

**YUMI KODAMA**

**O ESTUDO DA PERSPECTIVA CAVALEIRA:  
UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO MÉDIO**

**MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**PUC/SP  
São Paulo  
2006**

**YUMI KODAMA**

**O ESTUDO DA PERSPECTIVA CAVALEIRA:  
UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO MÉDIO**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da  
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como  
exigência para obtenção parcial do título de **MESTRE**  
em **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do  
**Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni***

**PUC/SP**  
**São Paulo**  
**2006**

## ANEXO 1

### Seqüência experimental I - Face paralela ao plano de projeção Cubo

**Colocar o cubo de forma que uma das faces seja paralela a um plano de projeção (parede, chão).**

#### A.

Considere dois pontos A e B no cubo (use bolinhas de massa de modelar coloridas para determinar os pontos, uma cor para cada ponto) sobre uma face paralela ao plano de projeção.

Ache o ponto médio M do segmento AB (use régua e caneta para traçar o segmento)

Ache o ponto médio M' do segmento A'B' onde A' e B' são as sombras correspondentes dos pontos A e B.

O que você conclui sobre o ponto médio M no sólido e sua sombra M'?

Justifique.

.....  
 .....  
 .....

#### B.

Construa um segmento AB (use régua, caneta e as bolinhas de massa de modelar para os pontos, uma cor para cada ponto) sobre a face paralela ao plano de projeção.

Considere um ponto C pertencente ao segmento AB e que não seja ponto médio (use massa de modelar para determinar o ponto C também).

Relacione os segmentos AC, CB, A'C' e C'B' onde A', B', C' são as sombras respectivamente dos pontos A, B e C. O que você conclui em relação as medidas destes segmentos? Que relações você pode obter entre estes segmentos? Justifique.

.....  
 .....  
 .....

#### C.

Construa um triângulo ABC (marcar os vértices com massa de modelar, cada ponto com uma cor diferente, e usar régua para marcar os lados do triângulo) contido na face paralela ao plano de projeção.

Encontre o baricentro do triângulo ABC.

Encontre o baricentro do triângulo A'B'C' sombra correspondente ao triângulo ABC.

Compare os baricentros.

Compare o baricentro do triângulo ABC e o baricentro de sua sombra A'B'C'. O que você conclui?

Justifique.....

.....  
 .....

**D.**

Coloque dois palitos de churrasco paralelos entre si e mantendo o paralelismo entre eles, coloque-os em posições diferentes sobre a face paralela ao plano de projeção. Para cada posição verifique se os segmentos correspondentes das sombras dos palitos são paralelos.

Para cada posição verifique se os segmentos correspondentes das sombras dos palitos são paralelos. De que forma você fez esta verificação?

Justifique.

.....  
.....  
.....  
.....

**E.**

Cruze dois palitos de churrasco e mantendo o cruzamento entre eles, colocá-los em posições diferentes sobre a face paralela ao plano de projeção. Para cada posição:

Observar e comparar os palitos e suas sombras correspondentes.

Compare o ângulo formado entre os dois palitos e o ângulo formado pela sombra dos dois palitos. O que você conclui?

Justifique.

.....  
.....  
.....

## ANEXO 2

### Seqüência experimental II - Face não paralela ao plano de projeção Cubo

Colocar o cubo de forma que uma das faces NÃO seja paralela a um plano de projeção (parede, chão)

#### A.

Considere dois pontos A e B no cubo (use bolinhas de massa de modelar coloridas para determinar os pontos, uma cor para cada ponto) sobre uma face não paralela ao plano de projeção.

Ache o ponto médio M do segmento AB (use régua e caneta para traçar o segmento)

Ache o ponto médio M' do segmento A'B' onde A' e B' são as sombras correspondentes dos pontos A e B.

Compare as medidas. O que você conclui sobre o ponto médio M no sólido e sua sombra M'? Justifique.

.....

.....

.....

#### B.

Construa um segmento AB (use régua, caneta e as bolinhas de massa de modelar para os pontos, uma cor para cada ponto) sobre uma face não paralela ao plano de projeção.

Considere um ponto C pertencente ao segmento AB e que não seja ponto médio (use massa de modelar para determinar o ponto C também).

Compare as medidas dos segmentos AC, CB, A'C' e C'B' onde A', B', C' são as sombras respectivamente dos pontos A, B e C. O que você conclui em relação as medidas destes segmentos? Justifique

.....

.....

.....

