

LUCIANA SIMONETI FERREIRA CARDIA

***INTEGRANDO A GEOMETRIA COM A ÁLGEBRA NA
CONSTRUÇÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS***

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**PUC/SP
São Paulo
2007**

LUCIANA SIMONETI FERREIRA CARDIA

**INTEGRANDO A GEOMETRIA COM A ÁLGEBRA NA
CONSTRUÇÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática**, sob a orientação do Professor Doutor Saddo Ag Almouloud.*

PUC/SP
São Paulo
2007

nos resultados obtidos com a aplicação do pré-teste realizado com o grupo a ser estudado.

O pré-teste aplicado neste grupo encontra-se na parte dos anexos deste projeto. Ele consistiu em cinco questões abordando o reconhecimento das figuras planas, reconhecimento de formas geométricas, conhecimento dos conceitos de perímetro e área, cálculo do perímetro e área das figuras pedidas e diferenciação entre os conceitos, utilização de unidades de medidas tais como: m (metro), cm (centímetro), m^2 e cm^2 . Os resultados obtidos nesse teste foram razoáveis 70% dos alunos conseguiram responder às situações propostas, e 30% apresentaram um pouco mais de dificuldades. Notamos que a maior dificuldade dos alunos foi diferenciar os conceitos entre perímetro e área, confirmando os resultados obtidos nas pesquisas de Douady (1989) e Baltar (2000).

Quando elaboramos as atividades desta seqüência, procuramos selecionar os pré-requisitos necessários que a turma da 7ª série do ensino fundamental deve dominar a fim de que o desenvolvimento da seqüência didática atinja os objetivos propostos. A seguir, apresentamos estes pré-requisitos.

Os alunos deverão possuir os seguintes pré-requisitos (noções):

- 1) Reconhecer as figuras geométricas planas;
- 2) Identificar as diversas unidades de medidas, tais como: centímetro e metro;
- 3) Dominar as cinco operações matemáticas (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação);
- 4) Conhecer como se calcula as áreas das diferentes figuras planas: área de quadrados, área de retângulos e área de triângulos, entre outros.
- 5) Conhecer os conjuntos numéricos a serem trabalhados; (Conjuntos dos Naturais, Inteiros e Racionais).
- 6) Conhecer a linguagem matemática, como as expressões; base e altura, como sinônimos de comprimento e largura. (Em nossas atividades adotamos a linguagem de base (comprimento) e altura (largura)).
- 7) Saber utilizar o processo de decomposição de figuras;

- 8) Reconhecer o significado da equivalência entre áreas e equivalência entre as expressões algébricas;
- 9) Identificar e saber aplicar as propriedades aritméticas, destacando-se a propriedade distributiva;
- 10) Diferenciar a noção de área da noção de perímetro.

Dando seqüência a este capítulo, apresentamos as 12 atividades que compõem a seqüência.

3.3.1 Apresentação das atividades da Seqüência Didática

As atividades são apresentadas da seguinte forma: A atividade proposta, o material para a atividade, e a descrição do processo de desenvolvimento, descrição da aplicação e análise dos resultados. Optamos por esse modelo, pois acreditamos que deste modo o leitor compreenda melhor o desenvolvimento de cada atividade.

Em seguida, apresentamos as 12 atividades que compõem a seqüência didática do projeto de pesquisa.

3.3.1.1 Atividade 1: Medida de Superfície

Atividade: Com o *Kit* que o grupo recebeu, execute as seguintes tarefas:

- 1) Recubra a superfície da carteira utilizando as peças do jogo que você recebeu;
- 2) Registre a quantidade de peças que serão necessárias para recobrir a carteira;
- 3) Ao finalizar o registro da medida da carteira, compare o resultado obtido com os resultados dos outros grupos.

Escreva suas respostas no espaço abaixo.

Pela apreensão perceptiva, segundo Duval, o aluno interpretará a forma da figura em uma situação geométrica, chegando à resolução do problema em análise; no nosso caso os alunos deveriam perceber a diferença entre superfície e área de figuras planas, como também, a utilização de diferentes unidades de medidas não padronizadas.

Para Duval (1995), o conhecimento é mobilizado por um sujeito por meio de uma atividade de representação. Em nosso caso, os conhecimentos foram mobilizados pelos alunos através do reconhecimento das formas geométricas utilizadas para a determinação da área do objeto estudado.

Ao final dessa análise constatamos que a situação proposta não necessitava de todo o ciclo da Dialética ferramenta-objeto. Ela foi escolhida para estabelecer o “*milieu*” do aluno, ou seja, prepará-lo para usar alguns objetos geométricos para a construção de conceitos relacionados com as expressões algébricas.

3.3.1.2 Atividade 2 – Variação da Área

Atividade: Execute as seguintes tarefas:

- 1- Construir retângulos, cuja altura seja 5 cm em uma malha quadriculada.
- 2- Após construir os retângulos na malha quadriculada, complete uma tabela com as medidas dos retângulos e calcule as áreas destas figuras.

Base (b) (cm)	Altura (h) (cm)	Área (A) (cm ²)
	5	
	5	
	5	
	5	
	5	
	5	
	5	

- 3- Compare os retângulos que vocês fizeram. São todos iguais?

- 4- Olhando a tabela acima, como você calculou a área de cada retângulo?
- 5- Você encontrou algum retângulo que tem área igual?
- 6- Sendo a área de um retângulo de altura 5 cm igual a 30 cm^2 , qual é a medida da sua base ?
- 7- Se a base for 15 cm, qual é a sua área?
- 8- E se a área fosse 50 cm^2 qual seria a medida da base?
- 9- Depois de você analisar a tabela acima, explique como podemos calcular a área de qualquer retângulo que tem altura de 5 cm ?
- 10- Olhando a coluna da base o que acontece com a área quando a medida da base aumenta? E quando diminui? Como você pode representar esta situação?

Obs: Responda às questões na folha anexa.

A) Material: Papel quadriculado

Régua de 40cm

B) Objetivo: 1. Verificar que a área do retângulo é o produto entre a base e a altura;

2. Perceber a variação de área, mantendo-se uma das grandezas lineares constante, e variando a outra;
3. Constatar a relação de proporcionalidade entre a variação da área e a variação da base.

C) Desenvolvimento da atividade:

Os alunos são divididos em duplas e recebem uma régua de 40 cm e duas folhas quadriculadas em centímetros. (Cada quadradinho será considerado como unidade de medida de superfície).

Os alunos deverão construir retângulos diferentes, conservando a altura da figura em 5 cm. Após os alunos finalizarem os desenhos na malha quadriculada, utilizando medidas inteiras para a construção dos retângulos, eles completarão

3. Compare os valores da base e da altura, o que acontece com elas?
4. Se tivermos uma altura que vale 12 cm, qual é o valor da base?
5. Você encontrou algum retângulo com medidas iguais?
6. Como você encontrou os valores da base e da altura dos retângulos?
7. Você consegue escrever uma expressão para encontrar os retângulos com área igual a 24 cm^2 ?

Obs: Responda às questões na folha anexa.

A) Material: Papel quadriculado, papel sulfite, régua de 40 cm

Atividade: Em grupos de 4 a 5 alunos

B) Objetivos:

- 1- Favorecer o desenvolvimento de habilidades que possibilitem ao aluno construir retângulos diferentes mantendo-se a área constante.
- 2- Atribuir diferentes valores à base e à altura, identificando seu campo de variação e as restrições colocadas para a execução da atividade.
- 3- Analisar a relação da área com a base e a altura, associando-as como divisores do número dado, no qual os divisores desse número (o valor da área dada) estarão restritos aos números naturais.

C) Desenvolvimento da atividade:

Os alunos serão divididos em duplas, e receberão folhas quadriculadas, papel sulfite e uma régua.

