendimento, são essenciais para a construção da regra algébrica da seqüência.

Na quinta unidade do livro da 7ª série do Ensino Fundamental, PIRES, CURI & PIETROPAOLO (2002), propõem o estudo da “Álgebra e padrões geométricos”. Esta unidade do livro é rica em seqüências de padrões geométricos. Podemos notar que os autores têm uma grande preocupação em explorar o raciocínio algébrico e acreditam que esta exploração pode ser feita por meio de seqüências de padrões geométricos.

Na 7ª série do Ensino Fundamental, IMENES e LELLIS (2002) utilizam seqüências de padrões geométricos para o desenvolvimento das habilidades do cálculo algébrico, uma vez que o aluno já teve contato com a álgebra, na 6ª série.

Para a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos, é necessário que se faça uma articulação entre as diferentes funções da letra: *aritmética generalizada* (letras como generalizações do modelo aritmético), *funcional* (letras trabalhadas como variáveis para expressar relações e funções), *equações* (letras apresentadas como incógnitas para a resolução de equações) e *estrutural* (letras como símbolos abstratos).

Na sétima unidade da 7ª série do Ensino Fundamental, há uma lista de exercícios onde a letra, em alguns deles, a letra aparece como incógnita e, em outros, como variável. Portanto, notamos também que o autor se preocupou em trabalhar a letra em mais de um aspecto da álgebra.

1.3.4 Análise dos livros de 8ª série

Para a 8ª série do Ensino Fundamental, BIGODE (2000), volta a apresentar seqüências de padrões geométricos no estudo de funções, sendo que tais seqüências servirão para que os alunos expressem algebricamente relações entre grandezas.

No livro da 8ª série do Ensino Fundamental, de PIRES, CURI & PIETROPAOLO (2002), não foi observado o uso de seqüência de padrões geométricos, nem mesmo no estudo de funções.

Notamos também, no livro da 8ª série do Ensino Fundamental, que IMENES e LELLIS (2002) fazem uso de seqüências de padrões geométricos no estudo de funções. As seqüências aparecem nos exercícios, onde o aluno deve observá-las e descobrir a lei de formação de cada uma delas.

O quadro 2, a seguir, foi elaborado visando facilitar a leitura, bem como a comparação dos critérios utilizados pelos autores.

QUADRO 2 - COMPARATIVO QUANTO AO USO DOS CRITÉRIOS

CRITÉRIOS	AUTORES		
	1	2	3
○ A ○	○		
● B ●	●		
○ C ○	○		
● D ●	●		

○ não usa ○ usa pouco ● usa regularmente ● usa muito

Depois das análises feitas sobre os livros didáticos, pudemos constatar que o diferencial apresentado nesta pesquisa refere-se ao uso de padrões geométricos para introdução ao pensamento algébrico.

Propomos, dessa forma, que esse trabalho com seqüências seja feito antes do aluno tomar contato com a Álgebra, ou seja, é interessante que o aluno ainda não tenha trabalhado com o uso de letras em situações matemáticas.

Nosso trabalho procura mostrar, enfim, que a introdução ao pensamento algébrico, por meio de padrões geométricos, permite que o aluno desenvolva a habilidade de generalização e escreva a regra algébrica da seqüência sozinho, sem que o autor necessite “contar” para o aluno que para escrever uma expressão generalizada é preciso usar letras, pois na seqüência de atividades o aluno já escreve por conta própria esta “letra”, a qual muitas vezes, inicialmente, é expressa por uma palavra que mais tarde é simplificada e substituída por uma “letra”.

CAPÍTULO II

2. PROBLEMÁTICA

O problema abordado por esta pesquisa objetiva verificar se a introdução ao pensamento algébrico, por meio de seqüências de padrões geométricos, favorece a superação das principais dificuldades apresentadas pelos alunos que iniciam o estudo em Álgebra.

NOBRE (1996), resume algumas das dificuldades apresentadas por crianças que iniciam o estudo em Álgebra, apontadas em pesquisas da área da Educação Matemática. Dentre as quais:

- dificuldade em dar sentido a uma expressão algébrica;
- não distinguir adição aritmética ($3+5$) da adição algébrica ($x+3$);
- não ver a letra como representando um número;
- atribuir significado concreto às letras ($3b+2b$ como 3 balas+2 balas);
- dificuldade para pensar em uma variável como significando um número qualquer;
- interpretações diferentes para as ações que correspondem aos símbolos $+$ e $=$ na aritmética e na álgebra;
- significados distintos para algumas letras na aritmética (em aritmética podemos ler $3m$ como 3 metros e em álgebra, como o triplo do número de metros);
- dificuldade em passar da linguagem natural para a algébrica.

BOOTH (1994), ao falar das dificuldades das crianças que iniciam o estudo da Álgebra, aponta que parte dessas dificuldades decorre da interpretação que a criança faz do símbolo operatório, da necessidade de precisão absoluta no

registro de afirmações, do uso de letras para indicar valores (uma das diferenças mais flagrantes entre a aritmética e a álgebra). Porém, aponta que um dos aspectos mais relevantes é a própria idéia de variável.

Como dissemos, nosso problema foi identificado a partir de uma aplicação da proposta de SOUZA & DINIZ (1994), e desenvolvido teoricamente por meio dos estudos de DUVAL (1993) e DOUADY (1987). No presente trabalho, o problema é abordado por meio de uma reformulação da seqüência de SOUZA & DINIZ (1994), com novas atividades que são aplicadas e estudadas.

Com base na nossa prática docente e estudos preliminares, definimos a problemática e formulamos as hipóteses. Para nós, a introdução ao pensamento algébrico é a construção, pelo aluno, de uma linguagem para expressar regularidades, tipicamente algébrica.

2.1 Questão investigada

Detectamos, por meio de análises em afirmações presentes em pesquisas, teses, palestras e congressos, que a maioria dos alunos, atualmente, têm uma concepção limitada das noções algébricas, que muitas vezes é ocasionada por uma prática de ensino e reforçada pelos livros didáticos. Talvez sejam esses os motivos que levaram muitos alunos, após o ensino dessas noções, a não perceber a Álgebra, pelo menos como um instrumento de generalização matemática.

Assim, o problema central do nosso trabalho se resume em:

Uma seqüência de ensino por meio de padrões geométricos pode proporcionar ao aluno a introdução ao pensamento algébrico?

2.2 Hipóteses da pesquisa

Acreditamos que a introdução ao pensamento algébrico pode ser atingida se a seqüência de ensino:

1. Engajar o aluno em atividades que inter-relacionem diferentes aspectos da Álgebra como resolução de problemas, e não só para encontrar o valor numérico de uma expressão algébrica ou atividades meramente mecânicas.

2. Propor situações em que o aluno possa investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas, identificando suas estruturas, para que possa descrevê-los simbolicamente.

3. Propor situações que levem o aluno a construir noções algébricas pela observação de regularidades, e não somente manipulações mecânicas de expressões algébricas.

Para nós, se a seqüência de ensino conter as hipóteses, o desenvolvimento do pensamento algébrico se fará espontaneamente a partir da necessidade do próprio aluno. Assim, a letra surgirá na escrita matemática pelo fato dos conhecimentos do aluno já não mais darem conta de resolver as questões por nós colocadas.

Nossa proposta é que a “letra” surja primeiramente como variável, a fim de fazer desenvolver o raciocínio do aluno para resolver cada problema proposto. Num segundo momento, quando essa “letra” já estiver bem trabalhada e entendida, pode então, num outro contexto, ser trabalhada como incógnita.

2.3 Fundamentos teóricos que justificam as escolhas feitas

Fundamentamos nossa pesquisa nos estudos feitos sobre os registros de representação semiótica, de Raymond DUVAL (1993).

O objeto matemático pode ser expresso por meio de várias representações semióticas, ou seja, externas. As linguagens natural, simbólica e algébrica, além das figuras geométricas, são registros de representação semiótica.

Um registro é, portanto, um sistema semiótico que tem funções cognitivas fundamentais.

Segundo ALMOULOU (2000: 41), ... *falar de registros é colocar em jogo o problema da aprendizagem e dar ao professor um meio que deverá ajudá-lo a tornar mais acessível a compreensão da matemática.*

A idéia de registros é especialmente útil quando se consideram as mudanças e coordenação desses registros. Nesse sentido, as noções de *tratamento* e *conversão*, que são dois tipos de transformação das representações, são consideradas importantes no nosso trabalho.

Em primeiro lugar, o *tratamento*, o qual demonstra a transformação de uma representação em outra representação do mesmo registro, será utilizado nesse trabalho quando o aluno tiver por objetivo manipular as expressões algébricas, procurando observar uma equivalência entre elas.

Por exemplo, a expressão " $2.(2p+2)$ " pode também ser escrita pelo aluno como " $4p+4$ ". Assim, podemos dizer que a noção de tratamento está sendo utilizada no nosso trabalho.

A *conversão*, que significa uma mudança de registros preservando a referência ao mesmo objeto ou mesma situação apresentada, se aplica também nesse trabalho, pois as atividades permitem que o aluno represente a regularidade da seqüência geométrica por meio da linguagem algébrica.

Por exemplo, quando o aluno escreve, em linguagem natural, "*um número mais dois*", e depois esse mesmo aluno traduz essa expressão para a linguagem algébrica, " $n+2$ ", podemos dizer que a noção de conversão está em jogo, pois em Matemática essas duas expressões têm o mesmo significado, porém são registradas de maneiras diferentes.

No nosso trabalho, a teoria desenvolvida por DUVAL (1993), é particularmente interessante, entre outras, pois pretendemos desenvolver a introdução ao pensamento algébrico por meio de seqüências de padrões geométricos.

Esperamos que os alunos façam (mentalmente ou no papel) modificações nas figuras das seqüências dos padrões geométricos, para que possam ser captadas e interpretadas numa reorganização perceptiva.

Na Figura 1, podemos observar a quantidade de bolinhas que compõem cada figura da seqüência.

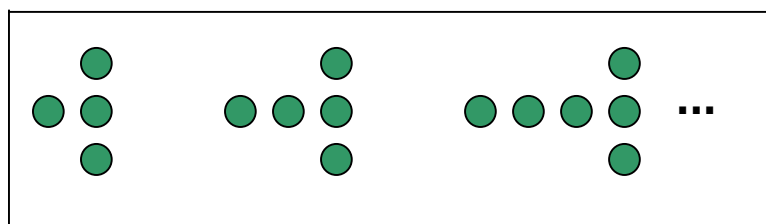


FIGURA 1 – COMPOSIÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DE FIGURAS

O aluno pode perceber que a sequência dada pode ser transformada na sequência, mostrada na Figura 2.

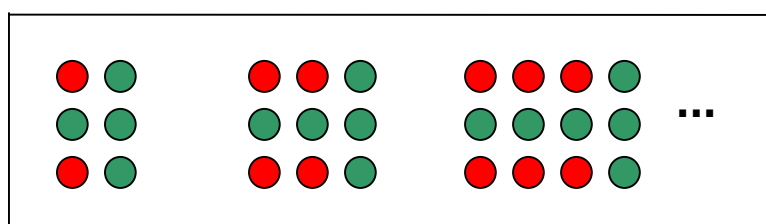


FIGURA 2 – TRANSFORMAÇÃO DAS FIGURAS DA SEQUÊNCIA POR COMPOSIÇÃO

Para calcular a área de cada um dos retângulos que formam a sequência, a medida da base de cada retângulo pode ser entendida como sendo “a *posição ocupada pela figura mais um*”, enquanto que a altura de cada retângulo não varia, é sempre “*três*”. Portanto, a área de cada retângulo é sempre obtida por “ $(\text{posição} + 1) \cdot 3$ ”.

No entanto, o que se quer saber é a quantidade de bolinhas de cada figura da sequência dada e não da sequência transformada, portanto, devemos descontar de cada figura a quantidade de bolinhas vermelhas que foram acrescentadas.

Podemos notar que, nas figuras 1 e 2, a quantidade de bolinhas acrescentadas é igual a “*duas vezes a posição da figura*”. Assim, a quantidade de bolinhas de cada figura da sequência dada é obtida por “ $3 \cdot (p+1) - 2p$ ”.

A exploração de uma figura da sequência pode manifestar uma variedade de subfiguras não vistas num primeiro olhar, o que permite formar sequências diferentes de subfiguras.

Novamente, nesse tipo de raciocínio utilizado para se chegar à quantidade de bolinhas que compõem cada figura da seqüência, podemos notar a presença do *tratamento*, só que neste caso *tratamento figural*.

Ainda com o objetivo de justificar as escolhas feitas, recorreremos à história da Matemática, principalmente à história da Álgebra.

A história da Álgebra indica que o pensamento algébrico tenha surgido da necessidade de resolver problemas. Os antigos egípcios registraram resoluções de problemas usando princípios de uma pré-álgebra. Para resolver alguns problemas geométricos, estes perceberam a carência que os números geravam e criaram, assim, um novo objeto denominado “a-há”, que é uma das primeiras representações de grandeza desconhecida, a qual podemos determinar de pré-álgebra. Para uma melhor compreensão, vamos observar um problema geométrico proposto no *Papirus de Moscou*.

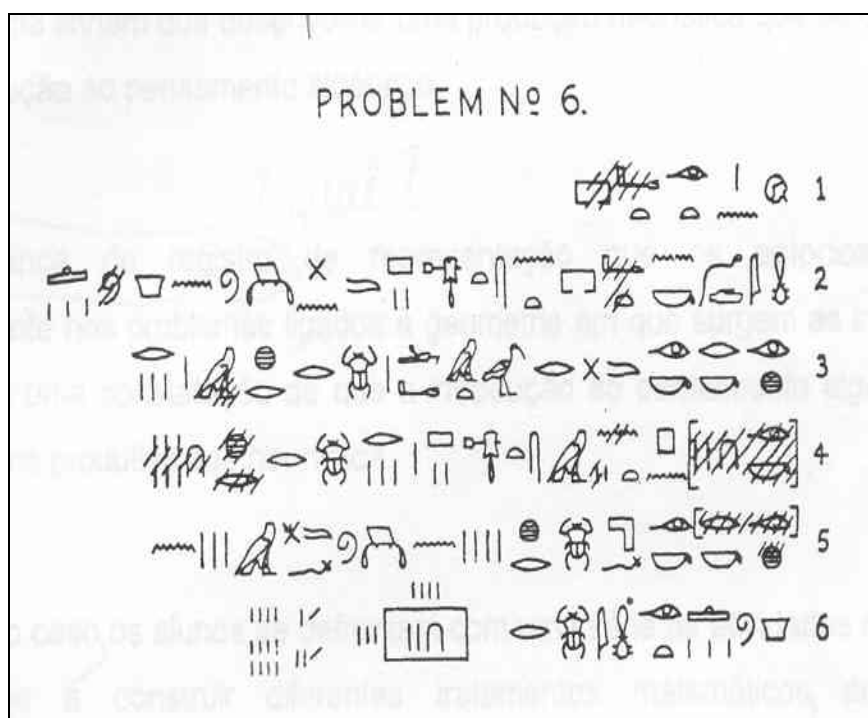


FIGURA 3 – PROBLEMA Nº 6 DO PAPIRO DE MOSCOU

O problema número 6 do Papiro de Moscou, refere-se a um problema geométrico, no qual se lê:

Tratar 3/4 para obter 1. O resultado é 1 1/3. Tomando 1 1/3 de 12, temos 16.