#### C.

Considere um triângulo ABC (marcar os vértices com massa de modelar, cada ponto com uma cor diferente, e usar régua para marcar os lados do triângulo) contido em uma face não paralela ao plano de projeção.

Encontre o baricentro do triângulo ABC.

Encontre o baricentro da sombra do triângulo ABC.

Compare o baricentro do triângulo ABC e baricentro de sua sombra. O que você conclui? Justifique.

.....

.....

.....

**D.**

Coloque dois palitos de churrasco paralelos entre si e mantendo o paralelismo entre eles, coloque-os em posições diferentes sobre uma face não paralela ao plano de projeção. Para cada posição observe e compare os segmentos correspondentes às sombras dos palitos.

Para cada posição verifique se os segmentos correspondentes das sombras dos palitos são paralelos. De que forma você fez esta verificação? Justifique.

.....  
.....  
.....

**E.**

Cruze dois palitos de churrasco e mantendo o cruzamento entre os dois palitos, colocá-los em posições diferentes sobre uma face não paralela ao plano de projeção. Para cada posição:

Observe e compare os palitos com suas respectivas sombras.

Compare o ângulo formado entre os dois palitos e o ângulo formado pela sombra dos dois palitos. O que você conclui? Justifique.

.....  
.....  
.....



## ANEXO 4

### Tarefa

Serão distribuídas aos grupos de alunos peças de acrílico de forma quadrada outra na forma de um triângulo equilátero e uma na forma de hexágono regular.

Um dos lados de cada uma das peças deverá estar paralelo a um plano de projeção (parede), mas a peça deve estar perpendicular ao plano.

Observar e comparar as sombras projetadas na parede com a peça de acrílico.

### Questionário

Que conclusões você obteve ao observar as peças em acrílico e as sombras correspondentes?.....  
.....  
.....  
.....

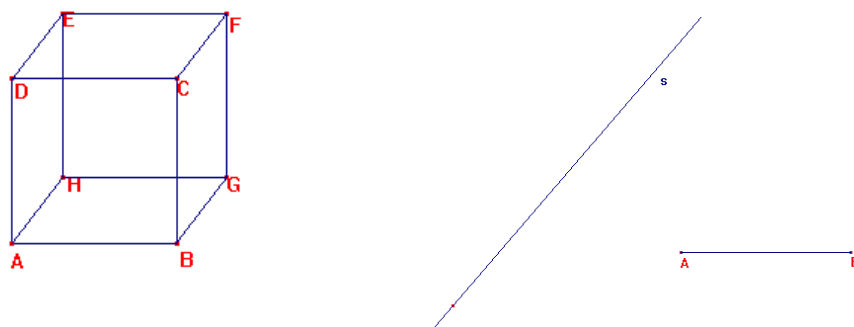
## ANEXO 5

### Seqüência Experimental III – Cabri Géomètre

#### Arquivo CUBO

Construção de um Cubo

Observe o cubo ABCDEFGH.



Construa o cubo  $A'B'C'D'E'F'G'H'$  tendo uma reta 's' qualquer e um segmento AB de 5cm de comprimento e um coeficiente de redução 0,5.  
Salve com o nome de arquivo CUBO.

#### Abra o arquivo CUBO

##### A.

Considere dois pontos A e B sobre a face frontal paralela ao plano de projeção.  
Trace o segmento AB.  
Ache o ponto médio M do segmento AB.  
Determine o segmento  $A'B'$  onde  $A'$  e  $B'$  na outra face paralela ao plano de projeção onde  $A'$  e  $B'$  são as projeções dos pontos A e B.  
Determine o ponto médio  $M'$  do segmento  $A'B'$ .  
Salve seu trabalho como CUBO1

##### B.

Mantendo o seu trabalho aberto, apague o ponto M e crie o ponto C no segmento AB e sua projeção  $C'$  no segmento  $A'B'$ .  
Movimente o ponto C sobre o segmento AB.  
Observe e compare as diversas posições de C e os segmentos AC e CB e  $A'C'$  e  $C'B'$  suas respectivas projeções.  
Salve o trabalho.  
1. Descreva como você determinou as projeções  $A'B'$  do segmento AB.

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 2. Como você determinou o ponto  $M'$  projeção do ponto  $M$ ?

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 3. Compare as medidas dos segmentos. O que você conclui?

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 4. Quais as razões entre os segmentos  $AC$ ,  $CB$  e  $A'C'$  e  $C'B'$ ?

### C. Abra o arquivo CUBO

Construir um triângulo  $ABC$  na face frontal paralela ao plano de projeção.

