Um estudo histórico-pedagógico sobre números irracionais

Antonio Miguel - UNICAMP

Pegue uma calculadora. Acione a tecla "2".

Acione em seguida, a tecla "$\sqrt{\ }$". O número que apareceu no visor foi 1,1442136.

Foi fácil calcular a raiz quadrada de 2 não é mesmo? Mas esse número não é a raiz quadrada de dois. Estranho? Mistério?

Os matemáticos, hoje, chamam os números desse tipo de números irracionais.

Você não imagina a incrível aventura humana que está por trás desses números e que as máquinas não podem contar. Vamos conhecê-la?

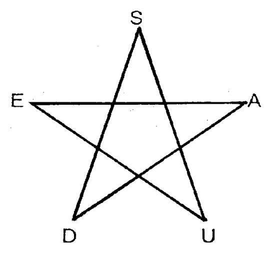
1. O caminho das estrelas

Certa noite, por volta de 500 anos antes do nascimento de Cristo, um viajante chegava a uma estalagem grega, para ali passar a noite.

Durante a noite, o viajante sentiu-se muito mal.

O dono da estalagem fez o máximo possível para ajudá-lo a restabelecer-se. Mas nada do doente melhorar.

O viajante percebendo que iria morrer sem ter possibilidade de pagar o dono da estalagem pelos seus esforços, pediu uma lousa. Com a mão trêmula, desenhou nela a figura abaixo: uma estrela de cinco pontas ou pentagrama. Em seguida, pediu ao dono da estalagem que deixasse a lousa fixada à porta de seu estabelecimento.



Logo depois o viajante morria.

Um certo dia, um outro viajante que passava identificou o sinal na estalagem. Entrou, perguntou ao dono sobre a origem do desenho e ouvindo a resposta, recompensou o estabelecimento por sua caridade.

Conhecemos hoje está história através de um historiador e matemático romano, que acrescenta que os dois viajantes pertenciam à escola do grande sábio grego chamado Pitágoras, nascido no ano 581 a.C. Os pitagóricos, eram geralmente pessoas ricas da sociedade de sua época. Envolviam-se nas atividades políticas, religiosas, filosóficas e matemáticas e o emblema da escola era o pentagrama ou pentágono estrelado.

Mas por que uma estrela? Não se sabe ao certo, mas durante o século VI a.C., em certas regiões do mundo grego, intensificou-se a vida religiosa. Dentre as religiões, uma delas, que acreditava na imortalidade da alma e na transmigração da alma através de vários corpos, acabou se difundindo bastante. Essa religião era o orfismo e, segundo ela, a alma das pessoas, por sua própria natureza, aspiraria a retornar à sua pátria celeste, isso é, às estrelas. Isso através da ajuda de um Deus libertador chamado Dionísio.

Pitágoras modificou essa religião, colocando no lugar de Dionísio nada mais nada menos que a própria matemática. Isso mesmo. O pitagorismo fez da matemática a via de salvação da alma; o único meio de conduzí-la das trevas terrenas às estrelas. Talvez seja essa a razão da adoção da estrela como símbolo da escola.

Mas não se deve entender ao pé da letra a expressão "Salvação da Alma" e o termo "Estrela". Isso porque, era da escola pitagórica de onde saiam os principais conselheiros políticos daquela época. Os pitagóricos - políticos por excelência - foram os primeiros a perceberem com clareza, que a matemática constituía a chave de acesso aos segredos do universo. E utilizaram-na não apenas para compreender os números e as figuras, mas também para governar os próprios homens, de acordo com uma política conservadora e reacionária.

Sabe-se que na antiguidade, era bastante difundida e aceita a crença de que apenas os membros das classes dirigentes possuíam alma. Assim, apenas algumas almas estaria destinado o caminho das estrelas.

2. Pentagramas, pentágonos e os maus espíritos

O pentagrama era também considerado pelos pitagóricos o símbolo da boa saúde e da aliança entre os homens. Os cinco ângulos das pontas da estrela eram provavelmente designados por cinco letras do alfabeto grego que formavam a palavra SAÚDE. Além disso, para muitos povos da antiguidade, o pentagrama tinha um significado místico. Na Idade Média era utilizado para proteger os homens dos maus espíritos.

À primeira vista, um emblema como esse, uma simples estrela, parece um tanto quanto banal sem interesse.

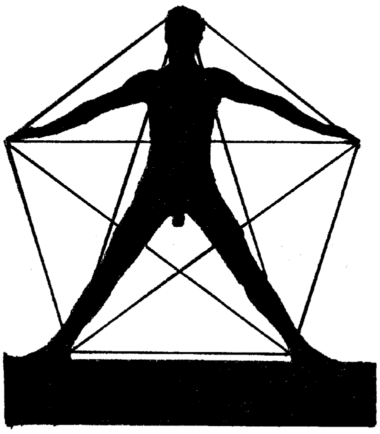


ILustração: Lawlor, R. _ 1982, p. 58

Mas se você ligar com uma régua os vértices dessa estrela, indicados pelas letras S, A, U, D, E, você notará que acabou traçando um PENTÁGONO, isto é, um polígono de 5 lados. Mais que isso. Meça todos os lados desse pentágono. O que você observa? Meça também todos os ângulos internos desse pentágono. O que você observa?

Um pentágono que possui todos os lados e todos os ângulos congruentes é chamado de PENTÁGONO REGULAR.

O pentágono regular foi também uma forma geométrica bastante explorada pelos povos da antiguidade. Esta forma significava o símbolo da vida, mais particularmente, o símbolo da vida humana, como mostra a figura anterior, que relaciona o corpo humano com o pentágono e o pentagrama (formado pelas diagonais do pentágono).

A insistência sobre o pentágono e o pentagrama está associada à crença de certos povos antigos, principalmente os egípcios, que representavam a estrela como tendo cinco pontas, de que o rei, após a morte, tornava-se uma estrela.

Atualmente, levantou-se uma hipótese para explicar a relação que os povos antigos faziam entre a forma pentagonal e o seu poder de proteção. Em tempos muito remotos, nos trabalhos de colheitas de cereais como o milho, o trigo, etc. e de debulhamento das espigas, os camponeses inventaram uma forma bem prática de proteger seus dedos contra os cortes e arranhões. Entrelaçavam uma tira de planta para formar um dedal, como mostram as figuras seguintes.

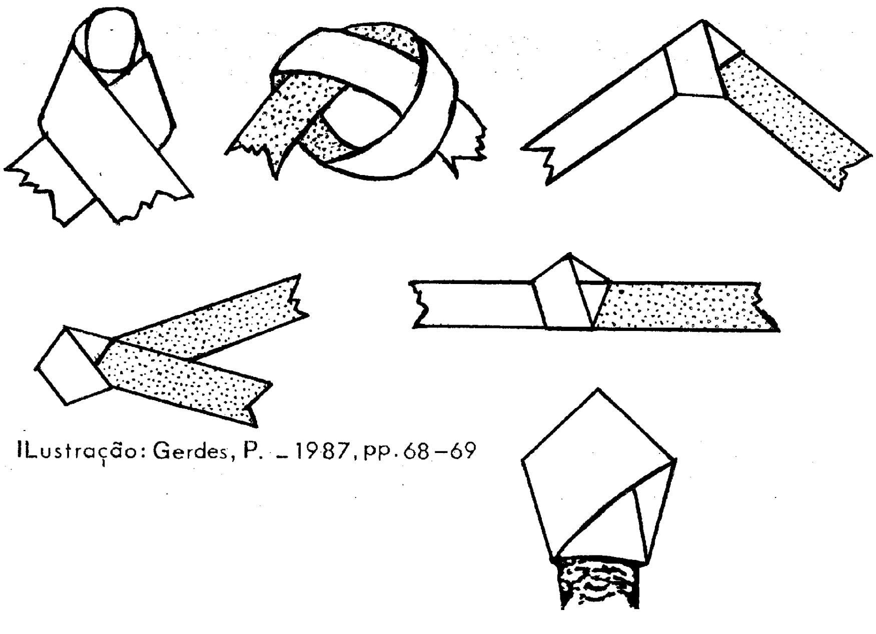


ILustração: Gerdes, P. _ 1987, pp. 68–69

Utilizando uma tira de papel, construa também um dedal.

Percebeu? O pentágono, de PROTETOR FÍSICO passou, com o tempo, a ser considerado também um PROTETOR ESPIRITUAL.

Volte à figura da página 4 e prolongue todos os lados do pentágono que você traçou, em ambos os sentidos, até que esses prolongamentos se cruzem dois a dois. Que figura se formou?

Ligue, novamente, os vértices dessa nova figura. Que figura se formou? É, parece que a estrelinha banal começa a se tornar uma figura interessante. Para além de seus poderes místicos, parece que vale também a pena explorar suas PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS. Foi o que fizeram os pitagóricos. Por ora, teremos que abandonar a estrelinha. Mas futuramente, ela voltará a brilhar.

3. A descoberta de Hipasus e a ira dos deuses

Os pitagóricos comprometiam-se à severa obediência e faziam um sagrado juramento de jamais revelar um segredo. As lendas nos contam, porém, que Hipasus de Metapontum, um pitagórico que viveu por volta de 500 a.C., foi o primeiro a descobrir a existência dos números irracionais e que, mais tarde, ele perdeu-se e morreu no mar como punição dos deuses, pelo fato de ter revelado a sua descoberta para outras pessoas.

As lendas acrescentam ainda, que as pessoas que divulgaram os números irracionais morreram, todas, num naufrágio porque o inexprimível (aquilo que não se pode exprimir), o informe (aquilo que não tem forma), deve ser mantido em absoluto segredo e os corpos das pessoas que os divulgaram devem permanecer eternamente boiando nas ondas do mar.

Conta-se ainda, que os pitagóricos expulsaram Hipasus de sua escola e ergueram um túmulo a ele, como se estivesse morto.

Existem muitas histórias parecidas com essa na literatura mitológica. A primeira forma de explicação dos fenômenos que acontecem na natureza, surgida nas sociedades muito antigas, é o mito. O mito é muitas vezes uma história com personagens sobrenaturais, os deuses. Conta-se por exemplo, que Prometeu (personagem da antiga mitologia grega) roubou dos deuses o segredo do fogo e o revelou aos homens. Zeus castigou-o, mandando Hefaístos acorrentá-lo a uma montanha, onde uma águia devorava continuamente seu fígado.

Como castigo aos homens, os deuses criaram a mulher: Pandora, com uma caixa que, aberta, espalhou entre os homens todos os sofrimentos. Prometeu depois foi libertado por Hércules. A história de Adão e Eva também é parecida.

Pelo fato de terem comido o fruto da Árvore da Sabedoria foram expulsos do Paraíso por Deus.

Como você está notando, a divulgação dos conhecimentos para todos os homens sempre provocou a ira dos "deuses". Tanto antigamente quanto hoje em dia. Isso porque a posse do conhecimento significa poder sobre os homens que não o possuem.

Mas como diz o professor Landes, "Adão e Eva perderam o paraíso por terem comido o fruto da Árvore da Sabedoria: mas não perderam a sabedoria. Prometeu foi punido, e também toda a humanidade, pois Zeus enviou Pandora, com a caixa dos males, para anular as vantagens do fogo; mas Zeus nunca obteve o fogo de volta".

Da mesma forma, Hipasus foi punido por ter revelado ao mundo a descoberta dos irracionais. Mas exatamente por isso, devido à sua ousadia, outros homens puderam conhecer sua descoberta e aperfeiçoá-la ao longo do tempo. Mas por que razão a ousadia de Hipasus provocou o ódio dos pitagóricos?

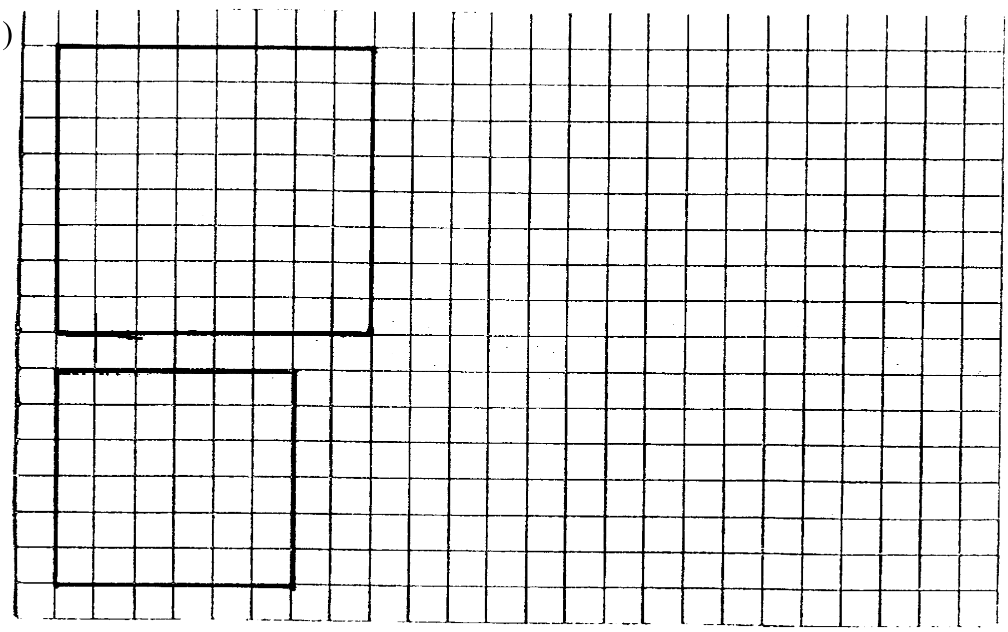
Qual o significado da descoberta de Hipasus? Como fez essa descoberta? Por que as lendas se referem aos irracionais como "inexprimíveis", "informes"? É o que você saberá ao estudar esta unidade. Estudando-a, você também poderá provar o sabor do fruto proibido. Você quer?

O objetivo das atividades seguintes é fazer com que você verifique se, dados dois quadrados quaisquer, é sempre possível construir um único quadrado cuja área seja igual à soma das áreas dos dois quadrados dados.

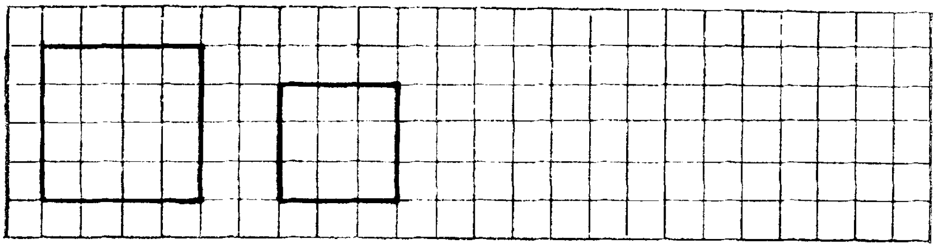
Atividade 1

a) Para cada par de quadrados seguintes, construa à direita um único quadrado cuja área seja igual à soma das áreas dos quadrados dados.

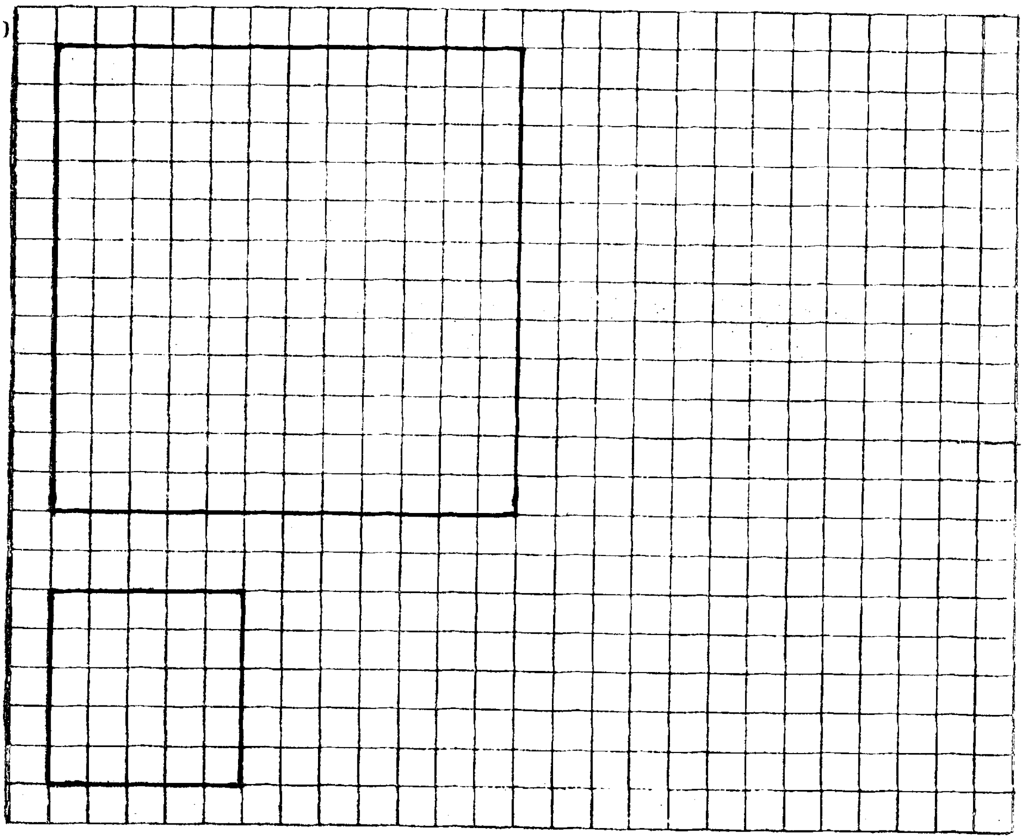
1)



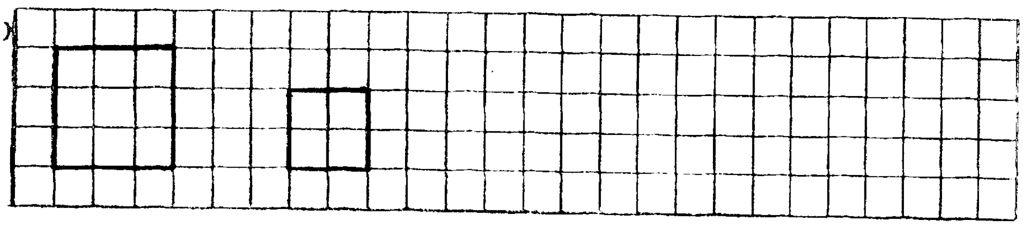
2)



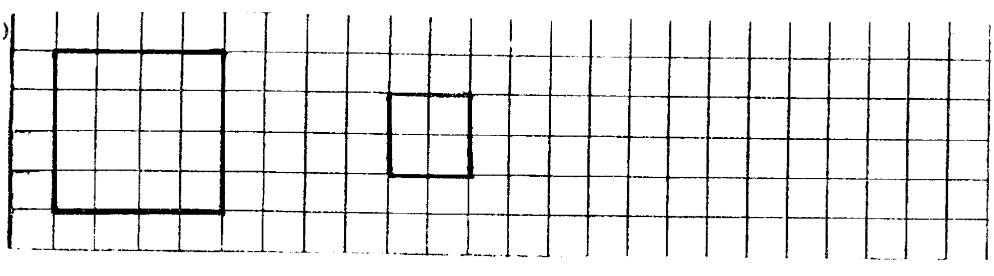
3)



4)



5)



b) Você acha que é possível construir um único quadrado cuja área seja igual à soma das áreas de dois quadrados quaisquer? Justifique sua resposta.