Os alunos desenharam os possíveis retângulos na malha quadriculada, conservando a área previamente determinada. Depois de registrar as figuras através de desenhos, eles transcreverão as medidas de cada figura na tabela

a comparação entre o quadrado e o retângulo, mostrando que todo quadrado é um retângulo, pois tem quatro ângulos retos. Então, todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado, pois, para ser um quadrado a figura deve atender a duas condições: ter quatro ângulos retos e quatro lados de medidas iguais.

Outro aspecto discutido foi sobre a questão 3. Alguns alunos não perceberam que os valores das medidas da altura e da base iam se alternando, como no caso 3 para altura e 4 para base, representava um tipo de retângulo, e outro, no qual 4 para altura e 3 para base eram outros retângulos diferentes. Como os valores atribuídos para a medida da base e da altura ora aumentavam, ora diminuían os alunos puderam perceber que as duas dimensões utilizadas podem ser consideradas variáveis, pois, eles fizeram associações com a tabela 1 da atividade 2, na qual as medidas da base e da área variavam e se conservava a altura constante. Sendo assim, eles conseguiram diferenciar os conceitos de variáveis e constantes.

Ao final da discussão percebemos que conseguimos atingir alguns dos objetivos levantados na nossa análise a priori, segundo a qual diferentes retângulos podem ter a mesma área, conforme o caso estudado; que a maioria dos alunos conseguiu mobilizar conhecimentos aprendidos nas atividades anteriores. Além disso, eles souberam aplicar a expressão geral para calcular a área dos retângulos e também conseguiram generalizá-la para o caso em estudo ($24 = b \times h$).

3.3.1.4 Atividade 4 – Diferenciando Perímetro de Área

Atividade:

Situação-Problema: Mariana quer construir um galinheiro de forma retangular para suas galinhas usando 50 metros de cerca. Ajude-a a encontrar as várias formas retangulares de maneira que ela possa construir o galinheiro. (Considerar o fio de arame de 50 cm utilizando a escala (1 m corresponde a 1 cm)).

Parte A:

- 1- Utilizando os fios que você recebeu, construir cinco retângulos diferentes.
- 2- Meça as dimensões dos retângulos utilizando valores inteiros, e registre esses valores na tabela abaixo.

Tabela 1

Base (b)	Altura (h)	b + h	P= 2b + 2h

- 3- Complete as outras colunas da tabela 1, utilizando os valores de b (Comprimento) e h (altura).
- 4- Calcule os novos valores para completar as outras colunas.
- 5- Observe o que acontece com os valores da terceira coluna da tabela 1. Escreva sua conclusão.
- 6- Se a altura é 15 cm, quanto mede a base?
- 7- Se a base vale 20 cm, quanto mede a altura?
- 8- Escreva o cálculo que você fez para encontrar os valores dos lados do retângulo.
- 9- Com a expressão que você escreveu no item anterior, é possível calcular as dimensões dos outros retângulos?
- 10- Observar agora a coluna b+h da tabela 1 com a coluna P= 2b+2h, é possível escrever uma expressão para encontrar os valores da coluna 3, conhecendo-se os valores da coluna 4? Escreva essa expressão.

Parte B:

- 1- Transfira para a tabela abaixo as medidas dos retângulos construídos no item anterior.

Tabela 2

Base (b)	Altura (h)	Área

- 2- O que é área para você? Como você calcularia as áreas das figuras?
- 3- Se a base é 10 cm e a área 40 cm² qual é o valor da altura?
- 4- Se a altura é 30 cm e a área 90 cm², quanto mede a base?
- 5- Se a altura vale 8 cm e a base vale 15 cm, quanto mede a área?
- 6- Conhecendo a base e a altura que operação você fez para encontrar a área?
- 7- Observando os cálculos que você fez para completar a tabela 2, escreva uma fórmula geral para encontrar a área.

Obs: Responda às questões na folha anexa.

A) Material: fios de arame de 50 cm, papel quadriculado, régua de 40 cm.

Aplicação da atividade: em grupos de 4 a 5 alunos

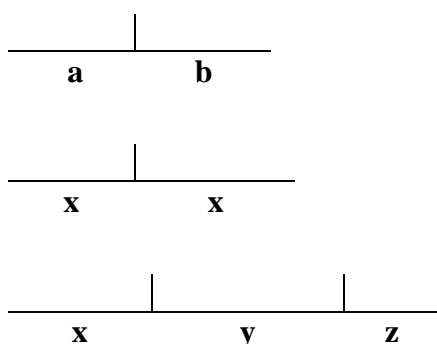
B) Objetivos da atividade:

1. Diferenciar Perímetro de Área;
2. Determinar as diferentes medidas dos lados dos retângulos tendo o perímetro constante;
3. Evidenciar que a Largura e o Comprimento são grandezas lineares;
4. Concluir que a Área do retângulo é o produto das medidas dos lados, obtida através da expressão $A = b \times h$;
5. Trabalhar com o conceito de variável, através da análise das dimensões dos retângulos obtidos;

3.3.1.5 Atividade 5 – Trabalhando com Variáveis: Comprimento de segmentos

Atividades:

- 1) Dado um segmento de comprimento C , conforme o apresentado abaixo, procure expressar C como soma das medidas dos segmentos dados.



- 2) Desenhe, em seu caderno, um segmento cuja medida seja 10 cm. Imagine que este segmento é um fio de arame que deve ser dividido em duas partes, uma parte de medida x e outra de medida y . Atribua a x e a y os valores determinados na tabela abaixo.

X(cm)	Y(cm)	2X	10 – X	X ²	X+Y	X•Y
1,5						
2,5						
3						
5						
6						
8,5						
9						

Depois que você completou a tabela, responda:

- O que aconteceu com os valores de x e y ?
- Como podemos conseguir novamente o tamanho do comprimento do fio? Escreva uma expressão.
- Como você calculou o valor x^2 ?

- d) E como você calculou o valor $2x$? Comparando com a expressão anterior, elas são diferentes?
- e) Determine os novos resultados das expressões abaixo utilizando os valores de x e y da tabela anterior:

$2x + x$	$2x + 3y$	$4x^2$	$3xy$	$5x - 3y$

3- Atividade complementar: Escreva as seguintes sentenças¹⁸ algébricas:

- Um número inteiro qualquer _____
- O dobro desse número _____
- O triplo desse número _____
- Um número elevado ao quadrado _____
- A soma de dois números quaisquer _____
- O dobro de um número somado com o triplo do outro _____
- A diferença entre dois números quaisquer _____
- O produto entre dois números _____

A) Material: Folha contendo a atividade proposta, papel quadriculado, régua de 40 cm.

Aplicação da atividade: em duplas

B) Desenvolvimento da Atividade:

Cada dupla recebe uma folha contendo a atividade proposta e uma folha quadriculada e uma régua. No início da primeira parte da atividade, os alunos deverão escrever expressões que determinam o comprimento do segmento dado.

¹⁸ Essa atividade complementar baseada em Antonio José Lopes Bigode - Coleção: Matemática, Hoje é feita assim - vol. 3 (7ª série), São Paulo, SP: FTD, 2000

Observamos que durante o desenvolvimento dessa atividade, estiveram presentes as apreensões operatória, seqüencial e discursiva, conforme os aspectos apresentados por Duval. A apreensão seqüencial ocorreu durante o desenvolvimento dos exercícios 1 e 2. No primeiro exercício todas as duplas conseguiram identificar a figura e determinar as expressões algébricas pedidas, ativando seus conhecimentos aritméticos. No segundo exercício todas as duplas quiseram representar o comprimento do fio nas diferentes divisões pedidas no papel quadriculado, melhorando a compreensão do problema proposto. A apreensão discursiva esteve presente ao longo de todo o desenvolvimento de atividade 5.

