OLGA CORBO

SEÇÃO ÁUREA: UM CONTEXTO PARA DESENVOLVER A NOÇÃO DE INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS DE RETA

Mestrado em Educação Matemática

PUC/SP

São Paulo

2005

OLGA CORBO

SEÇÃO ÁUREA: UM CONTEXTO PARA DESENVOLVER A NOÇÃO DE INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS DE RETA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação do Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.

PUC/SP

São Paulo

2005

ATIVIDADE 1 – MATEMÁTICA NA ARTE

A). O PARTENON

A foto abaixo nos mostra o **Partenon** – templo construído no século V a.C., para acolher a estátua da deusa Atena, com quase 15 m de altura. Nessa época, eram estabelecidas as proporções ideais para os elementos que compunham os templos, com o objetivo de que fossem admirados como esculturas.

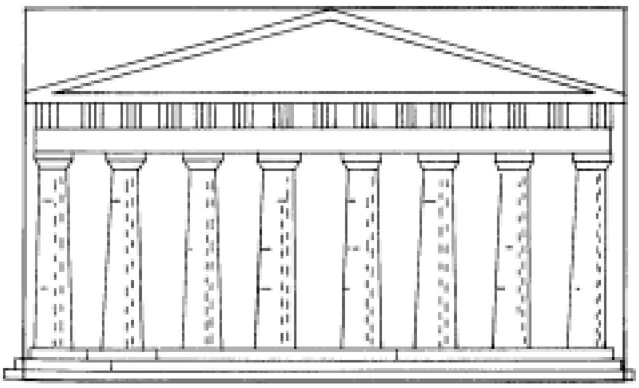
O Partenon é uma das obras mais importantes da arquitetura grega e considera-se que, mesmo estando em ruínas, projeta uma imagem de lógica e precisão.

FIGURA 23 – O PARTENON

Fonte: Strickland, 2003, p. 13.

O contorno de sua fachada, quando ainda estava intacta, poderia ser "encaixado" em um retângulo, como podemos observar na figura abaixo:

FIGURA 24 – O PARTENON



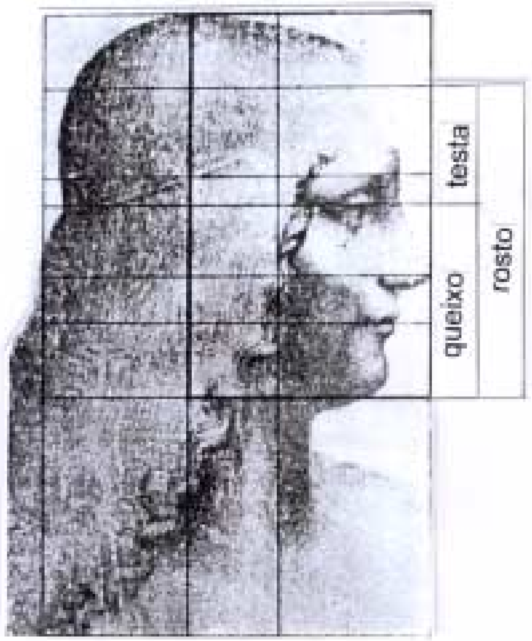
Fonte: Huntley, 1970, p.63

Meça os lados do retângulo que "contorna" o Partenon na figura acima e depois, complete:

$$\frac{comprimento}{l\arg ura} =$$

B). ISABEL D'ESTE

FIGURA 34 - ISABEL D'ESTE, por Leonardo da Vinci



Fonte: Tahan, 1987, p. 235.

FIGURA 35 – ISABEL D'ESTE, por Leonardo da Vinci

Fonte: Bérence, 1974, p. 142.

Este é o retrato de Isabel d'Este, obra famosa de Leonardo da Vinci, datada de 1500.

