

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E
MATEMÁTICA

ODENISE MARIA BEZERRA

INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA NAS AULAS DE MATEMÁTICA:
Avaliação de duas experiências

NATAL - RN
2008

ODENISE MARIA BEZERRA

INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA NAS AULAS DE MATEMÁTICA:

Avaliação de duas experiências

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Orientador:

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes

NATAL - RN

2008

Apêndice D

ATIVIDADE 1: INVESTIGANDO E APRENDENDO

Objetivos: Conhecer as características presentes em uma equação do 2º grau para identificá-la sempre que necessário.

Conhecimentos prévios: Potenciação e equação do 1º grau.

Definição: “Toda sentença matemática expressa por uma igualdade, na qual haja uma ou mais letras que representem números desconhecidos é denominada equação. Cada letra que representa um número desconhecido é chamada incógnita”.

1. Será que $x^2 + 8x + 15 = 0$ satisfaz essa definição? Por quê?
2. Agora vamos comparar uma equação do 1º Grau, que já conhecemos com $x^2 + 8x + 15 = 0$:
 $x + 10 = 0$ e $x^2 + 8x + 15 = 0$

- Cite as diferenças e semelhanças existentes:

Semelhanças:

Diferenças:

3. Ao observar $x + 10 = 0$ e $x^2 + 8x + 15 = 0$ você deve ter encontrado semelhanças e diferenças. De acordo com o que você observou separe as sentenças abaixo em dois grupos, de forma que sentenças semelhantes fiquem no mesmo grupo.

- $x^2 + 9x + 8 = 0$
- $x + 5 = 8$
- $3x^2 - 15x + 12 = 0$
- $x + 0 = 1$
- $x + 98 = 4$
- $x^2 - 3x - 4 = 0$
- $x^2 - 14x = 0$
- $x + 7 = 0$
- $x^2 - 169 = 0$
- $x^2 - 5x = 0$
- $x^2 - 3x - 4 = 0$

4. Sabemos que $x + 10 = 0$ é uma equação do 1º grau, que nome você daria para a sentença $x^2 + 8x + 15 = 0$. Justifique sua resposta.

Apêndice E

ATIVIDADE 2: DE ONDE VEIO ESSA FÓRMULA?

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Objetivos: Resolver equações do 2º grau

Conhecimentos Prévios: Produtos notáveis

Contexto Histórico: Muitas civilizações se preocuparam em achar soluções para equações do 2º grau. O primeiro registro desse tipo de equação foi feito em tábua de argila e a solução era obtida e apresentada através de palavras, como uma receita, de forma retórica. Foi através da interpretação de procedimentos usados por antigas civilizações que hoje resolvemos equações usando símbolos. A forma, de resolver equações do 2º grau, usada atualmente deve-se ao matemático hindu S'ridhara, mas foi através da citação do, também matemático hindu, Báskhara que ela ficou conhecida. A citação é:

“Multiplique ambos os membros da equação por um número igual a quatro vezes o quadrado do coeficiente da quantidade desconhecida ao quadrado. Junte a ambas o número igual ao quadrado do coeficiente da quantidade desconhecida. Então extraia a raiz quadrada.”

- Os passos seguintes estão de acordo com a citação acima.

1º . Deixe a equação na forma $ax^2 + bx = c$.

2º . Multiplique ambos os membros por $4a$.

3º . Some a ambos os membros b^2 .

4º . Extraia a raiz em ambos os lados.

1. Agora que você conheceu a regra, através da qual os hindus resolviam equações, aplique essa regra na equação $ax^2 + bx - c = 0$. Lembre que o objetivo é encontrar o valor de x .

2. Depois de aplicar a regra hindu na equação $ax^2 + bx - c = 0$, observe com muita atenção o que você encontrou, compare com a seguinte fórmula e faça algumas anotações, se achar necessário.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. De onde veio essa fórmula?