Ao final da análise dos resultados dessa atividade, constatamos que devemos trabalhar mais a linguagem matemática e as propriedades de potência entre os alunos, para construírem conceitos adequados que os auxiliem para a construção de novos conhecimentos matemáticos.

A seguir, apresentamos a atividade 6 e a atividade 7. Analisamos os resultados obtidos na atividade 7 e sua complementar, que consideramos um dos pontos mais importantes de nossa seqüência e de nossa pesquisa, na qual estiveram presentes as ferramentas geométricas para a construção das expressões algébricas.

3.3.1.6 Atividade 6 – Decomposição da Cruz – Equivalência de área

Atividade de Equicomposição de Área - Transformar a Cruz em um polígono.

Com as cruzes desenhadas na folha que vocês acabam de receber, escolham uma delas e procurem construir a figura pedida. Em seguida, respondam às questões de 1 a 4, antes de fazer a atividade 5

- 1- Decomponha a cruz em partes e componha essas partes a fim de obter um quadrado.
- 2- Mostre através do desenho, como você fez.

- 3- Com o desenho da outra cruz que é igual á primeira, procure calcular o valor da área do quadrado.
- 4- Quanto vale a área da cruz? E a área do quadrado é igual ou diferente à da cruz?
- 5- Pensando na decomposição da cruz em partes, observe a figura abaixo e responda:

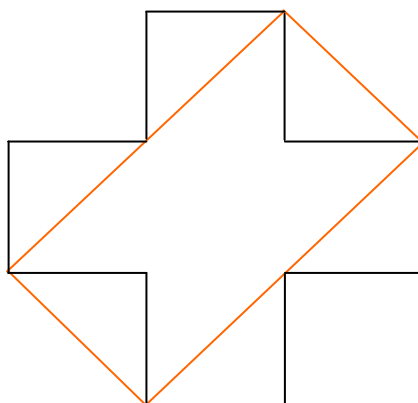


Figura 5

- a) Compare a área do retângulo formado com a área da cruz. Elas são iguais? Registre suas observações.
- b) Comparando o retângulo do desenho acima com o quadrado construído, as áreas são iguais? Por quê?

Obs: Responda às questões na folha anexa.

Folha anexa: Com as figuras das Cruzes para serem decompostas

- 1) **Figura A:** Para decompor a Cruz em Quadrado

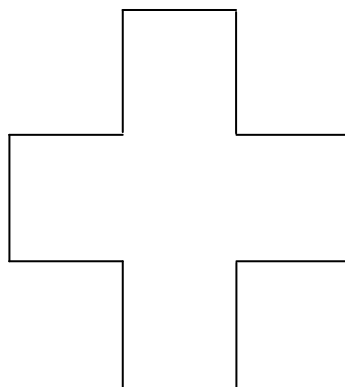


Figura. A (Figura 6.a)

Figura B: Para calcular a área do Quadrado

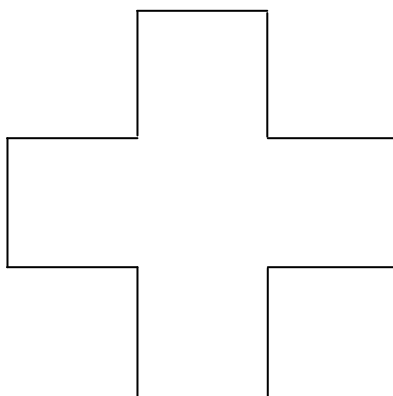


Figura B (Figura 6.b)

Ficha de atividade do aluno – Atividade de Fixação de Equivalência de Área

Atividade de Fixação: Jogo do Desafio: Você consegue construir as figuras pedidas, utilizando todas as peças do jogo?

1. Com o *Kit* de peças que você acaba de receber, execute as seguintes tarefas:
 - a) Procure construir um quadrado utilizando todas as peças recebidas. Desenhe a figura formada.
 - b) Determine a área do quadrado e escreva sua expressão.
 - c) Pensando agora na figura do retângulo, você consegue construí-lo utilizando todas as peças? Desenhe a figura formada.
 - d) Comparando a área do quadrado com a área do retângulo, qual é a maior?
 - e) Podemos dizer que o quadrado e o retângulo são figuras equivalentes, por quê?
 - f) Verifique se é possível construirmos uma cruz semelhante à do exercício anterior, cuja área é equivalente à do quadrado e à do retângulo construídos nos itens anteriores.

Obs: Responda às questões na folha anexa.

A) Material: Figuras em papel quadriculado e um *Kit* com 8 peças.

Atividade: Em duplas

B) Objetivos:

1. Compor e decompor um polígono em partes, usando polígonos conhecidos (retângulos, triângulos);
2. Verificar se dois polígonos têm a mesma área (equivalência de polígonos) são eqüicompostos;
3. Verificar a equivalência de polígonos pela análise da eqüicomposição;
4. Utilizar a “eqüicomposição de polígonos” para determinar a área de um polígono dado, conhecendo-se a área do outro polígono eqüicomposto (ver fig. A e fig. B da folha anexa);
5. Construção de expressões algébricas equivalentes através da comparação das expressões construídas para determinar a área de polígonos pela soma das áreas parciais da figura, compondo esses polígonos com outros polígonos de diferentes maneiras.

C) Desenvolvimento da atividade

Cada dupla receberá duas folhas contendo os desenhos das duas cruzes congruentes, desenhadas na malha quadriculada, uma régua e uma tesoura.

Os alunos escolherão uma das cruzes que estão na folha anexa, para executarem a primeira atividade na qual deverão decompor a cruz, de maneira que se obtenha um quadrado. Construída a figura, eles registrarão por meio de desenho, como foram feitas estas construções.

Depois, eles utilizarão a outra folha da atividade que contém a outra cruz, para calcular sua área comparando com a área do quadrado formado.

Em seguida, os alunos irão analisar a figura da Cruz transformada em um retângulo (fig. 5), e compararão as decomposições feitas na fig. A e na fig. 5; observando as áreas entre elas. Logo a seguir, eles deverão comparar a

construção feita anteriormente com a cruz (fig. B), transformando-a em um quadrado (fig. A) e comparar as áreas do quadrado com o retângulo, mostrado na figura dada, e registrar suas conclusões sobre a equicomposição de polígonos utilizados, escrevendo uma expressão numérica para cada uma dessas áreas. Caso os alunos apresentem dificuldades na resolução do problema proposto, o professor fará as intervenções necessárias, para que os alunos finalizem suas estratégias de resolução e atinja os objetivos propostos.

Concluída a atividade, o professor coletará alguns dos resultados das duplas e discutirá as estratégias dos alunos para resolverem os problemas propostos. Ele conduzirá a discussão a fim de obter as seguintes conclusões: como foi feita a decomposição para obter o quadrado e que esse processo se chama equicomposição, na qual a área da figura decomposta se conserva na composição da outra figura, como ocorreu com o quadrado. Dessa forma, podemos afirmar que as duas figuras possuem a mesma área. Já no caso da decomposição do retângulo, isso não ocorre, pois, não conseguiram formar o retângulo utilizando toda cruz, então o retângulo formado terá uma área menor que a da cruz.

Ao finalizar essa atividade, procuramos trabalhar com a decomposição de figuras para a composição de outras figuras, e comparar suas áreas e verificar se elas se conservam.

3.3.1.7 Atividade 7 - Construindo Retângulos - Aplicando a propriedade Distributiva

Atividade: Com o *kit* que você recebeu desenvolva as seguintes tarefas:

- 1) Construa dois novos retângulos utilizando:
 - a) 2 peças;
 - b) 3 peças;
 - c) 4 peças.
- 2) Desenhe os novos retângulos na folha quadriculada e calcule suas áreas.

