

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E
MATEMÁTICA

SÔNIA MARIA CAVALCANTI DA ROCHA

**INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE
MATEMÁTICA: UM ESTUDO CENTRADO NO CONCEITO DE FUNÇÃO**

NATAL – RN

2008

SÔNIA MARIA CAVALCANTI DA ROCHA

**INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE
MATEMÁTICA: UM ESTUDO CENTRADO NO CONCEITO DE FUNÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes

NATAL - RN

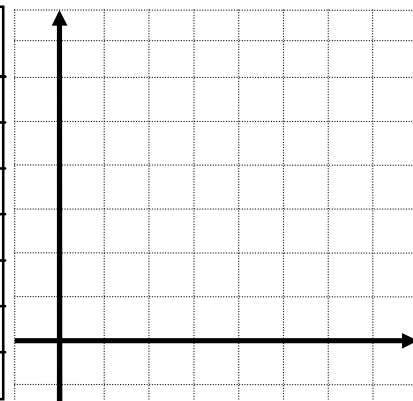
2008

Anexo F: Atividades para a sala de aula

Funções: atividades para a sala de aula¹**1. A chama da vela de aniversário**

Fixe uma vela, deitando algumas gotas de cera de outra vela num prato e prepare um relógio que permita medir intervalos de 30 segundos. Acenda a vela, medindo-a de 30 em 30 segundos, apagando e acendendo de novo. Registre na tabela o tempo em segundos e o comprimento da vela (em cm). Complete a tabela calculando a porção de vela derretida (desde o início) no fim de cada período de 30 segundos. Represente graficamente a função que relaciona o tempo (x) com a quantidade de vela ardida ao fim desse tempo (y).

Tempo segundos (x)	comprimento da vela centímetros	vela ardida centímetros (y)
0		
30		
60		

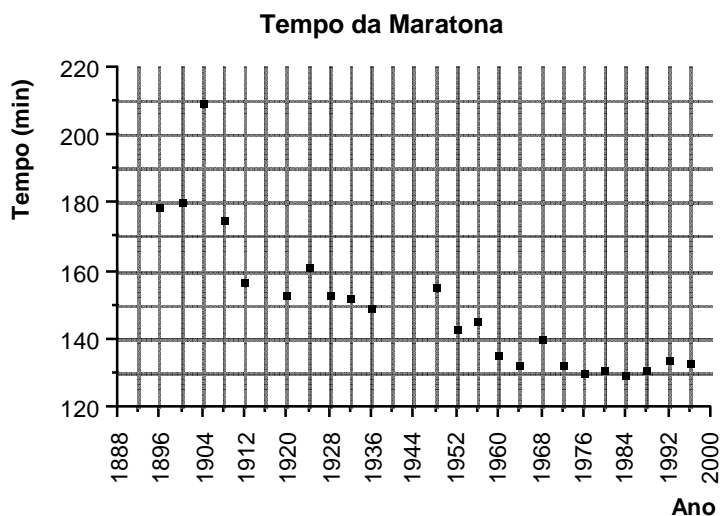


- Ao fim de 3 minutos que porção de vela terá derretido?
- Quanto tempo pode permanecer esta vela acesa?
- Trace uma curva que se ajuste ao conjunto de pontos marcados.
- Indique uma equação desta reta

2. Jogos Olímpicos

O gráfico que seguinte nos informa sobre o tempo gasto (arredondados a minutos) na maratona dos Jogos Olímpicos da era moderna. Os Jogos Olímpicos da era moderna tiveram início em 1896.

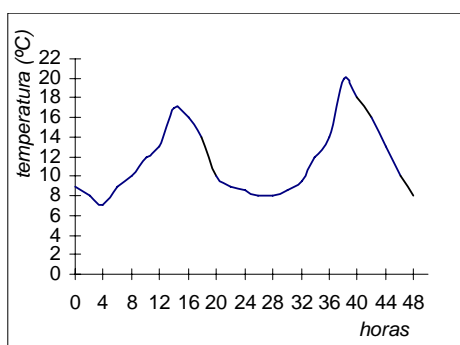
¹ Texto adaptado pelos professores I. A. Mendes e S. M. C. da Rocha do livro Funções 10^o Escolaridade, que corresponde ao nosso 1^o ano do Ensino Médio, de autoria de Paula Teixeira; Adelina Precatado; Carlos Albuquerque; Conceição Antunes e Suzana Nápoles. Lisboa: Ministério da Educação/Depto. De Ensino Secundário, 1997.