4. Povos antigos e quadrados dentados

Não se sabe exatamente quando, onde e nem como foi feita essa descoberta ... mas os povos antigos deram uma resposta afirmativa à questão anterior, isto é, afirmaram que é sempre possível construir um único quadrado que ocupe a mesma área que a de dois quadrados dados, juntos. Mas será que essa afirmação é realmente verdadeira? Será que os povos antigos realmente tinham razão? A seqüência de atividades seguintes tem o objetivo de fazer com que você possa verificar se essa afirmação é ou não verdadeira. O caminho que iremos seguir basicamente nos trabalhos do professor moçambicano Paulus Gerdes e este, por sua vez, parte da observação dos trabalhos de cestarias, cerâmicas, bordados e padrões ornamentais de povos muito antigos e atuais. Alguns desses padrões estão desenhados a seguir.

Fig. 1

Anatólia - 6º milênio A.C.

Fig. 2

Padrão de Bordado Inca

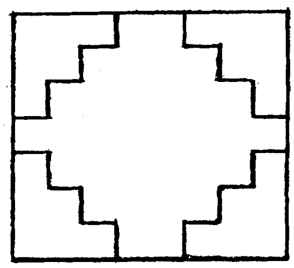
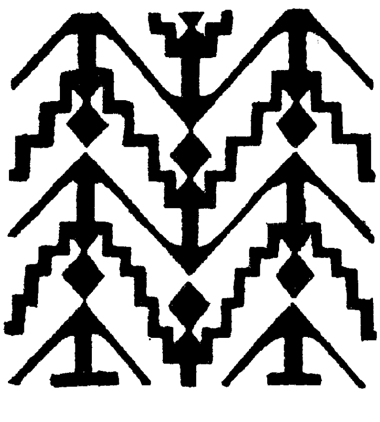


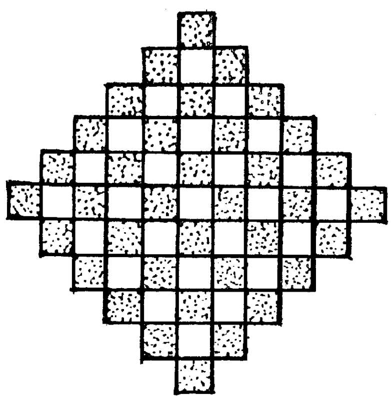
Ilustração: Gerdes, P. - 1987, pp. 153-55

Fig. 3



ornamento de uma tigela iraniana - 3000 A.C.

Fig. 4



Padrão de azulejos a 4 cores - Argélia 1339

Fig. 5

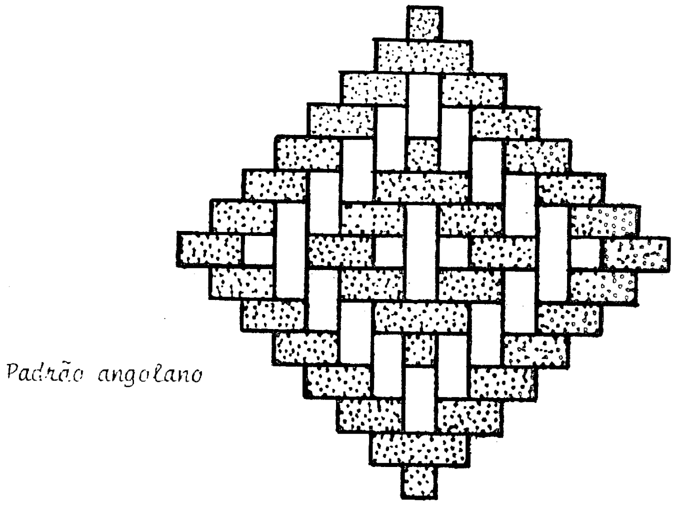
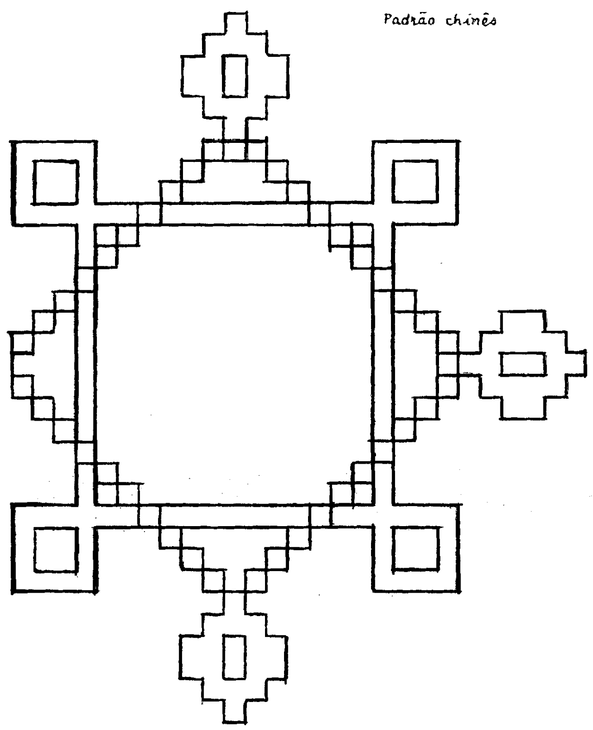


Fig. 6

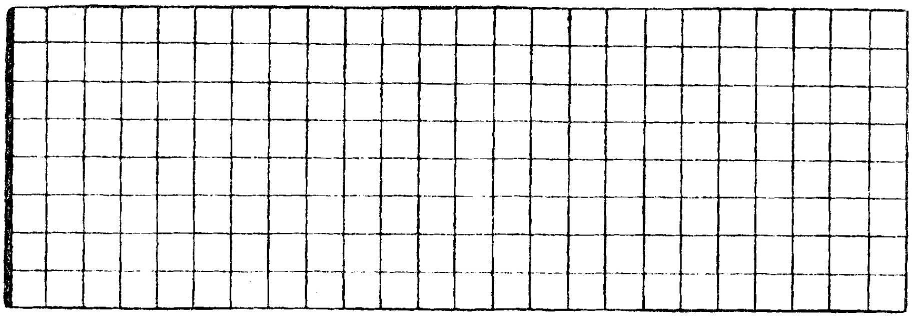


Uma coisa comum que se observa em todos esses padrões é a presença de quadrados na composição de cada um. Uma outra coisa que se nota, em quase todos eles, é que o contorno desses padrões tem sempre a forma de uma escadinha com muitos ou poucos degraus. Vamos, então, partir dessas observações. Vamos chamar de quadrado dentado, qualquer quadrado cujos lados tenham a forma de uma escadinha, composta de vários dentes. Por exemplo, o quadrado dentado da figura 4 deste texto possui 6 dentes. Observe que o interior desse quadrado dentado é composto de quadrinhos dispostos em linhas e colunas.

A linha ou coluna de um quadrado dentado que possui o maior número de quadradinhos é a diagonal do quadrado dentado. Logo, a figura 4 é um quadrado dentado de 6 dentes, cuja diagonal possui 11 quadradinhos.

Desenhe na rede quadriculada seguinte:

1. Um quadrado dentado de 3 dentes.
2. Um quadrado dentado de 2 dentes.



Quantos quadradinhos existe na diagonal de cada um desses quadrados dentados?

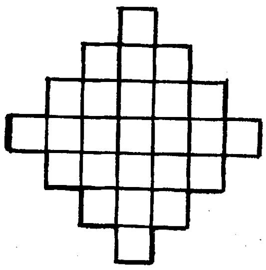
Atividade 2

Observe o quadrado dentado de quatro dentes desenhado a seguir. Utilizando duas cores diferentes (vermelho e preto), pinte todos os quadrinhos que compõem esse quadrado dentado como se ele fosse um tabuleiro de xadrez.

Chame o quadrado dentado assim obtido de "quadrado dentado xadrez de quatro dentes".

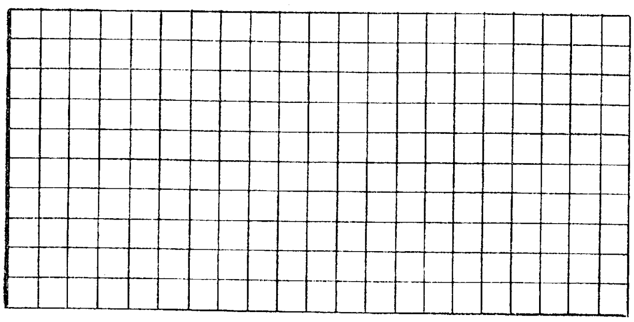
a) Quantos quadrinhos você pintou de vermelho?

b) Quantos quadrinhos você pintou de preto?



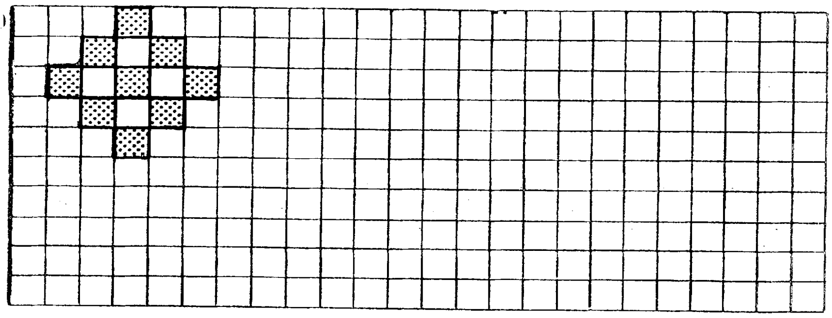
c) Tomando o quadradinho como unidade de área, qual é a área ocupada pelo quadrado dentado xadrez?

d) É possível construir dois quadrados lisos, um deles contendo só quadradinhos vermelhos e o outro só quadradinhos pretos que ocupem, juntos, a mesma área ocupada pelo quadrado dentado xadrez? Em caso afirmativo, construa-os na rede quadriculada seguinte.

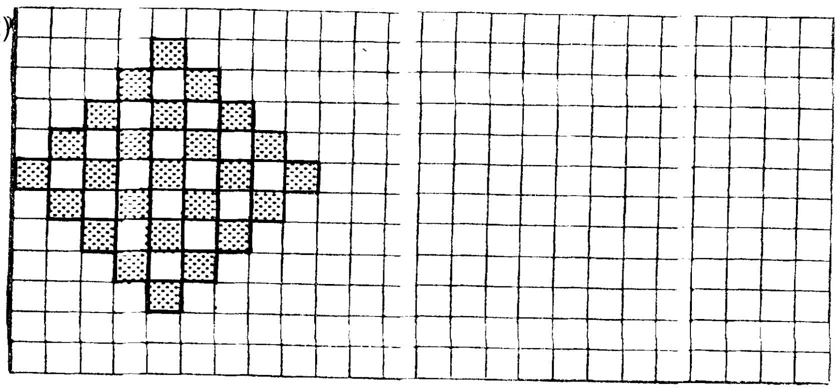


e) Transforme, se possível, cada um dos quadrados dentados xadrez seguintes em dois quadrados lisos que ocupem, juntos, a mesma área que a do quadrado dentado correspondente.

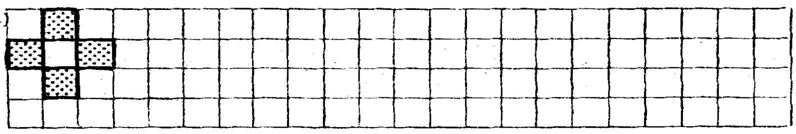
1)



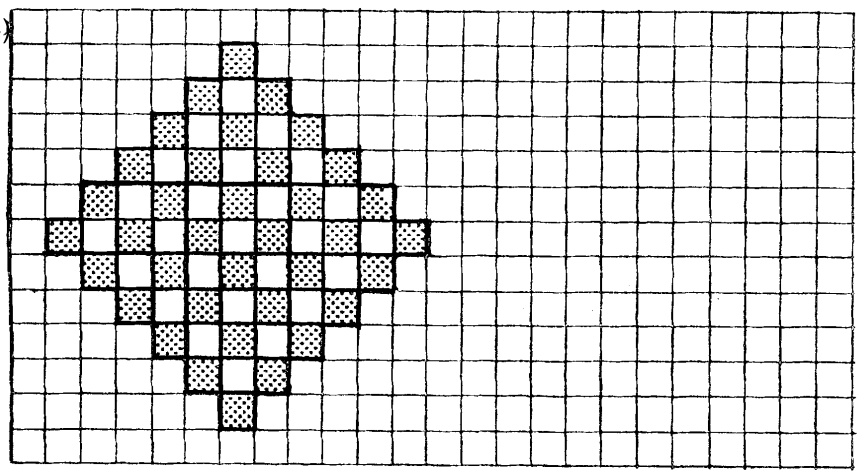
2)

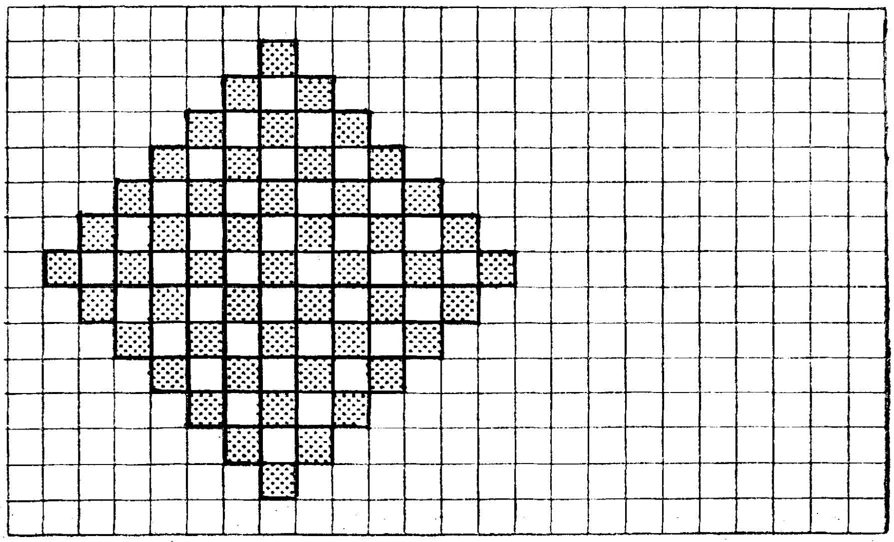


3)



4)

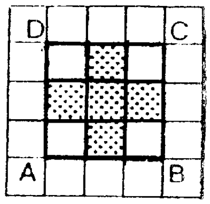


5)


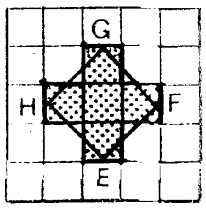
f) Dado um quadrado dentado qualquer, é sempre possível transformá-lo em dois quadrados lisos que ocupem juntos a mesma área que a do quadrado dentado?

Atividade 3

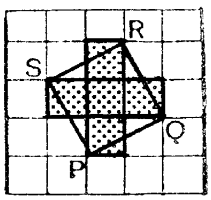
a) Observe o quadrado dentado de dois dentes, inscrito no quadrado liso ABCD ao lado, cujo lado possui a mesma medida que a diagonal do quadrado dentado. Quem ocupa maior área: o quadrado dentado ou o quadrado liso? Explique por que.



b) Observe o quadrado dentado de dois dentes, e o quadrado liso EFGH onde E, F, G e H são pontos médios dos lados dos quadradinhos das extremidades das duas diagonais do quadrado dentado. Quem ocupa maior área: o quadrado dentado ou o quadrado liso? Por quê?



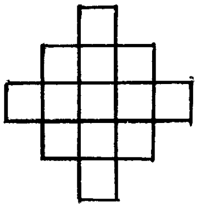
c) Observe o quadrado dentado de dois dentes e o quadrado liso PQRS onde P, Q, R e S são vértices dos quadradinhos das extremidades das duas diagonais do quadrado dentado, ligados conforme a figura ao lado. Quem ocupa maior área: o quadrado dentado ou o quadrado liso? Por quê?



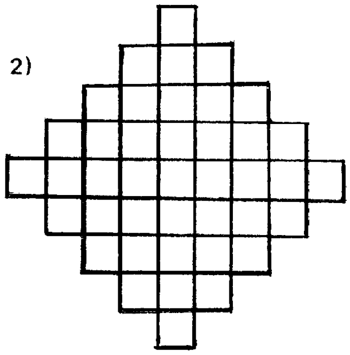
Atividade 4

a) Considere os quadrados dentados de 3, 4, 5 e 6 dentes abaixo. Para cada um dele trace um quadrado liso que ocupe a mesma área que eles. Explique porque essas áreas são iguais.

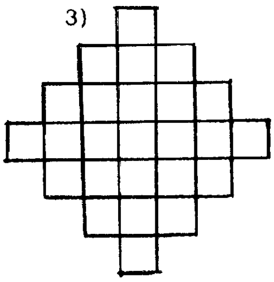
1)



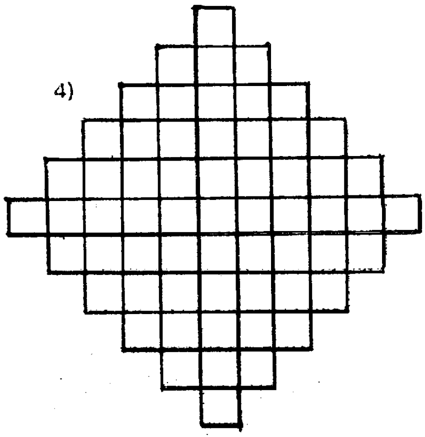
2)



3)



4)

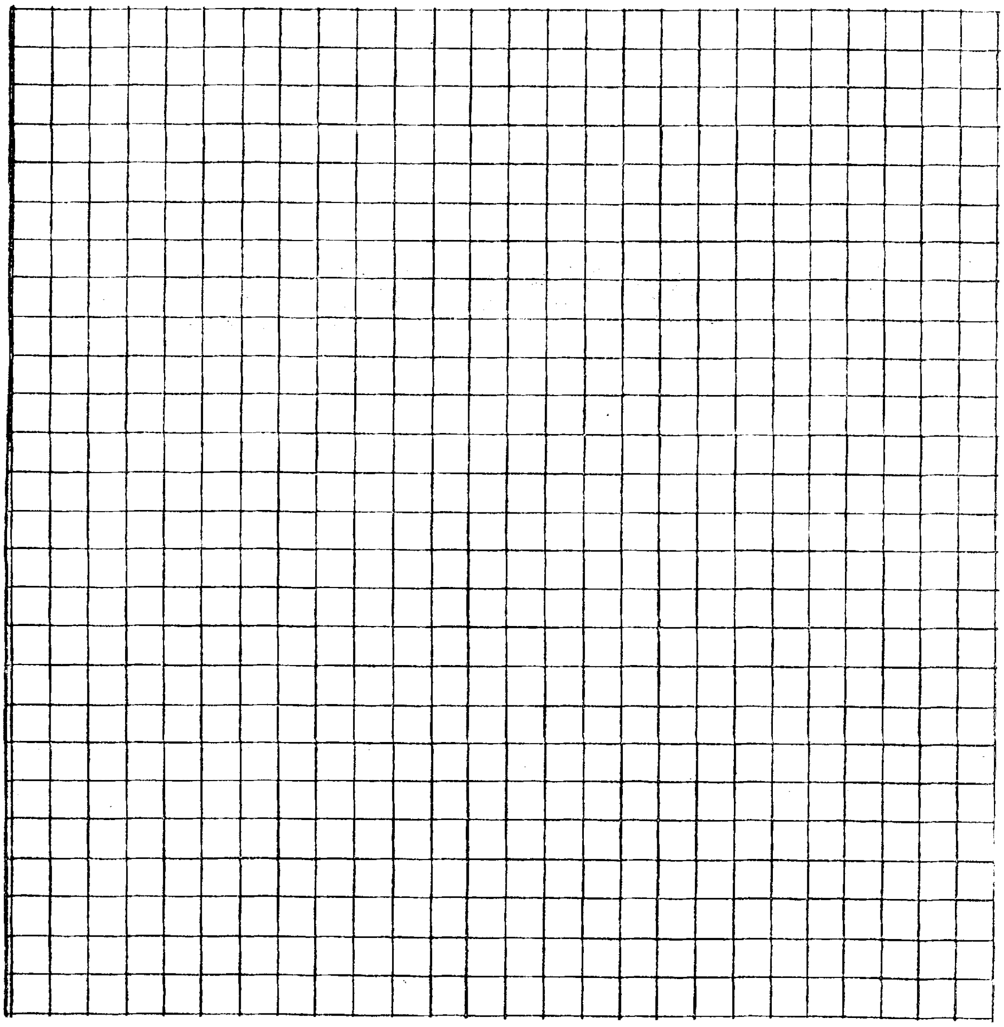


b) Dado um quadrado dentado com um número qualquer de dentes, é sempre possível construir um quadrado liso que ocupe a mesma área que ele? Como?