4. Resolva a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, usando a regra hindu.

Apêndice F

ATIVIDADE 3: A FÓRMULA HINDU

Objetivos: Resolver equações do 2º grau

Conhecimentos Prévios: Fórmula de Bháskara

Contexto Histórico: Os antigos matemáticos hindus seguiam uma regra para resolver equações do 2º grau que se traduzia na seguinte fórmula:

$$X = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c} - \frac{b}{2}}{a}$$

Lembre que um número real positivo tem duas raízes quadradas, uma positiva e outra negativa.

Exemplo: $\sqrt{4} = +2$ e -2

1. Resolva a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ usando a fórmula hindu.

2. Resolva a mesma equação usando a fórmula de Bháskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. Você encontrou as mesmas raízes?

4. Será que essa fórmula hindu corresponde a conhecida fórmula de Bháskara? Fazendo alguns cálculos algébricos vamos “mexer” nesta fórmula hindu para ver se ela se “transforma” na fórmula de Bháskara.

Apêndice G

ATIVIDADE 4: NÃO PERCA O ZERO

Objetivos: Resolver equações do 2º grau incompletas.

Conhecimentos Prévios: Fatoração

Contexto Histórico: A invenção do zero ocorreu no século VI e é considerada como um dos maiores avanços de toda a história da Matemática.

- Observe a seguinte equação do 2º grau:

$$x^2 = 2x$$

1. Um número é raiz de uma equação quando torna a igualdade verdadeira. Sabendo disso, teste alguns números e veja os que são raízes da equação acima.

2. Quais os números que você encontrou? 0 e 2? Se não encontrou esses veja agora se eles satisfazem a igualdade.

3. Se 0 e 2 satisfazem a equação, eles são raízes da equação.

Observe agora a solução de uma equação desse tipo antes da invenção do zero.

$$\begin{array}{l} X^2 = 2X \\ \frac{X^2}{X} = \frac{2X}{X} \\ X = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{X \cdot X}{X} = \frac{2 \cdot X}{X} \\ X = 2 \end{array}$$

4. Hoje já existe o zero, e ele também é solução da equação $x^2 = 2x$.

A equação $x^2 = 2x$ pode ser escrita assim: $x^2 - 2x = 0$.

Encontre as suas duas raízes!

- 1º dica: Fatoração

- 2º dica: Se $a \cdot b = 0$ é porque $a = 0$ ou $b = 0$

5. Resolva as seguintes equações usando as dicas anteriores.

a) $3x^2 - 7x = 0$

b) $4x^2 + 6x = 0$

c) $-4x^2 - 12x = 0$

Apêndice H

ATIVIDADE 5: OLHANDO O DELTA

Objetivos: Analisar as raízes da equação.

Conhecimentos Prévios: Fórmula de Bháskara e radiciação

Contexto Histórico: Os escribas da Babilônia nunca poderiam imaginar que um dia os matemáticos inventariam os números negativos. Eles não representavam as equações por letras, mas sabiam que, para encontrar a resposta de um problema como:

Qual é a medida do lado de um terreno quadrado de área 50? Bastaria extrair a raiz quadrada de 50. Hoje podemos expressar este problema como $x^2 = 50$.

1. Hoje os números negativos já existem e se esse problema não tratasse de medidas, essa equação $x^2 = 50$ teria uma outra solução. Sabendo que todo número positivo tem sempre duas raízes quadradas, uma positiva e outra negativa, quais as raízes dessa equação?

2. A fórmula de Bháskara, através da qual encontramos as raízes de uma equação do 2º grau extrai a raiz quadrada de delta. Observe

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \text{ Porque será que antes dessa raiz podemos usar o símbolo } \pm ?$$

3. Olhando somente para o delta (Δ) podemos saber como serão as raízes da equação.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Se delta for igual a zero a equação terá duas raízes reais iguais.
- Se delta for maior que zero a equação terá duas raízes reais diferentes.
- Se delta for menor que zero a equação não terá raiz real.

a) Olhando o delta das equações abaixo diga como serão as raízes da equação.