- De quantos em quantos anos é que se realizam os Jogos Olímpicos?
- O que aconteceu em 1916? E em 1940? E em 1944?
- Em que anos o tempo gasto na prova foi de 2 horas e 20 minutos?
- Qual é o atual recorde olímpico da Maratona?
- Ao longo dos anos como foram evoluindo os tempos gastos nas provas desta modalidade?

3. Temperatura Ambiente

No gráfico estão registradas as temperaturas ambiente durante um período de 48 horas (dois dias) de outono.



- Que variáveis estão relacionadas através desta função?
- Qual é o domínio? E o contradomínio?
- A que horas se fez sentir a temperatura máxima em cada um dos dias? E a mínima?
- Qual foi a temperatura máxima durante este período?

- Em que altura do dia subiu mais rapidamente a temperatura? Porque terá sido?
- E quando desceu mais bruscamente?
- Elabore um pequeno relatório que inclua as principais características desta função e o seu significado relativamente à situação da realidade que está a ser estudada.

4. O baile

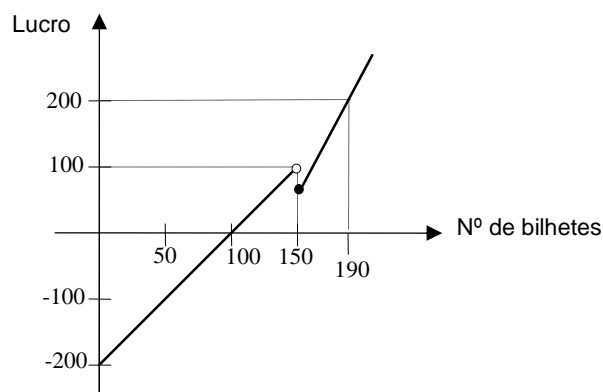
Os alunos concluintes de uma escola decidiram organizar um baile na escola. A comissão constituída para a organização, depois de várias investigações, apresentou aos colegas o gráfico seguinte.

a) Quantos bilhetes eles terão que vender para não terem prejuízo?

b) Os lucros do baile destinam-se à compra de um equipamento que custa em 200 reais. Qual o número mínimo de bilhetes que será necessário vender para cobrir essa despesa?

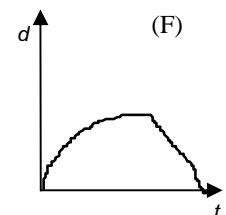
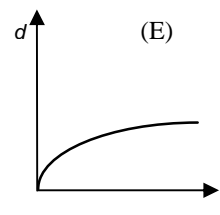
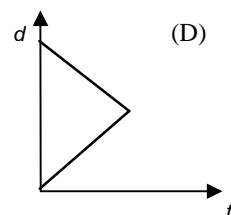
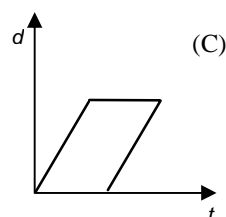
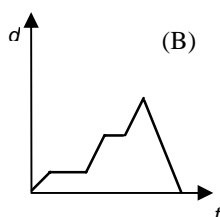
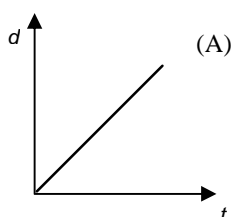
c) Qual é o prejuízo no caso de não se vender nenhum bilhete?

d) Qual é a situação mais vantajosa, vender 145 bilhetes ou 150? Que explicação pode se encontrar para esta situação?



5. Viagens

Quais dos gráficos a seguir podem representar viagens? Em todos os gráficos d é a distância relativa a um ponto de partida e t o tempo. Fundamentar a resposta.



6. Distância de casa

Fazer corresponder a cada situação o gráfico que melhor se lhe ajusta. Todos os gráficos representam a distância de casa.