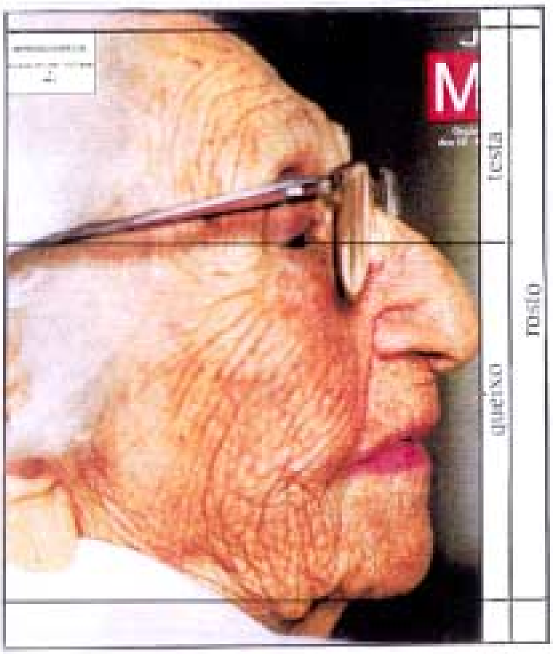
Um esboço da mesma obra, à esquerda, apresenta traços que indicam as proporções observadas pelo artista.

Com o auxílio desse esboço, complete a tabela abaixo:

Q (queixo)	T (testa)	R (rosto)	$\frac{R}{Q}$	$\frac{Q}{T}$

C). MARIA MÜLLER

FIGURA 27 - MARIA MÜLLER



Fonte: Jornal do MEC, out.2001 (capa).

Aqui temos **Maria Müller**, professora, 103 anos, memória do magistério do início do século passado (Jornal do MEC, de outubro de 2001).

Pensamos que se Leonardo da Vinci houvesse pintado esse retrato, talvez pudesse ter utilizado as mesmas proporções observadas no retrato de Isabel d'Este.

Obtenha as medidas do rosto (R), da testa (T) e do queixo (Q), e complete a tabela:

	Rosto (R)	Queixo (Q)	Testa (T)	$\frac{R}{Q}$	$\frac{Q}{T}$
Maria Müller					

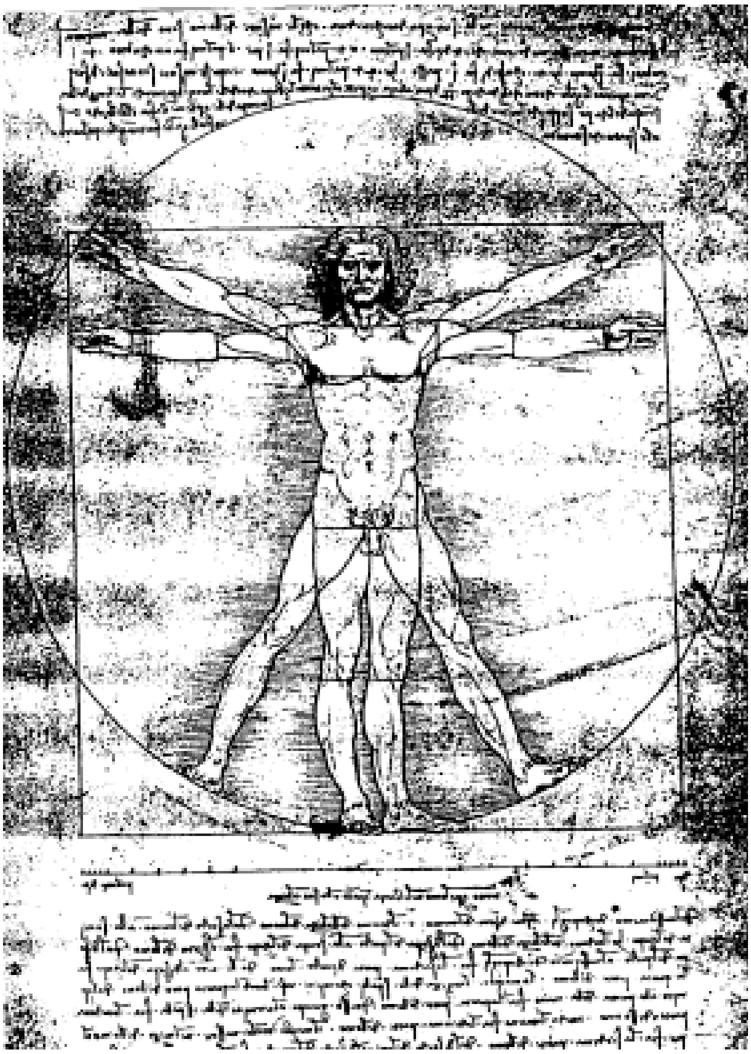
Compare os resultados obtidos para os itens A), B) e C) desta atividade. O que você observou?