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

b) Encontre as raízes das equações acima e, usando seu conhecimento sobre radiciação e analisando a fórmula de Bháskara, explique:

- Porque quando delta é maior que zero temos duas raízes reais e diferentes?
- Porque quando delta é igual a zero temos duas raízes reais e iguais?
- Porque quando delta é menor que zero não temos raízes reais?

Apêndice I

ATIVIDADE 6: A PRIMEIRA FÓRMULA

Objetivos: Resolver equações do 2º grau completas.

Conhecimentos Prévios: Usar a fórmula de Bháskara.

Contexto Histórico: Os escribas da Babilônia resolviam muitas equações do 2º grau que podiam ser expressas na forma: $x^2 - bx = c$.

Mas a resolução vinha sempre gravada na tabuleta sem nenhuma explicação, seguindo fielmente essa fórmula:

$$X = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$$

1. Resolva a equação $x^2 - x = 6$ usando a fórmula acima, que é a primeira fórmula resolutive da equação do 2º grau. Os escribas, em sua fórmula, encontravam uma raiz e utilizavam, por exemplo, para esta equação $a = 1$, $b = 1$ e $c = 6$.

Observe que esses coeficientes são retirados de forma diferente da fórmula de Bháskara!

Lembre também que, agora você sabe que um número positivo tem duas raízes quadradas, uma positiva e outra negativa.

2. Resolva esta mesma equação usando a fórmula de Bháskara.

3. Existe alguma diferença entre essas fórmulas? Você encontrou o mesmo resultado?

4. O que você observou com relação aos coeficientes usados na primeira fórmula e os que você usa na fórmula de Bháskara?

Apêndice J

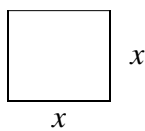
ATIVIDADE 7: COMPLETANDO QUADRADOS 1

Objetivos: Completar quadrado pelo método geométrico e Resolver equação do 2º Grau completa sem o auxílio da fórmula de Bháskara;

Conhecimentos Prévios: Radiciação, equação de primeiro grau, potência e operações com números decimais.

Contexto Histórico: Al-Khowarizmi estudou a álgebra geométrica de Euclides para resolução de equação do 2º Grau, ele não conhecia os números negativos, achou a raiz $x = 3$ para a equação $x^2 + 10x = 39$ e verificou geometricamente se estava correta, assim:

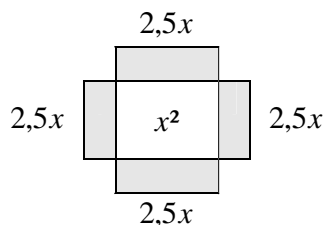
1. Desenhou um quadrado de lado x .



2. O termo $10x$, um retângulo de lados 10 e x , ele dividiu em quatro retângulos de áreas iguais. Logo, áreas $2,5x$.



3. Aplicou cada um desses novos retângulos sobre os lados do quadrado de área x^2 .

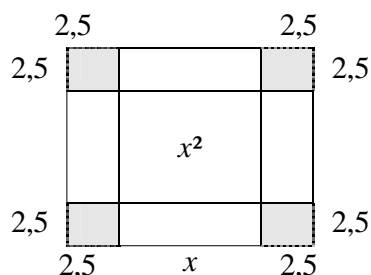


A área da figura formada:

$$x^2 + 4 \cdot 2,5x = x^2 + 10x$$

A equação $x^2 + 10x = 39$, ou seja, a área da figura deste item é 39.

4. Depois completou o quadrado do item 3, assim, a área do quadrado é igual a:



$$39 + 4.(2,5)^2 = 39 + 25 = 64$$

Assim, Al-Khowarizmi deduziu, substituindo os valores já conhecidos, que o lado procurado da equação:

$$2,5 + x + 2,5 = 8$$

$$x + 5 = 8$$

$$x = 8 - 5$$

$$x = 3$$

Como a raiz de 64 é ± 8 . Então, $2,5 + x + 2,5 = \pm 8$, logo, $x = 3$ e $x = -13$.