Atividade 5

O objetivo desta atividade é fazer com que você continue verificando se, dados dois quadrados lisos, é sempre possível construir um único quadrado liso que ocupe a mesma área que ambos. Para isso, tente construir um quadrado dentado que ocupe a mesma área que a dos dois lisos juntos. Em seguida, transforme esse quadrado dentado em um único quadrado liso de mesma área que o dentado.

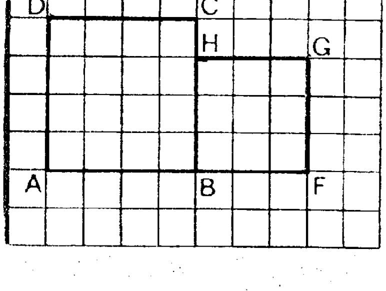
Utilizando esse método, resolva novamente os 5 itens da 1ª atividade. Ele funciona para todos os casos?

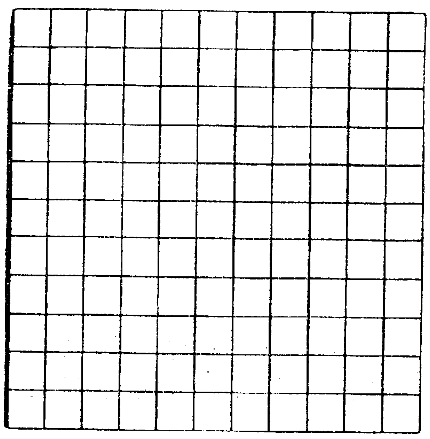


O objetivo das atividades seguintes é fazer com que você aprenda, tendo por base o método anterior, um novo método que permita transformar dois quadrados lisos quaisquer num único quadrado liso equivalente a ambos.

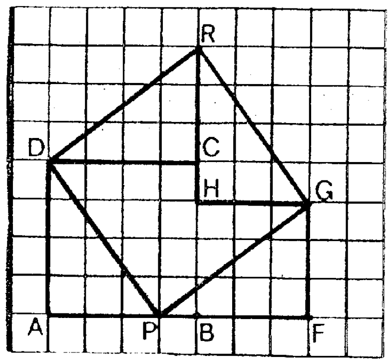
Atividade 6

Considere os quadrados lisos ABCD e BFGH seguintes.





a) Construa na rede quadriculada anterior o quadrado dentado cuja área equivale às áreas dos quadrados ABCD e BFGH juntos.
b) Sobre esse quadrado dentado construa o quadrado liso cuja área equivale às áreas dos quadrados ABCD e BFGH juntos.
c) Na figura seguinte, o quadrado PGRD construído no item anterior, está sobreposto aos quadrados ABCD e BFGH, de modo que o maior número possível de vértices do quadrado PGRD pertence aos lados dos quadrados ABCD e BFGH. Além disso, o segmento BH, que não aparece na figura, foi prolongado de modo a obter o segmento HR. Analisando a figura responda:



1. Após a sobreposição, quantos vértices do quadrado PGRD pertencem aos lados dos quadrados ABCD e BFGH? Quais são eles?

2. Após a sobreposição, qual é a relação que existe entre os segmentos AP e BF?

3. Os triângulos APD e HGR ocupam a mesma área? Justifique sua resposta.

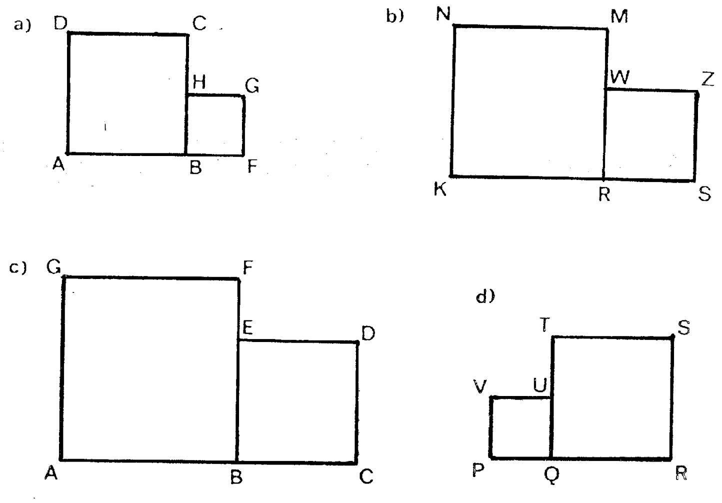
4. Os triângulos FGP e CRD ocupam a mesma área? Justifique sua resposta.

5. O polígono AFGHCD ocupa a mesma área que o quadrado PGRD? Justifique sua resposta.

6. Descreva um método de se decompor o polígono AFGHCD (obtido pela justaposição dos quadrados ABCD e BFGH) de modo que as partes assim obtidas cubram exatamente o quadrado PGRD.

Atividade 7

Utilizando apenas régua e compasso e o método descrito na atividade anterior, construa diretamente o quadrado cuja área é a soma das áreas de cada par de quadrados seguintes:

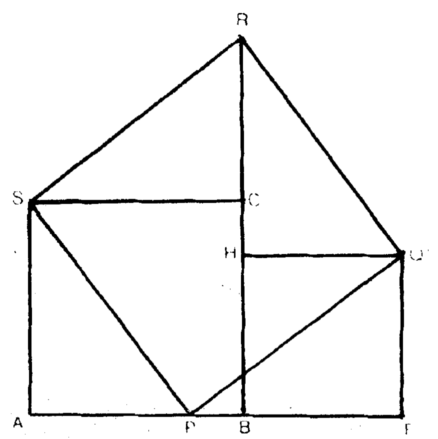


d) Construa dois quadrados quaisquer e o quadrado cuja área seja igual à soma das áreas dos dois quadrados construídos.

O objetivo da atividade seguinte é fazer com que você verifique, utilizando o método anteriormente aprendido, se as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa desse mesmo triângulo.

Atividade 8

Como você já sabe, a figura ao lado representa o método de dissecção de dois quadrados para se obter um único quadrado equivalente a ambos.



a) Explique por que o triângulo APS é um triângulo retângulo.

b) Quantos quadrados existem na figura?

c) Qual é o quadrado da figura cujo lado possui a mesma medida que a do cateto AP do triângulo APS?

d) Qual é o quadrado cujo lado possui a mesma medida que a do cateto AS do triângulo APS?
e) Qual é o quadrado cujo lado possui a mesma medida que a da hipotenusa PS do triângulo APS?
f) Observando a figura, explique por que é verdade a afirmação de que, num triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

5. O Teorema de Pitágoras que não é de Pitágoras

A afirmação anterior, que você comprovou ser sempre verdadeira, de que num triângulo retângulo qualquer, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, é conhecida atualmente pelo nome de Teorema de Pitágoras.

Mas sabe-se, hoje, que é bastante improvável que Pitágoras ou outro pitagórico a tenha descoberto.

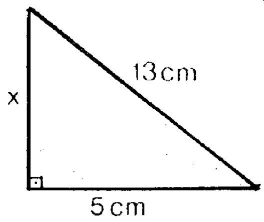
Essa relação, pelo menos para alguns triângulos retângulos, já era conhecida pelos babilônicos e provavelmente, pelos egípcios e outros povos há milhares de anos antes de Pitágoras.

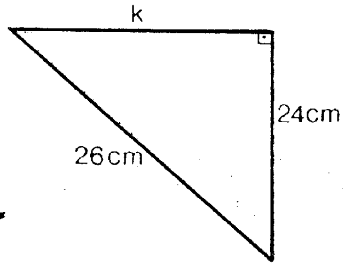
Mas é provável que os pitagóricos tenham dado a primeira prova de que essa afirmação era válida para qualquer triângulo retângulo.

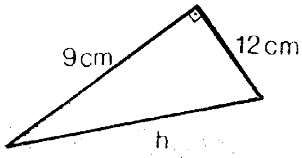
E os povos antigos realmente tinham razão, pois o "Teorema de Pitágoras" é equivalente à afirmação de que é sempre possível construir um único quadrado que ocupe a área que a de dois quadrados dados, juntos.

Atividade 9

a) A área do quadrado construído sobre um dos catetos de um triângulo retângulo é 9 cm^2 e a área do quadrado construído sobre o outro cateto é de 16 cm^2. Determine a área do quadrado construído sobre a hipotenusa desse triângulo retângulo e a medida de cada um de seus lados.
b) A área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é 100 cm^2 e a área do quadrado construído sobre um de seus catetos é 36 cm^2. Determine a área do quadrado construído sobre o outro cateto desse triângulo retângulo e a medida de cada um de seus lados.
c) Determine, para cada triângulo retângulo abaixo, a medida do lado desconhecido.



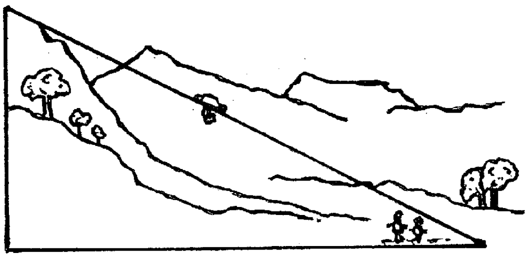




d) Dois ciclistas partem de um mesmo local, sendo que um deles segue por uma estrada retilínea para o norte e o outro por uma estrada retilínea a leste. Determine a distância que os separa depois de duas horas, sabendo que pedalam a uma velocidade constante de 9 Km/h e 12 Km/h respectivamente.

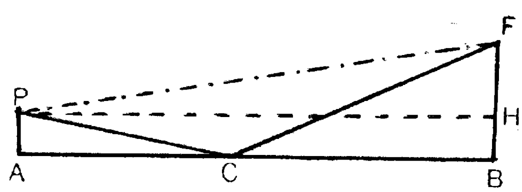
e) Uma escada de 3,75 m de comprimento está apoiada em uma parede e seu pé dista 2,25 m da parede. A que altura do chão a escada chega?

f) Na época de colheita de forragens, alguns povos que vivem em montanhas amarram e soltam os feixes de feno numa roda-polia, que desliza até o vale por um cabo de ferro, como na figura abaixo. Sabendo que o desnível entre o ponto do qual a polia é solta e o ponto mais baixo que ela atinge é de 1600 m e que a distância horizontal é de 3000 m, qual deve ser o comprimento do cabo?



Castelnuovo, E. _ 1966, p. 204

g) Numa cidade localizada a 2100 m de altitude (ponto C da figura), partem dois teleféricos: um em direção ao pico F de uma montanha e o outro em direção ao pico P de uma outra montanha. Os pontos F e P têm, respectivamente, comprimentos iguais a 1000 m e 625 m. Que comprimento teria o trajeto PF de um teleférico que unisse diretamente os pontos P e F?



h) Verifique se o Teorema de Pitágoras é válido para triângulos que não sejam retângulos. Para isso, construa numa folha de papel pelo menos um triângulo obtusângulo e um acutângulo e compare as áreas dos quadrados construídos sobre seus lados.

6. O número governa o universo

Pela atividade anterior você deve ter sentido a força do Teorema de Pitágoras. Os povos antigos também a sentiram. Isso porque ele aplicava-se na construção de habitações, na arquitetura, na agrimensura, na construção de canais, na abertura de túneis, na astronomia, etc.

Devido, justamente, às inúmeras aplicações materiais, os homens antigos também levaram o Teorema de Pitágoras para o domínio das antes.

Retrataram-no através de seus desenhos, pinturas e tapeçarias.

Explique porque os trabalhos a seguir podem representar casos particulares do Teorema de Pitágoras.

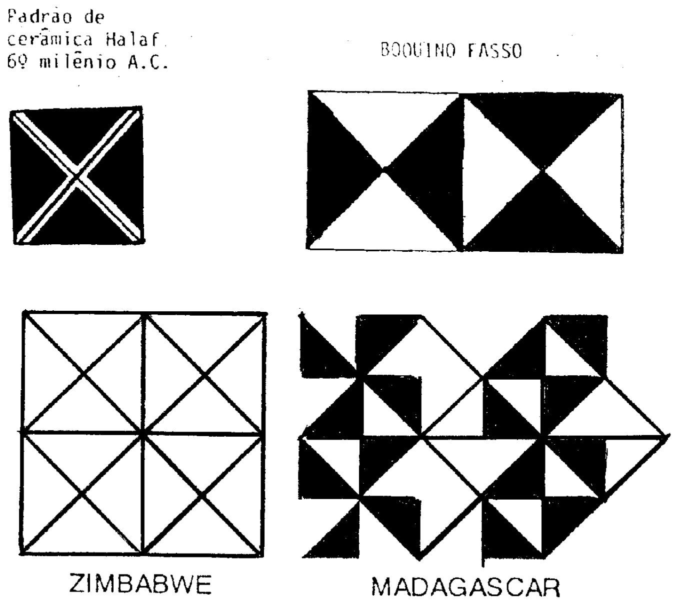


ILustração: Gerdes, P. - 1987 - pp.148 - 49

E como não poderia deixar de acontecer, levaram-no também ao plano religioso, atribuindo-lhe um significado místico. Nas religiões antigas era bastante comum combinar vários deuses afim de se obter um único deus. Assim como, para fins místicos, era familiar entre eles atribuir valores numéricos a cada letra do alfabeto e determinar o valor de uma palavra através da soma dos valores das letras que a compõem, é bastante provável que identificassem os deuses com quadrados e a determinação do "valor" de um deus através da soma das áreas dos quadrados que representassem os deuses geradores daquele deus.

Em um dos livros sagrados dos hindús, por exemplo, acha-se escrito que "no começo Rishis criou 7 pessoas separadas que eram identificadas com quadrados" e depois acrescenta: "Façamos destas 7 pessoas um única pessoa!".

Sabe-se também que os egípcios sabiam que o triângulo de lados 3, 4 e 5 unidades era um triângulo retângulo e associavam os catetos desse triângulo com seus deuses Osíris (o deus morto que gerou um filho no mundo dos mortos) e Ísis (mulher de Osíris) e a hipotenusa, com o deus em forma de falcão chamado Hórus (filho de Osíris e Ísis), cuja encarnação era o faraó que governava o povo egípcio.

Entre os gregos, o Teorema de Pitágoras foi relacionado com o casamento.

Mas se as palavras podiam ser reduzidas a números e, através destes, fazer prognósticos a respeito das vidas das pessoas, se os próprios deuses podiam ser reduzidos a números, através da comparação que o Teorema de Pitágoras estabelecia entre eles, não foi difícil a partir dessas crenças, levantar e defender uma outra crença bem mais audaciosa: "Tudo na natureza se reduz a números".

"A tudo corresponde um número e tudo pode ser explicado através do número".

Foi essa a bandeira erguida por Pitágoras e defendida pelos pitagóricos, que encararam essa crença como uma verdade absoluta. Você deve estar achando bastante estranha essa afirmação de que tudo é número. Mas as pessoas que viveram na época de Pitágoras também a acharam. Conta-se que, certo dia, alguém pediu a um pitagórico chamado Eurytos, para lhe provar que o homem é um número. O que fez Eurytos? Pegou uns pedacinhos de pedra e com eles formou o contorno de um homem. Em seguida, colocou um a um os pedacinhos de pedra sobre o contorno, contou-os: 1, 2, 3, ... chegando a um número. Por exemplo, 666. Disse então, esse homem é 666!

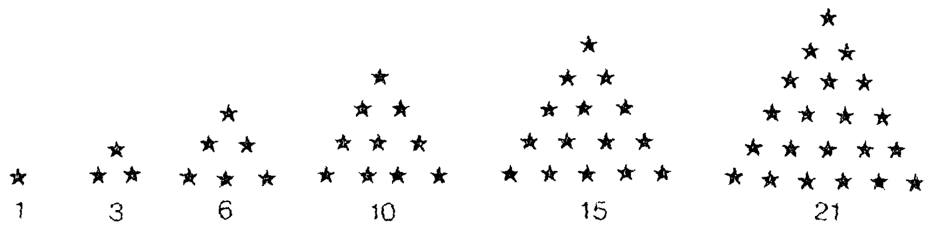
Você deve estar pensando... Mas seria Eurytos assim tão imbecil para não perceber que o homem é "muito mais" do que um número por maior que este possa ser? É claro que tanto Eurytos quanto os pitagóricos não eram assim tão ingênuos. Como entender então os seus propósitos? É claro que ele não queria dizer que o homem é apenas um número. Mas, na guerra, na economia, na política é possível que ele considerasse os homens como quantidades limitadas, assim como são as figuras e os números. Não é esse o segredo do poder? Segundo um matemático de nossa época, é necessário ver nesses pitagóricos os ancestrais de nossos tecnocratas frios, distantes, impessoais, desumanos. O homem, para esses tecnocratas, não passa de uma matrícula, de um número, de uma informação: nome, sobrenome, data e local de nascimento, endereço. Os tecnocratas, com seus cálculos, não fazem o mesmo que Eurytos com suas pedrinhas?

A crença de que "tudo é um número", portanto, não havia caído do céu. Ela tinha objetivos políticos claros; um deles sendo o de conduzir o homem e a política por simples manipulação baseada no número e na figura.

Para isso, Pitágoras acaba identificando o ponto da geometria com o número da aritmética. Daí por diante, vê um ponto quando se fala do número 1, e imediatamente imagina o número 3 quando vê três pontos. Estranha associação não é mesmo? Como Pitágoras chegou a ela?