D). O IDEAL DE BELEZA – O CORPO INTEIRO

Por meio dos itens anteriores, somos levados a observar a importância atribuída aos padrões de beleza preestabelecidos e a fidelidade mantida por alguns artistas, no sentido de observar determinadas proporções, buscando imprimir em suas obras, características de harmonia e perfeição.

Os gregos estabeleceram as medidas ideais para o corpo humano, que serviram como parâmetros para a produção de esculturas que se tornaram modelos de beleza ideal. O quadro abaixo ilustra a idéia de padrão de beleza idealizado por Vitrúvio:

FIGURA 28 - O HOMEM SEGUNDO AS PROPORÇÕES DE VITRÚVIO



Fonte: Bérence, 1974, p. 227.

Determine o quociente entre o lado do quadrado e o raio da circunferência.

Que relação existe entre este item da atividade, e os itens anteriores?

E). ARTE *in* PERFEIÇÃO MATEMÁTICA

Há séculos, vem sendo observada essa busca de harmonia e perfeição, talvez atendendo a uma necessidade característica do homem, no sentido de completar, com sua contribuição, a arte já começada, exposta no universo.

Não há dúvida a respeito do bem estar que a harmonia proporciona, mas, a ausência da harmonia e da obediência a padrões estabelecidos não implica ausência da arte.

Dora Maar – musa – é a prova do que acabamos de dizer.

FIGURA 38 - A MULHER QUE CHORA, por Picasso.

Fonte: *Veja*, jul. 1999, p. 150.

FIGURA 39 - CABEÇA DE MULHER, por Picasso.

Fonte: *Veja*, jul. 1999, p. 149.

Nas gravuras acima: *A Mulher que Chora* e *Cabeça de Mulher*, dedicadas a ela, Pablo Picasso (1881-1973) transportou para a tela, em “formas torturadas”, como ele mesmo expressou, uma personalidade triste, depressiva, representando Dora, de acordo com sua interpretação.

Não há necessidade de simetria, padrões ou proporções perfeitas, para que essa obra (quase violenta!) seja apreciada e, seu autor, lembrado como um gênio...

Assim sendo, nosso propósito para esta atividade, é o de identificar na arte (ou em parte dela) elementos que possam constituir ponto de partida para o desenvolvimento de um conteúdo matemático.

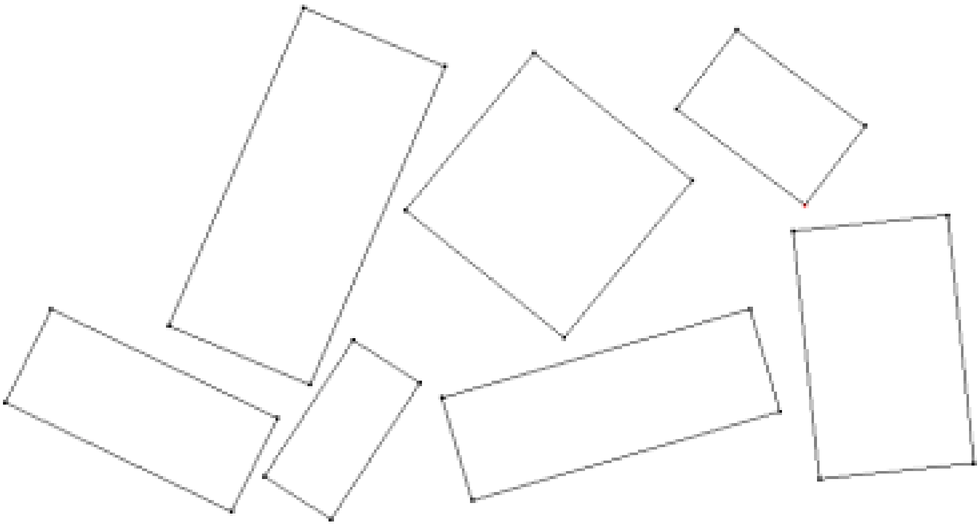
Levando em consideração os destaques feitos nesta atividade, a respeito da arquitetura (o Partenon), da obra de Leonardo da Vinci (o retrato de Isabel d’Este), de Vitrúvio – (os padrões ideais de beleza) e de Pablo Picasso (Dora Maar), conclui-se que, embora o conceito de beleza sofra variações com o passar do tempo, a matemática pode oferecer recursos que nos auxiliem a verificar se uma obra apresenta as proporções consideradas perfeitas, de acordo com os padrões gregos de beleza.