Extraindo a raiz quadrada, temos a largura, que é 4, e o comprimento sendo $\frac{3}{4}$ da largura, temos 3.

Bem, como faríamos provavelmente?

$$12 = x \cdot \left(\frac{3}{4}\right) x = \left(\frac{3}{4}\right) x^2$$

Para achar x , multiplicamos 12 por $\frac{4}{3}$ (o que resulta 16) e tiramos a raiz quadrada de 16 que dá $x = 4$. O outro lado, é $\left(\frac{3}{4}\right) x = 3$.

Os egípcios fizeram praticamente o mesmo. "tratar $\frac{3}{4}$ para obter 1" significa: Que número vezes $\frac{3}{4}$ dá 1? É o inverso de $\frac{3}{4}$, ou seja, $\frac{4}{3}$. Multiplicaram por 12, o que nós também faríamos. Depois tiraram a raiz quadrada de 16, que dá 4, e o outro lado é 3.

Isso parece mostrar que a introdução ao pensamento algébrico por meio de seqüências de padrões geométricos é uma forma heurística comparada ao tratamento matemático que os egípcios davam aos problemas.

É sabido que os egípcios não tinham soluções gerais para os problemas. Cada problema constituía-se num desafio independente e requeria uma solução particular.

Se por um lado é verdade que isso demonstra que não existia na época algo que se pudesse chamar de álgebra generalizada, por outro lado mostra que, para cada problema, tinham que desenvolver uma produção heurística que se constituía numa introdução ao pensamento algébrico.

A mudança de registro de representação do geométrico para o aritmético que os egípcios faziam, particularmente nos problemas ligados à geometria em que surgem as incógnitas (*a-ha*), seria uma constatação de que a introdução ao pensamento algébrico se constitui numa produção heurística.

No nosso caso, os alunos se defrontam com uma série de atividades nas quais são levados a construir diferentes tratamentos matemáticos, articulando modificações das figuras, como no exemplo de seqüências de padrões geométricos descritos anteriormente. Entendemos que isso é uma função

heurística e não apenas uma generalização do pensamento aritmético. Afinal, no caso dos egípcios em questão, uma pré-álgebra surgiu, mas não como generalização de propriedades aritméticas, e sim como meio de resolver problemas.

Além da teoria de Registros de Representação Semiótica definida por DUVAL (1993), a teoria de Mudança de Quadros, de DOUADY (1987), também é muito importante para este trabalho.

Para DOUADY (1987:389),

(...) um quadro é constituído de ferramentas de uma parte da matemática, de relações entre os objetos, suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações. Dois quadros podem ter os mesmos objetos e serem diferentes por causa das imagens mentais e da problemática desenvolvida.

A mudança de quadros, que segundo DOUADY (1987), é um meio de obter formulações diferentes de um problema, permitindo ter uma nova visão das dificuldades encontradas e disponibilizar a ferramenta e as técnicas que não transparecem na primeira formulação, para nós tem grande importância, pois o cerne das atividades propostas é promover a mudança de quadro por meio da observação de regularidades da seqüência de padrões geométricos. Assim, os jogos de quadros por nós propostos têm por objetivo fazer evoluir as concepções dos alunos, no nosso caso, a introdução ao pensamento algébrico.

No nosso trabalho, a idéia de mudança de quadros acrescenta uma outra perspectiva em relação à teoria de Registro de Representação de DUVAL (1993), na medida em que para DOUADY (1987), esta mudança está sempre ligada à resolução de problemas.

Para nós, a seqüência de atividades é problematizadora, ou seja, provoca uma necessidade de atividade heurística. Espera-se que o aluno busque as ferramentas necessárias para compreender cada atividade, bem como expressar, sob a forma de expressões algébricas, a regularidade dos padrões geométricos de cada uma dessas atividades.

Assim, ao registrar algebricamente a regra da seqüência, o aluno realiza mudança de quadros (do geométrico para a linguagem natural e deste para a linguagem algébrica), conforme a teoria de DOUADY (1987), bem como conversões de registros (do figural para a linguagem natural e desta para a escrita algébrica), propostos por DUVAL (1993).

2.4 Procedimentos metodológicos

Com a intenção de validar as hipóteses levantadas anteriormente, elaboramos uma seqüência didática com atividades experimentais, as quais foram xerocadas e entregues aos alunos para que os mesmos trabalhassem em duplas para levantar dados, discutir sobre as possíveis respostas, bem como tecer conjecturas para posterior validação dos resultados obtidos.

Trabalhamos com uma turma de 6^a série do Ensino Fundamental, a 6^a série A, com um total de 30 alunos.

Durante toda a aplicação da seqüência, tivemos a presença de um observador, gravamos as perguntas feitas pela professora e as respostas dadas pelos alunos, guardando também as produções escritas dos alunos.

O tempo de aplicação da seqüência de atividades foi de quatorze aulas de 50 minutos cada.

Durante a aplicação da seqüência didática, a professora passou pelas duplas, interrogando cada uma delas sobre as respostas dadas pelos alunos.

O papel da professora foi essencial, pois a mesma, enquanto passava pelas duplas, fazia questionamento a fim de perceber se as respostas tinham sido dadas pelos alunos e se eles estavam entendendo o significado das respostas dadas.

Após a aplicação de cada atividade, a professora fazia, por meio de questionamentos, a correção da mesma, considerando as diferentes respostas dadas pelos alunos, bem como a comparação e validação dessas respostas.

Para análise, utilizamos como fonte de dados as informações fornecidas pela professora a respeito da turma, as anotações do observador, as fichas de atividades dos alunos, as gravações e os depoimentos de alguns alunos.

A partir dessas informações, fizemos a análise *a posteriori* e a validação das hipóteses da pesquisa, que se deu pela confrontação dos resultados apresentados pela turma, com a análise feita *a priori*.

CAPÍTULO III

3. EXPERIMENTAÇÃO

A fim de pesquisar como se processa a apreensão e produção do pensamento algébrico por meio de seqüências de padrões geométricos, elaboramos uma seqüência de ensino com oito atividades, para serem desenvolvidas com alunos da 6ª série do Ensino Fundamental de uma escola municipal da Grande São Paulo.

Essas atividades foram planejadas para serem trabalhadas pelos alunos em duplas, no máximo, trios, dependendo da situação. Para as atividades, utilizamos fichas xerocadas contendo apenas uma atividade em cada folha.

Visamos, com essas atividades, provocar a necessidade do uso de um símbolo para expressar a regra de formação de cada seqüência. Agrupamos os alunos em duplas, procurando em toda aula manter as mesmas duplas, a fim de facilitar as anotações, para posteriormente, organizar e tabular os dados.

Foram propostas situações nas quais os alunos, em duplas, deveriam discutir, elaborar conjecturas e justificar as respostas encontradas. Após cada atividade, houve discussões coletivas e institucionalização, ou seja, fixação convencional e explícita por parte do professor, do conhecimento em jogo para torná-lo socializável.

3.1 Justificativas e quadro teórico

Pesquisas, como a de BOOTH (1994), em *Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra*, feitas sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra, mostram as dificuldades que os alunos apresentam na aquisição dos conceitos algébricos.

Nas últimas décadas, debates acadêmicos se consolidaram em projetos pedagógicos e formas de atuação em sala de aula. A Educação Matemática vive hoje um momento de concretização, procurando atender às tendências e propostas pedagógicas atuais.

Por exemplo, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1998), a construção do conceito algébrico no terceiro ciclo do Ensino Fundamental deve-se à exploração de situações de aprendizagem, por meio das quais o aluno possa reconhecer que a Álgebra permite generalizar operações aritméticas, traduzir e resolver situações-problema contidas em tabelas ou gráficos, identificar o significado das letras, bem como construir estratégias de cálculo algébrico. Mas, ainda são poucas as propostas em ação que atingem plenamente esses objetivos.

No ensino de Geometria a repercussão das propostas pedagógicas é mais visível, devido à sua quase extinção do currículo durante o Movimento da Matemática Moderna – MMM, segundo MIGUEL, FIORENTINI & MIORIM (1992). Assim, o ensino da Álgebra ainda necessita de propostas que cheguem tanto ao aluno quanto ao professor, pois ainda se encontram resquícios daquela Álgebra tradicional, muito valorizada durante o Movimento da Matemática Moderna.

Lembramos que a idéia de realizar um estudo das formas de introdução ao pensamento algébrico na criança surgiu em 1993, quando no Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática – CAEM/USP, participamos de um curso de álgebra elementar, em que trabalhamos com o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de seqüências geométricas padronizadas.

O curso despertou-nos o interesse em aplicar a proposta em sala de aula com alunos da 6ª série do Ensino Fundamental, de um colégio da rede particular do Grande ABC (Região Metropolitana de São Paulo). O resultado foi tão surpreendente que repercutiu na publicação, em 1994, pelo CAEM, do livro *“Álgebra: das variáveis às equações e funções”*. A partir de então começamos a trabalhar a introdução ao pensamento algébrico com alunos da 6ª série, seguindo essa proposta.

No entanto, em 2002, optamos por reestruturar a seqüência de atividades da proposta de 1994 e aplicá-la aos alunos da 6ª série de uma escola municipal da Grande São Paulo, abordando-a como tema de dissertação de mestrado, aprofundando os estudos, definindo os problemas, as hipóteses e a metodologia para validá-la.

Assim, essa pesquisa tem como objetivo fundamentar a proposta de SOUZA & DINIZ (1994), à luz das teorias de aprendizagem, e a partir daí analisar como se processa a apreensão do pensamento algébrico por alunos da 6ª série do Ensino Fundamental, levantar as dificuldades apresentadas pelos alunos que iniciam o estudo da Álgebra, aos quais nos referenciamos na página 28, e verificar até que ponto o uso de seqüências padronizadas favorece a superação dessas dificuldades.

As teorias de Raymond DUVAL (1993), sobre os registros de representação semiótica, e de Régine DOUADY (1987), sobre mudanças de quadros, muito nos ajudaram a abordar os problemas e as hipóteses da pesquisa.

Assim, pensamos que na nossa pesquisa, uma mudança de quadro pode ser considerada como “natural”, facilitando a compreensão do aluno, uma vez que foi provocada pelo professor para fazer avançar as fases de pesquisa e evoluir as concepções dos alunos.

No entanto, a conversão de registro constitui, muitas vezes, uma dificuldade para a maioria dos alunos, dificuldade essa considerada importante para a aprendizagem, pois explica muitos erros observados nas investigações construídas. Assim, falar de registros é colocar em jogo o problema da aprendizagem.

A mudança de quadro, por ter sido provocada pelo professor, muitas vezes pode não ser notada pelo aluno. Segundo DUVAL (1993), para perceber uma mudança de quadro, deve-se já conhecer a matemática e compreendê-la, enquanto que a mudança de registro é percebida também pelos aprendizes, pois dependem do funcionamento do pensamento cognitivo em jogo.

Assim, nosso referencial teórico está centrado nos estudos de DUVAL (1993), sobre registros de representação semiótica, e nos estudos de DOUADY (1987), sobre mudanças de quadros.

3.1.1 Experimentação com relação ao quadro teórico

Fundamentamos nossa pesquisa nos registros de representação semiótica de DUVAL (1993: 39), pois segundo ele as representações são essenciais para as atividades cognitivas do pensamento, porque tornam possível a construção do conhecimento. Elas funcionam como elemento que constrói o sentido do objeto em estudo. Assim, apoiamo-nos:

- no fato de que uma noção não pode ser formada a partir de um único registro, por isso necessitamos de um trabalho de diversificação e integração de registros para a formação do conceito;
- na conversão de registros e o posterior tratamento desses;
- na conversão de registros diferentes entre enunciado e os processos de resolução;
- nas apreensões (perceptiva e operatória) necessárias para a assimilação das noções geométricas e para a sua aplicação na resolução de um problema.

Para DUVAL (1994:125), *apreensão perceptiva* é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica, enquanto que as *apreensões operatórias* são apreensões sobre as possíveis modificações de uma figura inicial e as reorganizações perceptivas que essas modificações sugerem.

DOUADY (1987), trabalha com atividades que se referem a hipóteses cognitivas e didáticas, deixando claro que a decomposição e composição de figuras planas fazem uso da “dialética ferramenta-objeto e jogo de quadros”.

Discute ainda que, *conceito*, enquanto ferramenta, quando usado para resolver um problema. Esta ferramenta, adaptada, poderá ser instrumento para a resolução de diferentes problemas.

Assim, compreendemos que a teoria de jogos de quadros de DOUADY (1987), pode orientar todo um conjunto de atividades ligadas ao processo ensino-aprendizagem da construção do pensamento algébrico.

Entendemos, assim como DOUADY (1987), que quadro é um recurso constituído de ferramentas de uma parte da Matemática, de relações entre os objetos, suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações.

A autora admite que as imagens mentais têm um papel importante no funcionamento, como ferramenta, dos objetos do quadro. Assim, dois quadros podem conter os mesmos objetos e serem diferentes pelas imagens mentais e pela problemática desenvolvida.

Esse é um dos motivos que nos levou ao uso da teoria de DOUADY (1987), sobre mudança de quadros, para fundamentar teoricamente nossa pesquisa.

3.1.2 Justificativa das escolhas feitas

Como um dos objetivos do trabalho é desenvolver a pesquisa dentro de um contexto o mais próximo possível da realidade, visando a valorização desta pesquisa, bem como sua aplicabilidade, optamos por aplicar a seqüência didática na 6ª série do Ensino Fundamental de uma escola que fica no bairro Jaçanã, na periferia de São Paulo.

A decisão de escolher esta escola deveu-se a vários motivos, dentre os quais destacamos: ser uma escola municipal muito procurada pela população urbana da região, com alunos carentes vindos de vários outros bairros próximos e ter na 6ª série do Ensino Fundamental alunos que nunca haviam tido contato com a Álgebra.

Optamos por realizar as atividades em duplas de alunos, a fim de que desenvolvessem as habilidades de expressão oral e escrita, o convívio em grupo, com a intenção de que trocassem informações com os outros, discutissem procedimentos e estratégias para resolução das atividades, levantassem

conjecturas e hipóteses, fizessem comentários e conclusões comuns, visando, com isso, o enriquecimento de cada um dos alunos. A última atividade da sequência foi proposta individualmente, para que os alunos tivessem a oportunidade de criar e testar seus conhecimentos e habilidades, refletindo sobre seus erros, acertos e dificuldades.