- Considerando o problema dos escribas: "Qual é o lado do quadrado, se a área menos o dobro do lado é vinte e quatro?"

I) Usando o método geométrico de Euclides descubra, como al-Khowarizmi fez, o lado do quadrado.

II) Sabendo que a raiz quadrada de um número é \pm esta raiz, descubra as raízes da equação.

III) Use o mesmo método, achando as duas raízes para as equações $x^2 + 4x = 32$ e $x^2 + 8x = 9$.

Apêndice K

ATIVIDADE 8: COMPLETANDO QUADRADOS 2

Objetivos: Resolver equações do 2º grau completas, completar quadrado, extrair raiz quadrada e proporcionar revisão das operações com números decimais.

Conhecimentos Prévios: Produtos Notáveis; Radiciação e Decomposição em fatores primos.

Contexto histórico: Al-Khowarizmi não conhecia os números negativos. Por isso seus métodos determinavam somente as raízes positivas e o zero. Ele resolvia as equações utilizando somente palavras, inclusive para expressar os números, e seu método de resolução de equação de 2º grau consistia em “completar o quadrado”, que significa formar o trinômio quadrado perfeito.

1. Verifique nas equações abaixo se ocorre um trinômio quadrado perfeito, senão, complete o quadrado.

a) $x^2 + 10x = 39$

b) $x^2 - 4x = 5$

2. Como já sabemos que um número positivo tem duas raízes quadradas, encontre as raízes das equações acima, reduzindo o trinômio quadrado perfeito ao termo $(x - a)^2$

3. Desenvolva a equação abaixo, usando o mesmo método anterior, e responda se ela tem raízes reais. Registre como você chegou à sua conclusão e analise porque isso ocorre.

- $x^2 + 10 = 6x$

Apêndice L

ATIVIDADE 9: COMPLETANDO QUADRADOS 3

Objetivos: Classificar as equações do 2º Grau e identificar a equação fora do contexto de algoritmo, ou seja, identificar a equação quando ela aparece só com palavras, sem símbolos matemáticos.

Conhecimentos Prévios: Noções de geometria plana, equações, grau de polinômios.

Contexto Histórico: Na obra *Hisab-Al-jabr-wa-al-mucabalah* de autoria de Al-Khowarizmi (c. 778 – 850 a.c.), matemático árabe, ele não utilizava nenhum tipo de símbolo. Ele chamava x^2 de quadrado, x de raiz, e os números eram os coeficientes das variáveis e os termos independentes. Uma equação do segundo grau, como por exemplo, $2x^2 = 5x$, seria expressa mais ou menos deste modo: “se o quadrado junto com 2 é igual a cinco raízes, digam-me quanto vale uma raiz”.

1. No Al-jabr, Al-Khowarizmi separou e classificou as equações do segundo grau em vários tipos. Complete o quadro abaixo descrevendo-as como Al-Khowarizmi e ainda, construa, se for o caso, suas figuras geométricas correspondentes.

Equação	Figura Geométrica	Descrição por extenso
1) $4x^2 = 0$		Quatro quadrados é igual a zero.
2)		
3)		Quadrado junto com 10 raízes é igual a 39.
4) $x^2 = 4$		

2. Sabendo que uma equação completa tem três termos, observe as equações encontradas no quadro e classifique-as em completa ou incompleta.

Apêndice M

ATIVIDADE 10: O X DA QUESTÃO

Objetivos: Resolver equações do 2º grau incompletas, identificar a solução adequada de um problema matemático e desenvolver métodos para aproximar raiz quadrada.

Conhecimentos Prévios: Potenciação; radiciação; decomposição em fatores primos.