Que conteúdos da matemática você pode usar para realizar essa verificação?

ATIVIDADE 2

Considere os retângulos abaixo.

Em qual deles, tendo sido ampliado proporcionalmente, poderia ser “encaixada” a fachada do Partenon? (Você pode assinalar um ou mais) Justifique sua resposta.



ATIVIDADE 3

Na seqüência abaixo, a figura II foi obtida a partir da divisão do retângulo da figura anterior, em um quadrado e um retângulo menor.

Observe a construção das figuras III e IV e em seguida, complete as figuras V e VI.

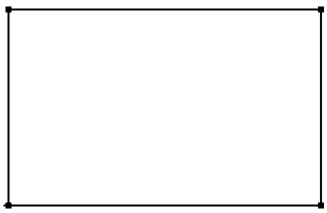


Figura I

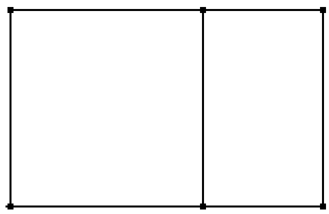


Figura II

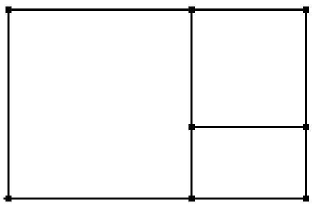


Figura III

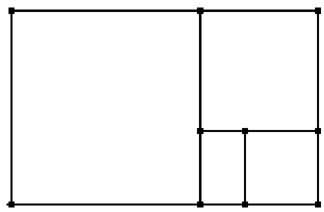


Figura IV

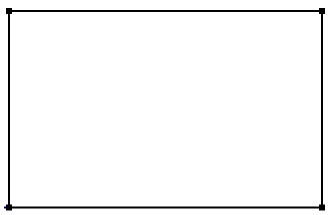


Figura V

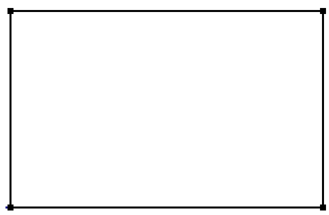


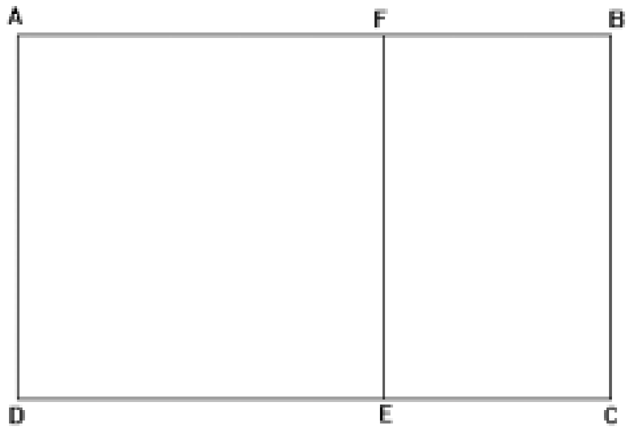
Figura VI

Justifique sua construção, por escrito, apontando as características das figuras anteriores, que serviram como base para o seu procedimento.