3.1.3 Justificativa do dispositivo experimental com relação à problemática

Perante o que foi exposto do objeto matemático e a descrição da problemática, o pensamento algébrico utiliza mais de uma forma de expressão para ser manifestado.

Assim, procuramos elaborar uma sequência didática que pudesse integrar diferentes registros de representação – figural, discursivo, numérico e algébrico – bem como os tratamentos pertinentes num mesmo registro.

Objetivando minimizar os problemas referentes ao ensino-aprendizagem da Álgebra que estão ligados aos aspectos das significações, da percepção e do contexto, procuramos validar as hipóteses a partir das escolhas feitas para a elaboração da sequência de atividades.

A primeira decisão foi a de reformular a proposta de SOUZA & DINIZ (1994), que propunha a introdução ao pensamento algébrico por meio de atividades e sequências de padrões geométricos.

A reformulação foi feita, porque achamos que a sequência de atividades continha padrões geométricos um tanto quanto repetitivos.

A opção pela observação de regularidades a partir de sequências e padrões foi feita porque atividades como essas permitiam que as letras surgissem de modo natural, como variáveis.

Segundo SOUZA & DINIZ (1994), os resultados obtidos não dependiam necessariamente do estilo da sequência de padrões (por exemplo, uma sequência formada por um conjunto de bolinhas ou quadradinhos), mas dos fundamentos teóricos do trabalho com sequências.

Assim, a nova seqüência elaborada manteve praticamente os mesmos objetivos da proposta de SOUZA & DINIZ (1994), os quais preservaram o surgimento da “letra” a partir da necessidade do aluno, sem que lhe seja podada essa necessidade. Acreditamos que se a “letra” é dada no exercício, sem que o aluno sinta a necessidade desta, este não compreenderá o seu significado, pois esta “letra” não terá sentido para o aluno.

Apresentamos as atividades no quadro geométrico, para que cada aluno tivesse oportunidade de pensar e construir a expressão algébrica da seqüência, a partir do desenho das próximas figuras. Ao construir a expressão algébrica, o aluno poderá substituir na mesma o número correspondente à posição ocupada pela figura e conferir a partir do resultado obtido se a sua expressão algébrica está realmente correta.

Nas atividades iniciais da seqüência didática, a intenção é que os alunos se familiarizem com seqüências – nestas ainda não aparecem expressões algébricas como regra de sua formação.

A partir da terceira atividade, que ainda apresenta um baixo grau de dificuldade, o objetivo é que o aluno comece a se incomodar e perceber que seus conhecimentos, ou seja, operações aritméticas, já não são mais suficientes para resolver o exercício, e para isso ele precisa usar um símbolo ou uma “palavra” na resposta do exercício.

No decorrer das atividades, as dificuldades vão aumentando e os alunos deverão perceber cada vez mais que a “palavra” que pode ser substituída por um símbolo, não tem um valor fixo nas diferentes figuras que compõem a seqüência, mas que a cada figura esse valor varia de acordo com a posição que a figura ocupa na seqüência. Assim, por meio das atividades, esperamos que a idéia de dependência entre as variáveis também comece a ser construída pelo aluno.

3.2 Condição da experimentação

A escola na qual realizamos a experimentação é uma escola municipal, no bairro Jaçanã, na cidade de São Paulo. Nesta escola é mantido o Ensino Fundamental de 1^a a 8^a série.

O nível sócio-econômico da maioria dos alunos dessa escola é de classe média baixa. O baixo poder aquisitivo das famílias permite que as mesmas valorizem outros hábitos, que não os educacionais e culturais, como o trabalho, por exemplo. O público escolar, em geral, é composto por alunos na faixa etária de sete a 17 anos, no período diurno.

Em 2002, foram formadas quatro turmas de 6^a série do Ensino Fundamental. Dessas quatro turmas, escolhemos apenas uma para fazer a experimentação, ou seja, a 6^a série D, pelo fato de que neste ano a professora, também nossa colega no mestrado, estava ministrando as aulas de matemática nessa turma.

Na grade curricular do Ensino Fundamental estão previstas cinco aulas semanais de cinquenta minutos cada, para serem ministradas com os conteúdos do componente curricular Matemática. Planejamos utilizar as cinco aulas semanais para aplicar a seqüência, junto aos alunos da 6^a série D do Ensino Fundamental.

Planejamos trabalhar com 32 alunos agrupados em 16 duplas, porém na falta de algum aluno, o trabalho também foi realizado em trio.

Na experimentação, foram utilizadas, ao todo, 14 aulas de 50 minutos cada. Durante toda a aplicação da seqüência tivemos a presença de um observador, que procurou observar todas as duplas.

Para facilitar e direcionar as anotações, elaboramos uma ficha de anotações (anexo 1) com objetivos específicos, em que o observador anotou observações gerais e específicas que julgou pertinente no momento para cada atividade.

Gravamos as perguntas feitas pelos alunos, bem como os questionamentos feitos pela professora e também as respostas dadas pelos alunos para que pudéssemos fazer nossa análise *a posteriori*.

3.3 Panorama dos conhecimentos disponíveis dos alunos

Iniciamos o ano letivo de 2002 com 32 alunos freqüentando a 6ª série D do Ensino Fundamental, dos quais 17 alunos eram do sexo feminino (53,1%) e 15 alunos do sexo masculino (46,9%). Aplicamos a seqüência didática a partir da terceira semana do início das aulas, pois as duas primeiras semanas de aula foram dedicadas à revisão de conteúdos.

A professora que estava ministrando as aulas de matemática na 6ª série D do Ensino Fundamental, havia sido professora desses alunos quando os mesmos estavam na 5ª série, por isso decidiu deixar as duas primeiras semanas para revisão dos conteúdos, pois tinha idéia de que os alunos traziam algumas dificuldades nos conteúdos de potenciação, bem como na propriedade distributiva da multiplicação, conteúdos esses considerados como pré-requisito para nosso trabalho.

Pensamos que se esses conteúdos fossem bem dominados pelos alunos, não correríamos o risco de um falso resultado na nossa pesquisa, visto que são conteúdos que os alunos usariam freqüentemente para responder às questões da seqüência didática.

Também optamos por aplicar a seqüência didática nesta turma – 6ª série D do Ensino Fundamental –, pois a turma nunca tinha tido contato com Álgebra anteriormente. A professora, que foi a mesma na 5ª série, nos disse que só havia trabalhado operações e resolução de problemas no campo da aritmética. Nas séries anteriores a 5ª série, os alunos também não haviam trabalhado com Álgebra.

3.4 Análise *a priori* das situações propostas, aplicação da seqüência didática e análise dos resultados

Nossa seqüência foi resultado da re-elaboração da seqüência de SOUZA & DINIZ (1994), tendo em mente o quadro teórico que construímos a partir das concepções de DOUADY (1987), sobre mudanças de quadros, e da abordagem dos registros de representação, de DUVAL (1993).

O principal objetivo da elaboração dessa sequência didática é a apreensão, por parte dos alunos, da idéia de variável.

As atividades propostas têm por objetivo provocar a mudança de quadros, do geométrico para o algébrico, com a intenção de permitir ao aluno a construção do conceito de variável. Também visam provocar as conversões de registro de representação, que podem ser notadas quando o aluno passa da linguagem natural para a linguagem algébrica.

As conversões de registros são vantajosas do ponto de vista da aprendizagem, facilitando a compreensão ou a descoberta do conteúdo matemático.

Para nós, a conversão de registro vai além de tornar mais fácil a aprendizagem: ela é determinante para que ocorra a aprendizagem.

No caso do pensamento algébrico, há uma peculiaridade: o registro tem uma função mais central, pois entendemos que o aluno irá construir uma linguagem típica da Álgebra.

Afinal, queremos introduzir o aluno no pensamento algébrico e isso não se reduz a um objeto que possa ser representado de diversas formas. Isto é, o pensamento algébrico supõe a existência de um registro de representação próprio.

Podemos dizer então, que o pensamento algébrico está sempre associado a uma representação semiótica particularmente desejada, que é o uso de algo além dos números, para a representação da posição ocupada pelo elemento na sequência, ou seja, as letras.

Tendo em vista que existe um particular registro de representação que procuramos desenvolver, ou seja, o registro algébrico, nosso olhar sobre conversões de registros é um pouco diferente daquele usualmente praticado em pesquisas sobre o ensino de Matemática.

Aqui, não se trata apenas de ressaltar a diversificação existente entre os registros. Isso significa que o centro da nossa atenção não é a mudança em

relação a distintos sistemas semióticos (a linguagem natural, a linguagem algébrica, as figuras geométricas etc.), e sim a importância da conversão do registro geométrico para a linguagem natural, desta para a linguagem aritmética e daí para a linguagem algébrica. Afinal, nosso trabalho visa o desenvolvimento específico da linguagem algébrica.

Por isso entendemos que, a idéia de mudança de quadros de DOUADY (1987), é também importante nesse nosso estudo, pois o que queremos é promover a alternância de diferentes abordagens em domínios matemáticos distintos.

Nessa mudança de domínio, que é a essência da proposta de uso de seqüências geométricas para desenvolver a linguagem algébrica, a teoria de DOUADY (1987) fornece a explicação mais adequada.

As seqüências constituem-se de representações no quadro geométrico. Nossa intenção é que haja uma mudança de quadros como detonadores ou facilitadores de compreensão.

Pretendemos que o aluno chegue no domínio matemático algébrico, que é um novo quadro em relação ao quadro da geometria. Nesse novo quadro os registros poderão ser feitos na linguagem natural e só depois passarão por uma conversão, para então serem escritos na linguagem algébrica.

Decidimos por apresentar as atividades em quatro sessões. A primeira sessão foi composta das atividades 1 e 2, cujo objetivo foi promover um primeiro contato com seqüências geométricas. Essas atividades ainda não requereram o aparecimento de letras representando as variáveis.

Neste grupo, visávamos a familiarização do aluno com seqüências repetitivas e com a correspondência entre a posição do elemento na seqüência e sua forma na posição, bem como a revisão dos conceitos de múltiplo e divisor.

Na segunda sessão, agrupamos as atividades 3, 4 e 5, nas quais foram propostas situações em que surgiu a necessidade do uso de letras como um símbolo para representar uma posição qualquer na seqüência.

Nosso objetivo foi o de oferecer atividades que exigissem do aluno algo a mais do que ele já sabia. Nesse momento, nossa intenção foi fazer com que o aluno observasse a seqüência e percebesse que os elementos variavam a cada posição ocupada na seqüência. Assim, ao representar por meio de uma expressão matemática, qualquer elemento na seqüência, seus conhecimentos já não eram suficientes, por isso, houve a necessidade de algo mais que apenas números, as letras.

As atividades 6 e 7 compuseram a terceira sessão da seqüência didática. Para essas atividades foi necessária a compreensão do que denotamos por contorno de uma figura.

Essas atividades tinham como objetivo permitir ao aluno a construção de diferentes expressões, bem como manipular essas expressões algebricamente, para verificar a equivalência entre elas.

Na quarta e última sessão, optamos por deixar livre para o aluno a criação de uma seqüência qualquer de figuras. Nessa atividade, foi dada ao aluno a oportunidade de criar, testar seus conhecimentos e habilidades, bem como refletir sobre seus erros, acertos e dificuldades.

O objetivo principal nas atividades desenvolvidas foi fazer com que os alunos sentissem a necessidade de algo a mais do que eles já sabiam. O aluno deve perceber que a aritmética não dá conta de responder às questões propostas. O professor não deve, em hipótese alguma, contar para o aluno o que ele deve fazer, mas encaminhar a atividade por meio de questionamentos que ajudem o aluno a perceber a regra de formação da seqüência, esperando que o aparecimento do uso da letra surja de maneira natural e espontânea.

Antes de aplicarmos a seqüência didática, fizemos uma análise *a priori* das atividades da seqüência, visando sua validação após à aplicação.

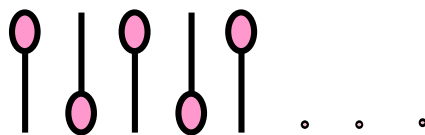
Para cada atividade apresentamos seus objetivos e uma breve explicação de sua proposta.

Após a apresentação da atividade, identificamos as ações esperadas dos alunos diante de cada enunciado.

A seguir mostraremos um relato dos resultados referentes ao desempenho dos alunos.

Atividade 1:

Observe a seqüência abaixo, descubra sua regra e continue desenhando:



- a) Qual o 12º elemento da seqüência?
- b) Qual o 23º elemento da seqüência?
- c) E o 54º elemento?
- d) Como você descreveria a regra de formação desta seqüência?

O objetivo da atividade 1 é fazer com que o aluno perceba generalidades a partir de seqüências de figuras. O aluno deve familiarizar-se com seqüências repetitivas, identificando a correspondência entre a posição do “pirulito” em que se encontra na seqüência e indicando o seu sentido, ou seja, o pirulito está voltado para cima ou para baixo.

A atividade consistiu na apresentação de uma seqüência de figuras alternadas em relação à sua orientação, ou seja, a primeira figura está em um sentido, e a segunda no sentido contrário, e assim por diante.

Esperamos que o aluno faça uma associação entre as posições pares e o pirulito voltado para baixo e as posições ímpares e o pirulito voltado para cima.

O aluno pode responder que para as posições pares a bolinha da figura está para baixo e para os números ímpares a bolinha está para cima. O aluno pode também identificar apenas a alternância da posição da bolinha, mostrando que é para cima, depois para baixo etc.

As duas respostas são semelhantes, e pela simplicidade da atividade esperamos que os alunos apresentem um bom desempenho.

Aqui não ocorreu mudança de quadros; o aluno apenas é levado a associar a noção de orientação (para cima e para baixo) no registro figural, com a noção de par e ímpar presente no campo aritmético.

Nesta atividade existe uma preocupação com a conversão de registros de representação. A resposta do aluno deve ser expressa na linguagem natural, da maneira que julgar mais conveniente, não sendo ainda necessário o uso de letras, como variáveis na sua representação.

Aplicação da atividade 1 aos alunos: observações e análises

Participaram desta atividade 32 alunos, organizados em 16 duplas.

Na análise dos resultados desta seqüência, pudemos constatar que 30 alunos associaram o pirulito voltado para baixo às posições pares e os pirulitos voltados para cima às posições ímpares da seqüência. Esses alunos escreveram como respostas: *A regra é que a bolinha que tiver para cima é ímpar e a que tiver para baixo é par.*

Podemos observar no protocolo abaixo:

Atividade 1:

Observe a sequência abaixo, descubra sua regra e continue desenhando:



a) Qual o 12º elemento da sequência? o ✓

b) Qual o 23º elemento da sequência? i ✓

c) E o 54º elemento? o ✓

d) Como você descreveria a regra de formação desta sequência?

A regra é que a bolinha que tiver para cima é ímpar e a que tiver para baixo é par.