Contexto Histórico: Al-Khowarizmi expressava a equação de 2º grau incompleta $x^2 = 50$ desse modo: “quadrado igual a números”. Na época dos Sumérios, c. 2000 a.C, na Babilônia, a ascensão social de um filho de agricultor ou comerciante era alcançada tornando-se escribas, que por dez anos estudavam e dedicavam-se muito à matemática. Eles também não conheciam como representar equações por letras, e propunha o problema sobre “quadrado igual a números”, do seguinte modo: “Qual é a medida do lado de um terreno quadrado de área 50?” Eles sabiam que para calcular o lado de um terreno quadrado bastava extrair a raiz quadrada da área, sabiam que o inverso da potenciação é a radiciação. Neste caso, a raiz seria o lado do quadrado.

Um número positivo tem sempre duas raízes quadradas, uma positiva e outra negativa. Por exemplo, o número 49 tem como raiz $+7$ e -7 . Veja:

$$(+7)^2 = (+7).(+7) = 49$$

$$(-7)^2 = (-7).(-7) = 49$$

Assim, $x^2 = 50$ tem duas raízes:

$$x = + \sqrt{50} \quad \text{ou} \quad x = - \sqrt{50}$$

I) Descubra então qual o lado do terreno.

II) Descreva como você achou a raiz de 50.

III) Agora faça o mesmo para terrenos quadrados de áreas 36, 24 e 10.

Veja como os escribas faziam para aproximar uma raiz:

1. Seleccionavam o número inteiro cujo quadrado mais se aproximava de 50.

$$7^2 = 49$$

$$a = 7 \text{ (primeira aproximação)}$$

2. Dividiam 50 pela primeira aproximação, até que o quociente ficasse com o dobro de algarismos do divisor.

$$\frac{50}{7} = 7,1 + 3$$

3. Calculavam a média aritmética entre a primeira aproximação e 7,1.

$$\frac{(7 + 7,1)}{2} = 7,05$$

$$a = 7,5 \text{ (segunda aproximação)}$$

4. Dividiam 50 pela segunda aproximação, até que o quociente ficasse com o dobro de algarismos do divisor.

$$\frac{50}{7,05} = \frac{5000}{705} = 7,09219 + 605$$

5. Calculavam a média aritmética entre a segunda aproximação e 7,0919.

$$\frac{7,05 + 7,09219}{2} = 7,071095$$

Assim, a raiz de 50 = 7,07105

Na calculadora, raiz de 50 = 7,07105. Chegavam muito próximo!

Apêndice N

ATIVIDADE 11: DUAS VEZES PROCURADO

Objetivo: Resolver equações do 2º Grau incompletas e ser crítico ao encontrar a solução de um problema matemático.

Conhecimentos Prévios: Fatoração; equação (propriedade de cancelamento).

Contexto Histórico: Você aprendeu que a raiz de uma equação do 2º grau do tipo $x^2 = 50$ é dada extraindo-se a raiz do número ou termo independente, mas é importante também aprender a achar a raiz da equação incompleta do tipo quadrado igual a raiz.

No século VI ocorre um dos maiores avanços de toda a história da matemática: a invenção do zero na Índia. Sem o zero, equações do tipo $x^2 = 2x$, ou seja, “o número cujo quadrado é o dobro do próprio número” tinham somente uma raiz.

Veja:

Se $x^2 = 2x$, então

$$\frac{x^2}{x} = \frac{2x}{x} \rightarrow \frac{x \cdot x}{x} = \frac{2 \cdot x}{x} \rightarrow x = 2$$

Ora, 2 é uma raiz pois $2 \cdot 2 = 4$, ou seja, 2 é um número cujo quadrado é o dobro dele. Mas, $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ e $2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$ não seria outro número cujo quadrado é igual ao dobro dele? Então falta encontrar na resolução acima $x = 0$.

No século IX, Al-Khowarizmi divulga o zero, escrevendo um livro chamado Sobre a arte hindu de calcular, explicando os cálculos com dez símbolos numéricos e a partir daí o zero se incorpora definitivamente no mundo matemático.

Sabendo que se $a \cdot b = 0$ ou $a = 0$ ou $b = 0$:

- I) Encontre qual o erro no modo de resolução apresentado para a equação $x^2 = 2x$.
- II) Ache de seu modo as duas raízes desta equação, registrando todos os caminhos que você utilizou.