- 3) Registre em seu caderno como você calculou as áreas das figuras.
- 4) Construa alguns quadrados com as peças 3 x 3, 3 x 4, 4 x 3, 4 x 4 e desenhe as figuras formadas em seu caderno.
- 5) Utilizando as peças 5 x 6, 6 x 6, 6 x 5, 5 x 5, procure construir novos quadrados. Desenhe pelo menos três em seu caderno.

Com os quadrados construídos, no item 5, complete as tabelas a seguir:

Tabela 1

a	b	h	(a x h)	(b x h)	Área total

Tabela 2

(a+b)	h	Área total = (a+b)x h

- 6) Observando a tabela 1 responda:
 - a) O que acontece com os valores da a, b, e h? Algum deles é constante?
 - b) Como podemos calcular a área da figura formada? Registre seus cálculos.
 - c) Compare as tabelas 1 e 2, observando os valores das áreas. Elas são iguais? Como foram calculadas?
 - d) Verifique a igualdade entre as expressões: $(a+b).h = a.h + b.h$. se é verdadeira atribuindo às letras a, b, h valores numéricos inteiros. Podemos afirmar que elas são equivalentes? Explique sua resposta.

numérico inteiro. Depois, as duplas irão resolver as demais atividades propostas, envolvendo a construção de retângulos com determinadas peças e em seguida procurarão construir uma expressão numérica, utilizando-se da soma das áreas parciais e observando que as figuras têm a mesma altura, levando-os assim a escreverem a expressão procurada, utilizando-se da propriedade distributiva tal como: $(3 \times 9 = 3 \times 5 + 3 \times 4 = 3 \times (4+5))$.

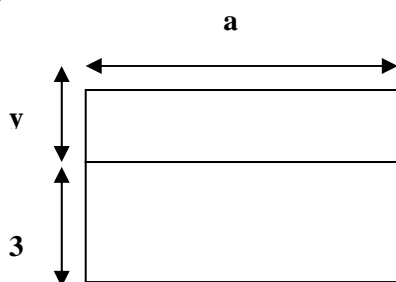
Ao final da atividade, o professor promoverá uma discussão coletiva a respeito dos resultados obtidos, que deve permitir evidenciar as produções dos alunos, selecionando as diferentes expressões numéricas construídas, comparando-as e evidenciando nessas comparações a utilização da propriedade distributiva. Em seguida, ele solicitará aos alunos outros exemplos cuja resolução envolve a utilização dessa propriedade.

Após terem finalizado a discussão coletiva, os alunos resolverão exercícios complementares, com o objetivo de verificar a aplicação do conhecimento aprendido.

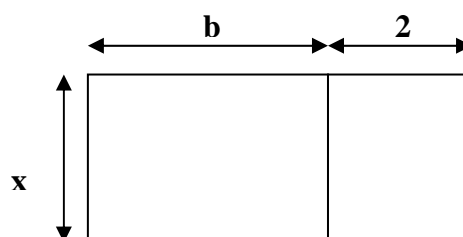
Ficha de atividade do Aluno – Complementar da Atividade 7

1) Escreva as expressões algébricas que representam as áreas das figuras²⁰ abaixo:

a)

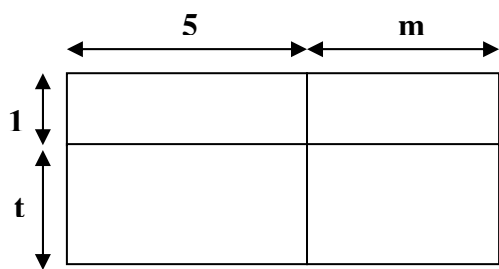


b)

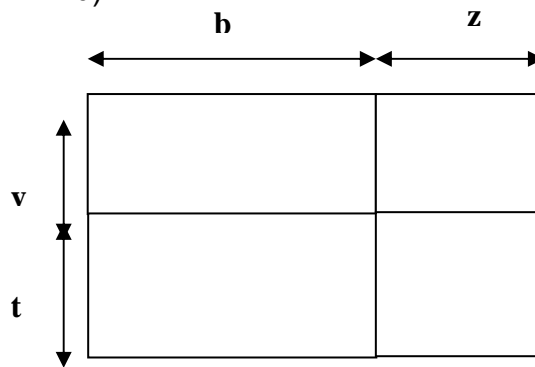


²⁰ Atividade baseada em Antonio Jose Lopes Bigode, Coleção: Matemática: Hoje é feita assim - vol. 3 (7ª série). São Paulo, SP: FTD, 2000.

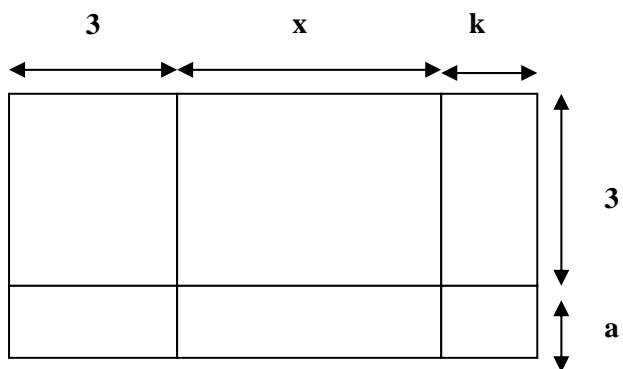
c)



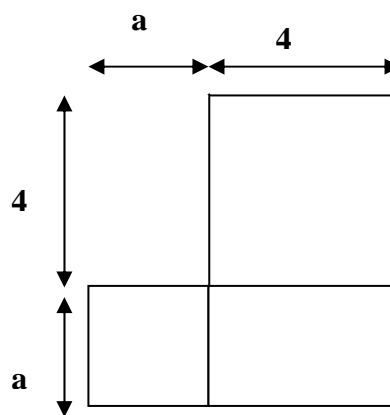
d)



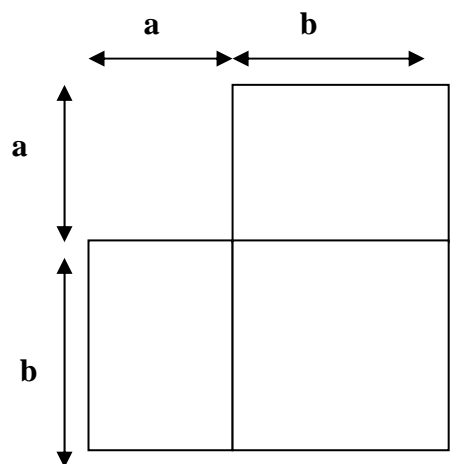
e)



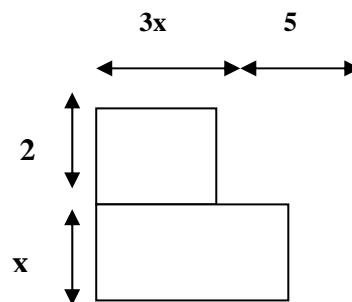
f)



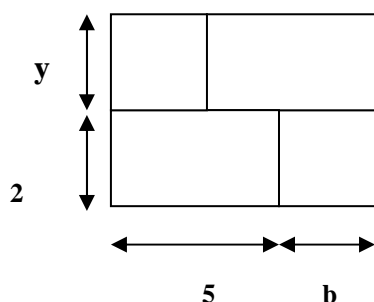
g)



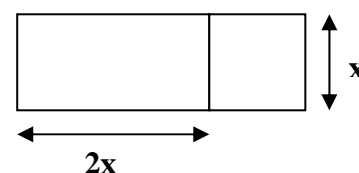
h)



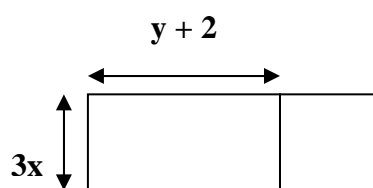
i)



j)



k)



2) Construa os retângulos cujas áreas são: (Considerando 0,5 cm como unidade de medida)

- a) $(x + 5) \cdot (y + 3)$
- b) $b) (x + 8) \cdot (b + 3)$
- c) $c) 2x \cdot (3x + 4)$
- d) $d) 3y \cdot (2x + 7)$
- e) $e) 4x \cdot (2x + y)$

C) Desenvolvimento da atividade 7 complementar:

Os alunos recebem a folha da atividade. Em seguida, eles deverão construir expressões algébricas correspondentes à área dos polígonos representados na folha 1, para isso poderão: a) decompor o polígono em partes e escrever as expressões que representam essas áreas, e depois somar essas expressões, ou aplicar a fórmula canônica ($A = b \cdot h$) para determinar o valor da área do retângulo, utilizando para isso os conhecimentos anteriormente adquiridos, como determinar os valores da base e da altura, saber somar as medidas dos segmentos.