FIGURA 4 - PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 1

Apesar dos alunos não escreverem adequadamente a resposta: *todos os “elementos” que têm a bolinha para baixo ocupam posições pares na sequência e todos os “elementos” que têm a bolinha para cima ocupam posições ímpares*, ficou subentendida a relação entre a posição par e o elemento com bolinha para baixo, e a posição ímpar e o elemento com bolinha para cima .

Apenas dois alunos, não associaram o elemento com bolinha para baixo às posições pares e os elementos com bolinha para cima às posições ímpares da sequência. Esses alunos escreveram como resposta apenas a frase: *É par ou ímpar*, mas não deixaram clara a relação entre o elemento (com bolinha para baixo), e as posições pares da sequência, e o elemento (com bolinha para cima) com as posições ímpares.

No momento em que os alunos escreviam suas respostas, a professora não lhes chamou a atenção, deixando que os mesmos percebessem por si próprios a relação existente entre os elementos da sequência e as posições por eles ocupadas.

A professora observadora constatou que os alunos estavam ainda um pouco inseguros com a atividade, ou seja, não tinham idéia do porquê a professora de Matemática estar aplicando uma atividade diferente, razoavelmente fácil, em que não era necessário fazer contas.

Consideramos positivos os índices da tabela 1, tendo em vista que a atividade 1 é aparentemente muito simples.

TABELA 1 – ÍNDICE DE PERCEPÇÃO ENTRE POSIÇÃO PAR COM ELEMENTO QUE TEM BOLINHA PARA BAIXO E POSIÇÃO ÍMPAR COM ELEMENTO QUE TEM BOLINHA PARA CIMA.

SITUAÇÃO: Registro da relação entre o elemento com bolinha para baixo e as posições pares e do elemento com bolinha para cima com as posições ímpares.	ALUNOS	
	Nº	%
SIM-.	30	93,75
NÃO	2	6,25

FONTE: Ficha de resolução dos alunos referente à atividade 1

NOTA: Participaram desta atividade 32 alunos

Os resultados obtidos pela análise das respostas dos alunos confirmaram parte da análise *a priori*, apesar de não prevermos a resposta: “é ímpar ou par”, dada pelos alunos.

Para nós a resposta mais comum seria: “para cima e para baixo”, o que não ocorreu.

Atividade 2:

Observe a seqüência abaixo, descubra sua regra e continue desenhando:



- Qual o 12º elemento da seqüência?
- Qual o elemento que ocupa a 18ª posição na seqüência?
- E o que ocupa a 21ª posição?
- O que você observa em relação ao losango e às posições ocupadas por ele?
- Como você descreveria a regra de formação desta seqüência?

A atividade 2, consiste na apresentação de uma seqüência de figuras geométricas repetitivas, formada por retângulos, círculos e losangos, respectivamente.

Essa seqüência foi escolhida a fim de que o aluno perceba que numa seqüência repetitiva, o importante é a relação entre os múltiplos de um número e a posição que a figura ocupa na seqüência, independentemente do tipo de figura utilizada para a composição dessa seqüência.

O objetivo desta atividade é que o aluno conclua, por meio da generalidade da seqüência, que todas as posições múltiplas de três são sempre ocupadas pelo losango.

Para concluir a atividade, o aluno pode continuar desenhando até chegar na posição desejada e então obter a resposta a partir da figura encontrada, mas como nosso objetivo é que o aluno perceba a relação dos losangos com os múltiplos de três, enquanto o aluno estiver contando o professor deve estar criando outras perguntas, como: *Qual a figura que ocupa a 38ª posição na seqüência?*

O objetivo é que o número da posição do elemento da seqüência vá aumentando, a fim de que o aluno deixe de contar e tente descobrir, de uma maneira menos trabalhosa, a resposta procurada.

Um outro caminho para se chegar à resposta é perceber que todas as posições múltiplas de três na seqüência são ocupadas pelo losango, logo, para encontrar o elemento que ocupa uma posição não múltipla de três, basta efetuar a divisão do número que representa a posição por três e analisar o resto dessa divisão. Assim, para encontrar a figura que ocupa qualquer posição desejada na seqüência, basta avançar ou retornar no máximo duas posições, pois dois é o maior resto que podemos encontrar na divisão.

Nessa atividade o aluno pode desenvolver uma habilidade heurística, pois é levado a pensar sobre uma seqüência de figuras que variam de três em três, repetidamente, e associá-la à seqüência dos múltiplos de três, para verificar a regularidade.

Assim, estamos buscando o desenvolvimento do pensamento algébrico, embrião da heurística, por meio de uma seqüência que parte de uma representação figural, passando pelo registro de linguagem natural e chegando no registro aritmético.

Aplicação da atividade 2 aos alunos: observações e análises

Participaram desta atividade 31 alunos, os quais não apresentaram grandes dificuldades para a execução da mesma. Esses alunos foram agrupados em 15 duplas e um trio.

Como previsto na análise *a priori*, nesta atividade a professora sentiu necessidade de elaborar mais uma questão, que foi colocada na lousa. Os alunos copiaram-na para ser respondida logo após a questão *c* do elenco de questões dessa atividade.

A questão elaborada foi a seguinte: *Qual o elemento que ocupa a 10ª posição e a 42ª posição?*

Os motivos que levaram à elaboração da questão foram: (1º) faltou no elenco de questões uma pergunta em que a posição em questão não fosse múltipla de três; (2º) os números das posições colocadas nas questões são muito baixos, e alguns dos alunos responderam por meio da continuação do desenho da seqüência. Dessa forma, a 42ª posição dificulta a resposta por meio do desenho.

Se a 42ª posição ainda não fosse suficiente para o aluno deixar de responder por meio do desenho, nada impediria que o professor elaborasse uma questão em que a posição fosse um número ainda maior.

Pudemos constatar que, do elenco de respostas, 17 alunos, realmente perceberam a regra de formação da seqüência, relacionando o losango com as posições múltiplas de 3, pois suas respostas foram semelhantes a: *“Os losangos da seqüência caem sempre em posições múltiplas de 3”*, como podemos observar no protocolo a seguir:

Atividade 2:
 Observe a sequência abaixo, descubra sua regra e continue desenhando:

a regra é que é múltiplo de 3

1 2 3 4 5 6 7 8 9

a) Qual o 12º elemento da sequência? ✓

b) Qual o elemento que ocupa a 18ª posição na sequência? ✓

c) E o que ocupa a 21ª posição? ✓

d) O que você observa em relação ao losango e às posições ocupadas por ele? ✓

e) Como você descreveria a regra de formação desta sequência? ✓
 Em três em três
 É múltiplo de três

Qual o elemento que ocupa a 30ª posição? É a 42ª posição
 10 posição . Porque 9 é múltiplo de três
 para frente não seria mais 9 seria 10 então se for uma

FIGURA 5 – PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 2

No entanto, respostas como: “A sequência segue a tabuada do 3”, (9,68%); “A sequência dos múltiplos de 3”, (16,13%), e “A sequência vai de 3 em 3”, (19,39%), não nos permitem concluir se o aluno realmente entendeu a relação que existe entre as posições múltiplas de 3 e o losango da sequência.

Levando em conta que o grau de dificuldade da atividade 2 é maior que da atividade 1, consideramos positivos os índices da tabela 2.

TABELA 2 - ÍNDICE DE PERCEPÇÃO ENTRE AS POSIÇÕES MÚLTIPLAS DE TRÊS E O ELEMENTO LOSANGO DA SEQUÊNCIA.

SITUAÇÃO: Registro da relação entre o elemento losango e as posições múltiplas de três	ALUNOS	
	Nº	(%)
SIM	17	54,8
NÃO	14	45,2

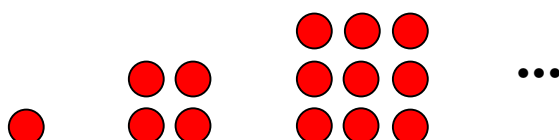
FONTE: Ficha de resolução dos alunos referente à atividade 2

NOTA: Participaram desta atividade 31 alunos

A maioria dos alunos obteve resultado positivo na solução do exercício, visto que houve intervenção da professora nos questionamentos, ou seja, na elaboração de mais questões, quando as previstas não foram suficientes. Porém, a professora jamais fez intervenções no sentido de fornecer as respostas aos alunos.

Atividade 3:

Observe a seqüência de figuras abaixo:



- Desenhe a 4ª figura da seqüência.
- Desenhe a 6ª figura da seqüência. Quantas bolinhas ela tem?
- Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu numero de bolinhas
- A 10ª figura tem quantas bolinhas?
- E a 21ª figura, tem quantas bolinhas?
- O que fazer para descobrir o número de bolinhas de qualquer figura da seqüência? Escreva uma regra.

A partir da atividade 3, as seqüências terão comportamentos diferentes das anteriores, e isso pode representar um salto da atividade 2 para a 3.

Daqui para frente, as novas seqüências não são mais formadas por figuras que se repetem, mas por figuras que vão se modificando a cada posição, seguindo uma regra.

Nossa intenção é que o aluno perceba como uma determinada figura se transforma na seguinte, bem como descobrir a regra de formação da seqüência.

A heurística da resolução desta atividade convida o aluno a fazer a mudança de quadros, do geométrico para o aritmético e deste para o algébrico, preparando este aluno para a conversão de registro de representação, do geométrico para o algébrico.

Nesta seqüência, o aluno é levado a fazer um tratamento das figuras dentro do campo geométrico, transformando as figuras da seqüência em

sub-figuras, procurando um meio para obter o resultado. Por exemplo, poderá começar a pensar em área de quadrados para resolver o exercício.

No campo da representação em linguagem natural, o aluno pode perceber a possibilidade e conveniência de fazer um tratamento que induz ao uso de símbolos sintéticos para facilitar a representação, isto é, se o aluno desejar.

Para chegar ao resultado esperado, o aluno pode continuar desenhando até a posição desejada e contar o número de bolinhas existentes na figura que ocupa essa posição.

Novamente, para nós essa não é a melhor estratégia, pois para as posições distantes, a representação por figuras se torna cansativa, além do que, para saber a quantidade de bolinhas de uma figura qualquer, o aluno sempre dependerá do conhecimento da quantidade de bolinhas da figura anterior, caso contrário ele não é capaz de responder a questão.

Assim, vale lembrar que, enquanto o aluno estiver desenhando e contando as bolinhas para responder a questão, o professor deve continuar aumentando, ou dando saltos em relação à posição, para que o aluno perceba a dificuldade de responder a questão se continuar com essa estratégia.

O aluno também poderá observar que a quantidade de bolinhas existentes em cada figura que compõe a seqüência é sempre igual a quantidade de bolinhas da figura anterior mais algumas bolinhas.

Por exemplo, da primeira figura para a segunda figura, aumentam três bolinhas, da segunda para a terceira figura aumentam cinco bolinhas, da terceira figura para a quarta aumentam sete bolinhas e assim por diante.

Esta também não é a melhor estratégia de pensamento, pois para saber quantas bolinhas possui uma figura situada em uma posição mais distante na seqüência, o aluno sempre vai depender da quantidade de bolinhas da figura anterior, e isso dificulta a situação. Por exemplo: se o professor perguntar *“quantas bolinhas tem a 49ª figura?”*, para responder essa questão, o aluno precisará saber primeiro quantas bolinhas tem a 48ª figura, mas antes o aluno precisará da quantidade de bolinhas da 47ª figura, e assim por diante.

Esse é um dos motivos que nos leva a insistir que, enquanto o aluno está preso nos desenhos para responder às questões, este se encontra, ainda, distante de uma generalização da seqüência por meio da expressão algébrica.

Esperamos, no entanto, que o aluno relacione a quantidade de bolinhas de cada figura com a posição que ela ocupa na seqüência, ou seja, por meio das questões iniciais da atividade, pretendemos que os alunos cheguem à conclusão que se elevarmos a posição ocupada pela figura ao quadrado, obteremos o número de bolinhas da figura em questão, sem depender do número de bolinhas que compõe a figura anterior.

Após esse momento de questionamento feito pelo professor, o aluno poderá sentir a necessidade de usar algum símbolo para expressar sua resposta, pois o conhecido até então, ou seja, a aritmética, já não dá conta de responder a todas as questões, portanto, o aluno poderá escrever as palavras “posição” ou “lugar” nas suas respostas, como por exemplo, *a quantidade de bolinhas que compõe uma figura qualquer da seqüência é igual a sua **posição elevada ao quadrado***. Mais tarde esta frase poderá ser simplificada e até mesmo ser substituída por uma letra apenas, “ **p^2** ”.

Queremos deixar claro que para nós o mais importante não é o aluno escrever a frase ***posição elevada ao quadrado***, ou **p^2** , e sim o aluno ter percebido a importância da posição para se chegar à resposta, ou seja, a relação de dependência que existe entre o resultado e a posição que a figura ocupa.

Este é o cerne da nossa pesquisa, o *insite* que o aluno tem com relação à resposta que procura e a posição ocupada pela figura na seqüência.

Assim, por meio desta atividade, o aluno poderá perceber que para generalizar a seqüência e tornar mais simplificada sua regra de formação, é necessária a utilização de um símbolo novo, seja uma palavra ou a própria letra.

Para as próximas atividades, esperamos que os alunos percebam que é cansativo ficar em todo momento escrevendo a regra de formação das seqüências a partir da linguagem natural, e que seu trabalho se torna bem mais fácil quando utilizamos símbolos para escrever a regra de formação da seqüência.

Aplicação da atividade 3 aos alunos: observações e análises

No dia da aplicação da atividade 3, apenas 25 alunos estavam presentes, portanto, organizamos os alunos em 12 duplas e um trio, para que pudessem discutir os resultados encontrados.

Analizamos basicamente nesse exercício, se o aluno percebeu que existe uma relação entre o número da posição que a figura ocupa e o total de bolinhas que a figura possui.

Constatamos que 15 alunos acertaram o exercício, e que 14 desses alunos deram como resposta: *“Para encontrar o número de bolinhas de uma figura da seqüência é só multiplicar o número de bolinhas da posição por ele mesmo”*. Apenas um dos alunos que acertaram a resposta escreveu: *Dependendo do número da posição, basta fazer os lados com tal número, multiplicá-los e terá a área do quadrado*. Pudemos perceber, na resposta desse aluno, a mudança de quadros, do geométrico para o aritmético e deste para o algébrico, como previsto na análise *a priori*.

O protocolo a seguir, ilustra o que acabamos de dizer:

Atividade 3:
Observe a sequência de figuras abaixo:

a) Desenhe a 4ª figura da sequência.

b) Desenhe a 6ª figura da sequência. Quantas bolinhas ela tem? 36

c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de bolinhas

d) Quantas bolinhas tem a 10ª figura? 100

e) E quantas bolinhas tem a 21ª figura? 441

f) O que fazer para descobrir o número de bolinhas de qualquer figura da sequência? Escreva uma regra.