Foi observando as estrelas do céu que ele teve a idéia de identificar pontos e números. Ele verificou que uma constelação como a Ursa Maior, por exemplo, é representada, por simples pontos de estrelas. Veio-lhe, então, naturalmente, a ambição de representar toda forma por uma figura. E reduzindo toda figura a uma constelação de pontos, é claro que toda forma geométrica se reduziria a um conjunto de pontos. Em seguida, Pitágoras observa que a forma da constelação podia ser definida por dois aspectos: um deles dizia respeito ao número de estrelas (conceito de números-pontos) e o outro dizia respeito à estrutura da constelação (conceito de figura-pontos). Dessa forma chegou à noção de números figurados. Assim, o três será o triângulo, o quatro o quadrado, o cinco o pentágono e assim por diante.

Mas além do teorema que leva seu nome, Pitágoras, trabalhando com esses números figurados (as estrelas-pontos), acabou descobrindo relações matemáticas que reforçaram ainda mais a crença de que "tudo é número". Uma dessas descobertas afirmava que os triângulos equiláteros cada vez maiores, construídos com pontos-estrelas, podem ser obtidos a partir dos menores, e que

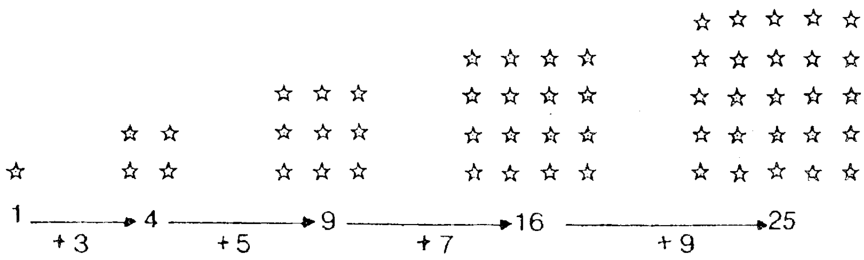


essa construção podia ser expressa através de uma soma de números. Para compreender essa descoberta, observe as formações triangulares seguintes:

Se você comparar essa seqüência de "números triangulares", isto é, a seqüência 1, 3, 6, 10, 15, 21, etc. com a seqüência dos números naturais 1, 2, 3, 4, 5, ... você observará que: a soma dos dois primeiros números naturais é igual ao segundo número triangular, isto é, 1 + 2 = 3; a soma dos três primeiros números naturais é igual ao terceiro número triangular, isto é, 1 + 2 + 3 = 6, e assim por diante.

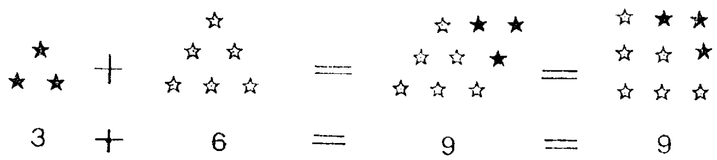
Daí, para obter o segundo triângulo da série, basta acrescentar 2 pontos ao primeiro; para se obter o terceiro, basta acrescentar 3 pontos ao segundo e assim por diante.

De forma semelhante, os pitagóricos falavam em "números quadrados". Observe os quadrados abaixo, construídos com pontos isolados:



Os pitagóricos descobriram que um quadrado qualquer da série poderia ser obtido, somando-se um número ímpar de pontos ao quadrado anterior.

Como se não bastasse isso, os pitagóricos descobriram a existência de uma relação entre os números triangulares e os números quadrados. Descobriram que a soma de dois números triangulares consecutivos é sempre igual a um número quadrado, isto é, a um quadrado perfeito.



Exemplo:

Seguindo um raciocínio semelhante para os demais polígonos regulares (pentágonos, hexágonos, etc.) os pitagóricos concluíram que o domínio das formas geométricas, isto é, a geometria, também era governada pelos números e que todos os objetos do mundo físico, eram construídos de pontos e diferiam apenas na aparência, na forma, isto é, no arranjo espacial desses pontos, mas tudo, no fundo, era número.

Todas as descobertas dos pitagóricos pareciam reforçar essa crença. Mas uma delas acabou dando o arremate final. Ela se deu no domínio da música.

Se você pressionar com o dedo exatamente o ponto médio de uma corda de um violão, a nota emitida pela corda assim pressionada está a uma oitava a cima da nota que essa mesma corda emitiria se não fosse pressionada em ponto algum. Em outras palavras, dividindo um pelo outro os comprimentos dos seguimentos formados na corda, depois e antes de ser pressionada, a fim de que ela emita sons em intervalos de oitava, obtemos a fração $\frac{1}{2}$.

Para que a corda emita sons em intervalos de quinta (de dó a sol, de sol a ré, de ré a lá, etc.), basta dividí-la em três partes iguais e pressioná-la a uma distância equivalente a 2 dessas partes, isto é, dividindo um pelo outro os comprimentos dos seguimentos formados na corda, depois e antes de ser pressionada, a fim de que ela emita sons em intervalos de quinta, obtemos a fração $\frac{2}{3}$. E assim por diante.

Pronto! Os números governavam até mesmo os sons. A harmonia musical é número. Tudo no universo é harmonia e número. Haveria algo que pudesse destruir essa harmonia? De por abaixo essa crença?

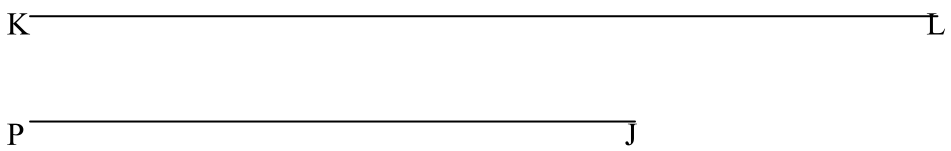
Atividade 10

Suponha que os seguimentos de retas KL e PJ abaixo representem dois trechos de uma mesma estrada.

Esses seguimentos devem receber placas de sinalização, em toda a sua extensão, de modo que:

1. As distâncias entre as placas, em ambos os trechos, sejam iguais;
2. As placas, em ambos os trechos, sejam colocadas à maior distância possível uma da outra.

Utilizando apenas um compasso tente determinar, em ambos os segmentos, os pontos onde essas placas devem ser colocadas.



O objetivo das atividades seguintes é fazer com que você aprenda um método para achar um seguimento de reta que caiba um número inteiro de vezes em dois segmentos quaisquer dados.

Atividade 11

Considere os segmentos MN e PQ abaixo. Utilizando um compasso para transportar segmentos execute os itens seguintes.

1. Extraia o segmento PQ do segmento MN o maior número possível de vezes.

2. Após a subtração anterior existiu alguma sobra?

3. O segmento PQ é divisor do segmento MN? Por quê?

4. O segmento PQ é divisor de si próprio? Por quê?

5. O segmento PQ é *divisor comum* de $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$? Por quê?

6. Poderia existir um segmento maior do que $\overline{PQ}$ que também fosse divisor comum de $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$? Por quê?

7. Qual é o segmento que é o *maior divisor comum* de $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$?

Atividade 12

Considere os segmentos EF e GH abaixo. Utilizando um compasso para transportar segmentos execute os itens seguintes.

1. Extraia o segmento GH do segmento EF o maior número possível de vezes.

2. Após a subtração anterior, existiu alguma sobra?

3. O segmento GH é divisor do segmento EF? Por quê?

4. Tome no compasso o segmento IF correspondente à sobra encontrada no item a.

5. Extraia o segmento IF do segmento GH o maior número possível de vezes.

6. Após a subtração anterior, existiu alguma sobra?

7. O segmento IF é divisor do segmento GH? Por quê?

8. O segmento IF é divisor do segmento EF? Por quê?

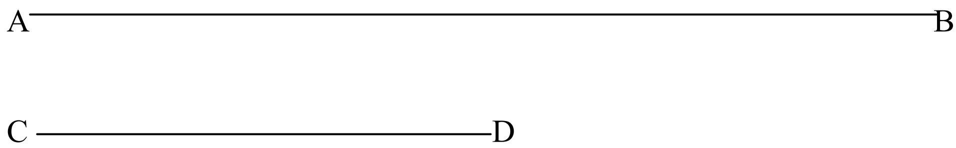
9. O segmento IF é *divisor comum* de $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$? Por quê?

10. Existe um segmento maior do que $\overline{IF}$ que também seja divisor comum de $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$? Por quê?

11. Qual é o segmento que é o m.d.c. (maior divisor comum) de $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$?

Atividade 13

Considere os segmentos AB e CD abaixo. Utilizando um compasso para transportar segmentos execute os itens seguintes.



1. Extraia o segmento CD do segmento AB o maior número possível de vezes.
2. Após a subtração anterior existiu alguma sobra?
3. O segmento CD é divisor do segmento AB? Por quê?
4. Tome no compasso o segmento EB correspondente à diferença encontrada no item a.
5. Extraia o segmento EB do segmento CD o maior número possível de vezes.
6. Após a subtração anterior existiu alguma sobra?
7. O segmento EB é divisor do segmento CD? Por quê?
8. Tome no compasso o segmento FD correspondente à sobra encontrada na item e.
9. Extraia o segmento FD do segmento EB o maior número possível de vezes.
10. A subtração anterior deixou alguma sobra?
11. O segmento FD é divisor do segmento EB? Por quê?
12. O segmento FD é divisor do segmento CD? Por quê?
13. O segmento FD é divisor do segmento AB? Por quê?
14. O segmento FD é divisor comum dos segmentos AB e CD? Por quê?
15. Existe um segmento maior que $\overline{CD}$ que seja também divisor comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$? Por quê?
16. Qual é o segmento que é o m.d.c. entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$?
17. Volte à atividade 29 e resolva o problema da colocação das placas de sinalização nas estradas KL e PJ.

7. O Método das subtrações Sucessivas

Nas atividades de 11 a 13 você verificou que para encontrar o segmento que seja o maior divisor comum entre dois segmentos dados fazemos o seguinte:

1. Subtraímos o segmento menor do segmento maior o maior número possível de vezes. Caso essa diferença seja zero, isto é, caso o segmento menor caiba um número exato de vezes no maior, então, o m.d.c. entre eles será o segmento menor.

2. Caso a diferença anterior não seja zero, isto é, caso haja sobra, subtraímos o segmento correspondente a essa sobra do segmento menor, o maior número possível de vezes. Caso o segmento correspondente a essa sobra caiba um número exato de vezes no segmento menor, então, o m.d.c. entre os segmentos dados será essa primeira sobra encontrada.

3. Caso isso não se verifique repete-se o processo até encontrar uma diferença zero.

Esse método de determinação do segmento maior divisor comum entre dois segmentos dados, chamado *método das subtrações sucessivas*, já era conhecido e utilizado há muito tempo antes de Cristo.

Esse método também se aplica para a determinação do maior divisor comum entre dois ou mais números naturais.

Sempre que for possível encontrar o maior divisor comum entre dois segmentos, eles serão chamados de SEGMENTOS COMENSURÁVEIS, pois é possível expressar a medida de um deles utilizando o outro como unidade de medida.

Atividade 14

a) Utilizando o método das subtrações sucessivas e as barrinhas amarela e marrom, mostre geometricamente e aritmeticamente que dois segmentos de retas cujas medidas são 4u e 6u, são comensuráveis. Diga também qual é a medida do maior segmento que cabe exatamente em ambos ao mesmo tempo.

b) Utilizando as barrinhas dourada e amarela, faça o mesmo para mostrar que dois segmentos cujas medidas são 10u e 4u são comensuráveis. Qual é o m.d.c. entre ambos? Qual é a medida do maior quando se usa o menor como unidade?

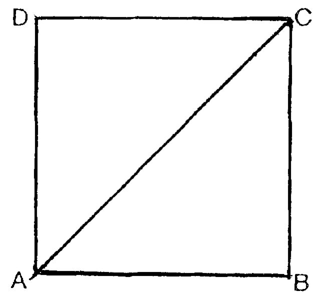
c) Utilizando compasso e calculadora, mostre geometricamente e aritmeticamente que dois segmentos de medidas 2,2u e 1,3u são comensuráveis. Qual é o m.d.c. entre ambos? Qual é a medida do maior quando se usa o menor como unidade? Expresse essa medida em fração e número decimal.

d) Faça o mesmo para mostrar que dois segmentos de reta cujas medidas são $\frac{3}{4}$u e 0,666...u são comensuráveis. Diga qual é o m.d.c. entre ambos. Expresse em fração e em número decimal, a medida do maior desses segmentos, quando se utiliza o menor como unidade.

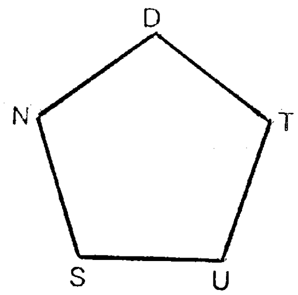
e) Trabalhando com as barrinhas coloridas, dê vários exemplos que mostrem que é verdadeira a seguinte afirmação:

> Se a e b são dois segmentos comensuráveis e d um segmento que cabe um número inteiro de vezes em ambos, então, d cabe também um número inteiro de vezes em todos os segmentos obtidos ao se aplicar o método das subtrações sucessivas aos segmentos a e b.

f) Considere o quadrado ABCD ao lado. Você acha que o lado desse quadrado e a sua diagonal AC são segmentos comensuráveis? Por quê?



g) Considere o pentágono regular ao lado. Você acha que o lado desse pentágono e a sua diagonal DS são segmentos comensuráveis? Por quê?



8. A volta da estrela

Ao executar a atividade anterior você sentiu que o método das subtrações sucessivas, pelo menos no seu aspecto aritmético, é bastante eficiente. Mas você notou também que esse método, quando empregado geometricamente, deixa bastante a desejar.

Isso porque, na maioria dos casos, quando a diferença entre os segmentos vai se tornando muito pequena, é muito difícil, senão impossível, tomar esses segmentos no compasso ou na régua.

Mas os gregos antigos não possuíam calculadoras e nem um sistema de numeração que lhes permitisse efetuar cálculos rapidamente. Trabalhavam apenas com uma régua sem escala e um compasso e, por essa razão, aplicavam o método das subtrações sucessivas em sua versão geométrica. Mas mesmo assim chegaram a uma conclusão que, talvez, você também tenha chegado ao executar a atividade anterior: a de que qualquer par de segmentos são sempre comensuráveis. Os pitagóricos também assim pensavam e isso estava de acordo com a crença que tinham de que tudo poderia ser expresso por números.

Mas Hipasus de Metapontum, um pitagórico que dirigiu a escola pitagórica logo após a morte de Pitágoras, por volta de 500 anos a.C., abalou os alicerces dessa escola, quando divulgou entre os gregos a descoberta de SEGMENTOS INCOMENSURÁVEIS.

Isso significa que, dados dois segmentos de reta, nem sempre é possível achar um terceiro segmento que caiba um número inteiro de vezes nos dois primeiros.

Você deve estar pensando de que maneira Hipasus teria feito uma tal descoberta, tão chocante! Você quer entender?

Então, já é hora de nossa estrela, que foi abandonada no início deste estudo, voltar a brilhar.

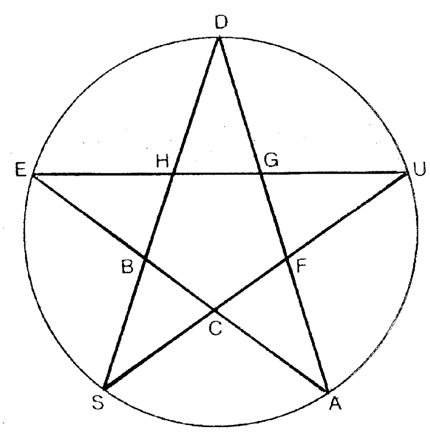
Atividade 15

Considere a estrela de cinco pontas abaixo, inscrita numa circunferência. Os vértices S, A, U, D, E da estrela foram obtidos, dividindo-se a circunferência em cinco partes iguais.

a) Qual é a medida dos arcos SA, AU, UD, DE e ES?

b) Utilizando uma régua, trace os segmentos SA, AU, UD, DE e ES. Qual é o nome do polígono obtido?

c) Considere 3 pontos diferentes de uma circunferência. Se um deles for vértice de um ângulo e os lados desse ângulo passarem pelos outros dois pontos, então, o arco situado no interior desse ângulo é chamado arco inscrito nesse ângulo.



1. Nomeie todos os ângulos da figura ao lado nos quais o arco SA está inscrito.
2. O arco SA está inscrito no ângulo ACS? Por quê?
3. Nomeie todos os ângulos da figura nos quais o arco ES está inscrito.
4. Nomeie todos os ângulos da figura nos quais o arco SD está inscrito.
5. Utilizando um transferidor meça todos os ângulos nos quais o arco SA está inscrito. Que relação existe entre a medida de cada um desses ângulos e a medida do arco neles inscrito?

d) Pinte de azul os triângulos SCA, AFU, UGD, DHE e EBS e de vermelho os triângulos SCB, AFC, UGF, DHG e EBH da figura.

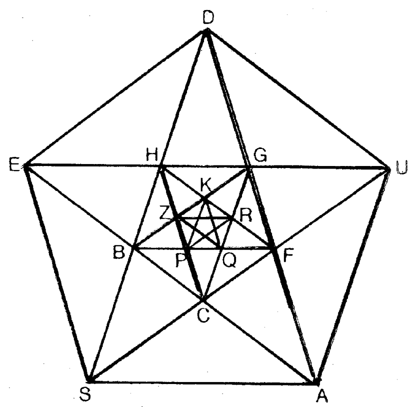
e) Sem utilizar transferidor, anote na figura as medidas de todos os ângulos que têm vértice nos pontos S, A, U, D, E, B, C, F, G e H. Explique como você determinou essas medidas.
f) Explique por que todos os triângulos pintados de azul são isósceles e congruentes.
g) Explique por que todos os triângulos pintados de vermelho são isósceles e congruentes.
h) Explique por que o polígono BCFGH é um pentágono regular, isto é, um pentágono que possui todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.
i) Trace todas as diagonais do pentágono BCFGH e verifique que uma nova estrela e um novo pentágono se formaram. Explique porque todos os novos triângulos que se formaram são isósceles.

O objetivo da atividade seguinte é fazer com que você verifique, utilizando o método das subtrações sucessivas, que o lado DE e a diagonal DS do pentágono SAUDE são segmentos incomensuráveis.

Atividade 16

Considere a série de pentágonos e pentagramas da figura seguinte. As afirmações seguintes são todas verdadeiras. Observando a figura tente justificar cada uma delas.

Afirmação 1: A diferença entre as medidas da diagonal DS e do lado DE do pentágono SAUDE é igual à medida da diagonal CH do pentágono HGFCB.



Afirmação 2: A diferença entre as medidas do lado DE do pentágono SAUDE e da diagonal CH do pentágono HGFCB é igual à medida do lado HB do pentágono HGFCB.

Afirmação 3: A diferença entre as medidas da diagonal CH do pentágono HGFCB e do lado HB desse mesmo pentágono é igual à medida da diagonal ZQ do pentágono PQRKZ.

Afirmação 4: Se existir um segmento de medida x que caiba um número inteiro de vezes no lado e na diagonal do pentágono SAUDE, então, x deverá caber um número inteiro de vezes nos lados e nas diagonais de todos os pentágonos da figura e de todos os pentágonos cada vez menores que pudermos imaginar.