Construídas as expressões pelos dois processos, o professor proporá aos alunos que escolham valores numéricos inteiros para as letras variando entre 1 a 15. Assim eles verificarão se as expressões são equivalentes ou não, através do cálculo numérico das expressões e da comparação dos resultados obtidos.

Verificada a equivalência entre as expressões, os alunos irão resolver o segundo exercício proposto na ficha 1, cuja resolução deve mobilizar o conhecimento construído no exercício 1, para construir retângulos cujas áreas estão sendo pedidas, como, por exemplo o retângulo de área $(x+ 1) \cdot (y +3)$. O objetivo desse exercício é verificar se o aluno é capaz de interpretar a expressão algébrica que calcula a área da figura construída.

Ao final da atividade, o professor faz um repertório das expressões encontradas pelos alunos, solicitando que verifiquem a equivalência entre essas expressões comparando da seguinte forma: a) por meio da aplicação das propriedades aritméticas; b) pela atribuição de valores numéricos.

D) Aplicação das atividades 7 e Complementar

A turma foi dividida em 18 duplas (36 alunos), dos quais apenas 35 alunos concluíram as atividades 7 e a complementar. Nessa descrição do desenvolvimento, apresentamos primeiro o processo da atividade 7 e em seguida o da atividade complementar.

Cada dupla recebeu um *kit* formado por diversos retângulos e quadrados, uma régua (40 cm) e uma folha quadriculada.

No início da atividade, a pesquisadora deu as instruções para a utilização do *kit*. Os alunos deveriam escolher as peças dadas procurando formar novos retângulos e, em seguida, determinar o valor da área da figura formada.

Muitas duplas executaram corretamente esse procedimento, mesmo sem a pesquisadora ter pedido. Isso foi, provavelmente, um reflexo das estratégias utilizadas e dos conhecimentos construídos nas atividades anteriores da seqüência didática, nas quais os alunos sempre calculavam as áreas das figuras.

3.3.1.8 Atividade 8 - Cálculo de área utilizando a decomposição - Jogo dos Cartões

Atividade: Com o par de cartões (contendo figuras diferentes) que vocês receberam, vamos calcular as áreas e compará-las segundo as instruções abaixo

1. Observe a figura colorida do seu cartão e determine sua área, registrando seus cálculos.
2. Mostre seu cartão e o resultado encontrado para o seu parceiro, compare os resultados encontrados para as duas figuras.
3. Unindo-se as duas figuras coloridas contidas nos cartões é possível construir uma nova figura?
4. Preencha a tabela abaixo com os dados dos itens anteriores;

Tabela

Área 1 (cartão 1)	Área 2 (cartão 2)	Área 1 + Área 2	Base x Altura

5. Analisando os dados da tabela preenchida acima, compare as áreas das figuras dos cartões com a área da nova figura formada. Registre a suas observações.
6. Escreva expressões que determinam os valores das áreas das figuras formadas.
7. Compare as expressões que você escreveu com a expressão para o cálculo da área de retângulos ($A = b \times h$). Elas são equivalentes?

A) Material: 20 pares de cartões

Atividade: Em duplas

B) Objetivos:

- 1) Determinar a área do retângulo pela sua composição e decomposição em polígonos;

- 2) Dominar procedimentos de comparação de expressões algébricas obtidas por meio de dois processos diferentes de cálculo de áreas de retângulos: a) cálculo da soma das áreas parciais dos polígonos que compõem o retângulo, b) cálculo da área pelo produto da medida da base pela medida da altura;
- 3) Construir expressões numéricas equivalentes através da comparação das expressões numéricas construídas para as áreas parciais da figura, com a expressão construída para a área total.

C) Desenvolvimento da Atividade:

A classe será dividida em duplas. Cada dupla receberá um par de cartões (contendo figuras coloridas), que contém um retângulo decomposto em partes complementares. (Conforme fig. 10. a e 10.b)

Em seguida, cada aluno da dupla calcula a área da figura colorida de seu cartão registrando seus cálculos em uma folha de papel.

Dando seqüência à atividade o professor intervirá para solicitar aos alunos de cada dupla, que comparem os cartões recebidos observando como as partes coloridas das figuras apresentadas nos cartões foram construídas em cada um deles e lançando a seguinte questão: O que acontece se colocamos sobrepostas as figuras contidas nos dois cartões? Em seguida, o professor coleta as respostas dos alunos e complementa dizendo que essas figuras contidas nos cartões se complementam formando um retângulo.

Na etapa seguinte, eles devem validar os resultados encontrados:

- a) Determinando a soma das áreas parciais calculadas por cada elemento da dupla;
- b) Calculando a área do retângulo formado pela composição das duas partes por meio da fórmula geral ($A = b \cdot h$).

Nessa etapa utilizaremos o preenchimento de uma tabela, que servirá como meio de registro dos dados calculados pelos alunos. Em seguida, os alunos

analisarão a tabela e compararão as diversas maneiras para se calcular a área do retângulo, conforme tabela a seguir:

Tabela

Área 1 (cartão 1)	Área 2 (cartão 2)	Área 1 + Área 2	Base x Altura

Desenho da atividade:



Cartão 1 – Figura 10.a



Cartão 2 – Figura 10.b

Obs: Unindo as partes contidas nas fig.10.a e 10.b, formará sempre um retângulo.

Ao final da atividade os alunos deverão concluir que podem construir diferentes expressões numéricas, compará-las, transformá-las pela aplicação da propriedade distributiva. Dando seqüência à atividade, os alunos resolverão exercícios complementares referentes ao conhecimento construído.

3.3.1.9 Atividade 9 – Utilizando os Pentaminós – Decomposição e Composição de Área

Atividade: Construa os retângulos utilizando as peças do pentaminó e desenhe na folha anexa.

- 1) Três retângulos utilizando duas peças. Quais são as peças que unidas não formam retângulos?
- 2) Quatro retângulos com três peças;
- 3) Dois retângulos com quatro peças;
 - a) Determine as áreas das figuras formadas. Quais foram os valores encontrados?
 - b) Escreva as expressões numéricas que determinam as áreas de cada uma das figuras.
 - c) Compare a expressão geral da área $A = b \times h$, que determina a área do retângulo, com as expressões escritas para encontrar o valor da área dos retângulos formados com as peças.
 - d) Pensando na expressão $n \times k$, que valor numérico é atribuído a k ?
 - e) Se pensarmos em construir novas peças para formarem retângulos utilizando os valores de $k = 6$ e $k = 7$, será que você consegue desenhar as peças para o hexaminó e heptaminó? É possível formar retângulos com elas? Faça três representações utilizando essas novas peças.
 - f) Escreva as novas expressões algébricas para as áreas dos retângulos construídos com as novas peças.