Desejando ampliar a seqüência, quantas figuras ainda poderíamos obter, usando o mesmo processo?

ATIVIDADE 4

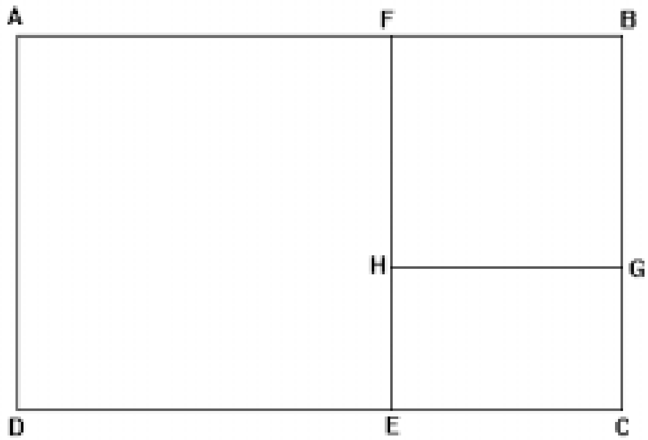
A). Na figura abaixo, do retângulo ABCD, “retiramos” o quadrado ADEF, obtendo o retângulo BCEF.



Complete a seguinte tabela:

	comprimento	largura	$\frac{comprimento}{largura}$
Retângulo ABCD			
Retângulo BCEF			

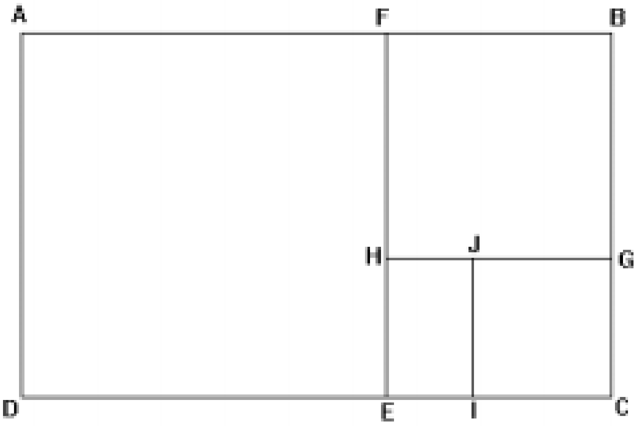
B). Considerando ainda a mesma figura, do retângulo BCEF, “retiramos” o quadrado BGHF, obtendo um outro retângulo menor, que é CEHG.



Complete a tabela:

	comprimento	*largura*	$\frac{comprimento}{l\,arg\,ura}$
Retângulo ABCD			
Retângulo BCEF			
Retângulo CEHG			

C). Se ainda, na mesma figura, “retirarmos” do retângulo CEHG, um quadrado CIJG, obteremos o retângulo menor EHJI.



Complete a tabela:

	comprimento	largura	$\frac{comprimento}{l\,arg\,ura}$
Retângulo ABCD			
Retângulo BCEF			
Retângulo CEHG			
Retângulo EHJI			

1). Considerando as construções desta atividade, responda:

a). Os retângulos ABCD, BCEF, CEHG e EHJI são semelhantes? Justifique sua resposta.

b). Desejando continuar a subdivisão, quantos retângulos mais, você considera possíveis?

c). Que relação existe entre o retângulo inicial ABCD e todos os possíveis retângulos, dessa subdivisão? Explique.

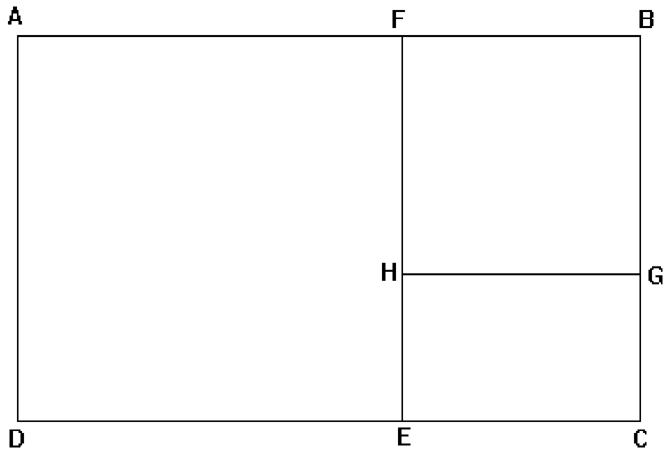
2). O retângulo imaginário, no qual seria possível “encaixar” a fachada do Partenon é denominado **retângulo áureo,** em virtude das características especiais, que lhe dão um aspecto de mais precisão, lógica e harmonia.