Afirmação 5: Mas esse segmento x não existe, isto é, sua medida é zero. Logo, o lado e a diagonal do pentágono SAUDE são segmentos incomensuráveis.

9. A queda de uma crença

O mesmo raciocínio desenvolvido por você nas duas atividades anteriores deve ter sido, provavelmente, utilizado por Hipasus para convencer os seus contemporâneos da existência de segmentos incomensuráveis. Mas essa prova não teve apenas uma importância matemática. Ela teve também conseqüências filosóficas, pois ela se chocava com a crença pitagórica de que para tudo existia um número. Mas que número haveria para expressar a medida da diagonal de um pentágono quando se usa o seu lado como unidade de medida?

Segundo Hipasus, não haveria número algum! E isso os pitagóricos não poderiam aceitar. Agora, podemos entender a causa do ódio que os pitagóricos sentiram por Hipasus, porque ergueram-lhe um túmulo sem que estivesse morto e porque expulsaram-lhe da escola.

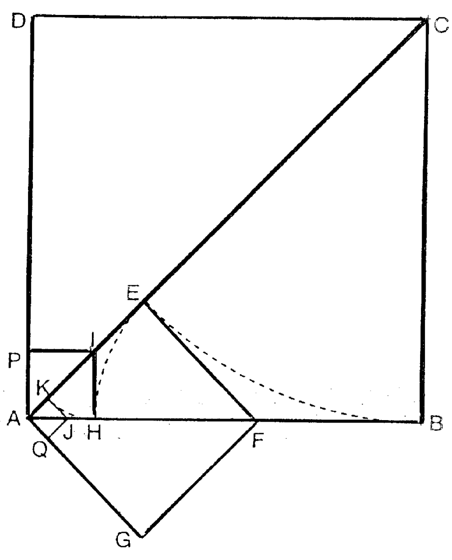
Você deve estar perguntando: mas o que há de mal em se desmentir uma crença? Acontece que essa crença dava sustentação à dominação política exercida pela escola pitagórica. E a queda dessa crença abria a possibilidade das pessoas questionarem essa dominação. O que estava em jogo não era mais a ciência, mas o poder. Um poder do qual os pitagóricos não queriam abrir mão. O caráter aristocrático e fechado da escola pitagórica já havia motivado uma revolta popular na cidade de Crotona na qual parece ter perdido a vida o próprio Pitágoras. Agora já não havia mais nem menos um motivo "científico" para manter essa dominação.

Como disse um matemático da atualidade, "pela primeira vez na história da humanidade, um contra-poder matemático vem desestabilizar um poder que se fundamentava na matemática". É claro que esse contra-poder foi a descoberta de Hipasus.

Mas, como se não bastasse isso, a descoberta de Hipasus iria abalar também aquilo que os pitagóricos julgavam ter sido a sua maior e mais bela descoberta: o Teorema de Pitágoras. Ao executar as atividades você saberá porque.

Atividade 17

O objetivo desta atividade é o de verificar, pelo método das subtrações sucessivas, se o lado BC e a diagonal AC do quadrado ABCD ao lado, são ou não segmentos comensuráveis. O quadrado AEFG, foi construído de tal modo que a medida do lado é igual à diferença entre as medidas da diagonal e do lado do quadrado ABCD. O quadrado AHIP foi construído de tal modo que a medida de seu lado é igual à diferença entre as medidas da diagonal e do lado do quadrado AEFG. O lado do quadrado AQJK é igual à diferença entre as medidas da diagonal e do lado do quadrado AHIP.



Diga se cada uma das afirmações seguintes é ou não verdadeira, e justifique suas respostas.

Afirmação 1: A diferença entre as medidas da diagonal AC e do lado BC do quadrado ABCD é igual à medida do lado AE do quadrado AEFG.

Afirmação 2: A diferença entre as medidas dos lados BC do quadrado ABCD e do lado AE do quadrado AEFG é igual à medida da diagonal AF do quadrado AEFG.

Afirmação 3: $\mathrm{m}\left(\overline{AF}\right)$ - $\mathrm{m}\left(\overline{EF}\right) = \mathrm{m}\left(\overline{AH}\right)$

Afirmação 4: $\mathrm{m}\left(\overline{AE}\right)$ - $\mathrm{m}\left(\overline{HI}\right) = \mathrm{m}\left(\overline{AK}\right)$

Afirmação 5: Se existir um segmento de medida x que caiba um número inteiro de vezes no lado e na diagonal do quadrado ABCD, então, x deverá caber um número inteiro de vezes nos lados e nas diagonais de todos os quadrados da figura e de todos os quadrados cada vez menores que pudermos imaginar.

Afirmação 6: Mas esse segmento x não existe, isto é, sua medida é zero. Logo, o lado e a diagonal do quadrado ABCD são segmentos incomensuráveis.

Atividade 18

Considere novamente o quadrado ABCD da atividade anterior.

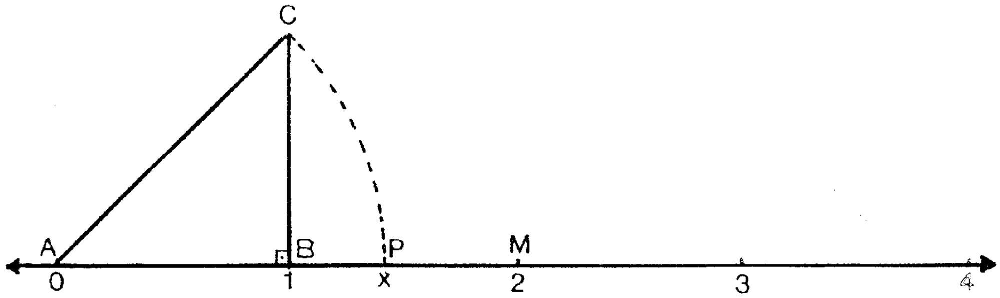
a) Qual é a medida da diagonal desse quadrado, se seu lado mede 1u?

b) Utilizando uma calculadora, verifique se a resposta que você deu no item anterior verifica o Teorema de Pitágoras. Caso não satisfaça, tente outras respostas e tente levantar alguma explicação para o que está acontecendo.

10. Uma lacuna na reta

Parece que ao executar a atividade anterior você se deparou com um problema sério! Vamos retomá-lo e tentar compreender a natureza dessa dificuldade. Qual é a medida da diagonal AC do quadrado ABCD cujo lado mede 1u ? Ou, o que dá no mesmo: qual é a medida da hipotenusa AC do triângulo retângulo isósceles ABC, cujos catetos medem 1u ?

É claro que não podemos duvidar da existência de um tal triângulo, uma vez que podemos construí-lo com régua e compasso. E se esse triângulo existe, deve também existir algum número que represente a medida da hipotenusa AC. Mas, que número é esse? Vamos chamá-lo de x. Utilizando um compasso, podemos transportar a medida da hipotenusa AC para a reta numérica como mostra a figura a seguir:



Percebemos então, que o número x, que expressa a medida da hipotenusa, corresponde ao ponto P da reta numérica. O número x, portanto, deve ser maior que 1 e menor que 2. Ou melhor, deverá ser maior que 1 e menor que 1,5 pois P está situado à esquerda do ponto médio do segmento BM. A partir daí, não podemos mais dizer com certeza qual é o valor de x, pois existem infinitos números racionais (sob a forma de fração ou de número decimal) situados entre 1 e 1,5. Entretanto, como o triângulo ABC é retângulo, podemos calcular a valor de x através do Teorema de Pitágoras.

Então, $x^2 = 1^2 + 1^2$. Portanto, $x^2 = 2$.

Como determinar o valor de x nessa equação?

Basta perguntar qual é o número que multiplicado por si mesmo produz 2. E aí, a dificuldade geométrica se transforma numa dificuldade aritmética.

Já sabemos que $1 < x < 1{,}5$.

Como 1,4 está entre 1 e 1,5, suponhamos que $x = 1{,}4$.

Como $1{,}4 \circ 1{,}4 = 1{,}96$, então, x deve ser maior que 1,4 e menor que 1,5. Continuando esse processo de cerco ao número x, chegamos às seguintes conclusões:

1) $x > 1{,}41$ pois $1{,}41^2 = 1{,}9881$
2) $x > 1{,}414$ pois $1{,}414^2 = 1{,}999396$
3) $x > 1{,}4142$ pois $1{,}4142^2 = 1{,}999616$
4) $x > 1{,}41421$ pois $1{,}41421^2 = 1{,}9999899$
5) $x > 1{,}414213$ pois $1{,}414213^2 = 1{,}9999984$
6) $x > 1{,}4142135$ pois $1{,}4142135^2 = 1{,}9999998$

Você deve estar pensando que se continuasse esse processo com máquinas calculadoras mais potentes, talvez até com computadores, chegaríamos à seguinte alternativa: ou o processo teria um final, isto é, conseguiríamos encontrar um número cujo quadrado fosse exatamente 2, ou então, o processo não teria fim. Na primeira hipótese, x seria um número racional finito e na Segunda hipótese x seria um *número racional periódico.*

Acontece, entretanto, que as mais potentes máquinas de que dispomos atualmente não poderiam chegar a nenhuma dessas duas alternativas. Isso porque, você já provou que *a diagonal e o lado de um quadrado são segmentos incomensuráveis.* Essa afirmação geométrica equivale à seguinte afirmação algébrica: *não existe número racional algum que satisfaça a equação* $x^2 = 2$. Isso significa que mesmo que uma máquina possuísse infinitos dígitos (o que seria impossível) jamais chegaria a um número cujo quadrado fosse exatamente 2.

Essa foi uma outra conseqüência terrível da descoberta de Hipasus. Isso porque, a linha reta numerada para os gregos antigos, e também para os pitagóricos, era *contínua*. Isso significa para eles que era possível subdividir os intervalos entre os números inteiros em um número qualquer de partes iguais e sempre existia um número fracionário (ou a razão entre dois inteiros) em correspondência com cada um desses pontos de subdivisão. Mas que número fracionário poderia estar em correspondência com o ponto P da figura anterior? Nenhum. Havia um "buraco" na reta. A reta não seria mais contínua?

11. A reação silenciosa: aliança entre os homens?

Ao fazer as atividades anteriores, você deve ter sentido o mal estar causado pela descoberta de Hipasus entre os pitagóricos. Ela não apenas desmentia a crença de que para tudo existia um número, como também parecia gerar uma série de questões aparentemente contraditórias.

Se os segmentos incomensuráveis realmente existem, então, será que devemos aceitar tranqüilamente que a medida de certos segmentos não possam ser expressos através de números?

Mas isso não parece absurdo, já que é possível construir, ver e medir aproximadamente a diagonal de um quadrado e a diagonal de um pentágono?

Mas, por outro lado, porque qualquer valor numérico que se atribua à diagonal de um quadrado, ele nunca satisfaz o Teorema de Pitágoras?

O Teorema de Pitágoras seria realmente verdadeiro? Mas ele já não havia sido provado anteriormente?

Diante dessas conseqüências, não seria de se estranhar que a primeira reação dos pitagóricos diante do fenômeno da incomensurabilidade fosse a de esconder o caso. Onde só havia a ganhar com o debate público, os pitagóricos instituíram como norma, pelo contrário, o segredo e o silêncio.

Mas esse silêncio não durou muito tempo. A partir de então, vários ataques foram feitos às crenças pitagóricas, seus membros se dividiram e a escola caiu no descrédito. E que ironia!

Tudo por causa de uma simples estrela, que era o emblema da escola e simbolizava nada menos que a ALIANÇA ENTRE OS HOMENS.

Mas não bastava fazer críticas às crenças pitagóricas. Era preciso também explicar as causas das contradições geradas pelos conhecimentos que eles produziram. Os gregos conseguiram fazer isso?

12. A solução de Dedekind

Não. Os gregos não conseguiram explicar as contradições geradas pelo fenômeno da incomensurabilidade. Procuraram conviver com elas. Simplesmente aceitaram o fato de não existir número algum para expressar a medida de certos segmentos. Criaram o termo "rhetos" (que significa racional) para os pares de segmentos comensuráveis e o termo "arrhetos" (não-racional ou irracional) para os pares de segmentos incomensuráveis. E como os números racionais não davam conta de expressar as medidas de todas as grandezas que podiam ser construídas com régua e compasso, acabaram optando pela conclusão de que o domínio das figuras, isto é, a geometria, era muito mais amplo e rico que o domínio dos números, isto é, que a aritmética. Acabaram separando esses dois ramos da matemática e desenvolveram o estudo das grandezas incomensuráveis apenas no domínio geométrico. O grandioso e promissor ideal pitagórico de que tudo poderia ser expresso por números foi abandonado.

Mas você não deve pensar que essa opção tomada pelos gregos fosse a única possível. Ela tem uma explicação histórica. É que o "clima" político da cidade de Atenas por volta de meados do século V a.C. acabou sendo mortal para o desenvolvimento da ciência. Atenas, que tinha sido metrópole da arte, da filosofia e da ciência grega, acaba optando pelo caminho do imperialismo, isto é, pelo desejo de expandir-se através da dominação de outras cidades gregas e de outros povos. O clima cultural, antes intenso, acaba sendo substituído por preocupações de origem militar e cívica. A matemática, a partir de então, não teria mais o aspecto crítico de tempos anteriores. Uma prova de que a opção dos gregos não era a única possível, foi que o ideal pitagórico deveria renascer 20 séculos depois, na cabeça de um grande sábio italiano Galileu Galilei que disse: "o livro da natureza está escrito em linguagem matemática e sem o auxílio desta linguagem, é impossível compreender uma só palavra".

Uma outra prova de que essa opção não era única e nem mesmo necessária foi dada pelo matemático alemão, Richard Dedekind em um ensaio denominado "Continuidade e Números Irracionais", aparecido em 1872. Vejam bem, apenas no século XIX!

Neste ensaio, Dedekind observa que:

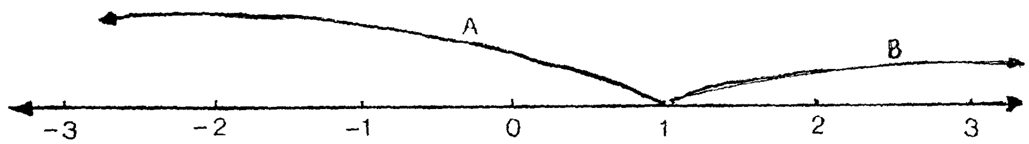
1) Existe mais pontos na linha reta do que números racionais;
2) Então, o conjunto dos números racionais não é adequado para aplicarmos aritmeticamente a continuidade da reta;
3) Logo, é absolutamente necessário criar novos números para que o domínio numérico seja tão completo quanto a reta, isto é, para que possua a mesma continuidade da reta.

A partir dessas observações, Dedekind diz:

> "Por muito tempo pensei em vão sobre isso, mas finalmente achei o que buscava. Consiste no seguinte: se todos os pontos de uma reta são divididos em duas classes, de modo que qualquer ponto da primeira fique à esquerda de qualquer ponto da Segunda classe, então, existe um e apenas um ponto que separa os pontos em duas classes. Não creio estar enganado em pensar que todos aceitarão imediatamente a verdade dessa afirmação. Além disso, a maioria de meus leitores ficará desapontada ao saber que através dessa observação banal será revelado o segredo da continuidade. Fico satisfeito por todos acharem o princípio acima óbvio, pois sou totalmente incapaz de prova de que ele é correto, nem creio que alguém tenha esse pode."
>
> (Caraça, B.J. - 1978a, p.60)

Como foi visto, para que o domínio dos números seja tão completo quanto o de pontos da reta é preciso que a cada corte da reta corresponda sempre um único número.

Exemplo 1: Considere um corte (A, B) na reta numérica racional de modo que à classe A pertençam todos os números racionais menores ou iguais a 1 a à classe B, todos os racionais maiores que 1.



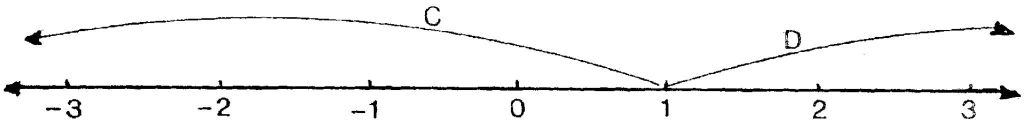
(A, B) define um corte pois separa todos os números racionais em duas classes de modo que não há nenhum número racional que pertença ao mesmo tempo a ambas as classes. Observe que 1 (o elemento de separação entre as classes A e B) pertence à classe A mas não pertence à classe B.

Neste caso, dizemos que (A, B) define o *número real* 1, que é também um *número racional.*

Exemplo 2: Considere um corte (C, D) na reta numérica racional de modo que à classe C pertençam todos os racionais menores que 1 e à classe D, todos os racionais maiores ou iguais a 1.

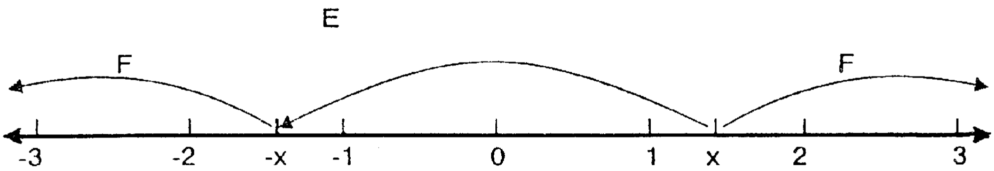
(A, B) define um corte sobre Q. Observe que agora, 1 (o elemento de separação entre as classes A e B) pertence à classe D mas não à classe C.

Neste caso, dizemos que (C, D) também define o número real 1.



Exemplo 3: Considere um corte (E, F) na reta numérica racional de modo que à classe E pertençam todos os números racionais cujo quadrado é menor que 2 e à classe F, todos os racionais cujo quadrado é maior que 2.

Observe que (E, F) define um corte sobre Q, pois qualquer número racional, ou pertence à classe E ou pertence à classe F. Além disso, não existe nenhum racional que pertença a ambas as classes ao mesmo tempo.



Observe também que x (o elemento de separação entre as classes E e F) não pertence nem à classe E, nem à classe F. Então, x não é um número racional. Ele será um *número real irracional.*

Observe que o que faz Dedekind não é nada mais do que *ampliar o domínio numérico* que era conhecido pelos gregos (o domínio dos números racionais), juntando aos números racionais uma nova categoria de números - os números irracionais - que vêm preencher os "buracos" cuja existência os gregos já haviam constatado. Ao conjunto dos números racionais e irracionais, Dedekind dá o nome de conjunto dos números reais e à reta contendo os racionais e irracionais de reta numerada real.

É costume escrever o número x, definido pelo corte (E, F) acima da seguinte maneira: $\sqrt{2}$, o que se lê assim: raiz quadrada de 2. O sinal $\sqrt{\ }$: lê-se *radical* e o 2 é o *radicando.*

Agora, é possível afirmar que a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário é $\sqrt{2}$ u, ou então, que o número que satisfaz à equação $x^2 = 2$ é $x = \sqrt{2}$.

Logo, o número cujo quadrado é 2 é o número irracional $\sqrt{2}$. Então, podemos escrever: $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

Observe que, se para definir um número racional $\frac{a}{b}$ precisamos utilizar dois números naturais a e b, agora, para definir um número real, precisamos utilizar duas classes com infinitos números racionais.

Costuma-se indicar pela letra R o conjunto de todos os números reais.