Determinar o triângulo  $A'B'C'$ . Observar e medir os lados  $A'B'$ ,  $B'C'$  e  $A'C'$  onde  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são as respectivas projeções de  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Encontre o baricentro  $H$  do triângulo  $ABC$ .

Encontre o baricentro  $H'$  da projeção  $A'B'C'$  do triângulo  $ABC$  na outra face paralela ao plano de projeção.

Movimente o ponto  $A$  observando os triângulos e o baricentro.

Salve o trabalho.

1. Como você determinou o triângulo  $A'B'C'$ ? E a projeção  $H'$ ?

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 2. Que conclusão você tirou em relação a medida dos lados entre os dois triângulos?

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 3. Compare os baricentros. Justifique.

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 4. Movimente o ponto  $A$  observando os triângulos e o baricentro, o que conclui?

**D. Abra o arquivo CUBO**

Construa dois segmentos AB e MN paralelos sobre a face frontal paralela ao plano de projeção. Determine os segmentos A'B' e M'N' correspondentes as suas projeções sobre a outra face paralela ao plano de projeção.

Salve o trabalho.

Como você determinou essas projeções? Mantém o paralelismo? Justifique.

.....

.....

.....

**E. Abra o arquivo CUBO**

Construa dois segmentos concorrentes entre si AB e RS sobre a face frontal paralela ao plano de projeção.

Construa os segmentos A'B' e R'S' respectivas projeções de AB e RS sobre a outra face paralela ao plano de projeção.

Salve o trabalho.

1. Como você determinou as projeções?

.....

.....

.....

2. O cruzamento é mantido? Justifique.

.....

.....

.....

3. Compare o ângulo formado entre os segmentos AB e RS e A'B' e R'S'. Justifique.

.....

.....

.....

## ANEXO 6

### Seqüência experimental IV – Cabri-Géomètre Arquivo Plano $\alpha$

#### Abra o arquivo Plano $\alpha$

##### A.

Considere dois pontos A e B sobre o plano  $\alpha$ .

Trace o segmento AB.

Ache o ponto médio M do segmento AB.

Determine o segmento A'B' onde A' e B' no plano  $\beta$  paralelo ao plano de projeção onde A' e B' são as projeções dos pontos A e B.

Determine o ponto médio M' do segmento A'B'.

Salve o trabalho.

##### B.

Mantendo o seu trabalho aberto, apague o ponto M e crie o ponto C no segmento AB e sua projeção C' no segmento A'B'.

Movimente o ponto C sobre o segmento AB.

Observe e compare as diversas posições de C e os segmentos AC e CB e A'C' e C'B' suas respectivas projeções.

Salve o trabalho.

1. Descreva como você determinou as projeções A'B' do segmento AB.

.....  
 .....

2. Como você determinou o ponto M' projeção do ponto M?

.....  
 .....

3. Compare as medidas dos segmentos? O que você conclui?

.....  
 .....

4. Quais as razões entre os segmentos AC, CB e A'C' e C'B'.

.....  
 .....

#### C. Abra o arquivo Plano $\alpha$

Construir um triângulo ABC no plano  $\alpha$ .

Determinar o triângulo A'B'C' no plano  $\beta$  paralelo ao plano de projeção. Observar e medir os lados A'B', B'C' e A'C' onde A', B' e são as respectivas projeções de A, B e C.

Encontre o baricentro H do triângulo ABC.

Encontre o baricentro H' da projeção A'B'C' do triângulo ABC no plano  $\beta$ .

Movimente o ponto A observando os triângulos e o baricentro.  
Salve o trabalho.

1. Como você determinou o triângulo  $A'B'C'$ ? E a projeção  $H'$ ?

.....  
 .....

2. Que conclusão você tirou em relação a medida dos lados entre os dois triângulos?

.....  
 .....

3. Compare os baricentros. Conseguiram justificar?

.....  
 .....

4. Movimentando o ponto A observando os triângulos e o baricentro, o que conclui?

.....  
 .....

#### **D. Abra o arquivo Plano $\alpha$**

Construa dois segmentos AB e MN paralelos sobre o plano  $\alpha$ . Determine os segmentos  $A'B'$  e  $M'N'$  correspondentes as suas projeções sobre o plano  $\beta$  paralelo ao plano de projeção.

Salve o trabalho.

Como você determinou essas projeções? Mantém o paralelismo? Justificaram?

.....  
 .....

#### **E. Abra o arquivo Plano $\alpha$**

Construa dois segmentos concorrentes entre si AB e RS sobre o plano  $\alpha$ .