a). Sabendo que o retângulo ABCD desta atividade é semelhante àquele retângulo imaginário, o que você conclui a respeito de cada um dos retângulos obtidos pelo processo de subdivisão, realizado nesta atividade?

b). Considerando as atividades já desenvolvidas, quais são as características de um retângulo áureo?

ATIVIDADE 5

É dado o retângulo áureo ABCD.



Durante o desenvolvimento das atividades anteriores, trabalhamos com valores aproximados.

Considere todas as características do retângulo áureo e determine a razão $\frac{AB}{BC}$, sem aproximação.

ATIVIDADE 6 – A CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO

Primeira Parte

1. Construa um retângulo áureo, sem trabalhar com medidas.

2. Faça um registro escrito de sua construção, justificando cada passo.

Segunda Parte

Use a régua graduada e a calculadora, para verificar se as medidas do retângulo construído também garantem que seja um retângulo áureo.

ATIVIDADE 7

Primeira parte: Construa um retângulo ABCD, de acordo com as orientações abaixo:

1. Traçamos a reta r, suporte de $\overline{AB}$
2. Construímos um arco com centro em *B* e raio *AB*, interceptando a reta r, no ponto *E.*
3. Pelo ponto *B*, construímos uma reta s, perpendicular a r, interceptando o arco do item anterior, no ponto *F*.
4. Seja *M*, o ponto médio de $\overline{BE}$.
5. Construímos um segundo arco, com centro em *M*, e raio *MF*, interceptando $\overline{AB}$, no ponto *X*.
6. Tomamos um ponto *C* sobre a reta s, tal que *XB=BC.*
7. *BC* é o lado menor do retângulo *ABCD* desejado.
8. Por *C,* traçamos uma paralela a *r.*
9. Por *A*, traçamos uma paralela a *s*.
10. Chamamos de *D*, o ponto de intersecção das retas traçadas nos itens 8 e 9.

Segunda parte: Prove que esse retângulo é áureo.

ATIVIDADE 8 – M.D.C. DE NÚMEROS E SEGMENTOS

A). É conhecido o algoritmo de Euclides, que nos permite extrair o máximo divisor comum de números naturais, por meio de divisões sucessivas, como observamos a seguir:

m.d.c. (327, 52)

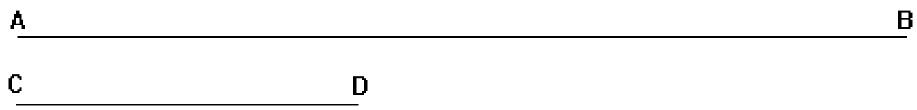
	6	3			
327	**52**	15	7		
15	7				

O cálculo estará completo, quando obtivermos resto zero e o último divisor será o máximo divisor comum dos números considerados inicialmente.

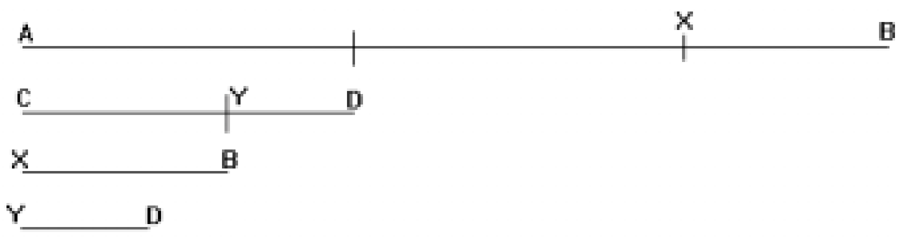
Procedimento análogo pode ser utilizado para a determinação da “maior medida comum de dois segmentos”.