Atividade 19

Para cada número real a seguir, faça o seguinte:

1. Diga entre quais números inteiros consecutivos ele se encontra;
2. Utilizando uma calculadora, verifique se as respostas dadas ao item 1 estão corretas;
3. Caracterize-o através de um corte sobre o conjunto dos números racionais;
4. Diga se ele é um número real racional ou irracional.

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{10}$

c) $\sqrt{87}$

d) $\sqrt{2,5}$

e) $\sqrt{9/10}$

k)

f) $\sqrt{1000}$

g) $\sqrt{1650}$

h) $\sqrt{100}$

i) $\sqrt{25/49}$

j) $\sqrt{450}$

Atividade 20

Utilizando o Teorema de Pitágoras, determine o que se pede em cada item seguinte. Sempre que a resposta for um número irracional, expresse-o através de um radical. Utilizando uma calculadora, e sem acionar a tecla "$\sqrt{x}$", dê uma aproximação racional até a casa dos décimos para cada um desses números irracionais.

a) Quanta mede a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1 cm e 2 cm ?

b) Quanto mede a diagonal de um quadrado cujo lado mede 2 cm ?

c) Quanto mede a diagonal de um retângulo cujos lados perpendiculares medem 2 cm e 3 cm ?

d) Quanto mede a altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 4 cm ?

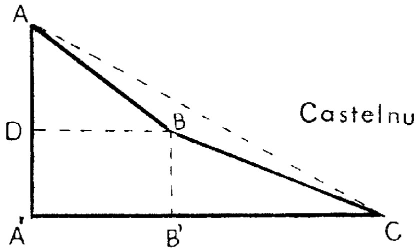
e) Calcule o perímetro de um losango cujas diagonais medem 10 cm e 24 cm.

f) Um teleférico transporta vagões carregados de pedra, desde uma mina situada em uma localidade A, a 2100 m de altitude, até uma localidade B a 1500 m de altitude (veja figura a seguir). O teleférico foi prolongado em um ramo BC, para poder transportar material a uma fábrica C, situada a 1000 m de altitude. Os ramos AB e AC do teleférico têm inclinações diferentes em relação à horizontal A'C.

Sabendo que a distância horizontal A'C é de 2 km e B'C é de 1,2 km determine:

1) Os comprimentos dos ramos AB e BC do teleférico.

2) Que quantidade de cabo de aço deveria ser utilizada se as localidades A e C fossem ligadas mediante um único ramo.



Castelnuovo, E. – 1966 – pp.204–05

Atividade 21

Utilizando o Teorema de Pitágoras, resolva os problemas abaixo:

a) Quanto mede a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1 cm e $\sqrt{2}$ cm ?

b) Quanto mede a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1 cm e $\sqrt{3}$ cm ?

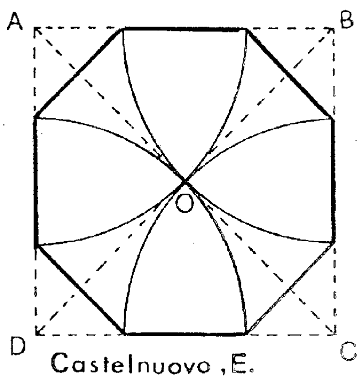
c) Quanto mede a diagonal de um quadrado cuja aresta mede $\sqrt{2}$ cm ?

d) Quanto mede a diagonal de um cubo cuja aresta mede 1 cm ?

e) Quanto mede a diagonal de um paralelepípedo cujo comprimento é 5 cm, cuja largura é $\sqrt{2}$ cm e cuja altura é 2 cm ?

f) Quanto mede a altura de uma pirâmide reta de base quadrada, sabendo que a aresta da base mede 2 cm e que uma aresta não pertencente à base mede 5 cm.

g) Na prática, para se traçar um octógono regular, por exemplo, para se fazer de um quadrado de madeira um octógono regular que sirva de superfície de uma mesa, procede-se da maneira indicada na figura ao lado.



Castelnuovo, E. 1966 – p.207

Com centro em A e raio AO, descreve-se um arco de circunferência. Com centro em B e raio em BO, descreve-se outro arco de circunferência e o mesmo se faz para os vértices C e D.

Demonstre que todos os lados do octógono assim obtido são iguais e determine a medida do lado desse octógono, supondo que o lado AB do quadrado mede 60 cm.

h) Divida os lados de um quadrado em 3 partes iguais e ligue os pontos de subdivisão consecutivos de modo a obter um octógono.

1) Demonstre que o octógono assim obtido não é regular.

2) Determine o perímetro desse octógono, supondo que o lado do quadrado meça 12 cm.

Atividade 22

a) Considere o segmento u abaixo. Utilizando esquadro e compasso construa:

u

1) Um segmento AB cuja medida seja $\sqrt{2}$ u.

2) Um segmento CD cuja medida seja $\sqrt{3}$ u.

3) Um segmento EF cuja medida seja $\sqrt{4}$ u.

4) Um segmento GH cuja medida seja $\sqrt{5}$ u.

5) Um segmento IJ cuja medida seja $\sqrt{6}$ u.

6) Um segmento KL cuja medida seja $\sqrt{7}$ u.

7) Um segmento MN cuja medida seja $\sqrt{10}$ u.

b) Utilizando o segmento u como unidade de medida, construa uma reta numérica e transporte nela os pontos correspondentes a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$ e também os pontos correspondentes a $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{4}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{6}$, $-\sqrt{7}$, $-\sqrt{8}$, $-\sqrt{9}$, $-\sqrt{10}$.

Atividade 23

Coloque V ou F nas afirmações seguintes, conforme sejam elas verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas, com exemplos ou contra-exemplos.

a) (   ) A raiz quadrada de um número natural pode ser um número natural.

b) (   ) A raiz quadrada de um número racional é sempre um número racional.

c) (   ) A raiz quadrada de um número negativo é sempre um número negativo.

d) ( ) A raiz quadrada de um número negativo é sempre um número positivo.

e) ( ) A raiz quadrada de um número real é sempre um número real.

f) ( ) A raiz quadrada de um número real positivo é sempre um número real positivo.

13. O conceito de raiz quadrada

Ao empregar o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas você sempre acaba determinando a medida x de um segmento desconhecido, através de uma equação do tipo $x^2 = k$, onde k é um número conhecido. Para achar o valor de x, você pergunta: que número elevado ao quadrado produz k? Ou o que dá no mesmo, que número multiplicado por si mesmo produz k? Após a introdução do conceito de número irracional e do símbolo $\sqrt{\ }$, você, talvez tenha acabado identificando as perguntas acima com extrair a raiz quadrada de um número. Daí, se $x^2 = k \Rightarrow x = \sqrt{k}$.

Mas essa identificação, na resolução de equações, é apenas parcialmente correta. Vejamos porque.

Considere a equação $x^2 = 4$. É claro que tanto 2 quanto - 2 são soluções dessa equação.

Da mesma forma, na equação $x^2 = 2$, tanto $\sqrt{2}$ quanto - $\sqrt{2}$ são soluções da mesma.

Este detalhe, talvez tenha passado desapercebido porque os problemas que você resolveu eram problemas geométricos e não tem sentido dar respostas negativas para medidas de segmentos. Então, o correto seria escrever:

x =

Se $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$

Se $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \pm 1{,}4142...$

Logo, se $x^2 = k \Rightarrow x = \pm \sqrt{k}$

Entretanto, não seria correto afirmar que $\sqrt{4} = \pm 2$ ou que $\sqrt{2} = \pm 1{,}4142...$

Isso porque, se quisermos encarar a radiciação como uma nova operação sobre um conjunto numérico, o resultado dessa operação, isto é, a raiz, deve sempre *ser um único número desse conjunto numérico.*

Feitos esses esclarecimentos, podermos definir raiz quadrada.

Chamamos de raiz quadrada de um número $\underline{a}$, real e positivo, ao número real e positivo $\underline{b}$ que elevado ao quadrado produz o número $\underline{a}$, isto é, $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$.

Atividade 24

Ao tentar extrair as raízes quadradas dos números racionais abaixo, você notará que algumas são racionais, outras irracionais e outras inexistentes.

Quando elas forem racionais, escreva o seu valor, quando forem irracionais, dê sua aproximação racional por falta até a casa dos décimos e quando forem inexistentes, escreva $\notin$ R, isto é, não pertence ao conjunto dos números reais.

1) $\sqrt{1}$
2) $\sqrt{-1}$
3) $\sqrt{0}$
4) $\sqrt{4}$
5) $\sqrt{9}$
6) $\sqrt{-4}$
7) $\sqrt{16}$
8) $\sqrt{25}$
9) $\sqrt{100}$
10) $\sqrt{125}$
11) $\sqrt{4/81}$
12) $\sqrt{49/64}$
13) $\sqrt{32}$
14) $\sqrt{36}$
15) $\sqrt{-17}$
16) $\sqrt{1/4}$
17) $\sqrt{-1/4}$
18) $\sqrt{22}$
19) $\sqrt{38}$
20) $\sqrt{0,01}$
21) $\sqrt{144}$
22) $\sqrt{1,69}$
23) $\sqrt{904}$
24) $\sqrt{6,4}$
25) $\sqrt{1,21}$
26) $\sqrt{64}$
27) $\sqrt{0,36}$
28) $\sqrt{0,1}$
29) $\sqrt{9,6}$
30) $\sqrt{-49}$

14. A lenda do Apolo hiperbóreo

Para darmos continuidade ao nosso estudo, vamos retornar à Grécia antiga. Vamos entrar na cidade de Delfos, situada numa região montanhosa, no fundo de uma garganta sombria. Era este o lugar mais santo de toda a Grécia. Diziam os poetas que Júpiter - o pai de todos os deuses - querendo conhecer o centro da terra, fizera partir do nascente e do poente, duas águias que acabaram se encontrando em Delfos.

Homens, mulheres e crianças vinham de longe para aí saudarem Apolo - o deus da luz.

Para a religião do orfismo, Dionísio e Apolo eram revelações diferentes de um mesmo deus. Dionísio representava a verdade mística e Apolo personificava a mesma verdade, aplicada à vida terrestre e à ordem social.

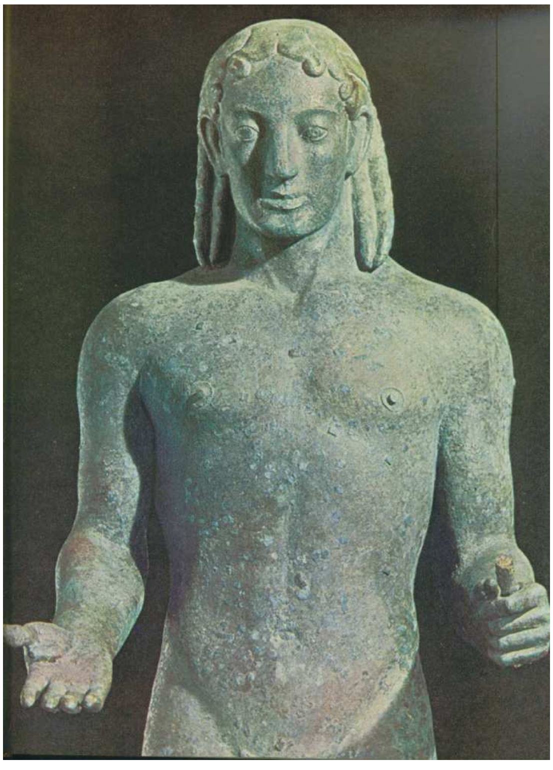
Inspirador da poesia, da medicina e das leis, ele era a ciência que se atingia por meio da adivinhação, a beleza que se atingia pela arte, a paz que se atingia pela justiça e a harmonia da alma e do corpo que se atingia pela purificação.

A foto da página seguinte, é o deus Apolo, uma estátua fundida em bronze há 2400 anos, que perdeu-se 400 anos depois e foi redescoberta em 1959.

Os sacerdotes da época procuravam fazer o povo compreender tudo o que esse deus representava, através de uma lenda. Segundo essa lenda, a cidade de Delfos estava mergulhada em trevas. Isso porque uma monstruosa serpente habitava essa região. Apolo surge da noite de Delfos. Todas as deusas saúdam o seu nascimento. Ele caminha, pega seu arco e sua lira. Seus cabelos agitam-se no ar. O mar agita-se e toda ilha resplandece num banho de esplendores e de ouro. É a presença da luz divina que cria a ordem e a harmonia.

Apolo atinge com suas flechas a monstruosa serpente, saneia o país e funda um templo, que representa a imagem dessa luz divina sobre as trevas e sobre o mal.

Nas antigas religiões, a serpente representava, ao mesmo tempo o círculo fatal da vida e o mal que dele resulta.



Entretanto, é da compreensão e da dominação dessa vida que se pode obter o conhecimento e a sabedoria.

Apolo, matador da serpente, é o símbolo do aprendiz, que aprende a dominar a natureza através da ciência. Por essa razão, é também o deus do intelecto, o educador dos homens e sente prazer em estar na companhia deles.

Mas, continua a lenda, quando chega o outono, Apolo regressa à sua pátria, isto é, ao país dos hiperbóreos. Esse é o povo misterioso que habita o país das almas luminosas e transparentes, que vivem na eterna aurora de uma felicidade perfeita. Todas as primaveras Apolo regressa a Delfos. Mas só é visível aos iniciados, isto é, às pessoas que já possuem algum conhecimento. Na sua brancura hiperbórea, surge Apolo sobre um carro, puxado por dois cisnes melodiosos. Vem habitar o seu templo, onde há um altar de forma cúbica, onde uma sacerdotisa transmite as respostas e os conselhos desse deus aos anseios e aflições do povo. É justamente a forma cúbica do altar de Apolo que tem a ver com a continuidade de nosso estudo.

Atividade 25

Utilizando cubinhos iguais como unidade de medida de volume, responda:

a) É possível construir um cubo utilizando exatamente 8 desses cubinhos? Em caso afirmativo, diga qual é o volume e qual é a medida da aresta desse cubo.
b) É possível construir um cubo utilizando exatamente 27 desses cubinhos? Em caso afirmativo, diga qual é o volume e qual é a medida da aresta desse cubo.
c) Quantos cubinhos são necessários para se construir um cubo cuja aresta meça 4 unidades?
d) Quanto mede a aresta de um cubo cuja construção foi feita com 1000 cubinhos?
e) É possível construir um cubo utilizando 2 desses cubinhos, não sendo permitida a subdivisão desses cubinhos em partes? Em caso afirmativo, diga quanto mede a aresta desse cubo.
f) É possível construir um cubo de papel que ocupe exatamente o mesmo volume que 2 desses cubinhos? Em caso afirmativo, diga quanto deve medir a aresta desse cubo e como poderá ser construído.

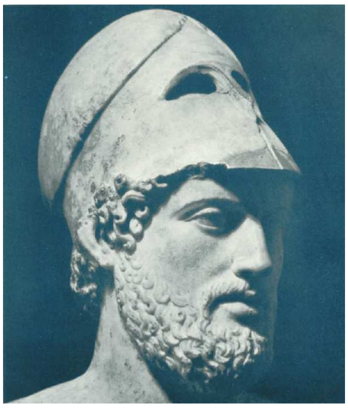
15. Com a peste... novos irracionais

Provavelmente, ao tentar responder o último item da atividade anterior, você chegou à conclusão de que não é possível construir com papel, um cubo que ocupe um volume de 2 unidades. Felizmente, você não é nem foi a única pessoa a pensar assim. Um problema semelhante a esse na Grécia antiga, muitos anos antes de Cristo, permaneceu insolúvel por muitos séculos na história da humanidade. Apenas no século XIX foi dada uma resposta satisfatória a esse problema.

Este problema talvez tenha se originado da profunda impressão causada pela morte de Péricles, um dos grandes estadistas gregos.

A foto a seguir é de Péricles, primeiro cidadão de Atenas, austero, aristocrata, soldado e estadista, mostrado com seu capacete de guerra. Péricles dominou os negócios da cidade de Atenas, de 460 a 429 a.C.

Péricles foi vítima de uma peste que matou aproximadamente ¼ da população de Atenas. Diz a lenda que um conjunto de pessoas foi enviada ao templo de Apolo hiperbóreo para perguntar como a peste poderia ser combatida. A resposta foi que o altar de Apolo, que era de forma cúbica, deveria ser duplicado. Os atenienses, dobraram as arestas do altar, mas isso não adiantou para afastar a peste.



Mas é claro que, ao procederem daquela maneira, eles acabaram multiplicando o volume do altar por 8 e não por 2.

Mas porque razão esse problema permaneceu insolúvel por tanto tempo?

Vamos chamar de x a aresta do cubo cujo volume deve ser 2 unidades. Então, poderemos escrever: $x^3 = 2$. O mesmo problema foi reduzido ao seguinte: qual é o número que elevado ao cubo produz 2 ? É claro que esse número não pode ser natural, mas deve estar compreendido entre 1 e 2, pois se $x = 1$, então, $x^3 = 1$ e se $x = 2$, então, $x^3 = 8$.

Para $x = 1{,}5$ temos $x^3 = 3{,}375 > 2$

Para $x = 1{,}2$ temos $x^3 = 1{,}728 < 2$

Para $x = 1{,}3$ temos $x^3 = 2{,}197 > 2$

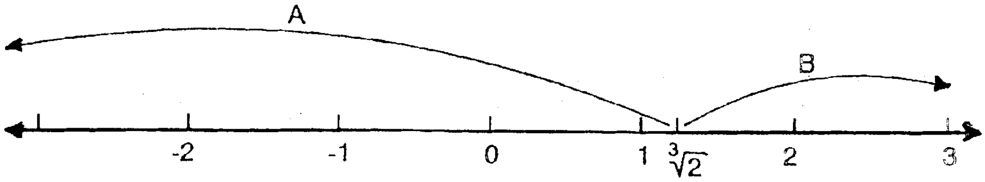
Então, x deverá estar compreendido entre 1,2 e 1,3 .

Note que o processo acima é parecido com aquele empregado na busca da diagonal de um quadrado de lado unitário, lembra-se?

Você poderia então perguntar: terá essa busca um limite ou x deverá ser também um número irracional?

Não deu outra. O número x, que representa a medida da aresta do cubo procurado, é realmente um número irracional. Foi esta a razão do problema ter permanecido insolúvel por tanto tempo.

Esse número irracional poderia ser caracterizado por um corte (A, B) sobre o conjunto dos números racionais de modo que à classe A pertençam todos os números racionais cujo cubo seja



menor que 2 e à classe B pertençam todos os números racionais cujo cubo seja maior que 2.

Na forma de radical esse número é indicado assim: $\sqrt[3]{2}$ e lê-se raiz cúbica de 2.

É claro que esse número poderia ser indicado na forma de decimal infinito e não-periódico: $\sqrt[3]{2} \cong 1{,}259$ (aproximação por falta) onde 2 é o radicando; 3 o índice do radical e 1,259 a raiz aproximada.

Logo, $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$. Mas $(1{,}259)^3 \neq 2$, pois 1,259 é apenas uma aproximação da raiz cúbica de 2. Mas, é possível construir um cubo, cujas arestas meçam $\sqrt[3]{2}$? Devemos voltar brevemente a esta questão.