Dependendo do número da posição, basta por esse com tal número, multiplicar. Leve como um círculo quadrado. Curioso de eu saber que tem alguns quadrados, certo?

c)

numero da posição	numero de bolinhas
1	1. 1 = 1 ou 1^2
2	2. 2 = 4 ou 2^2
3	3. 3 = 9 ou 3^2
...	...
31	31. 31 = 961 ou 31^2

b) 6ª figura

FIGURA 6 – PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 3

Segundo DUVAL (1994), seja qual for a figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, são possíveis as apreensões: *perceptiva* das formas, em nosso caso o quadrado, e *discursiva* das informações envolvidas na figura, ou seja, aquelas que permitem os cálculos da medida de área. Entendemos que a apreensão perceptiva é imediata e automática enquanto que a apreensão discursiva depende de um processo de aprendizagem.

Ao prevermos na análise *a priori* respostas envolvendo o conceito de área, tínhamos idéia de que esse tipo de resposta seria mais freqüente, o que não ocorreu, pois os alunos apresentaram uma carência muito grande tanto do conceito de área quanto de perímetro.

Não temos a intenção de fazer aqui uma análise das respostas não corretas, mas gostaríamos de mostrar quais foram essas respostas. Dos 10 alunos que não acertaram o exercício, 4 deles deram como resposta: “É só

utilizar a tabuada"; 1 aluno escreveu: *"É só desenhar"*; 3 alunos fizeram uma tabela relacionando a posição de cada figura com a sua quantidade de bolinhas, demonstrando apenas numericamente o exercício e dois alunos não fizeram o exercício.

Queremos ressaltar que, a partir dessa atividade, a presença e participação do professor são fundamentais para o desenvolvimento da seqüência didática.

Foi a partir da atividade 3 que a professora passou a fazer inferências, questionando as duplas para que chegassem à resposta.

A professora, de uma certa forma, atendeu individualmente a cada dupla, e o observador acompanhou, com atenção, esse atendimento.

O que podemos dizer é que a professora questionava: *O que fazemos para encontrar o total de bolinhas de uma figura que está numa posição qualquer da seqüência?* Os alunos respondiam: *É só multiplicar o número por ele mesmo*. A professora perguntava novamente: *Que número é esse que devemos multiplicar por ele mesmo?* Os alunos respondiam: *O número da posição da figura*. Finalmente, a professora solicitava o que os alunos tinham dito e a partir daí eles escreviam a regra de formação da seqüência, fazendo uso da linguagem natural.

Vale lembrar que esta atividade é a primeira da seqüência didática que leva ao raciocínio algébrico, porém nenhum dos alunos utilizou ainda "palavras simplificadas" ou apenas a "letra" para registrar a regra de formação encontrada para a seqüência de figuras.

O fato do aluno ainda não ter usado símbolos para expressar a resposta encontrada não significa que ele não esteja construindo o pensamento algébrico, pois ao registrar *o número da posição vezes ele mesmo*, podemos perceber uma evolução no nível de abstração, em que o aluno começa a se desprender do aritmético e aos poucos vai passando para o algébrico.

Assim, podemos dizer que nossa questão de pesquisa foi respondida a partir dessa atividade, bem como nossas hipóteses validadas, pois os alunos utilizaram a palavra *posição* para representar um valor numérico, que a cada figura da seqüência vai variando, visto que esse tipo de resposta nunca tinha sido

dada por eles anteriormente, enquanto estavam comprometidos apenas com um contrato aritmético.

TABELA 3 - ÍNDICE DE PERCEPÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO TOTAL DE BOLINHAS DE CADA FIGURA E A POSIÇÃO QUE CADA FIGURA OCUPA NA SEQÜÊNCIA.

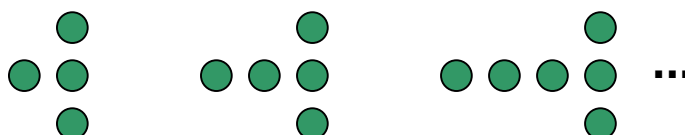
SITUAÇÃO: Registro da relação entre o nº de bolinhas e a posição ocupada pela figura.	ALUNOS	
	Nº	(%)
SIM	15	60
NÃO	10	40

FONTE: Ficha de resolução dos alunos referente à atividade 3

NOTA: Participaram desta atividade 25 alunos

Atividade 4:

Observe a seqüência de figuras abaixo:



- Desenhe a próxima figura da seqüência. Quantas bolinhas ela tem?
- Desenhe a 7ª figura da seqüência. Quantas bolinhas ela tem?
- Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de bolinhas.
- A 16ª figura tem quantas bolinhas?
- E a 25ª figura?
- O que fazer para descobrir o número de bolinhas de qualquer figura da seqüência? Escreva uma regra.

O objetivo desta atividade é o mesmo da anterior, porém, para se chegar à regra de formação desta seqüência, podem ser utilizados vários raciocínios.

Se observarmos, em cada figura há sempre três bolinhas na posição vertical e, as restantes (que estão na posição horizontal), correspondem em cada figura à própria posição ocupada pela figura. Assim, o aluno pode concluir que a regra de formação dessa seqüência pode ser expressa por:

$$\text{Nº de bolinhas} = p + 3$$

O aluno também pode pensar em completar cada figura a fim de obter uma seqüência de retângulos e descobrir a regra de formação da seqüência a partir da área de cada retângulo. Usando esse raciocínio, o aluno por si próprio está realizando um tratamento geométrico em cada figura da seqüência. O tratamento geométrico, neste caso, facilita a visualização da figura geométrica, retângulo, para o cálculo de sua área.

O aluno não poderá se esquecer de descontar duas vezes a posição da figura, pois o número de bolinhas contidas na base do retângulo em cada figura é sempre igual à posição da figura mais uma bolinha, enquanto que a altura é sempre três, portanto, calculando a área do retângulo todo e descontando sempre em cada figura duas vezes a posição ocupada por ela, o aluno chega à regra de formação da seqüência:

$$\text{Nº de bolinhas} = 3 \cdot (p + 1) - 2p.$$

Entendemos também, que se o aluno não tiver o conceito de área bem trabalhado, é pouco provável que chegue à expressão:

$$\text{Nº de bolinhas} = 3 \cdot (p + 1) - 2p$$

obtida por meio de um tratamento geométrico, feito para chegar à área do retângulo e depois à regra de formação da seqüência.

É importante que o professor, para validar as diferentes respostas encontradas pelos alunos, faça uma discussão dessas na lousa, até mesmo pedindo para que cada aluno explique como chegou ao seu resultado.

Por meio da manipulação (desenvolver as distributivas e soma de termos semelhantes) das expressões, o professor também poderá mostrar que as expressões são equivalentes. Porém, a manipulação das expressões dependerá muito do bom desempenho da classe com relação à propriedade distributiva, pois se esta não foi bem trabalhada na série anterior, o trabalho de manipulação com as expressões encontradas pelos alunos ficará prejudicado. Assim, é melhor optar por validar as respostas apenas pelas explicações dadas pelos próprios alunos.

Aplicação da atividade 4 aos alunos: observações e análises

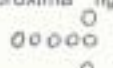
Para esta atividade estavam presentes 28 alunos, os quais foram organizados em 14 duplas.

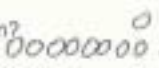
Para nós os resultados da atividade 4 foram satisfatórios, porém, surpreendentes, 12 alunos, responderam satisfatoriamente à atividade, dando como resposta: “Número de bolinhas é somar a posição + 3”, como no protocolo abaixo:

Atividade 4:

Observe a sequência de figuras abaixo:



a) Desenhe a próxima figura da sequência. Quantas bolinhas ela tem?  7 Bol. ✓

b) Desenhe a 7ª figura da sequência. Quantas bolinhas ela tem?  10 Bol.

c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de bolinhas.

$1^{\circ} = 1+3$	$4^{\circ} = 4+3$
$2^{\circ} = 2+3$	$5^{\circ} = 5+3$
$3^{\circ} = 3+3$	$6^{\circ} = 6+3$

d) Quantas bolinhas tem a 16ª figura? 19 Bol.

e) E quantas bolinhas tem 25ª figura? 28 Bol.

f) O que fazer para descobrir o número de bolinhas de qualquer figura da sequência? Escreva uma regra.

A regra é posição mais 3

$P+3 = N^{\circ}$ de Bol.

FIGURA 7 – PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 4

Por outro lado, o mesmo número de alunos, ou seja, 12 alunos também não responderam à questão f da atividade, ou seja, a questão em que o aluno escreve a regra de formação da sequência, seja por meio da linguagem natural ou por meio de símbolos.

Lembramos sempre que o ponto principal é o aluno perceber ou ter um *insite*, para a importância da **posição** de cada figura, pois a regra de formação da sequência depende da posição ocupada pela mesma.

Para nós, quando o aluno percebe a importância da posição das figuras na seqüência, ele está criando ou fazendo evoluir espontaneamente a noção de variável. No entanto, não respondendo à questão *f*, não podemos afirmar que a noção de variável está ou não sendo construída.

De modo geral todos os alunos responderam e acertaram as demais questões da atividade, pois eram questões preparatórias para a questão *f*, em que os alunos trabalham com desenhos das próximas figuras da seqüência e com respostas aritméticas. Por exemplo, esses 12 alunos conseguem responder quantas bolinhas têm a 16ª e 25ª figuras da seqüência, e até mesmo construir uma tabela relacionando as posições das figuras com o número total de bolinhas de cada uma delas, porém não conseguiram generalizar a regra de formação da seqüência.

Tivemos dois alunos, que responderam: *Só muda o número de bolinhas na horizontal*. Apesar dessa resposta para nós não ser considerada correta, uma vez que não descreve a regra de formação da seqüência, pudemos notar que esses alunos perceberam a variação do número de bolinhas que ficam na horizontal, assim como perceberam também que o número de bolinhas que ficam na vertical não varia.

Uma outra resposta dada por apenas um aluno, e por nós não considerada correta foi: *Aumenta de 3 em 3*. E ainda um outro tipo de resposta incorreta que apareceu, dada também por apenas um aluno da turma foi: *A regra é posição + 1*.

Pela resposta, pudemos perceber que *posição + 1*, representa o número de bolinhas encontrado na horizontal, em cada figura, porém o aluno esqueceu ou não percebeu que tinha que somar as outras duas bolinhas da vertical, não concluindo corretamente a regra de formação da seqüência.

Não tivemos nenhuma resposta em que o aluno utilizasse o conceito de área para chegar à regra de formação da seqüência. Como previsto na análise *a priori*, pensávamos que os alunos pudessem completar cada figura da seqüência transformando-as em retângulos, calculassem a área de cada retângulo e depois descontassem o número de bolinhas acrescentadas em cada figura para

encontrar a regra de formação, isso não ocorreu.

Durante a aplicação da atividade, pudemos perceber que a forma discreta das figuras formadas, levou os alunos às estratégias de contagem, o que também dificultou o uso do conceito de área.

TABELA 4 – ÍNDICE DE PERCEPÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO TOTAL DE BOLINHAS DE CADA FIGURA E A POSIÇÃO QUE CADA FIGURA OCUPA NA SEQUÊNCIA.

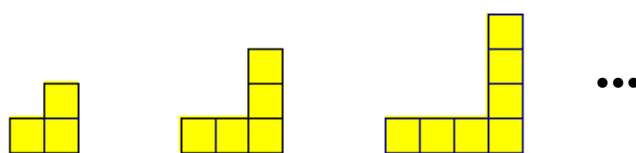
SITUAÇÃO: Registro da relação entre o nº de bolinhas e a posição ocupada pela figura.	ALUNOS	
	Nº	(%)
SIM	12	60
NÃO	16	40

FONTE: Ficha de resolução dos alunos referente à atividade 4

NOTA: Participaram desta atividade 28 alunos

Atividade 5:

Observe a seqüência de figuras abaixo:



- Desenhe a próxima figura da seqüência. Quantos quadradinhos ela tem?
- Desenhe a 5ª figura da seqüência. Quantos quadradinhos ela tem?
- Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de quadradinhos.
- A 11ª figura tem quantos quadradinhos?
- E a 17ª figura?
- Como descobrir a quantidade de quadradinhos de qualquer figura da seqüência? Escreva uma regra.

Por meio da atividade 5, podemos observar que o aluno pode chegar à regra de formação da seqüência de várias maneiras.

O aluno pode pensar que o número de quadradinhos de cada figura é sempre igual ao número da posição ocupada pela figura (para esquerda) mais esse mesmo número de posição (para cima), mais um quadradinho no canto

inferior direito. Assim a regra de formação da seqüência é:

$$\text{Nº de quadradinhos} = p + p + 1$$

O aluno também pode pensar em completar o quadrado. Neste caso, novamente faz um tratamento geométrico nas figuras, com o objetivo de calcular sua área e descontar o canto superior esquerdo. O lado de cada quadrado é igual à posição ocupada pela figura mais um quadradinho; o canto que deve ser descontado também é um quadrado de lado igual à própria posição da figura, portanto, a regra de formação da seqüência pode ser expressa por:

$$\text{Nº de quadradinhos} = (p + 1) \cdot (p + 1) - p \cdot p.$$

Nesta atividade, também é importante que o professor discuta as diferentes respostas encontradas pelos alunos, e por meio de manipulação (desenvolver as distributivas e soma de termos semelhantes) das expressões, mostrar que elas são todas equivalentes.

Aplicação da atividade 5 aos alunos: observações e análises

Participaram desta atividade 28 alunos. Pelos resultados analisados, o número de acertos nos leva a crer que a atividade 5 tem um grau de dificuldade menor que a atividade 4. Dos participantes, 25 alunos, responderam satisfatoriamente ao exercício, justificando suas respostas como:

- Somando o número da posição da figura com o número sucessor obtém-se o número de quadradinhos de cada figura da seqüência ou $n^o q = p + p + 1$.
- A regra é o dobro da posição + 1 ou $n^o q = 2p + 1$.
- A regra é somar o número da posição com ele mesmo mais 1 quadradinho. Exemplo: $n^o q = p + p + 1$.

Vejamos um exemplo:

Atividade 5:

Observe a sequência de figuras abaixo:

$1^{\circ} = 1 + 2$
 $2^{\circ} = 2 + 3$
 $3^{\circ} = 3 + 4$

a) Desenhe a próxima figura da sequência. Quantos quadradinhos ela tem? *9 Q.*

b) Desenhe a 5ª figura da sequência. Quantos quadradinhos ela tem? *11 Q.*

c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de quadradinhos.

$1^{\circ} = 1 + 2$	$4^{\circ} = 4 + 5$	$7^{\circ} = 7 + 8$
$2^{\circ} = 2 + 3$	$5^{\circ} = 5 + 6$	$8^{\circ} = 8 + 9$
$3^{\circ} = 3 + 4$	$6^{\circ} = 6 + 7$	$9^{\circ} = 9 + 10$

d) Quantos quadradinhos tem a 11ª figura? *23 Q.*

e) E a 17ª figura, quantos quadradinhos tem? *35 Q.*

f) Como descobrir a quantidade de quadradinhos de qualquer figura da sequência? Escreva uma regra.