Obs: Fazer os desenhos na folha anexa

A) Material : *Kit* de Peças do Pentaminó**Atividade:** em duplas**B) Objetivo:**

- 1) Construir retângulos utilizando as peças do pentaminó limitando-se o número de peças;
- 2) Conhecendo-se a área de uma peça, determinar a área desses retângulos em função do número de peças.
- 3) Verificar que a área do retângulo se conserva pela decomposição e composição de figuras; comprovado por meio da soma das áreas parciais das figuras, com o resultado da área total dada pelo produto da medida da base pela medida da altura;
- 4) Determinar expressões algébricas equivalentes através da comparação das expressões algébricas formadas para determinar as áreas parciais da figura, com a área total;
- 5) Expressar a área por meio da fórmula $n \cdot k$ onde $k = 5$, generalizando para os outros valores de k .

C) Desenvolvimento da atividade:

A sala será dividida em duplas, e cada dupla receberá um kit com as peças do pentaminó.

Será proposto aos alunos que construam retângulos utilizando-se de duas (peças do pentaminó), três e quatro peças. Paralelamente, será pedido aos alunos responder à seguinte questão: Existe alguma peça que unida com outra não forme um retângulo? Os alunos serão levados a analisar as peças do kit e buscar uma resposta para essa questão.

Após montarem as figuras, cada dupla, utilizando as unidades não padronizadas, procurará determinar as áreas totais dos retângulos, por meio das expressões numéricas escritas para as áreas parciais que formam a figura total. Em seguida será proposto como escrever uma expressão algébrica que represente essa situação, levando o aluno ao cálculo da área total.

ANEXOS

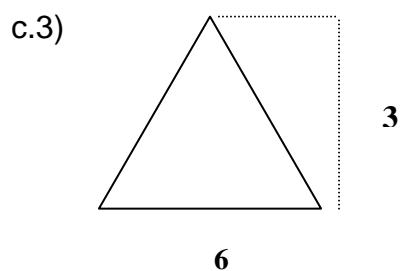
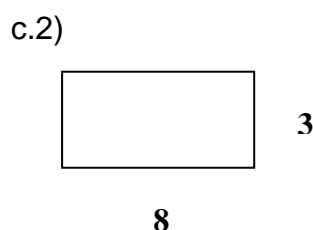
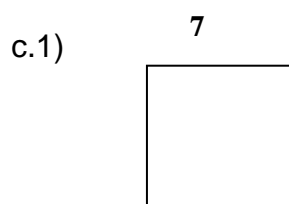
ANEXO 1

Ficha do aluno - Pré-teste do projeto

Atividades iniciais:

1) Leia as questões abaixo e responda com as suas próprias palavras:

- a) O que é uma figura plana?
- b) Quais são as figuras planas que você conhece?
- c) Calcule as áreas das figuras dadas abaixo:



- d) Escreva como podemos determinar a área das figuras. E o que ela representa.
- e) Qual é a diferença entre área e perímetro?

ANEXO 2**Atividade 10 - Decomposição da Cruz – Utilizando a propriedade distributiva, para a construção de expressões algébricas****Ficha do Aluno: Construindo expressões algébricas diferentes**

Com os retângulos que você acaba de receber realize as seguintes tarefas:

1) Construa uma Cruz como a figura abaixo atribuindo os seguintes valores para x e y :

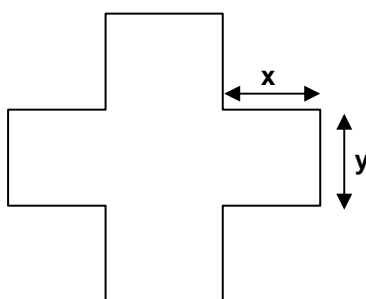


Figura 20

Conforme a cor do retângulo recebido, desenhe a cruz no seu interior:

- a) $x = 4$ cm e $y = 3$ cm para o retângulo azul;
 - b) $x = 4$ cm e $y = 6$ cm para o retângulo vermelho;
 - c) $x = 5$ cm e $y = 2$ cm para o retângulo amarelo;
 - d) $x = 5$ cm e $y = 4$ cm para o retângulo verde;
 - e) $x = 6$ cm e $y = 3$ cm para o retângulo laranja
- 2) Calcule a área total da cruz construída.
 - 3) Escreva as expressões algébricas que determinam a área da cruz.
Quantas você encontrou? Elas são equivalentes?
 - 4) Qual foi o valor encontrado para a área da Cruz?
 - 5) Determine agora a área do retângulo recebido.
 - 6) Escreva as expressões algébricas correspondentes à área do retângulo recebido.
 - 7) Como podemos determinar os perímetros da Cruz e do Retângulo .
 - a) Escreva as expressões algébricas;

- b) Calcule os seus valores numéricos;
- 8) Escolha três valores atribuídos para x e y , dados no item 1 desta atividade e calcule os valores das expressões algébricas dadas a seguir:

Tabela 1

Valor de X	Valor de Y	$2xy + 3xy$	$12x - 4y$	$6.(x + y)$	$(x + 1)^2$
		$(x+2).(x-2)$	$(x+y).(x-y)$	$(x+y)^2$	$2x^2 + 2y^2$

Obs: Responder às questões na folha anexa

Ficha do aluno – Atividade Complementar da atividade 10

- 1) Determine os valores numéricos das expressões algébricas da tabela dada a seguir. Atribuindo para x e y valores numéricos entre 1 a 8.

X	Y	$5.(x + y)$	$4x + 3y$	$6xy + 2y$	$2x^2$	$7.(xy)+ 4y$
		$10x^2$	$(y + 3)^2$	$(x+2).(y+3)$	$3x^2 - 8y^2$	$9 x^2y^2$

- 2) Determine os valores pedidos:

- Se $a + b = 4$, e $a + b + c = 15$, quanto vale c _____
- Se $x = 15$ e $y = 3$, então qual é o valor da expressão $2.(x+y)$

- Se $m = 4$ e $z = 6$, então qual o valor de $7mz$ _____
- Se $x = 8$ e $y = 3$, então qual é o valor de $(3x + 6y)$ _____
- Se $a = 5$, então qual é o valor de $(a+ 2)^2$ _____
- Se $t = 7$, então qual é valor de $(t-4) .(t+ 4)$ _____
- Se $h = 9$, então qual é o valor de $2h^2$ _____
- Se $v = 12$, então qual é o valor de $2v$ _____
- Se $w = 45$, então qual é o valor de $(2 w - 5)$ _____
- Se $m = 23$ e $n = 12$, então quanto vale $2m - n$ _____

A) Material: Retângulos de cinco medidas diferentes (12 x 9), (15 x 12), (12 x 18), (15 x 6), (18 x 9), régua (40 cm).

Unidade de medida: centímetros.

Atividade: Em dupla

B) Objetivos:

- 1) Trabalhar com composição e decomposição de polígonos; decompondo um polígono em partes, usando polígonos conhecidos (quadrados, retângulos);
- 2) Verificar que a área do retângulo se conserva pela decomposição e
- 3) Composição de figuras, mostrando que a soma das áreas parciais das figuras é igual à área total dada pelo produto da medida da base pela medida da altura;
- 4) Construir expressões algébricas equivalentes por meio da utilização das expressões formadas para determinar as áreas parciais da figura com a área total;
- 5) Aplicar a propriedade distributiva como instrumento para a construção das expressões que compõem a área total das figuras pedidas.

C) Desenvolvimento da atividade:

A sala será dividida em duplas. Cada dupla receberá um dos cinco retângulos cortados em folhas coloridas.

Os alunos deverão construir uma cruz de acordo com os valores determinados para x e y , de acordo com a cor do retângulo recebido. Em seguida, determinarão a área da cruz construída, utilizando o processo de decomposição da figura em retângulos e escrevendo as expressões algébricas que determinam a área da cruz em função de x e y . Na etapa seguinte, os alunos deverão observar o retângulo que contém a cruz e determinar a sua área. Durante o desenvolvimento da atividade esperamos, que eles usem o processo de decomposição para decompor a figura em retângulos, ou o processo de soma de

áreas aplicada na área da cruz calculada, como também poderão utilizar-se da propriedade distributiva para solucionar o problema proposto.