Construa os segmentos  $A'B'$  e  $R'S'$  respectivas projeções de AB e RS sobre o plano  $\beta$  paralelo ao plano de projeção.

Salve o trabalho..

.....  
 .....

## ANEXO 7

### Bloco 3 - Construções no Cabri-Géomètre

A. Construa um retângulo ABCD perpendicular ao plano de projeção (parede ou chão) e sendo o lado AB paralelo ao plano de projeção.

Construa sua projeção no plano paralelo usando um coeficiente de redução 0,5.

Construa um losango MNOP a partir dos pontos médios do retângulo e a seguir a sua projeção  $M'N'O'P'$  sobre a projeção  $A'B'C'D'$  do retângulo.

Explique e justifique a sua construção

.....

.....

.....

B. Construa um triângulo equilátero ABC perpendicular ao plano de projeção (parede ou chão) e sendo o lado AB paralelo ao plano de projeção.

Construa sua projeção no plano paralelo usando um coeficiente de redução 0,5.

Construa o baricentro do triângulo  $A'B'C'$  projeção de ABC.

A seguir construa uma pirâmide regular tendo por base esse triângulo.

.....

.....

.....

C. Construa uma pirâmide de base quadrada usando propriedades da perspectiva cavaleira. A base deverá ser perpendicular ao plano de projeção e paralelo ao plano horizontal.

.....

.....

.....

D. Construa um prisma de base triangular usando propriedades da perspectiva cavaleira. A base deverá ser perpendicular ao plano de projeção e paralelo ao plano horizontal.

.....

.....

.....

E. Construa um prisma de base quadrada usando propriedades da perspectiva cavaleira. A base deverá ser perpendicular ao plano de projeção e paralelo ao plano horizontal.

.....

.....

.....

## ANEXO 8

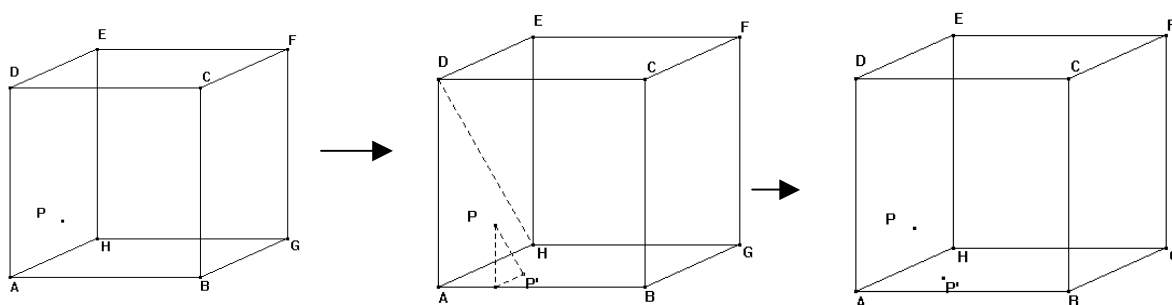
### Problema 1

Rebatimento de um ponto sobre uma face de um cubo

O rebatimento é uma técnica muito usada para rebater um ponto que está numa face frontal paralela ao plano de projeção (face em verdadeira grandeza) para uma face qualquer do cubo ou vice-versa.

Imagine que você tenha uma caixa com a forma de um cubo e esta caixa possui uma face como tampa. Esta tampa tem um ponto. Este ponto deve coincidir com o ponto de uma face quando a tampa é totalmente dobrada para fora da caixa sobre essa face.

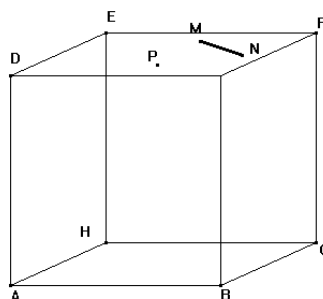
Na figura abaixo, a face frontal ABCD seria a tampa e deverá fechar sobre a face ABGH sendo o ponto P pertencente a face ABCD, o ponto P' deve estar na mesma posição na face ABGH em perspectiva cavaleira.



Com base no texto acima resolva o problema abaixo:

Dado o cubo ABCDEFGH, na face superior está o segmento MN e o ponto P.

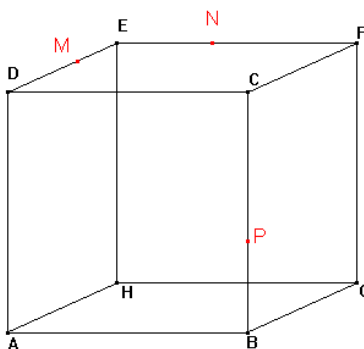
Construa a reta perpendicular ao segmento MN passando pelo ponto P.