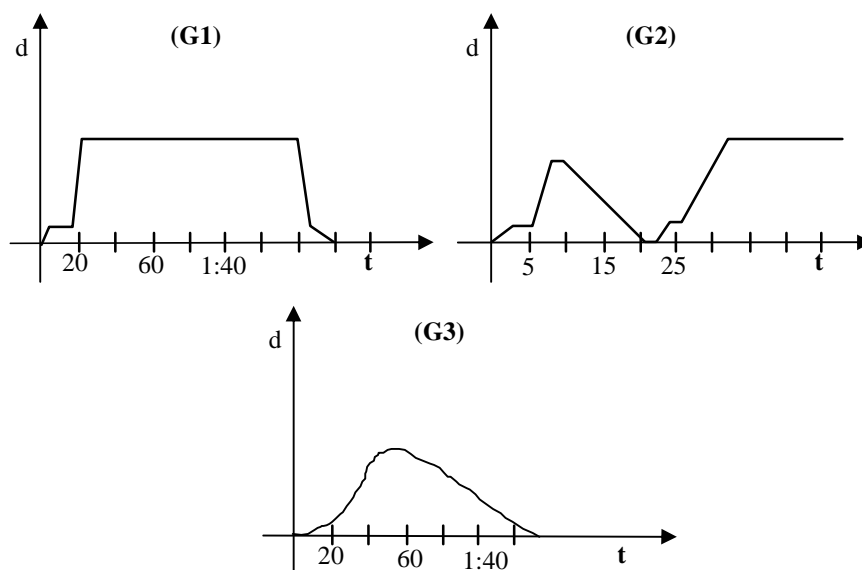
Situações (S)

(S1) O Antonio resolveu ir correr durante duas horas para se preparar para a maratona da escola. Saiu de casa e regressou para tomar banho.

(S2) No dia seguinte o Antonio voltou para treinar, mas desta vez para um circuito de atletismo. Saiu de casa, foi de carro até ao local onde iria treinar, correu durante duas horas e voltou à casa de carro.

(S3) No terceiro dia o Antonio resolveu voltar a ir para o estádio de carro. No meio da viagem reparou que tinha se esquecido do equipamento para treinar. Saiu do carro, regressou para casa a pé, voltou a apanhar o carro e lá foi ele para o seu treino de duas horas.

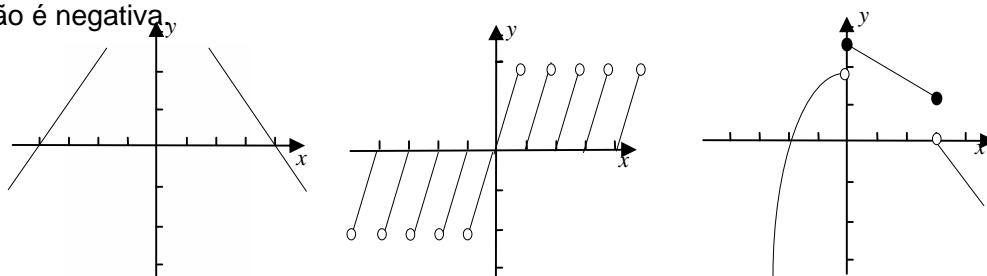
GRÁFICOS



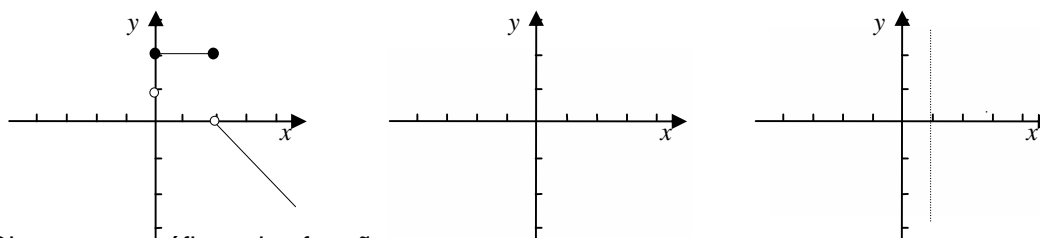
7. Observação de gráficos

a) Observe os gráficos das funções que se seguem e indique para cada uma delas:

- Domínio; contradomínio; zeros; os intervalos em que a função é positiva; os intervalos em que a função é negativa;