Após escreverem as expressões para obter a área total da figura e a área do retângulo, os alunos deverão calcular o valor numérico das áreas determinadas. Após o cálculo, o professor intervirá, chamando os alunos para a discussão da atividade, coletando e discutindo algumas das expressões obtidas pelos alunos, e mostrando a importância da propriedade distributiva.

Quando as duplas terminam as tarefas o professor retoma a discussão, mostrando os resultados obtidos por cada dupla e discutindo a passagem ocorrida entre as expressões algébricas construídas no início da atividade para as expressões numéricas, e os resultados obtidos com as diferentes expressões apresentadas na tabela 1, que são dos tipos: $n(x.y)$ e $n(x+y)$. Depois, o professor pede que eles observem as expressões algébricas encontradas para determinar as áreas e observarem as expressões contidas na tabela 1 para verem se existe alguma que se aproxima das construídas. Em seguida, será proposto aos alunos uma série de exercícios complementares envolvendo expressões algébricas determinadas durante as atividades anteriores.

Ao final da atividade, esperamos que os alunos fossem capazes de observar os diferentes tipos de expressões algébricas que podemos construir, além da importância da aplicação da propriedade distributiva para a construção de diferentes expressões numéricas, que podem ser transformadas em expressões algébricas.

ANEXO 3**Atividade 11 – Produto Notável****Ficha do aluno – Atividade 11- Produto Notável**

Com o quadrado que você acabou de receber, execute os seguintes procedimentos:

- 1) Escolha um valor inteiro entre 4 cm a 8cm, marque este valor em um dos lados do quadrado. Trace um segmento que divida a figura. Aguarde as instruções de seu professor para terminar a dobradura.
- 2) Quantas figuras foram formadas? e quais são elas?
- 3) Calcule as áreas das figuras formadas e transfira os valores encontrados para a tabela 1

Tabela 1

a^2	$2 a \cdot b$	b^2	Área Total

- 4) Calcule a área da figura total utilizando as expressões da tabela 2

Tabela 2

$(a+b)$	$(a + b)^2$

- 5) Observe as tabelas 1 e 2 e responda:
 - a) Como você determinou a área total na tabela1? Explique
 - b) Escreva a expressão que representa a área total na tabela 1.
 - c) Observando a tabela 2, o que representa a expressão $(a+b)$?
 - d) Como você determinou a área da figura maior. Escreva sua expressão.
 - e) O que representa a expressão $(a+b)^2$?
 - f) Compare as expressões obtidas para o cálculo das áreas totais da tabela 1 e tabela 2. Elas são equivalentes? Explique sua resposta.

- g) Complete as tabelas 3, 4 com os resultados obtidos na discussão do professor e de seus colegas.

Tabela 3

Resultados	a^2	$2 ab$	b^2	Área Total
Dupla1				
Dupla 2				
Dupla 3				
Dupla 4				
Dupla 5				
Dupla 6				
Dupla 7				

Tabela 4

Resultados	$(a+b)$	$(a+b)^2$	Área Total
Dupla 1			
Dupla 2			
Dupla 3			
Dupla 4			
Dupla 5			
Dupla 6			
Dupla 7			

Analisando agora o seu resultado com os de seus colegas, responda:

- Podemos considerar a e b como variáveis?
- O que representam a e b para encontrar as áreas das figuras?
- Se a e b forem iguais como podemos escrever as expressões encontradas?
- Utilize os valores de a e b que você marcou no seu quadrado e calcule $a^2 + b^2$. Esta expressão é equivalente à $(a+b)^2$?
- O que representam $a^2 + b^2$?
- Calcule a expressão $(2a + 2b)^2$. Ela é equivalente a $(a + b)^2$?

Obs: Responder às questões na folha anexa.

Atividade Complementar de Produto Notável

1) Como podemos representar as seguintes expressões algébricas através de desenhos abaixo:

- a) $(a + 7) \cdot (a - 7)$, para $a > 7$
- b) $(a + 3) \cdot (a - 3)$, para $a \neq 3$ e $a \neq -3$
- c) $(a - 2) \cdot (a - 2)$, para $a > 2$
- d) $(4 + b) \cdot (4 - b)$, para $b > 4$
- e) $(5 + b) \cdot (5 + b)$, para $b > 5$

A) Material: Um quadrado de lado igual a 21 cm, uma régua de 40 cm.

Atividade: Em duplas

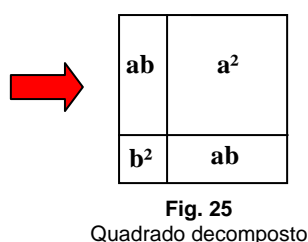
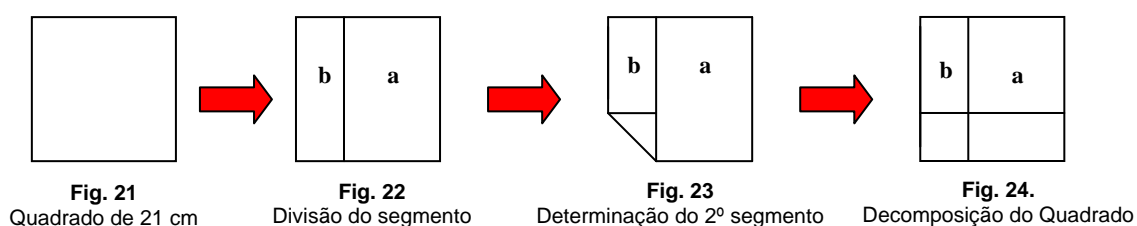
B) Objetivo:

- 1) Decompor um quadrado em partes tais que sua área possa ser dada pelo produto da expressão $(a+b)^2$, conhecida como produto notável;
- 2) Interpretar o produto das expressões $(a+b)$ por $(a+b)$, reconhecendo a expressão resultante $a^2 + 2ab + b^2$, como equivalente à expressão $(a+b)^2$, mostrando a equivalência entre estas expressões por meio das equivalências entre a área do quadrado de lado $(a+b)$ e da soma das áreas parciais das figuras.

C) Desenvolvimento da atividade:

A turma será dividida em duplas. Cada dupla receberá um quadrado de 21 cm de lado, contido em uma folha e uma régua de 40 cm. Ao iniciar a atividade, cada dupla determinará como irá dividir um dos lados do quadrado em dois segmentos (escolhendo os valores de 4 cm a 8cm), de modo a obter um quadrado de lado $(a+b) = 21$. (Ver processo de construção nas figuras abaixo).

O professor dará ordens orais para que os alunos decomponham o quadrado em retângulos de áreas, a^2 , b^2 , ab , ab , e executando estas ordens conjuntamente com os alunos.



Terminada a decomposição do quadrado, os alunos irão calcular as áreas das figuras formadas e completar a tabela 1. Na seqüência da tabela 1 deverão calcular a área total, somando as áreas parciais da figura decomposta. Escrevendo a expressão algébrica $a^2 + 2ab + b^2$. Logo após, terminarem as áreas da tabela1, passarão para a tabela2, procurando calcular o valor das expressões $(a+b)$ e $(a+b)^2$.

Preenchidas as tabelas 1 e 2, os alunos deverão observar os resultados obtidos nas tabelas, comparar as expressões utilizadas e responder as questões propostas, tais como, o significado dos valores de a e b, saber interpretar os significados das expressões algébricas, $(a+b)$ que representa a medida do lado do quadrado maior, e $(a+b)^2$ representando a área total da figura. Depois os alunos verificarão se as expressões contidas nas duas tabelas são equivalentes, comparando os resultados obtidos pela área total (tab1), e na expressão $(a+b)^2$ (tab. 2).