Tomando a posição, com seu número sucessor dá-se o número de quadradinhos.

$P + P + 1 = N^{\circ} = Q$ ou $N^{\circ} \text{ de quadradinhos} = 2 \times P + 1$

ou

$100^{\circ} = 100 + 101 = 201 \text{ Q}$ $N = 2 \times P + 1$

$P = P + P + 1 = N^{\circ} \text{ Q}$ *ou*

$9 = 2 \times P + 1$

FIGURA 8 – PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 5

Durante o desenvolvimento da atividade 5, os alunos discutiram com o parceiro da dupla ou até mesmo com outras duplas a solução do exercício.

A professora não interferiu nas respostas dadas pelos alunos, porém, percebeu, em certos casos, que alguns alunos sabiam expressar a resposta verbalmente, mas não conseguiam expressá-la no papel; então, a professora pediu para que esses alunos escrevessem na folha da atividade o que eles estavam falando. Muitos deles ainda questionavam: *Mas a resposta pode ficar assim? É só isso?*

Dos 28 alunos, apenas três deles, não responderam satisfatoriamente ao exercício, apresentando como respostas:

- A regra é que você tem que somar a posição mais 1.
- A regra é que é múltiplo de 2.

Pudemos perceber que as duas respostas apresentam um raciocínio parcialmente correto. Na primeira resposta, o aluno não somou mais uma vez a posição. Na segunda resposta, a expressão *múltiplo de 2*, pode estar relacionada a *multiplicar a posição por 2*, faltando ainda somar um quadradinho.

Ao contrário do previsto na análise *a priori*, novamente os alunos não fizeram um tratamento geométrico nas figuras da seqüência para obtenção da sua regra de formação, por meio de área ou perímetro do quadrado. Isto pode ter acontecido pelo fato do contrato didático anterior ter enfatizado mais o pensamento numérico.

TABELA 5 - ÍNDICE DE PERCEPÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO TOTAL DE QUADRADINHOS DE CADA FIGURA E A POSIÇÃO QUE CADA FIGURA OCUPA NA SEQÜÊNCIA.

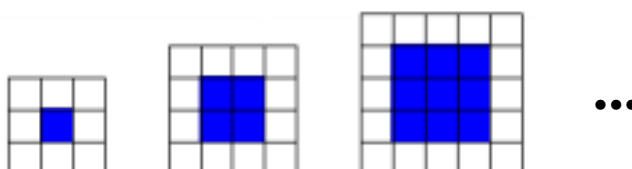
SITUAÇÃO: Registro da relação entre o nº de quadradinhos e a posição ocupada pela figura.	ALUNOS	
	Nº	(%)
SIM	25	89,3
NÃO	3	10,7

FONTE: Ficha de resolução dos alunos referente à atividade 5

NOTA: Participaram desta atividade 28 alunos

Atividade 6:

Observe como se forma a seqüência de figuras abaixo:



- Desenhe a próxima figura da seqüência. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?
- Desenhe a 6ª figura da seqüência. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?
- E no contorno da 7ª figura, há quantos quadradinhos?
- Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o número de quadradinhos do seu contorno.
- Há quantos quadradinhos no contorno da 9ª figura?
- E a 10ª figura, quantos quadradinhos há no seu contorno?
- Como calcular a quantidade de quadradinhos do contorno de qualquer figura da seqüência? Escreva uma regra.

O objetivo desta seqüência é encontrar a quantidade de quadradinhos que tem a borda de cada figura.

Para se chegar à regra de formação desta seqüência, o aluno pode utilizar diferentes estratégias.

Por meio de um tratamento geométrico feito em cada figura da seqüência, o aluno pode pensar em calcular a área do quadrado todo, descontando a área do quadrado interno. Para calcular a área de todo o quadrado, podemos perceber que é só fazer, para cada figura, a posição que ela ocupa na seqüência mais dois quadradinhos, tudo elevado ao quadrado; assim obteremos a área total de cada quadrado, porém, o que procuramos é a quantidade de quadradinhos da borda das figuras, e portanto, é preciso descontar da área total de cada quadrado a área do quadrado interno (hachurado), que é obtida fazendo a posição da figura vezes ela mesma. Assim, o aluno pode concluir que a regra de formação da seqüência pode ser:

$$\text{Nº de quadradinhos} = (p + 2).(p + 2) - (p + 1).(p + 1)$$

Podemos perceber que para o aluno raciocinar sobre as figuras da seqüência e concluir que a regra de formação da mesma é

$$\text{Nº de quadradinhos} = (p + 2).(p + 2) - (p + 1).(p + 1)$$

o aluno efetuou mudança do quadro geométrico para o algébrico seguida de mudança de registro.

O aluno também pode pensar em calcular a quantidade de quadradinhos da borda da figura a partir do seu perímetro. Se observarmos, é só fazer quatro vezes a posição da figura, mais quatro quadradinhos, que são os quatro cantos. Assim a regra é:

$$\text{Nº de quadradinhos} = 4p + 4.$$

Poderão aparecer outras respostas, uma vez que o aluno pode enxergar a figura de uma maneira diferente, conforme demonstrado na figura 9.

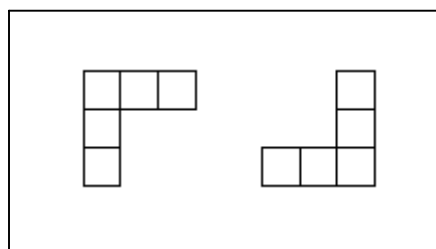


FIGURA 9 - SOMA DE FIGURAS

A partir de registros desse tipo, podemos observar que foi feito um tratamento geométrico nas figuras. Dessa maneira, o aluno poderá escrever que a regra de formação dessa seqüência é:

$$\text{Nº de quadradinhos} = 2 \cdot [p + (p + 2)]$$

A manipulação das diferentes expressões deve ser feita na lousa, com a participação dos alunos, para que todos percebam que todas as expressões, por mais que sejam diferentes na escrita, são equivalentes, e quando a equivalência não ocorre é porque a expressão está errada. Nesse momento, novamente ocorrem tratamentos nos registros algébricos.

Aplicação da atividade 6 aos alunos: observações e análises

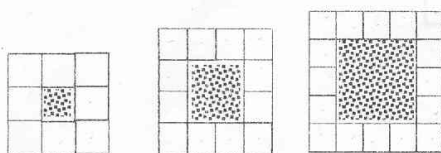
Participaram da atividade 31 alunos, dos quais 15 alunos responderam satisfatoriamente ao exercício, justificando suas respostas com:

- É fazer $4 \cdot \text{posição} + 4$.
- $\text{Posição} + 2$ multiplicado por 2 + dobro da posição.

Exemplo de uma das respostas:

Atividade 6:

Observe como se forma a sequência de figuras abaixo:



- a) Desenhe a próxima figura da sequência. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura? *20 quadradinhos* ✓
- b) Desenhe a 6ª figura da sequência. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura? *28 quadradinhos* ✓
- c) E no contorno da 7ª figura, há quantos quadradinhos? *32 quadradinhos* ✓
- d) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o número de quadradinhos do seu contorno.
- e) Há quantos quadradinhos no contorno da 9ª figura? *40 quadradinhos* ✓
- f) E a 10ª figura, quantos quadradinhos há no seu contorno? *44* ✓
- g) Como calcular a quantidade de quadradinhos do contorno de qualquer figura da sequência? Escreva uma regra. *A regra é que é necessário somar 1 ao nº da posição e o resultado vezes 4. Também, o nº de quadradinhos é um múltiplo de 4* ✓

d) (tabela)

posição	quadradinhos	posição	quadradinhos
1ª	$8 = 4 \cdot 1 + 4$	6ª	$28 = 4 \cdot 6 + 4$
2ª	$12 = 4 \cdot 2 + 4$	7ª	$32 = \dots$
3ª	$16 = \dots$	8ª	$36 = \dots$
4ª	$20 = \dots$	9ª	$40 = \dots$
5ª	$24 = 4 \cdot 5 + 4$	10ª	$44 = 4 \cdot 10 + 4$

FIGURA 10 – PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 6

Tivemos 13 alunos, que não responderam satisfatoriamente ao exercício, apresentando como respostas: o número de quadradinhos é sempre 4 a mais que a anterior e três alunos não fizeram a atividade.

De modo geral, julgamos satisfatórios os resultados, visto que as atividades que envolvem o contorno de figuras requerem uma compreensão maior do que as demais atividades, pois além do aluno estar atento à relação entre o número de

quadrados e a posição que a figura ocupa na sequência, ele também tem que se lembrar de descontar ou desconsiderar os quadrados que não pertencem ao contorno da figura.

Quanto às respostas consideradas por nós não corretas, pudemos perceber que as duas respostas são semelhantes, porém não descrevem a regra de formação da sequência.

Previmos esse tipo de resposta na análise *a priori*, conforme protocolos dos alunos: *o número de quadrados vai de 4 em 4; o número de quadrados é sempre 4 a mais que a anterior.*

Quando solicitada a quantidade de quadrados de qualquer figura da sequência, o aluno depende sempre da quantidade de quadrados da figura anterior. Assim, para saber a quantidade de quadrados de uma figura que está bem mais distante, por exemplo na posição 103^a, o aluno não tem condições de responder, pois precisará saber a quantidade de quadrados da posição 102^a, mas antes precisará saber a quantidade de quadrados da 101^a, e assim por diante.

Nenhum aluno encontrou a resposta para o exercício a partir da área da figura, em que o aluno necessita fazer um tratamento geométrico nas figuras da sequência para descobrir sua regra de formação.

Procuramos razões científicas que justificassem esse fato, e encontramos em BALTAR (1996: 64) que ... *o desenvolvimento do ensino do conceito de área visto como grandeza permite aos alunos estabelecer relações necessárias entre os quadros geométricos e numéricos.* Se os alunos com os quais trabalhamos não apreenderam conceito de área, seria muito pouco provável que chegassem à regra de formação da sequência fazendo uso desse conceito.

TABELA 6 - ÍNDICE DE PERCEPÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO DE QUADRADINHOS DA BORDA DE CADA FIGURA E A POSIÇÃO QUE CADA FIGURA OCUPA NA SEQUÊNCIA.

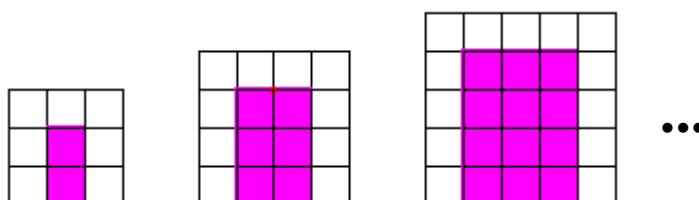
SITUAÇÃO: Registro da relação entre o nº de quadradinhos da borda e a posição ocupada pela figura.	ALUNOS	
	Nº	(%)
SIM	15	48,4
NÃO	16	51,6

FONTE: Ficha de resolução dos alunos referente à atividade 6

NOTA: Participaram desta atividade 31 alunos

Atividade 7:

Observe como se forma a sequência de figuras abaixo:



- Desenhe a próxima figura da sequência. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?
- Desenhe a 5ª figura da sequência. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?
- E no contorno da 7ª figura, há quantos quadradinhos?
- Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o número de quadradinhos do seu contorno.
- Há quantos quadradinhos no contorno da 9ª figura?
- E a 12ª figura, quantos quadradinhos há no seu contorno?
- Como calcular a quantidade de quadradinhos do contorno de qualquer figura da sequência? Escreva uma regra.

O objetivo desta atividade é o mesmo da atividade 6. As estratégias de resolução também podem ser bem parecidas com as da atividade anterior.

O aluno pode olhar para cada figura e enxergar em cada borda lateral a posição da figura, mais dois quadradinhos, e enxergar no centro, na borda superior, a posição da figura. Portanto, somando a quantidade de quadradinhos das duas bordas laterais com a quantidade de quadradinhos que está no centro da borda superior, o aluno obterá a quantidade total de quadradinhos da borda de cada figura. Assim, a regra de formação dessa sequência é:

$$\text{Nº de quadradinhos} = 2 \cdot (p + 2) + p$$

Um outro jeito de se obter a regra é pensar novamente na área de cada figura. A área total de cada figura é encontrada fazendo-se, posição mais dois, vezes, posição mais dois. A região interna de cada figura é encontrada fazendo-se, posição (que é a base), vezes a posição, mais um (que é a altura). Para obter a quantidade de quadradinhos da borda de cada figura é só fazer a área total da figura menos a área da região interna. Portanto a regra é:

$$\text{Nº de quadradinhos} = (p + 2) \cdot (p + 2) - p \cdot (p + 1)$$

$$\text{Nº de quadradinhos} = (p + 2) \cdot (p + 2) - p \cdot (p + 1)$$

Percebemos que, para encontrarmos a regra de formação da sequência, podemos fazer uso de algumas ferramentas contidas em outros quadros, ou seja, nas duas diferentes formas de raciocínio usadas para encontrar a regra algébrica da sequência, notamos o uso da noção de perímetro e área, visualizados no campo do geométrico, expressas no campo algébrico.

Um dos aspectos em que as idéias aritméticas dos alunos podem influenciar no mau desempenho da álgebra é o uso dos parênteses. Os alunos geralmente não usam parênteses porque acham que a sequência escrita de operações determina a ordem em que os cálculos devem ser efetuados. Além disso, muitos alunos acham que o valor de uma expressão permanece inalterado, mesmo quando se muda a ordem dos cálculos. Por isso, o professor deve sempre lembrar a importância dos parênteses na escrita das expressões algébricas.

É importante que o professor, juntamente com os alunos, faça a manipulação das expressões algébricas encontradas.

Manipulando a primeira expressão temos:

$$2 \cdot (p + 2) + p$$

$$2p + 4 + p$$

$$3p + 4$$

Manipulando a segunda expressão temos:

$$(p + 2) \cdot (p + 2) - p \cdot (p + 1)$$

$$p^2 + 2p + 2p + 4 - p^2 - p$$

$$3p + 4$$

A expressão $3p + 4$ é equivalente às outras duas e está escrita de uma forma simplificada. Outras expressões que poderão aparecer após serem manipuladas também serão equivalentes a $3p + 4$, isto é, se estiverem corretas.

Aplicação da atividade 7 aos alunos: observações e análises

Participaram desta atividade 30 alunos, dos quais 21 responderam satisfatoriamente ao exercício, e 9 alunos, não responderam satisfatoriamente.