Abaixo mostramos como você poderia iniciar esse processo:

São dados os segmentos de reta AB e CD. Desejamos determinar a maior medida comum desses segmentos:



SOLUÇÃO:



....

	2	1				
AB	CD	XB	YD			
XB	YD					

B). Sejam os segmentos XY e ZW abaixo. Determine um segmento de reta que, de acordo com o algoritmo de Euclides, seja considerado a “maior medida comum” de $\overline{XY}$ e $\overline{ZW}$.

....

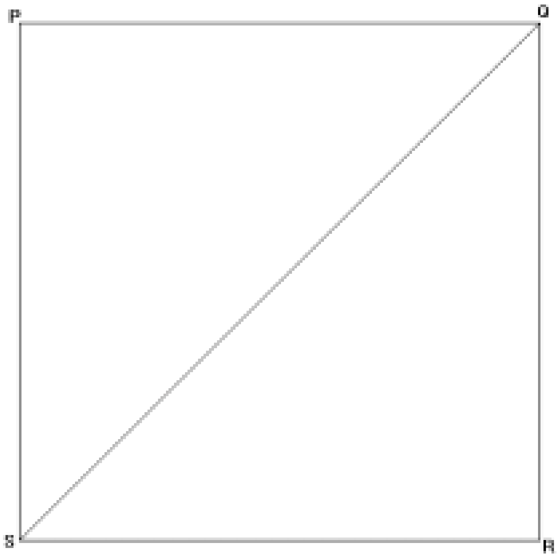
XY	ZW						

C). Determine a “maior medida comum” dos segmentos abaixo:

....

MN	RS						

D). Qual é a “maior medida comum” de $\overline{SQ}$ e $\overline{QR}$, respectivamente diagonal e lado do quadrado PQRS, da figura abaixo?



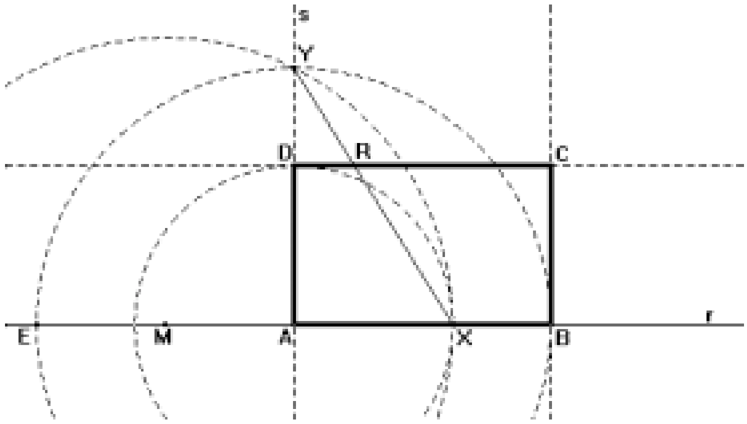
a). O que você conclui a respeito dos divisores comuns do lado e da diagonal do quadrado PQRS?

b). E sobre os divisores comuns (ou submúltiplos comuns) do lado e da diagonal de um quadrado qualquer?

c). Considerando que dois **segmentos** são **comensuráveis**, se possuem um submúltiplo comum, o que você conclui a respeito dos pares de segmentos: AB e CD; XY e ZW; MN e RS; SQ e QR? O que você conclui a respeito do lado e da diagonal de um quadrado qualquer?

ATIVIDADE 9

Levando em conta a construção do retângulo áureo, vista na ATIVIDADE 7, conforme a figura abaixo:



Suponha que *PQ* seja submúltiplo comum da base e da altura do triângulo *AXY* e:

A). Procure argumentos que justifiquem que *PQ* é submúltiplo comum da base e da altura do triângulo *DRY.*

B). Que argumentos você utilizaria para justificar que *PQ* é submúltiplo comum da altura e da base de qualquer triângulo semelhante ao triângulo *AXY*.