16. Raízes cúbicas, quartas, ... n-ésimas

Como você observou, a solução do problema de Delfos nos conduziu a um número irracional com índice diferente de 2, isto é, conduziu-nos a extração de uma *raiz cúbica* e não a uma raiz quadrada. Na história da humanidade, outros problemas surgiram que colocaram aos homens a necessidade de se extrair raízes com *índice superior a 2*. Daí, a necessidade de se ampliar a operação de radiciação e de podermos falar de extração de raízes cúbicas, quartas, quintas, ... , raízes n-ésimas (de índice n qualquer).

Mas qual o significado que devemos atribuir a tais raízes?

Exemplo 1: Calcular a raiz cúbica de 27 é o mesmo que responder: qual é o número que elevado ao cubo produz 27 ? Logo, $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 27$.

Exemplo 2: Calcular a raiz quarta de 16 equivale a responder: qual é o número que elevado à quarta potência produz 16 ? Logo, $\sqrt[4]{16} = 2$, pois $2^4 = 16$.

Exemplo 3: Calcular a raiz quinta de – 32 equivale a responder: qual é o número que elevado à quinta potência produz – 32 ? Logo, $\sqrt[5]{-32} = -2$, pois $(-2)^5 = -32$.

Exemplo 4: Calcular a raiz cúbica de 5 equivale a responder: qual é o número que elevado ao cubo produz 5 ? Neste caso, a raiz deverá ser um número irracional, pois 5 não é um cubo perfeito. Só podemos atribuir a ela um valor racional aproximado. Logo, $\sqrt[3]{5} \cong 1{,}709$ (aproximação por falta).

Atividade 26

Ao tentar extrair as raízes dos números racionais seguintes, você notará que algumas são racionais, outras irracionais e outras são inexistentes.

Quando elas forem racionais, escreva o seu valor, quando forem irracionais dê sua aproximação racional por falta até a casa dos décimos, e quando forem inexistentes, escreva $\notin$ R, isto é, não pertence ao conjunto dos reais.

1) $\sqrt[3]{0}$

2) $\sqrt[4]{0}$

3) $\sqrt[5]{0}$

4) $\sqrt[100]{0}$

5) $\sqrt[3]{1}$

6) $\sqrt[4]{1}$

7) $\sqrt[100]{1}$

8) $\sqrt[3]{-1}$

9) $\sqrt[4]{-1}$

10) $\sqrt[5]{-1}$

11) $\sqrt[37]{-1}$

12) $\sqrt[50]{-1}$

13) $\sqrt[3]{64}$

14) $\sqrt[3]{-64}$

15) $\sqrt[4]{81}$

16) $\sqrt[3]{1000}$

17) $\sqrt[3]{100}$

18) $\sqrt[4]{-16}$

19) $\sqrt[3]{-8}$

20) $\sqrt[5]{32}$

21) $\sqrt[5]{30}$

22) $\sqrt[3]{50}$

23) $\sqrt[3]{8/27}$

24) $\sqrt[4]{16/81}$

25) $\sqrt[4]{-16/81}$

26) $\sqrt[3]{0{,}001}$

27) $\sqrt[3]{-0{,}008}$

28) $\sqrt[3]{2{,}7}$

29) $\sqrt[3]{7}$

30) $\sqrt[3]{10}$

Atividade 27

a) Explique por que razão não se pode atribuir significado a:
   1) Radicais cujo índice seja zero.
   2) Radicais cujo índice seja um.
   3) Radicais cujo índice seja um número inteiro negativo.
   4) Radicais de índice par e radicando negativo.

b) Explique que restrições devemos impor aos números n, p e q, para que a igualdade $\sqrt[n]{p}$ = q tenha significado.

O objetivo da atividade seguinte é fazer com que você perceba que é possível obter uma regra prática para se transformar duas potenciações simultâneas de uma certa base, numa única potenciação desta mesma base.

Atividade 28

Transforme cada potenciação simultânea seguinte numa multiplicação de potenciações. Em seguida, transforme essa multiplicação de potenciações numa única potenciação cuja base seja igual às bases dos fatores.

a) $(2^2)^2$

b) $(3^4)^3$

c) $(3^2)^2$

d) $[(-2)^3]^5$

e) $(2^2)^3$

f) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$

g) $(2^3)^2$

h) $(4^3)^3$

i) $(10^3)^2$

j) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^5$

k) $(10^4)^2$

l) $\left[(0,4)^2\right]^2$

Atividade 29

a) Com base na atividade anterior, enuncie a regra prática para se transformar duas potenciações simultâneas de uma certa base, numa única potenciação desta mesma base.

b) Aplicando a regra enunciada no item *a* desta atividade, transforme cada potenciação simultânea a seguir, numa única potenciação cuja base seja igual à base da potenciação indicada nos parênteses:

1) $(5^2)^5$

2) $[(-5)^7]^4$

3) $(3^7)^2$

4) $[(-7)^7]^3$

5) $(5^{10})^{10}$

6) $\left[\left(\frac{-2}{5}\right)^7\right]^8$

7) $(10^3)^{10}$

8) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^9\right]^9$

c) Determine o valor de x em cada potenciação simultânea seguinte:

1) $(3^2)^x = 3^{16}$

2) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^9\right]^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{243}$

3) $(5^x)^7 = 5^{14}$

4) $(2^x)^1 = 2^0$

5) $(10^x)^{10} = 10^{100}$

6) $(2^x)^1 = 2$

7) $(3^x)^3 = 3^{30}$

8) $(2^x)^2 = 2$

17. Formas de representação de um número irracional

Ao tentar resolver o último item da atividade anterior, você, talvez, tenha sentido alguma dificuldade. A razão disto se deve ao fato de que, até o momento, o expoente de uma base sempre ter sido um número inteiro. Entretanto, isto não é uma necessidade. É claro que na igualdade $(2^x)^2 = 2$, não existe para x número natural algum que possa torná-la verdadeira. Poderíamos, entretanto, substituir x pelo número racional $\frac{1}{2}$ ou 0,5.

Isto porque, $\frac{1}{2} \circ 2 = 2$ ou então $0{,}5 \circ 2 = 1$, o que torna a igualdade verdadeira. Logo, $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2$ ou $\left(2^{0,5}\right)^2 = 2$. Qual é a importância deste fato?

É que, tendo consciência dele, você conseguirá perceber a existência de uma nova forma de representar números irracionais, isto é, de representá-los através de potenciações cujos expoentes são números fracionários.

Exemplo 1: Como $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2$ e $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, então, $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$.

Mas como existem infinitas frações equivalentes a $\frac{1}{2}$, todas iguais ao número decimal 0,5, então, podemos escrever:

$$\sqrt{2} = 2^{1/2} = 2^{2/4} = 2^{3/6} = 2^{4/8} = 2^{5/10} = \ldots = 2^{0,5} = 1{,}414235\ldots$$

Exemplo 2: Como $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$ e $\left(2^{1/3}\right)^3 = 2$, então, $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$. Mas como existem infinitas frações equivalentes a $\frac{1}{3}$, todas iguais ao número decimal periódico 0,333..., então, podemos escrever:

$$\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = 2^{2/6} = 2^{3/9} = 2^{4/12} = 2^{5/15} = \ldots = 2^{0,333\ldots} = 1{,}259\ldots$$

Atividade 30

a) Escreva cada radical seguinte de duas maneiras: como uma potenciação de expoente fracionário irredutível e como uma potenciação de expoente decimal.

1) $\sqrt{7}$

2) $\sqrt{9}$

3) $\sqrt[3]{11}$

4) $\sqrt[3]{5}$

5) $\sqrt[4]{9}$

6) $\sqrt[7]{3{,}5}$

7) $\sqrt{3/5}$

8) $\sqrt[3]{-2/7}$

9) $\sqrt{3^3}$

10) $\sqrt[3]{2^2}$

11) $\sqrt[3]{2^5}$

12) $\sqrt[5]{7^3}$

13) $\sqrt{0{,}8^3}$

14) $\sqrt{(3/8)^7}$

15) $\sqrt[6]{(1/5)^2}$

16) $\sqrt[6]{10^8}$

17) $\sqrt[8]{10^6}$

18) $\sqrt[20]{(6/7)^{10}}$

19) $\sqrt{2^2}$

20) $\sqrt[3]{2^3}$

21) $\sqrt[4]{2^4}$

22) $\sqrt{5^2}$

23) $\sqrt[10]{7^{10}}$

24) $\sqrt[7]{(3/10)^7}$

b) Escreva na forma de radical as seguintes potências de expoentes fracionários.

1) $6^{1/2}$

2) $15^{1/3}$

3) $20^{1/4}$

4) $(-7)^{1/5}$

5) $2^{1/50}$

6) $(1/5)^{1/5}$

7) $(2/3)^{1/2}$

8) $(2{,}9)^{1/7}$

9) $3^{2/3}$

10) $2^{5/2}$

11) $5^{3/5}$

12) $3^{0{,}7}$

13) $7^{1{,}2}$

14) $6^{2{,}4}$

15) $(1/3)^{3{,}2}$

16) $(2/5)^{0{,}333...}$

17) $10^{0{,}6}$

18) $10^{0{,}666...}$

19) $2^{1{,}5}$

20) $2^{1{,}555...}$

21) $2^{6/3}$

22) $3^{8/4}$

23) $(1/3)^{10/5}$

Atividade 31

Determine o valor de x nas igualdades seguintes:

a) $2^{1/2} = 2^{x/8}$

b) $2^{3/4} = 2^{9/x}$

c) $5^{1/3} = 5^{x/30}$

d) $\sqrt{3} = \sqrt[x]{3^2}$

e) $\sqrt{5} = \sqrt[x]{5^8}$

f) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[x]{2^3}$

h) $\sqrt[20]{5^2} = \sqrt[10]{5^x}$

g) $\sqrt[12]{3^4} = \sqrt[x]{3}$

i) $\sqrt{7} = \sqrt[4]{7^x}$

Atividade 32

Sabendo que a regra prática para a determinação de potenciações simultâneas é válida também para expoentes racionais transforme cada potenciação simultânea seguinte, numa única potenciação cuja base seja igual à base da potenciação indicada nos parênteses. Em seguida, expresse cada resultado na forma de radical.

a) $\left(2^{1/2}\right)^{1/2}$

b) $\left(3^{1/2}\right)^{1/5}$

c) $\left(2^{2/3}\right)^{1/7}$

d) $\left(2^{1/5}\right)^{2/3}$

18. Radiciações simultâneas

Toda vez que desejamos extrair raízes de raízes estamos em presença de radiciações simultâneas.

Exemplo 1: Determine a raiz quadrada da raiz quadrada de 2.

Temos: $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{2^{1/2}} = \left(2^{1/2}\right)^{1/2} = 2^{1/4} = \sqrt[4]{2}$

Exemplo 2: Determine a raiz cúbica da raiz quadrada de 2.

Temos: $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2^{1/2}} = \left(2^{1/2}\right)^{1/3} = 2^{1/6} = \sqrt[6]{2}$.

Atividade 33

Encontre um único radical para expressar o resultado das seguintes radiciações simultâneas:

a) $\sqrt{\sqrt[5]{2}}$

b) $\sqrt{\sqrt{10}}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[6]{5}}$

e) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{7}}}$

O objetivo da atividade seguinte é fazer com que você aprenda um processo para construir, com régua e compasso, segmentos de reta cujas medidas sejam expressas por radicais cujos índices são potências de base 2.

Atividade 34

Considere o segmento abaixo como unidade de medida.

u

____

a) Trace um segmento de reta AB cuja medida seja igual a 1u.

b) A partir do ponto B trace um segmento de reta BC, que esteja situado no prolongamento de $\overline{AB}$ no sentido de A para B, e cuja medida seja igual a 2u.

c) Determine o ponto médio M do segmento de reta AC.

d) Com centro no ponto M trace uma semi-circunferência cujo raio seja igual a $\overline{MA}$.

e) Trace um segmento de reta BP, que seja perpendicular ao diâmetro $\overline{AC}$, de modo que o ponto P pertença à semi-circunferência traçada.

f) Trace os segmentos de reta $\overline{PM}$, $\overline{AP}$ e $\overline{CP}$ e explique porque razão o triângulo APC é um triângulo retângulo.

g) Mostre que a medida do cateto $\overline{BP}$ do triângulo retângulo PBM é igual a $\sqrt{2}$ u.

h) Utilizando esse mesmo processo, verifique que se as medidas dos segmentos AB e BC fossem iguais a 1u e 3u respectivamente, então, a medida do cateto $\overline{BP}$ seria igual a $\sqrt{3}$ u.

i) Utilizando esse mesmo processo verifique que se as medidas dos segmentos AB e BC fossem iguais a 2u e 3u respectivamente, então, a medida de $\overline{BP}$ seria igual a $\sqrt{6}$ u.

j) Quais devem ser as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ para que a medida do cateto $\overline{BP}$ seja igual a $\sqrt{5}$ u.

k) Utilizando esse mesmo processo, verifique que se as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ fossem iguais a $\underline{a}$ unidades e $\underline{b}$ unidades respectivamente, então, a medida do cateto $\overline{BP}$ seria igual a $\sqrt{a.b}$ unidades.

l) Utilizando a conclusão do item anterior, complete a tabela seguinte:

$m(\overline{AB})$	$m(\overline{BC})$	$m(\overline{BP})$
1	2	
2	3	
		$\sqrt{5}$
3	7	

		$\sqrt{10}$
1	$\sqrt{2}$	
1	$\sqrt{3}$	
1	$\sqrt[4]{2}$	
		$\sqrt[8]{5}$
1	$\sqrt[8]{7}$	

m) Utilizando o processo desta atividade e a mesma unidade de medida, construa segmentos de reta cujas medidas sejam: $\sqrt{6}$ u; $\sqrt[4]{2}$ u; $\sqrt[4]{3}$ u e $\sqrt[8]{2}$ u.

Atividade 35

a) Seguindo os passos abaixo você estará construindo um segmento de reta cuja medida é $\sqrt[3]{2}$ u. Considere o segmento $\underline{u}$ abaixo como unidade de medida.

u

1) Trace dois segmentos de reta perpendiculares AO e BO, que se interceptem no ponto O, de modo que:
$m(\overline{AO}) = 1u$ e $m(\overline{BO}) = 2u$

2) Prolongue $\overline{BO}$ no sentido de B para O e $\overline{AO}$ no sentido de A para O.

3) Utilizando 2 esquadros e uma régua, trace os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$, de forma que:
$\overline{BC} // \overline{AD}$; C $\in$ $\overrightarrow{AO}$; D $\in$ $\overrightarrow{BO}$; $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ e $\overline{AD} \perp \overline{CD}$

b) Utilizando o fato demonstrado na atividade anterior para os triângulos BCD e ACD, mostre que $m(\overline{OD}) = \sqrt[3]{2}u$.

c) Utilizando o mesmo processo descrito nesta atividade, construa segmentos de reta cujas medidas sejam:
$\sqrt[3]{3}$ u; $\sqrt[3]{5}$ u; $\sqrt[3]{4}$ u; $\sqrt[9]{2}$ u e $\sqrt[9]{5}$ u.
Utilize como unidade de medida o segmento $\underline{u}$ anterior.

d) Utilizando os segmentos construídos nesta atividade e o processo geométrico da atividade anterior, construa segmentos de reta cujas medidas sejam $\sqrt[6]{2}$ u e $\sqrt[6]{5}$ u.

19. O cubo de volume 2 e o preconceito platônico

Ao exercitar a atividade anterior, você construiu um segmento de reta cuja medida é $\sqrt[3]{2}$ u.

Agora sim, podemos responder à questão colocada pelo oráculo de Apolo para acabar com a peste, lembra-se?

Se podemos construir um segmento cuja medida é $\sqrt[3]{2}$ u, é claro que podemos também construir um cubo cujo volume é 2 u.

Sabemos que no século IV a.C., para que fosse possível efetuar os cálculos para o lançamento de projéteis por uma catapulta, era necessário a extração de uma raiz cúbica. Um matemático grego desconhecido resolveu esta questão geometricamente, de forma parecida com aquela feita por você na atividade anterior. Só que em vez de utilizar 2 esquadros e uma régua, construiu um dispositivo mecânico constituído por dois braços paralelos que concorriam perpendicularmente a um terceiro braço, sendo que um desses braços era móvel.

Acontece que tanto a forma como construímos um segmento de medida $\sqrt[3]{2}$ quanto essa proposta pelo matemático grego, não seriam aceitas como solução do problema colocado pelo oráculo. Isso porque, talvez por influência do filósofo Platão, as construções geométricas só eram perfeitas e só podiam ser aceitas se fossem feitas apenas com régua sem escala e compasso! Jamais se poderia admitir o uso de dispositivos mecânicos na geometria. Aceitar isso, segundo a visão elitista de Platão, seria "contaminar" a nobre e pura geometria com as rudes ferramentas utilizadas pelos trabalhadores braçais.

Acontece que, se se aceitassem as restrições impostas por Platão, o problema da duplicação do cubo jamais teria tido uma solução. E isso só foi demonstrado no século XIX ... tempo mais que suficiente para que todos os atenienses morressem contaminados!

Se dependesse de Platão, a peste jamais teria terminado. Mas terminou. Sem que as ordens de Apolo tivessem sido cumpridas.

O objetivo da atividade seguinte é fazer com que você compreenda o significado da adição algébrica de números reais irracionais, tendo por base a sua representação geométrica.

Atividade 36

a) Utilizando a mesma unidade de medida das atividades 30 e 31, construa uma reta numérica e determine nela os pontos correspondentes aos números irracionais $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ e

$\sqrt[3]{5}$. Para isso, utilizando um compasso, transporte para essa reta esses segmentos já construídos nas atividades anteriores.

b) Determine nessa reta numérica os pontos correspondentes aos irracionais: $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt[3]{2}$, $-\sqrt[3]{3}$ e $-\sqrt[3]{5}$.

c) Utilizando o compasso para efetuar adição e subtração de segmentos de reta, coloque V ou F nas afirmações seguintes, conforme sejam elas verdadeiras ou falsas.

1) ( ) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$

2) ( ) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2+3} = \sqrt[3]{5}$

3) ( ) $\sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{3-2} = \sqrt{1} = 1$

4) ( ) $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3-2} = \sqrt[3]{1} = 1$

5) ( ) $1 + \sqrt{2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

6) ( ) $1 + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+2} = \sqrt[3]{3}$

7) ( ) $\sqrt{3} - 1 = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$

8) ( ) $\sqrt[3]{3} - 1 = \sqrt[3]{3-1} = \sqrt[3]{2}$

9) ( ) $0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$

10) ( ) $0 + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$

11) ( ) $0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$

12) ( ) $0 + \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$

13) ( ) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

14) ( ) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$

15) ( ) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$

16) ( ) $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$

17) ( ) $-\sqrt{2} - \sqrt{3} = -\sqrt{5}$

18) ( ) $-\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2 \cdot \sqrt{2}$

19) ( ) $-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = -2 \cdot \sqrt[3]{2}$

20) ( ) $-\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2} = -3 \cdot \sqrt{2}$

20. Adição algébrica de números reais-irracionais

Na atividade anterior, você verificou geometricamente o significado da adição algébrica de números reais. Verificou que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$, isto é, que a soma das raízes quadradas de dois números é diferente da raiz quadrada da soma desses dois números. Isso é válido também, para radicais de qualquer índice. Na maioria das vezes não podemos colocar a adição de dois irracionais sob a forma de um único radical. Isso só pode ser feito quando os radicais tiverem o *mesmo índice* e o *mesmo radicando.*

Exemplos: $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 . \sqrt{2}$

$3 . \sqrt[3]{5} + 4 . \sqrt[3]{5} = 7 . \sqrt[3]{5}$

$- 2 . \sqrt{3} - 3 . \sqrt{3} + \sqrt{3} = - 4 . \sqrt{3}$

Nestes casos, conservamos o radicando e o índice do radical e somamos algebricamente os coeficientes dos radicais que estão sendo adicionados. Essa mesma conclusão pode ser transferida para a adição algébrica de números reais-irracionais, dados sob a forma de potenciação com expoente racional.