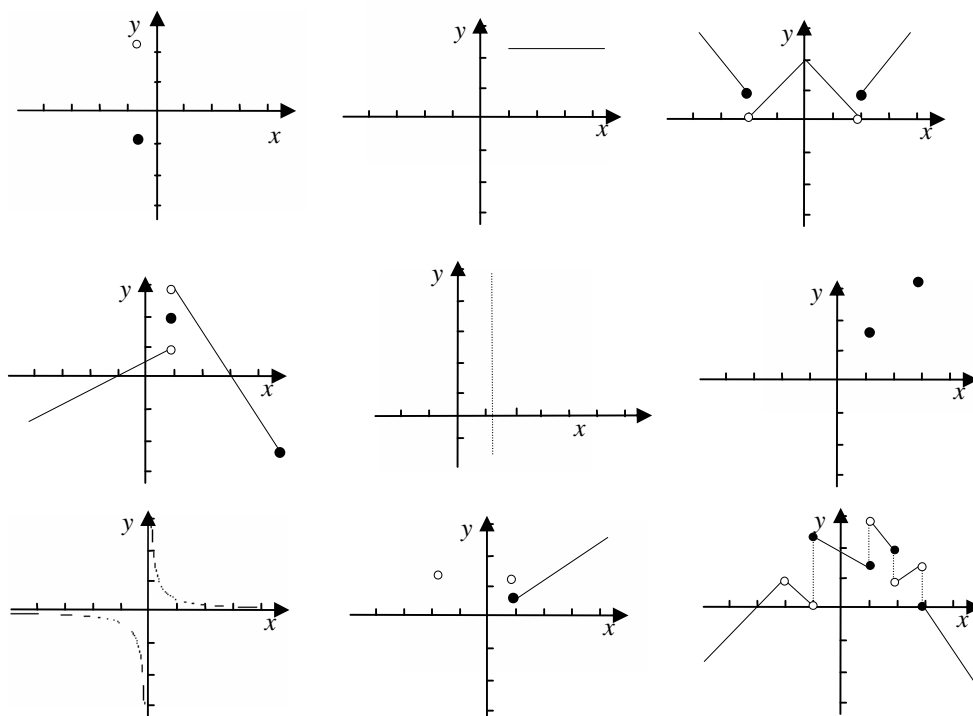


b) Observe os gráficos das funções que se seguem e indique para cada uma delas: domínio; contradomínio; zeros; intervalos em que a função é crescente; intervalos em que a função é decrescente; intervalos em que a função é constante.



c) Observe os gráficos das funções que se seguem e indique:

- Os extremos relativos e absolutos, caso existam.
- Qual o comportamento da função quando x tende para $+\infty$? E para $-\infty$?
- Quais destas funções não são contínuas e quais os pontos de descontinuidade.
- Como é o crescimento ou decrescimento de cada uma das funções? Para uma mesma função dê exemplo de crescimentos diferentes. Dê exemplos de crescimentos do mesmo tipo.



8. Representação gráfica

8.1. Faça o esboço do gráfico de uma função que satisfaça as seguintes condições:

a) domínio: \mathbb{R} ; contradomínio: $]5, +\infty[$

b) domínio: $[0, +\infty[$; contradomínio: $] -\infty, 0[$

c) crescente em $] -\infty, 1[$; $f(2) = 2$; contradomínio: $] -\infty, 3[$

d) positiva em $] -3, 7[$; $f(0) = 2$; contradomínio: $] -\infty, 3[$

e) tende para infinito quando x se aproxima de 4; se aproxima de -2 quando x toma valores muito grandes; seja descontínua para $x = 7$.

8.2. Forme um grupo com um ou dois colegas. Escolha uma das cinco representações gráficas feita por você e tente transmitir-lhe, oralmente, o gráfico que você escolheu de modo que ele consiga registrar um gráfico semelhante ao teu.

8.3. Compare os outros gráficos com os do seu colega. Todos os gráficos estão de acordo com as condições exigidas?

9. Estudar as funções seguintes

a) $y = x$ b) $y = x^2$ c) $y = x^3$ d) $y = x^4$ e) $y = \sqrt{x}$

f) $y = \frac{1}{x}$ g) $y = \frac{1}{x^2}$ h) $y = |x|$ i) $y = \text{int}(x)$ j) $y = \frac{3}{x-2}$

Para cada uma dessas funções registre:

- O gráfico; domínio e contradomínio; intervalos de monotonia; extremos; continuidade
- Simetrias relativamente à origem e ao eixo dos y
- O que acontece quando x tende para infinito ($-\infty$ ou $+\infty$)
- O que acontece na proximidade dos pontos que não pertencem ao domínio.