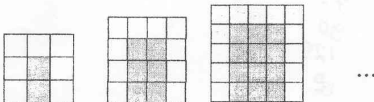
Dentre os alunos que acertaram o exercício, a resposta mais freqüente foi: *Nº de quadradinhos é igual a 3 vezes a posição + 4.*

Esse resultado para nós não foi surpreendente, pois durante a aplicação da atividade observamos que os alunos comentavam que a atividade 7 era bem parecida com a atividade 6, pois a única diferença era que na atividade 6 a regra era: *Nº de quadradinhos é igual a 4 vezes a posição + 4, enquanto que na atividade 7 a parte hachurada de cada figura da seqüência vai até embaixo, logo, contamos uma posição a menos que na atividade 6.* Assim, a regra de formação da seqüência da atividade 7 é: *Nº de quadradinhos é igual a 3 vezes a posição + 4.*

O protocolo a seguir, exemplifica uma das respostas dadas pelos alunos:

Atividade 7:

Observe como se forma a sequência de figuras abaixo:



a) Desenhe a próxima figura da sequência. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?
O contorno dessa figura tem 16 quadradinhos

b) Desenhe a 5ª figura da sequência. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?
O contorno dessa figura tem 19 quadradinhos

c) E no contorno da 7ª figura, há quantos quadradinhos?
O contorno dessa figura tem 25

d) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o número de quadradinhos do seu contorno. *verso*

e) Há quantos quadradinhos no contorno da 9ª figura?
O contorno dessa figura tem 31 quadradinhos

f) E a 12ª figura, quantos quadradinhos há no seu contorno?
O contorno dessa figura tem 40 quadradinhos

g) Como calcular a quantidade de quadradinhos do contorno de qualquer figura da sequência? Escreva uma regra.
a regra é só contar 3 quadradinhos a mais que o anterior.
nº de quadradinhos do contorno = 3. posição + 4
ou
 $q = 3 \cdot p + 4$
ou
 $n = 3 \cdot p + 4$

FIGURA 11 – PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 7

Apesar dos alunos não utilizarem o conceito de área para chegar à regra de formação da sequência, usaram o conceito de perímetro, que até então não havia sido empregado nas respostas.

As respostas que para nós não foram satisfatórias são respostas como: *A regra é só somar 3 ao número de quadradinhos da figura anterior.* Apesar desse tipo de resposta fornecer a quantidade correta do número de quadradinhos do contorno de qualquer figura da sequência, o aluno fica sempre na dependência do número de quadradinhos da figura anterior àquela que ele quer saber, e assim sucessivamente, não evoluindo, portanto, seu grau de abstração para a generalização.

TABELA 7 – ÍNDICE DE PERCEPÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO DE QUADRADINHOS DA BORDA DE CADA FIGURA E A POSIÇÃO QUE CADA FIGURA OCUPA NA SEQUÊNCIA.

SITUAÇÃO: Registro da relação entre o nº de quadradinhos da borda e a posição ocupada pela figura.	ALUNOS	
	Nº	(%)
SIM	21	70
NÃO	9	30

FONTE: Ficha de resolução dos alunos referente à atividade 7

NOTA: Participaram desta atividade 30 alunos

Atividade 8:

Crie uma sequência de figuras diferente das estudadas até agora.

Sente-se com um colega e troque a sua sequência com a dele. Tente descobrir a regra de formação da sequência de seu colega enquanto ele tenta descobrir a regra de formação da sua sequência.

O objetivo desta atividade é verificar se o aluno aprendeu a construir uma sequência, verificar regularidades, manipular as expressões algebricamente para verificar a equivalência entre elas, bem como escrever matematicamente a regra de formação de uma sequência qualquer.

Diante da necessidade de criar uma sequência de figuras de padrões geométricos, o aluno deve passar a regularidade que planejou para um outro quadro, no nosso caso, o geométrico.

Ao verificar a validade da resposta do colega por meio de tratamentos, o aluno também irá acionar a conversão de registros.

Eventualmente, o aluno, ao tentar invalidar a resposta encontrada pelo seu colega, poderá também realizar conversões dos registros algébricos para os geométricos.

Aplicação da atividade 8 aos alunos: observações e análises

Participaram da atividade 30 alunos, dos quais 20 deles, responderam satisfatoriamente a atividade. Os outros 10 alunos, não tiveram êxito na execução da atividade.

Muitos dos alunos que acertaram a atividade construíram-na com gabarito de respostas, certificando-se que a atividade era passível de solução. Em contrapartida, a maioria dos alunos que errou a atividade não elaborou o gabarito.

Vamos observar um protocolo de aluno que não elaborou o gabarito antes de oferecer a atividade para seu colega resolvê-la.

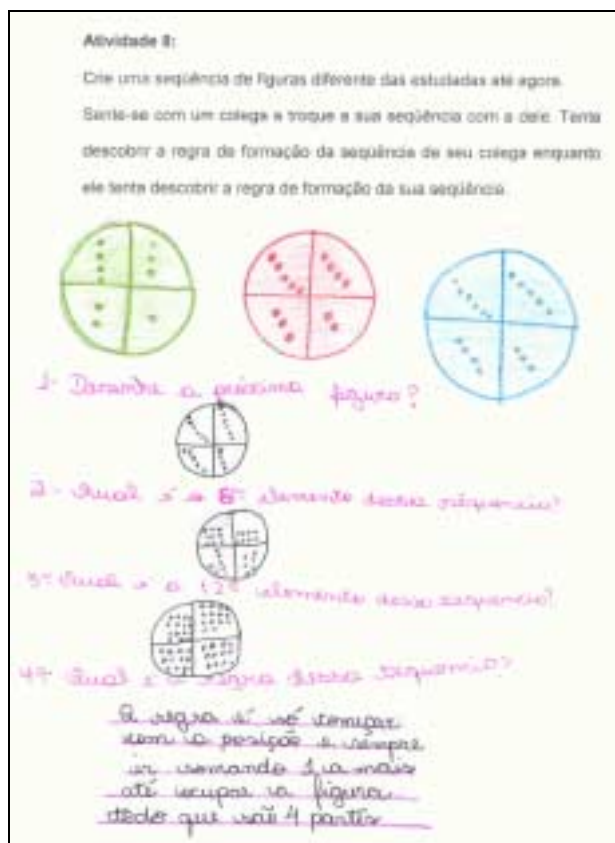


FIGURA 12 – PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 8

Ao observarmos a sequência de figuras, notamos que sua construção está perfeitamente correta, porém o aluno que a construiu não se preocupou com o registro simbólico e sim se o seu colega entendeu a regra de formação da sequência.

Podemos notar, pelas respostas, que o aluno que respondeu a atividade entendeu a regra de formação da sequência, mas não conseguiu expressá-la por meio da álgebra simbólica, devido à sua complexidade, mas respondeu adequadamente por meio da linguagem natural.

Este outro protocolo que segue, foi por nós considerado satisfatório.

Atividade 8:

Crie uma sequência de figuras diferente das estudadas até agora.
Sente-se com um colega e troque a sua sequência com a dele. Tente descobrir a regra de formação da sequência de seu colega enquanto ele tenta descobrir a regra de formação da sua sequência.

Vejam a sequência



a) qual é a próxima figura?
A próxima figura é 

b) qual é a 7ª figura? Desenhe a próxima figura é 

c) Sem desenhos quantos quadradinhos tem a 10ª figura?
a 10ª figura tem 20 quadradinhos.

d) Faça uma tabela com a posição e o nº de quadradinhos.

FIGURA 13 – PROTOCOLO DE UM ALUNO (FRENTE E VERSO) REFERENTE À ATIVIDADE 8

a) Qual é a 8ª figura? Desenhe.



b) Faça uma regra ou meio de soma.
a regra é que segue em pares da posição ou 2p

d)

posição	número de quadradinhos
1ª	2
2ª	4
3ª	6
4ª	8
5ª	10
6ª	12
7ª	14
8ª	16
10ª	20

FIGURA 14 – PROTOCOLO DE UM ALUNO (FRENTE E VERSO) REFERENTE À ATIVIDADE 8

Apesar do aluno que elaborou a atividade ter perguntado: *Quantos quadradinhos tem a 10ª figura?*, e cada figura não ser formada por quadradinhos, a construção da seqüência de figuras está perfeita, visto que o aluno que respondeu a atividade conseguiu responder a todas as questões, escrevendo até mesmo a regra de formação da seqüência.

Vamos observar mais um protocolo de aluno.

Atividade 8:

Crie uma seqüência de figuras diferente das estudadas até agora.

Sente-se com um colega e troque a sua seqüência com a dele. Tente descobrir a regra de formação da seqüência de seu colega enquanto ele tenta descobrir a regra de formação da sua seqüência.

→

2	5	10	17	26	37	50	65	82
1	2	3	4	5	6	7	8	9

1) Escreva o próximo número da seqüência.
R: A próxima figura da seqüência é 101.

2) Qual é a 15ª número da seqüência?
A 15º número é 226.

3) É a 20ª? É a 50ª da seqüência? É a 100ª?
É 401. É 2501. É 10001

4) Como se faz para saber qualquer número da seqüência, faça uma regra.
É só fazer $p \cdot p + 1$

FIGURA 15 – PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE À ATIVIDADE 8

Este aluno elaborou uma seqüência numérica diferente de todas as atividades da seqüência didática, e mesmo assim o aluno que respondeu não apresentou dificuldades, acertando todas as questões propostas.

TABELA 8 – ÍNDICE DE VERIFICAÇÃO DO APRENDIZADO DA CONSTRUÇÃO DE UMA SEQÜÊNCIA

SITUAÇÃO: Registro da construção de uma seqüência numérica ou de padrões geométricos	ALUNOS	
	Nº	(%)
SIM	20	66,7
NÃO	10	33,3

FONTE: Ficha de resolução dos alunos referente à atividade 8

NOTA: Participaram desta atividade 30 alunos

CAPÍTULO IV

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta de ensino-aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio de seqüências de padrões geométricos, a fim de fazer surgir no aluno a necessidade de algo a mais do que a aritmética que ele já sabe: a Álgebra.

Analisando o desenvolvimento dos alunos durante a fase de aplicação da seqüência didática e os resultados apresentados, acreditamos que a metodologia adotada contribuiu de maneira significativa para o desenvolvimento do pensamento algébrico desses alunos.

No início da aplicação da seqüência didática, percebemos muitas dificuldades nesses alunos quanto ao relacionamento em grupo. Eles não sabiam conversar com o seu colega da dupla; praticamente gritavam em sala de aula – tamanha era a euforia desses alunos por estarem fazendo algo diferente nas aulas de Matemática.

Percebemos, também, que nas primeiras atividades os alunos tiveram muitas dificuldades para escrever as respostas e justificativas por eles encontradas. Com o transcorrer da aplicação da seqüência, notamos em vários alunos o desenvolvimento de autonomia, procurando escrever e discutir com o colega da dupla os resultados encontrados, sem ficar esperando pelo professor.

Notamos que o desenvolvimento dessa autonomia parece ter sido proporcionado pelo tipo de atividade, que propiciou o levantamento de conjecturas e a noção de que podemos ter mais de uma forma de resolver um problema.

Pelos resultados observados, os alunos de uma maneira geral, procuraram resolver todos os exercícios, visto que a porcentagem de questões não realizadas foi baixa. Em todas as questões observamos uma porcentagem de acertos alta ou baixa, satisfatória ou não, porém, com uma demonstração de conhecimento quanto à construção da regra de formação de uma sequência de padrões geométricos em várias situações.

Retomando os estudos preliminares, constatamos que os problemas relativos ao ensino-aprendizagem da Álgebra estão relacionados com a sua forma de expressão envolvendo os aspectos de abstração, de significação e de contexto. Relacionado a estes aspectos, levantamos a questão e as hipóteses da pesquisa.

Como questão de pesquisa, temos: *Uma sequência de ensino por meio de padrões geométricos pode proporcionar ao aluno a introdução ao pensamento algébrico?*

Por meio dessa questão de pesquisa, procuramos confirmar as hipóteses de que sequências de padrões geométricos podem proporcionar a introdução ao pensamento algébrico, se essa sequência:

Engajar o aluno em atividades que inter-relacionem diferentes aspectos da Álgebra, como resolução de problemas e não só para encontrar o valor numérico de uma expressão algébrica ou atividades meramente mecânicas.

Propuser situações em que o aluno possa investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas, identificando suas estruturas para que possa descrevê-los simbolicamente.

Propuser situações que levem o aluno a construir noções algébricas pela observação de regularidades, e não somente manipulações mecânicas de expressões algébricas.

Por meio da análise dos resultados, pudemos constatar a validade das hipóteses, uma vez que o conjunto de questões não é nenhum pouco familiar a esses alunos e envolvem competência de nível cognitivo global. Houve um

percentual médio de acertos e percebemos nas atividades dos alunos, uma diversidade nas estratégias de resolução.

Consideramos que os alunos avançaram em seus conhecimentos em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico, bem como em suas atitudes e autonomia no sentido de observar, levantar hipóteses, tirar conclusões e justificar suas respostas.

Reconhecemos como fundamentais à realização desse trabalho, as teorias de DUVAL (1993, 1994, 1995 e 1999) e DOUADY (1987). Assim, nossa seqüência de atividades apoiou-se nos registros de representação semiótica e nas mudanças de quadros.

Quanto aos registros de representação, pudemos perceber que os alunos não apresentaram grandes dificuldades em perceber e aplicar esses diferentes registros, utilizaram adequadamente os registros de representação, compreendendo a conversão do registro figural para o registro simbólico, porém, quanto às mudanças de quadros, foram percebidas poucas mudanças do quadro geométrico para o algébrico, pois a maioria dos alunos não usou os conceitos de área e perímetro para resolver as atividades.

Tecemos algumas críticas ao nosso trabalho com relação a algumas atividades. A atividade 2, por exemplo, merece certa alteração nas questões, no sentido de que não colocamos nenhuma pergunta em que a posição da figura fosse um número “grande” e não múltiplo de três.

Um outro aspecto negativo por nós detectado, foi um salto de dificuldade muito grande da atividade 5 para a atividade 6. Talvez fosse mais interessante uma atividade intermediária, que já abordasse a idéia de contorno da figura, mas um contorno parcial e não total, como já foi proposto desde o início.

Antes de iniciar a aplicação da seqüência, vale a pena o professor aplicar um teste diagnóstico para certificar-se que os alunos têm um certo conhecimento sobre o conceito de área e perímetro, que apesar de não serem fundamentais para a resolução das atividades, poderão enriquecer muito o trabalho quanto ao surgimento de diferentes regras de formação das seqüências.

Seria interessante, ainda, que os alunos tivessem conhecimento e domínio da propriedade distributiva da multiplicação, pois conhecendo e manipulando a propriedade distributiva, terão condições de manipular as diferentes expressões encontradas e verificar a validade de cada uma delas algebricamente.

Apesar de não ser o objetivo do nosso trabalho, não foi possível essa verificação e validação das diferentes expressões encontradas por meio de manipulações algébricas, pois os alunos não tinham domínio da propriedade distributiva. Assim, a validação das expressões encontradas foi feita apenas por substituição dos números das posições das figuras nessas expressões.

Vale salientar que o papel do professor foi fundamental nas fases de introdução e institucionalização de cada atividade. Foram de grande importância os questionamentos feitos pelo professor, principalmente no momento em que o aluno escrevia a regra da seqüência em linguagem natural e depois tentava descrevê-la na linguagem algébrica.