## ANEXO 9

### Problema 2

Crie um cubo ABCDEFGH, sendo a face ABCD frontal paralela ao plano de projeção.



- 1) Trace as retas MN e DC.
- 2) Visualmente, as retas que estão no espaço MN e DC se intersectam num ponto que denominaremos de X. Mas nós sabemos que duas retas no espaço podem ser paralelas, concorrentes e reversas. Qual a posição relativa dessas duas retas? Justifique a sua resposta.
- 3) Visualmente, as retas que estão no espaço XP e AD se intersectam num ponto que denominaremos de ponto Q. Qual a posição relativa dessas duas retas? Justifique a sua resposta.
- 4) Considere um plano  $\alpha$  que passa pelos pontos M, N e P.
- 5) O ponto X pertence a esse plano? Justifique a sua resposta. E o ponto Q pertence a esse plano? Justifique sua resposta.
- 6) Repetir o mesmo raciocínio para as retas MN e CF e encontre cinco pontos pertencentes ao plano  $\alpha$ .
- 7) Você acabou de achar a intersecção de um cubo por um plano que passa pelos pontos M, N e P. Construa esse polígono.

## ANEXO 10

### Questionário dos Observadores para a seqüência experimental I Face paralela ao plano de projeção

1. Enquanto observador da seqüência o que achou desta seqüência? Percebeu se os alunos fizeram alguma conjectura em relação à atividade proposta?

.....  
.....  
.....

2. Observando os alunos na atividade do Ponto Médio, que comportamentos, que atitudes e estratégias foram utilizadas por eles? Conseguiram resolver a atividade? Quais foram os erros ou dificuldades percebidas? Fizeram conjecturas?

.....  
.....  
.....

3. Compararam as distâncias? Como fizeram?

.....  
.....  
.....

4. Em relação ao Baricentro, percebeu alguma dificuldade nos alunos? Se sim quais foram estas dificuldades? Que estratégias foram observadas para resolverem a atividade? Fizeram conjecturas?

.....  
.....  
.....

5. E em relação às medidas dos lados do triângulo ABC?

.....  
.....  
.....

6. Em relação ao paralelismo, nos segmentos secantes e o ângulo formado entre as varetas e suas respectivas sombras, o que você percebeu? Houve alguma dificuldade para resolver estas atividades? Quais dificuldades? Quais estratégias você pode observar em relação ao paralelismo, a concorrência e ao perpendicularismo entre as varetas e suas projeções? Fizeram conjecturas em relação aos resultados obtidos?

.....  
.....  
.....

7. Os alunos conseguiram chegaram a alguma conclusão em relação a atividades desenvolvidas em todos os sólidos nesta seqüência? Qual foi a conclusão que eles chegaram e como chegaram a esta conclusão?

.....  
.....  
.....

## ANEXO 11

### Questionário dos Observadores para a seqüência experimental II Face não paralela ao plano de projeção

1. Enquanto observador da seqüência o que achou desta seqüência? Percebeu se os alunos fizeram alguma conjectura em relação à atividade proposta?

.....  
.....

2. Observando os alunos na atividade do Ponto Médio, que comportamentos, que atitudes e estratégias foram utilizadas por eles? Conseguiram resolver a atividade? Quais foram os erros ou dificuldades percebidas? Fizeram conjecturas?

.....  
.....

3. Compararam as distâncias? Como fizeram?

.....  
.....

4. Em relação ao Baricentro, percebeu alguma dificuldade nos alunos? Se sim quais foram estas dificuldades? Que estratégias foram observadas para resolverem a atividade? Fizeram conjecturas?

.....  
.....

5. E em relação às medidas dos lados do triângulo ABC?

.....  
.....

6. Em relação ao paralelismo, nos segmentos secantes e o ângulo formado entre as varetas e suas respectivas sombras, o que você percebeu? Houve alguma dificuldade para resolver estas atividades? Quais dificuldades? Quais estratégias você pode observar em relação ao paralelismo, a concorrência e ao perpendicularismo entre as varetas e suas projeções? Fizeram conjecturas em relação aos resultados obtidos?

.....  
.....

7. Os alunos conseguiram chegaram a alguma conclusão em relação a atividades desenvolvidas em todos os sólidos nesta seqüência? Qual foi a conclusão que eles chegaram e como chegaram a esta conclusão?

.....  
.....