10. Simetrias

Representar o gráfico da cada uma das funções indicadas.

a) $y_1 = x$ b) $y_2 = 2x$ c) $y_3 = x + 2$ d) $y_4 = x^2$ d) $y_5 = -2x^2$

e) $y_6 = (x - 3)^2$ f) $y_7 = 0.5x^2 - 3$ g) $y_8 = x^3$ h) $y_9 = 4x^3$

$$i) y_{10} = (x - 3)^3 \quad j) y_{11} = x^3 + 1 \quad l) y_{12} = x^4$$

Para cada uma dessas funções registre simetrias encontradas em relação:

- Ao eixo das ordenadas
- À origem
- A uma outra reta.

Dê exemplos de outras funções que tenham eixos de simetria ou que sejam simétricas relativamente à origem.

11. Dizer qual é o valor lógico das afirmações seguintes. Em cada caso explicar porquê. Nas que forem falsas apresentar um contra-exemplo.

- a)** Uma função é par quando o seu gráfico tem um eixo de simetria
- b)** O gráfico de uma função ímpar passa sempre pela origem do sistema de coordenadas.
- c)** Se f é uma função polinomial de grau par, então f é uma função par.
- d)** Se f é uma função polinomial de grau par, então f pode ser uma função ímpar.

12. Função Quadrática

12.1. Representar graficamente as seguintes funções:

$$a) y = x^2 \quad b) y = 2x^2 \quad c) y = \frac{1}{3}x^2 \quad d) y = -x^2 \quad e) y = -2x^2 \quad f) y = -\frac{1}{3}x^2.$$

12.2. Analisar os gráficos e registrar as conclusões. Indique nomeadamente, para cada função:

- O domínio
- O contradomínio
- A existência de eixo de simetria
- A existência e o número de zeros
- Intervalos de monotonia
- Sentido da concavidade
- Coordenadas do vértice da parábola

12.3. No caso geral como se relaciona o gráfico da função $y = ax^2$ com o de $y = x^2$? Como é que o parâmetro a influencia o gráfico da função?

12.4. Faça um estudo semelhante para as funções do tipo:

a) $y = ax^2 + k$ b) $y = a(x + h)^2$ c) $y = a(x + h)^2 + k$.

Explicita os efeitos dos parâmetros a , h e k relativamente aos gráficos das funções.

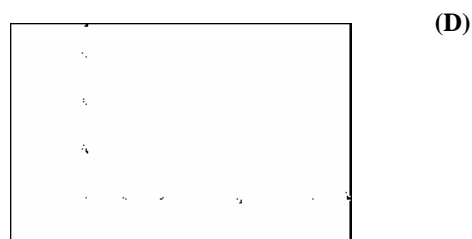
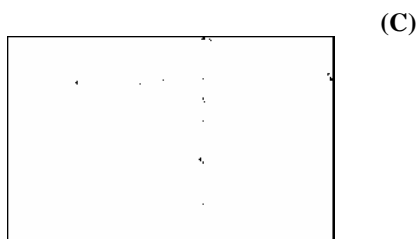
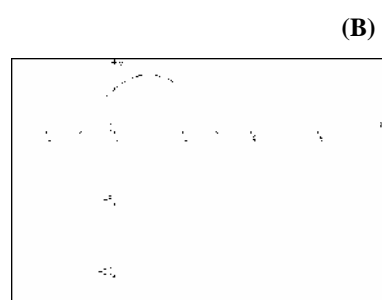
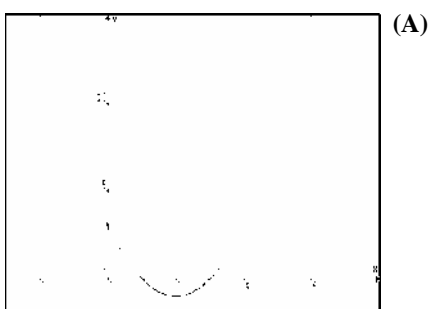
12.5. Elabore um relatório com o registro dos gráficos e as conclusões a que chegaste.