O professor procurava sempre tirar do aluno a resposta satisfatória para cada atividade, sem interferir na sua criatividade. Por exemplo, quando o aluno escrevia a regra da seqüência usando apenas a linguagem natural, o professor sempre questionava se não havia uma maneira mais simplificada de escrever aquela regra, e aos poucos muitos dos alunos foram se desprendendo da linguagem natural e escrevendo as regras das seqüências por meio da linguagem algébrica.

Sugerimos que o professor peça para os alunos apresentarem na lousa as diferentes respostas encontradas, a fim de socializá-las para que possam ser discutidas e corrigidas por toda a classe.

Frente às dificuldades encontradas no decorrer da aplicação da nossa seqüência de atividades, é de nosso interesse continuar os estudos sobre a proposta de se trabalhar a introdução ao pensamento algébrico por meio de seqüências de padrões geométricos, procurando aperfeiçoar as atividades sob os pontos de vista didático e matemático.

Acreditamos ser preciso dar atenção a um outro problema, ou seja, a necessidade de melhor capacitar o professor para trabalhar com a introdução ao pensamento algébrico, fazendo uso de seqüências de padrões geométricos, tentando garantir um bom aprendizado por parte dos alunos.

BIBLIOGRAFIA

ALMOULOU, Saddy Ag. *Fundamentos da didática da matemática*. São Paulo: PUC-SP, 2000.

AZARQUIEL. *Ideas y Actividades para Enseñar Algebra*. Madri: Editorial Síntesis, 1993.

BALTAR, P. M. *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surface planes: une étude de l'acquisition des relation entre les longueurs et les aires au collège*. 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble.

BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática hoje é feita assim*. Ensino Fundamental. São Paulo: FTD, 2000.

BOOTH, Lesley R. *Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra: as idéias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

BOYER, Carl B. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: SEF, 1998.

_____. *Plano Nacional do Livro Didático*. Brasília: SEF, 1999.

CHEVALLARD, Y. *Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college*. (Premiere partie: l'évolution de la transposition didactique). Petit x, n. 5, 1989, p. 51-94.

DOUADY, Régine. *Rapport enseignement-aprentissage: dialectique outil-objet, jeux de cadre*. Cahiers de didactique, n. 3, 1987.

_____. *L'ingénierie didactique, um moyen pour e'enseignant d'organiser lês rapports entre l'enseignement et l'apprentissage*. Chaier de DIDIREM, nº19, IREM – Université Paris VII, 1993.

DUVAL, Raymond. *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Anales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, v. 5, 1993.

_____. *Les différents fonctionnements d'une figure une démarche géométrique*. Nº 17. IREM de Strasbourg, 1994, p.121-137.

_____. *Sémiosis et Pensée Humaine: Registros semióticos et apprentissages intellectuels*. Paris: Peter Lang S.A., 1995.

_____. *L'analyse cognitive du fonctionnement de la pensée et de l'activité mathématique: curs sur les pensée apprentissages intellectuels donné à la PUC-SP*, 1999.

FALCÃO, J. T. da Rocha. *Représentation du problème, écriture de formules et guidage dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre*. Tese de Doutorado, Université Paris – V (René Descartes), França, 1992.

FILLOY, Eugenio; ROJANO, Teresa. *Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Álgebra*. For the Learning of mathematics 9,2 – FLM Publish Association, Montreal, Quebec, Canada, June 1989.

FIORENTINI, D. *Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil*. Revista Zetetiké, ano 3, n. 4, nov. 1995, p. 1-37.

FREITAS, M. A. *Equação do 1º Grau: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio*. PUC. São Paulo, 2002 (Dissertação de Mestrado).

GREENO, J. G. *A cognitive learning analysis of algebra*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association. Boston. MA, 1982.

HARPER, E. *Gosths of Diophantus*. Educational Studies in Mathematics, 18. MA, 1987, p.75-90.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. *Matemática: Ensino Fundamental*. São Paulo: Scipione, 2002.

KIERAN, Carolyn. *Handbook of Research on Mathematics, Teaching and Learning*. Université du Québec à Montreal, 1992.

_____. *The learning and teaching of school álgebra*. V. 17: Handbook of Research on Mathematics, Teaching and Learning-Ed. NCTM – MacMilan Publishing Co.-NY, USA, 1992.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. 3. ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 2000.

MASON, J. *El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidad*. UNO – Revista de didáctica de las Matemáticas, n. 9. Barcelona, 1996, p. 15-22.

MASON, J.; GRAHAM, A.; PIMM, D.; GOWAR, N. *Routes to / Roots of Álgebra*. Great Britain: Ed. Thomson Ltd, East Kilbride, Scotland, 1988.

MIDONICK, Henrietta.O. *The Treasury of Mathematics*. Philosophical Library, New York, 1965.

- MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. *Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?*. Pró-posições, v. 3, n. 17. São Paulo: UNICAMP-SP, 1992.
- MOLES, A. A. *A criação científica: os métodos heurísticos: primeira parte*. São Paulo: Perspectivas. 1971.
- NEVES, Paulo Sérgio de Oliveira. *Um estudo sobre o significado, o ensino e aprendizagem da Álgebra*. São Paulo: USP, 1995.
- NOBRE, Ana Maria Velloso. *Elaboração/Leitura de códigos para entender o "x da questão"*. Dissertação (Ensino de Matemática). PUC-SP. São Paulo, 1996, 2141f.
- OLIVEIRA, M. A. G. *O ensino da álgebra elementar: depoimentos e reflexões daqueles que vêm fazendo sua história*. Unicamp, 1997.
- OLIVEIRA, Nanci de. *O conceito de funções: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem*. Dissertação de Mestrado. PUC – SP, 1997.
- PIRES, Célia Carolino; CURI, Edda; PIETROPAOLO, Ruy. *Educação matemática. Ensino Fundamental*. São Paulo: Atual. 2002.
- ROJANO, T.; SUTHERLAND, R. *La sintaxis algebraica en el proyecto viético*. Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre investigación en Educación Matemática. PNFAPM / Universidad de Valencia, España, 1991.
- SFARD. *Transition from operational to structural conception: The notion of function revisited*. In: VERGNAUD, G.; ROGALSKI, J.; ARTIQUE, M. (eds). *Proceedings of the Thirteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, v. 3. Paris: G. R. Didatque, CNRS, 1989, p. 151-158.
- SOUZA, Eliane Reame de; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. São Paulo: Cadernos do CAEM n. 5, 1994.
- USISKIN, Z. *Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis: As idéias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

ANEXOS

Anexo I

Ficha de observação	i
---------------------------	---

Anexo II

Atividade 1	iv
-------------------	----

Anexo III

Atividade 2	v
-------------------	---

Anexo IV

Atividade 3	vi
-------------------	----

Anexo V

Atividade 4	vii
-------------------	-----

Anexo VI

Atividade 5	viii
-------------------	------

Anexo VII

Atividade 6	ix
-------------------	----

Anexo VIII

Atividade 7	x
-------------------	---

Anexo VI

Atividade 8	xi
-------------------	----

FICHA DE OBSERVAÇÃO – ALUNOS**Turma 6ª série D**

- 1) Houve discussão entre os alunos da dupla quanto à regra de formação da sequência da atividade 1?
() sim () não Observações:

- 2) Relacionaram as figuras com bolinha para cima com as posições ímpares e as figuras com bolinha para baixo com as posições pares?
() sim () não Observações:

- 3) Houve discussão entre os alunos da dupla quanto à regra de formação da sequência da atividade 2?
() sim () não Observações:

- 4) Relacionaram os losangos com as posições múltiplas de três?
() sim () não Observações:

- 5) Houve discussão entre os alunos da dupla quanto à regra de formação da sequência da atividade 3?
() sim () não Observações:

- 6) Perceberam a relação de dependência entre a posição que cada figura ocupa na sequência com o seu número de bolinhas?
() sim () não Observações:

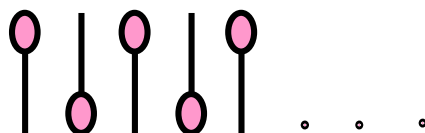
- 7) Utilizaram o conceito de área para chegarem à regra de formação da sequência da atividade 3?
() sim () não Observações:

- 8) Houve discussão entre os alunos da dupla quanto à regra de formação da seqüência da atividade 4?
() sim () não Observações:
- 9) Perceberam a relação de dependência entre a posição que cada figura ocupa na seqüência com o seu número de bolinhas?
() sim () não Observações:
- 10) Utilizaram o conceito de área para chegarem à regra de formação da seqüência da atividade 4?
() sim () não Observações:
- 11) Houve discussão entre os alunos da dupla quanto à regra de formação da seqüência da atividade 5?
() sim () não Observações:
- 12) Perceberam a relação de dependência entre a posição que cada figura ocupa na seqüência com o seu número de quadradinhos?
() sim () não Observações:
- 13) Utilizaram os conceitos de área ou perímetro para chegarem à regra de formação da seqüência da atividade 5?
() sim () não Observações:
- 14) Houve discussão entre os alunos da dupla quanto à regra de formação da seqüência da atividade 6?
() sim () não Observações:
- 15) Perceberam a relação de dependência entre a posição que cada figura ocupa na seqüência com o número de quadradinhos da sua borda?
() sim () não Observações:

- 16) Utilizaram os conceitos de área ou perímetro para chegarem à regra de formação da seqüência da atividade 6?
() sim () não Observações:
- 17) Houve discussão entre os alunos da dupla quanto à regra de formação da seqüência da atividade 7?
() sim () não Observações:
- 18) Perceberam a relação de dependência entre a posição que cada figura ocupa na seqüência com o número de quadradinhos da sua borda?
() sim () não Observações:
- 19) Utilizaram os conceitos de área ou perímetro para chegarem à regra de formação da seqüência da atividade 7?
() sim () não Observações:
- 20) Houve discussão entre os alunos da dupla quanto à construção de uma seqüência numérica ou de figuras para a atividade 8?
() sim () não Observações:
- 21) Os alunos da dupla elaboraram o gabarito de respostas da seqüência que construíram para a atividade 8?
() sim () não Observações:

ATIVIDADE 1

Observe a seqüência abaixo, descubra sua regra e continue desenhando:



- a) Qual o 12º elemento da seqüência?
- b) Qual o 23º elemento da seqüência ?
- c) E o 54º elemento?
- d) Como você descreveria a regra de formação desta seqüência?

ATIVIDADE 2

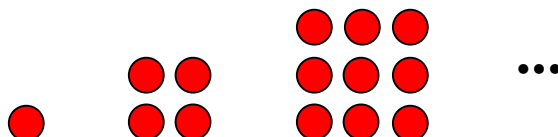
Observe a seqüência abaixo, descubra sua regra e continue desenhando:



- a) Qual o 12º elemento da seqüência?
- b) Qual o elemento que ocupa a 18ª posição na seqüência ?
- c) E o que ocupa a 21ª posição?
- d) O que você observa em relação ao losango e às posições ocupadas por ele ?
- e) Como você descreveria a regra de formação desta seqüência?

ATIVIDADE 3

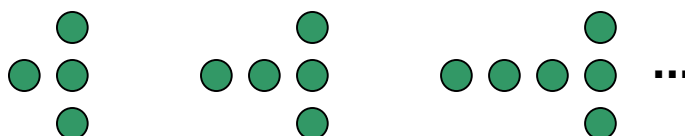
Observe a seqüência de figuras abaixo:



- Desenhe a 4ª figura da seqüência.
- Desenhe a 6ª figura da seqüência. Quantas bolinhas ela tem?
- Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu numero de bolinhas.
- A 10ª figura tem quantas bolinhas?
- E a 21ª figura, tem quantas bolinhas?
- O que fazer para descobrir o número de bolinhas de qualquer figura da seqüência? Escreva uma regra.

ATIVIDADE 4

Observe a seqüência de figuras abaixo:



- Desenhe a próxima figura da seqüência. Quantas bolinhas ela tem?
- Desenhe a 7ª figura da seqüência. Quantas bolinhas ela tem?
- Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de bolinhas.
- A 16ª figura tem quantas bolinhas?
- E a 25ª figura?
- O que fazer para descobrir o número de bolinhas de qualquer figura da seqüência? Escreva uma regra.

ATIVIDADE 5

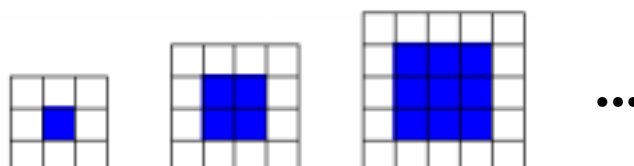
Observe a seqüência de figuras abaixo:



- a) Desenhe a próxima figura da seqüência. Quantos quadradinhos ela tem?
- b) Desenhe a 5ª figura da seqüência. Quantos quadradinhos ela tem?
- c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de quadradinhos.
- d) A 11ª figura tem quantos quadradinhos?
- e) E a 17ª figura?
- f) Como descobrir a quantidade de quadradinhos de qualquer figura da seqüência? Escreva uma regra.

ATIVIDADE 6

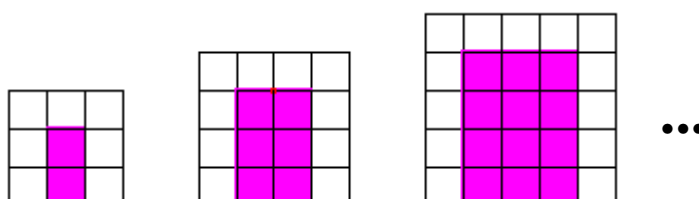
Observe como se forma a seqüência de figuras abaixo:



- Desenhe a próxima figura da seqüência. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?
- Desenhe a 6ª figura da seqüência. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?
- E no contorno da 7ª figura, há quantos quadradinhos?
- Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o número de quadradinhos do seu contorno.
- Há quantos quadradinhos no contorno da 9ª figura?
- E a 10ª figura, quantos quadradinhos há no seu contorno?
- Como calcular a quantidade de quadradinhos do contorno de qualquer figura da seqüência? Escreva uma regra.

ATIVIDADE 7

Observe como se forma a seqüência de figuras abaixo:



- Desenhe a próxima figura da seqüência. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?
- Desenhe a 5ª figura da seqüência. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?
- E no contorno da 7ª figura, há quantos quadradinhos?
- Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o número de quadradinhos do seu contorno.
- Há quantos quadradinhos no contorno da 9ª figura?
- E a 12ª figura, quantos quadradinhos há no seu contorno?
- Como calcular a quantidade de quadradinhos do contorno de qualquer figura da seqüência? Escreva uma regra.

ATIVIDADE 8

Crie uma seqüência de figuras diferente das estudadas até agora.

Sente-se com um colega e troque a sua seqüência com a dele. Tente descobrir a regra de formação da seqüência de seu colega enquanto ele tenta descobrir a regra de formação da sua seqüência.