Após a análise das tabelas 1 e 2, o professor intervirá para discutir os resultados obtidos, coletando as respostas das duplas em um quadro. Cada dupla deverá registrar os resultados do quadro nas tabelas 3, 4. O professor discutirá as duas expressões utilizadas nas tabelas 1, 2 para encontrar as áreas pedidas, e fará a verificação com os alunos se as expressões são equivalentes. Na etapa seguinte, o professor colocará as seguintes questões: As letras a e b podem ser consideradas variáveis? O que representam a e b para encontrar as áreas das figuras? Nas situações nas quais os valores de a e b podem ser iguais, o que ocorre com as expressões? Além disso, o professor deve propor situações nas quais se pede aos alunos que verifiquem a equivalência entre as expressões pedidas.

Com a atividade complementar, o professor apresentará aos alunos um exercício, que solicita a representação de cada expressão pedida utilizando a decomposição de figuras e a interpretação dos produtos notáveis, do tipo $(a+b).(a+b)$, $(a+b).(a-b)$, ora variando o valor de a, ora variando o valor de b. Ex.: $(a+3).(a-3)$; $(5+b).(5+b)$.

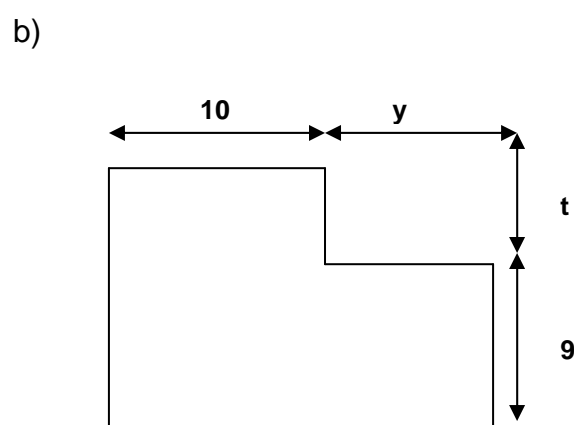
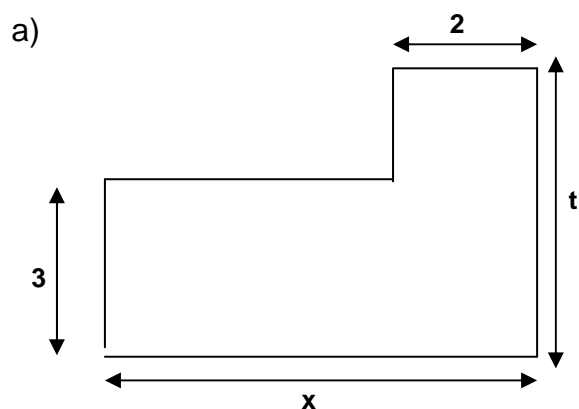
ANEXO 4

Atividade 12 – Construindo expressões algébricas equivalentes para a determinação da área.*²¹

Ficha do aluno- Atividade 12- Construindo Expressões Equivalentes para a determinação da área.

A seguinte situação foi proposta aos alunos no intuito de construir expressões algébricas equivalentes.

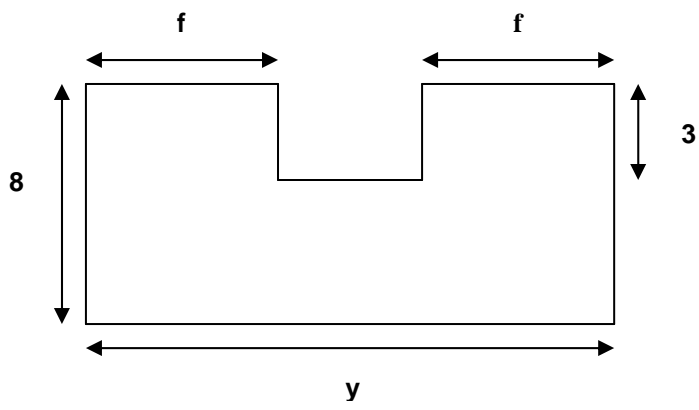
- 1) Para cada uma das figuras abaixo escreva três expressões algébricas correspondentes a sua área.²²



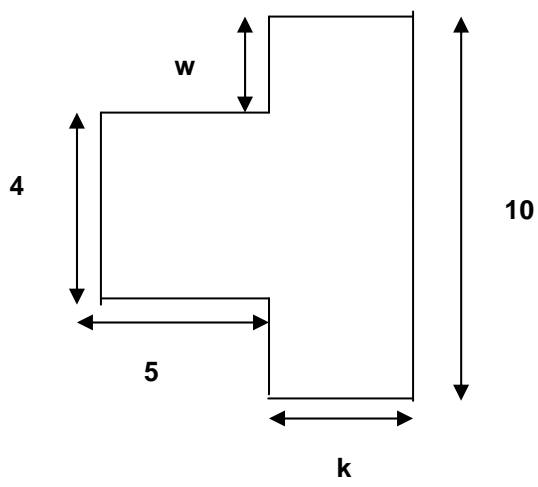
²¹ Atividade baseada em Antonio José Lopes Bigode. Coleção: Matemática: Hoje é feita assim. vol. 3 (7ª série). São Paulo: FTD, 2000.

²² Atividade baseada em Antonio Jose Lopes Bigode. Coleção: Matemática: Hoje é feita assim. vol. 3 (7ª série). 2000, FTD, São Paulo-SP.

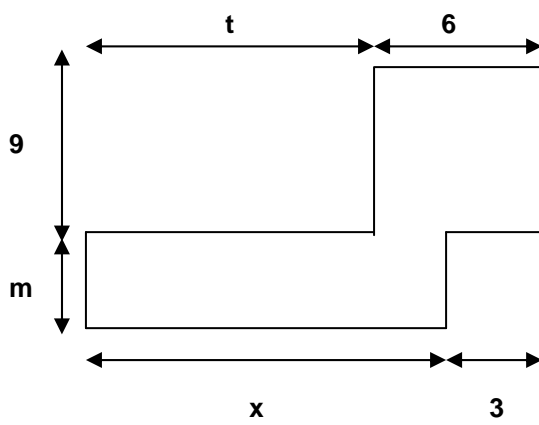
c)



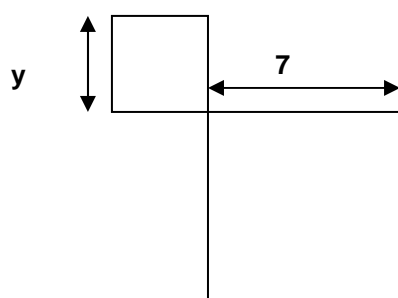
d)



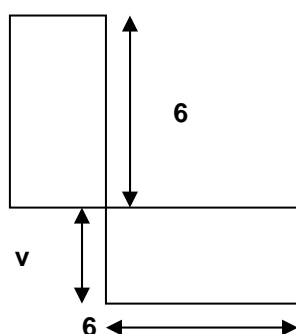
e)



f)



g)



2) Com as expressões algébricas que você escreveu para determinar a área de cada figura verifique se elas são equivalentes.

a) Escolha valores inteiros variando de 1 a 10, e encontre os valores numéricos de cada expressão. Os resultados encontrados foram iguais?

b) Podemos considerar estas expressões equivalentes?

3) Preencha as partes incompletas das figuras dadas: utilizando retângulos e quadrados, e escreva as novas expressões formadas para determinar as áreas das figuras.

a) Compare as expressões que você obteve no item 1, com as expressões que você escreveu para o item 2 na folha anexa e responda: Elas são equivalentes?

4) Calcule agora os valores das áreas das figuras formadas.