Lavando em conta o que aprendeu, descreva como você pode obter o gráfico de cada uma das funções a partir do gráfico de $f(x) = x^2$:

a) $y = -3x^2$ b) $y = (x + 4)^2$ c) $y = 2(x - 5)^2 + 0,7$

13. Mais funções quadráticas

- Represente graficamente a função $y = (x-1)(x+5)$.
- Observa o gráfico. Qual o significado de 1 e 5 relativamente ao gráfico?
- Investigue os gráficos das funções da família $y = (x+a)(x+b)$. Atribui vários valores, positivos, negativos e zero a a e a b ; experimenta também o caso em que $a = b$.
- Qual é o significado de a e b relativamente ao gráfico?
- Defina, através das suas expressões analíticas, funções que correspondam aos seguintes gráficos.

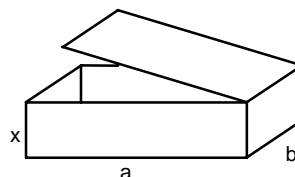
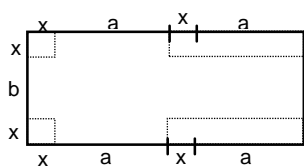


14. Pense em todos os triângulos com dois lados iguais e um diferente, com perímetro **50 cm**.

- Encontre a função que relaciona o lado diferente com qualquer dos outros lados. Represente essa função graficamente.
- Entre que valores pode variar o lado diferente? E os dois lados iguais?
- Representa o gráfico da função que nos dá a área de cada um dos triângulos em função de um dos lados iguais.
- Quais as dimensões do triângulo que tem área máxima?

15. A propósito de caixas

Dispomos de um retângulo de cartolina de **50 cm x 20 cm** e queremos fazer uma caixa com tampa.



Indique as possíveis dimensões para **a**, **b** e **x** para que a caixa possa ser feita. Em cada caso determine o volume da caixa. Represente graficamente a função que nos dá os vários volumes em função de **x**. Que dimensões deve ter a caixa para que o volume seja máximo? (indique as medidas com aproximação ao milímetro)

16. Decomposição de uma substância

Mediu-se a massa de uma determinada substância **A** que estava se decompondo segundo uma certa reação química e obteve-se os seguintes valores:

Tempo de reação	Massa de A (gramas)
0	200
2	150
4	110
6	80
8	55
10	50
12	50
14	50

- a) Faça uma representação gráfica dos dados da tabela.
- b) Descreva como varia a velocidade da reação ao longo do tempo, ou seja, diz onde é que o decrescimento é mais ou menos acentuado.
- c) Em que momento é que a substância deixou de perder massa?
- d) Determine a velocidade média de decomposição de **A** no intervalo de tempo de 2 a 6 minutos.

17. Tempo de reação de um condutor

Um motorista de um automóvel avistou um perigo na estrada. Então iniciou uma freagem. Sabe-se que quando um motorista decide frear passa certo tempo até que de fato ocorra a freagem (tempo de reação). Esse tempo permite que o carro ainda percorra um determinado espaço. Depois de apertar o freio, o carro não para logo. Percorre ainda certa distância que depende da sua velocidade. Conclusão, desde que o condutor se aperceba do perigo, até que o carro pare, percorre uma certa distância (y), que é tanto maior quando maior for a velocidade (x). Experimentalmente foram obtidos os seguintes valores:

Velocidade do automóvel (km/h)	Distância percorrida (por tempo de reação, em metros) (1)	Distância percorrida (depois da freagem, em metros) (2)	Distância total percorrida (1) + (2)
10	2	1	3
20	4	3	7
30	6,5	6,5	13
40	8,5	12	20,5
50	10,5	18,5	29
60	12,5	26,5	39
70	14,5	36	50,5
80	17	47	64
90	19	60	79
100	21	74	95

- a) Sabendo que o motorista ia a uma velocidade de 80 km/h, que distância percorreu desde que se apercebeu do perigo até o carro parar?
- b) Construa os gráficos correspondentes a cada uma destas situações.
- c) Tente encontrar a função que melhor se adapte a cada uma das situações:
- Distância percorrida por tempo de reação;
 - Distância percorrida depois de se iniciar a travagem;

- Qual delas mostra mais claramente o custo fixo com a banda?
- O que significa a expressão $p(-125p+1250)$ na situação do concerto? E a expressão $-125p+1250$?
- Quantos bilhetes são previstos vender se o preço de cada bilhete for 2 reais? E se for 5 reais?