Exemplos: $2^{1/2} + 3^{1/2} \neq (2+3)^{1/2}$, isto é, $2^{1/2} + 3^{1/2} \neq 5^{1/2}$

$2^{1/2} + 2^{1/2} = 2 . 2^{1/2}$

$3 . 5^{1/3} + 4 . 5^{1/3} = 5^{1/3} . (3+4) = 5^{1/3} . 7 = 7. 5^{1/3}$

$- 2 . 3^{1/2} - 3 . 3^{1/2} + 3^{1/2} = 3^{1/2} . (-2-3+1) = - 4 . 3^{1/2}$

Você verificou também que a adição algébrica de um número real-irracional com um real-racional diferente de zero, não pode ser posta sob a forma de um único radical.

Exemplos: $1 + \sqrt{2} \neq \sqrt{3}$

$$\frac{1}{2} + \sqrt[3]{2} \neq \sqrt[3]{\frac{1}{2} + 2}$$

Essa conclusão transfere-se também para o caso do real-irracional estar sob a forma de potenciação de expoente racional.

Exemplos: $1 + 2^{1/2} \neq 3^{1/2}$

$$\frac{1}{2} + 2^{1/3} \neq \left(\frac{5}{2}\right)^{1/3}$$

Atividade 37

Efetue as adições algébricas seguintes:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$

b) $\sqrt{7} + 2 \, . \, \sqrt{7} + 3 \, . \, \sqrt{7}$

c) $5 \, . \, \sqrt{3} - 8 \, . \, \sqrt{3} + \sqrt{3}$

d) $1 + \sqrt{6} - 3 - 5 \, . \, \sqrt{6}$

e) $3 \, . \, \sqrt{5} + 2 \, . \, \sqrt{5} - 5 \, . \, \sqrt{5}$

f) $2 + \sqrt{3} - \sqrt{5} - (3 - \sqrt{3} + \sqrt{5})$

g) $-2 \, . \, \sqrt{13} - 3 \, . \, \sqrt{13} - 8 \, . \, \sqrt{13}$

h) $\sqrt[3]{2} + 3 \, . \, \sqrt[3]{2} - 5 \, . \, \sqrt[3]{2}$

i) $\sqrt[4]{2} - 3 \, . \, \sqrt[4]{2} + 2 \, . \, \sqrt[4]{2}$

j) $1 + \sqrt[5]{2} - \sqrt[4]{3} + \sqrt[5]{2} - \sqrt[4]{3}$

k) $3 + \sqrt{2} - \sqrt[3]{7} + 8 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[4]{7}$

l) $\sqrt[9]{7} - \sqrt[7]{3} - 4 + \sqrt[9]{7} + \sqrt[7]{3} + 1$

m) $2^{1/2} + 3^{1/2} - 2 \, . \, 2^{1/2} - 5 \, . \, 3^{1/2}$

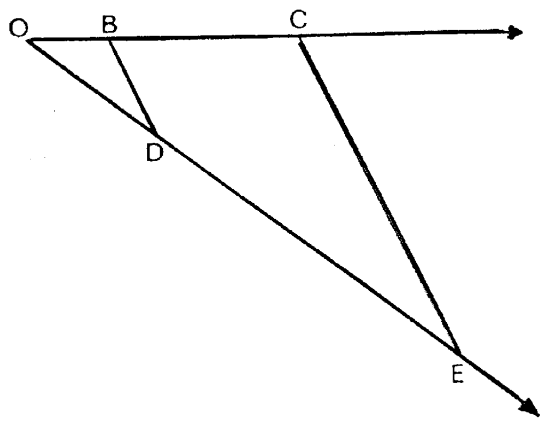
n) $7 \, . 5^{1/2} + 1 - 3 \, . \, 5^{1/2} - 2 + 3 . \, 3^{1/3}$

o) $3 \, . 5^{1/2} - 2 \, . \, 5^{1/2} - 7 \, . 5^{1/2} + 1$

O objetivo da atividade seguinte é fazer com que você compreenda o significado da multiplicação de números reais irracionais, tendo por base a possibilidade de se interpretar geometricamente essa operação.

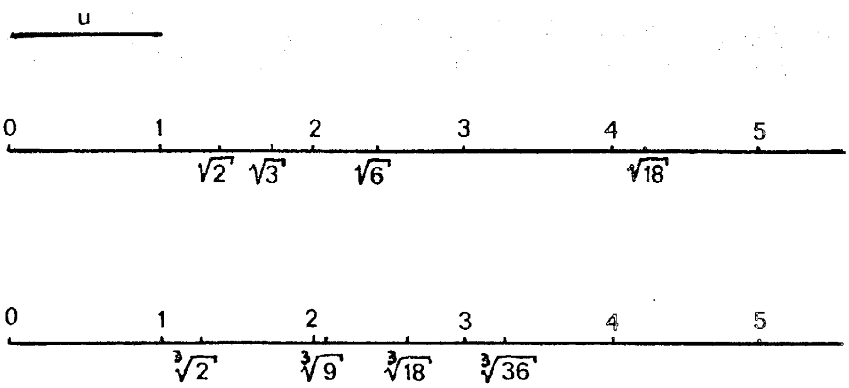
Atividade 38

a) A figura ao lado representa duas semi-retas ($\overline{OC}$ e $\overline{OE}$) de mesma origem, formando uma ângulo qualquer deferente de 180^0. A medida de $\overline{OB}$ é 1u, a medida de $\overline{OD}$ é 2u e a medida de $\overline{BC}$ é 2,5. Traçou-se um segmento paralelo a $\overline{BD}$, obtendo-se o ponto E. Utilizando um compasso, verifique que a medida do segmento DE é igual ao produto das medidas dos segmentos OD e BC.



Utilizando o mesmo processo do item anterior, mostre que quaisquer que sejam as medidas racionais dos segmentos BC e OD, sendo $\overline{OB}$ o segmento unitário, a medida do segmento DE é sempre igual ao produto das medidas dos segmentos BC e OD.

b) Considere a unidade $\underline{u}$ e os números irracionais localizados nas retas numeradas a seguir.



Utilizando o processo geométrico aprendido no item $\underline{a}$ desta atividade e as retas numeradas acima, verifique que as multiplicações abaixo foram feitas corretamente:

1) $\sqrt{2} \circ \sqrt{3} = \sqrt{6}$

2) $\sqrt{3} \circ \sqrt{6} = \sqrt{18}$

3) $\sqrt[3]{2} \circ \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{18}$

4) $\sqrt[3]{2} \circ \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{36}$

c) Com base nos resultados anteriores, escreva uma regra para multiplicar números irracionais na forma de radical de mesmo índice.

Atividade 39

Efetue as multiplicações:

a) $\sqrt{3} \circ \sqrt{15}$

b) $\sqrt{7} \circ \sqrt{3}$

c) $\sqrt{5} \circ \sqrt{7} \circ \sqrt{3}$

d) $\sqrt[3]{3} \circ \sqrt[3]{8}$

e) $\sqrt[3]{2} \circ \sqrt[3]{3} \circ \sqrt[3]{5}$

f) $\sqrt[4]{3} \circ \sqrt[4]{5}$

g) $\sqrt[9]{7} \circ \sqrt[9]{21}$

h) $\sqrt[3]{a} \circ \sqrt[3]{b}$

i) $2^{1/5} \circ 3^{1/5}$

j) $3^{1/2} \circ 5^{1/2} \circ 10^{1/2}$

k) $2^{2/3} \circ 5^{1/3}$

l) $5^{3/4} \circ 2^{1/4}$

m) $\sqrt{0,5} \circ \sqrt{3,2}$

n) $\sqrt{1/3} \circ \sqrt{6}$

Atividade 40

Reduzindo os radicais seguintes ao mesmo índice efetue as multiplicações:

a) $\sqrt{5} \circ \sqrt[5]{5}$

b) $\sqrt{3} \circ \sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[3]{5} \circ \sqrt[4]{3}$

d) $\sqrt{3} \circ \sqrt[6]{5}$

e) $\sqrt{2,5} \circ \sqrt[8]{1,2}$

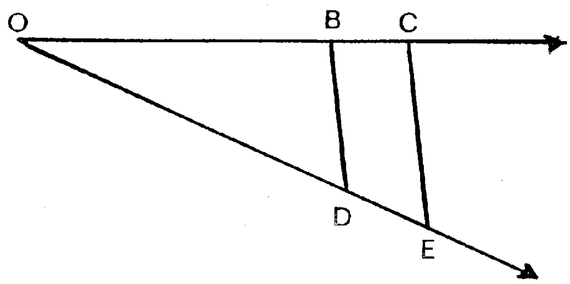
f) $\sqrt[3]{1/2} \circ \sqrt[6]{3/2}$

O objetivo da atividade seguinte é fazer com que você compreenda o significado da divisão de números reais irracionais, tendo por base a possibilidade de se interpretar geometricamente essa operação.

Atividade 41

a) Mostre que, se na figura ao lado $m(\overline{BC}) = 1u$ e $\overline{CE} // \overline{BD}$, então, quaisquer que sejam as medidas racionais de $\overline{OB}$ e $\overline{OD}$, a medida de $\overline{DE}$ é sempre igual ao quociente entre as medidas de OD e OB.

Obs.: Mostre isso através de exemplos numéricos.



Utilizando o processo geométrico acima e as retas numeradas da atividade 35, verifique que as divisões abaixo foram feitas corretamente.

1) $\sqrt{6} \div \sqrt{2} = \sqrt{3}$

2) $\sqrt{6} \div \sqrt{3} = \sqrt{2}$

3) $\sqrt[3]{18} \div \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2}$

4) $\sqrt[3]{36} \div \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{18}$

b) Com base nos resultados anteriores, escreva uma regra para dividir números irracionais na forma de radical de mesmo índice.

Atividade 42

Efetue as divisões seguintes:

a) $\sqrt{18} \div \sqrt{6}$

b) $4^{1/3} \div 2^{1/3}$

c) $\sqrt{2{,}5} \div \sqrt{0{,}5}$

d) $\sqrt{32} \div \sqrt{8}$

e) $3^{2/5} \div 2^{3/5}$

f) $\sqrt[3]{16} \div \sqrt[3]{4}$

g) $\sqrt{5} \div \sqrt[5]{5}$

h) $\sqrt{2/3} \div \sqrt{5/7}$

i) $\sqrt[6]{16} \div \sqrt[6]{5}$

j) $\sqrt{3} \div \sqrt[4]{4}$

k) $\sqrt[5]{30} \div \sqrt[5]{17}$

l) $\sqrt[3]{5} \div \sqrt[5]{2}$

m) $\sqrt[3]{1/5} \div \sqrt[3]{1/10}$

n) $3^{1/2} \div 5^{1/2}$

o) $\sqrt[6]{7} \div \sqrt{3}$

21. Simplificação de números irracionais

Você já sabe que existem infinitas maneiras de se representar um número irracional sob a forma de potenciação de expoente fracionário.

Exemplo: $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = 2^{2/6} = 2^{3/9} = 2^{4/12} = ...$

Mas como $2^{2/6} = \sqrt[6]{2^2}$; $2^{3/9} = \sqrt[9]{2^3}$; $2^{4/12} = \sqrt[12]{2^4}$ ..., então, podemos afirmar que existem também infinitas maneiras de se representar, sob a forma de um radical, um mesmo número irracional.

Assim, $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[9]{2^3} = \sqrt[12]{2^4} = ...$

Neste caso, dizemos que $\sqrt[3]{2}$ está na forma irredutível e daí, todos os demais radicais que são iguais a ele poderão ser simplificados.

Mas como podemos reconhecer se um número irracional, dado sob a forma de radical, é ou não irredutível?

Para isso, em primeiro lugar, devemos decompor em fatores primos o seu radicando. Em seguida, para que ele seja irredutível, as duas condições seguintes deverão ser obedecidas:

1) Os expoentes de *todos* os números primos que aparecem na decomposição do radicando deverão ser menores que o índice do radical do número irracional;
2) Não pode haver nenhum divisor comum entre o índice do radical e os expoentes dos números primos que aparecem na decomposição do radicando.

Exemplo 1: $\sqrt[9]{8}$ não é irredutível pois $\sqrt[9]{8} = \sqrt[9]{2^3}$. Embora 3 seja menor que 9, existe o número 3 que é divisor comum de 3 e 9.

Para simplificar este radical até a forma irredutível fazemos assim:

$$\sqrt[9]{8} = \sqrt[9]{2^3} = 2^{3/9} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$$

Exemplo 2: $\sqrt[4]{36}$ não está na forma irredutível pois:

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \circ 3^2} .$$

Embora 2 seja menor que 4, existe o número 2 que é divisor comum de 2 e 4. Para tornar este radical irredutível fazemos assim:

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \circ 3^2} = \sqrt[4]{2^2} \circ \sqrt[4]{3^2} = 2^{2/4} \circ 3^{2/4} = 2^{1/2} \circ 3^{1/2} = (2 \circ 3)^{1/2} = 6^{1/2} = \sqrt{6} .$$

Exemplo 3: $\sqrt{8}$ não está na forma irredutível pois, $\sqrt{8} = \sqrt{2^3}$. Para tornar este radical irredutível, fazemos assim:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \circ 2} = \sqrt{2^2} \circ \sqrt{2} = 2^{2/2} \circ \sqrt{2} = 2 \circ \sqrt{2} .$$

Atividade 48

Sempre que possível, simplifique os seguintes radicais até a forma irredutível.

a) $\sqrt[6]{8}$

b) $\sqrt[3]{2^4 \circ 5^3}$

c) $\sqrt[3]{27}$

d) $\sqrt{216}$

e) $\sqrt[8]{16}$

f) $\sqrt{3^5 \circ 5^6}$

g) $\sqrt[5]{12}$

h) $\sqrt{72}$

i) $\sqrt{18}$

j) $\sqrt{42}$

k) $\sqrt[3]{125}$

l) $\sqrt{4a^2 \circ b}$

m) $\sqrt[3]{32}$

n) $\sqrt{3x^3 \circ y^2}$

o) $\sqrt{15}$

p) $\sqrt[3]{27x^3 \circ y^4}$

q) $\sqrt{12}$

r) $\sqrt{b^2 \div 4a^2}$

s) $\sqrt[3]{24}$

t) $\sqrt{4x^2 y/3a^2}$

u) $\sqrt{2^4 \circ 5^3}$

v) $\sqrt{x^2 \circ y^2}$

Atividade 44

Resolva os seguintes problemas:

a) Considere um triângulo eqüilátero de lado $\underline{k}$. Determine uma equação que lhe permita calcular a medida da altura $\underline{h}$ desse triângulo em função do lado.

b) Com auxílio da equação encontrada no item $\underline{a}$, determine a medida da altura de um triângulo eqüilátero cujo lado mede $\sqrt{3}$ cm.

c) Determine a área e o perímetro do triângulo do item $\underline{b}$.

d) As diagonais de um losango medem 10 cm e 24 cm. Determine o perímetro do losango.

e) Calcule a altura de um triângulo isósceles sabendo que os lados congruentes medem 25 cm cada um e a base do triângulo tem 14 cm.

f) O lado de um losango mede 17 cm e uma das diagonais tem 30 cm. Determine a medida da outra diagonal.

g) Um trapézio retângulo de 15 cm de altura tem as bases medindo 10 cm e 18 cm. Determine a medida do lado oblíquo às bases.

h) Considere um triângulo eqüilátero de lado $\underline{k}$. Determine uma equação que permita calcular a área desse triângulo em função do lado apenas.

i) Com auxílio da equação encontrada no item h, determine a área de um triângulo eqüilátero cujo lado mede $\sqrt{3}$ cm.

j) Chamamos de geratriz de um cone reto a qualquer segmento de reta que tem uma extremidade no vértice do cone e a outra num ponto qualquer da circunferência da base. Determine uma equação que lhe permita calcular a medida da geratriz de um cone reto em função da altura $\underline{h}$ do cone e do raio $\underline{r}$ da circunferência da base.

k) Com auxílio da equação encontrada no item j, determine a medida da geratriz de um cone reto cujo raio da base é 2 cm e cuja altura é 5 cm.

l) Determine uma equação que lhe permita calcular a aresta $\underline{a}$, não pertencente à base, de uma pirâmide reta de base quadrada em função da aresta $\underline{m}$ da base e da altura $\underline{h}$ da pirâmide.

Bibliografia

AABOE, A. **Episódios da história antiga da matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

ALEKSSANDROV, A.D. e outros. **La Matematica: su Contenido, Métodos y Significado**. Madrid : Alianza Univesidad, 1985.

ARON, R. **Dimensiones de la conciencia histórica**. Fondo de Cultura Económica, México, 1983, 1ª edição.

AUZIAS, J.M. **A Antropologia Contemporânea**. São Paulo : Editora Cultrix, 1978.

BACHELARD, G. **O Racionalismo Aplicado**. Zahar Editores : Rio de Janeiro, 1977.

BARRACLOUGH, G. **A História**. (2 volumes), Lisboa : Livraria Bertrand, 1980.

BECKER, O. **O Pensamento Matemático: sua grandeza e seus limites**. São Paulo: Editora Herder, 1965.

BLOCH, M. **Introdução à História**. Publicações Europa-América Ltda, 5ª edição, s/d.

BOTÍA, A.B. Desarrollo Moral y Educacion Moral: La Perspectiva Cognitiva-Formalista. In: **Revista Española de Pedagogía**, Ano XLV, nº 177, julio - septiembre, 1987.

BOWRA, C.M. **Grécia Clássica**. Livraria José Olympio Editora S.A., Rio de Janeiro, 1983.

BOURDÉ, G. e MARTIN, H. **Les écoles historiques**. Paris : Editions du Seuil, 1983.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Trad. por Elza F. Gomide, Edgar Blucher, São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRAUDEL, F. **Escritos sobre a História**. Trad. J. Guinsburg e Tereza Cristina Silveira da Mota, Ed. Perspectiva S.A., São Paulo, 1978.

BRAUDEL, F. **História e Ciências Sociais**. 5ª edição, Lisboa : Editorial Presença, 1986.

BUNT, L.N.H.; JONES, P.S.; BEDIENT, J.D. **The Historical Roots of Elementary Mathematics**. New York : Dover Publications Inc., 1988.

CARAÇA, B. de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 7ª edição, Lisboa, 1978a.

CARDOSO, C.F.S. **Uma Introdução à História**. 6ª edição, São Paulo Editora Brasiliense S.A.

CASTELNUOVO, E. **Geometria Intuitiva**. Trad. por R.R. Mercadal, Barcelona : Editorial Labor, 1966.

CHARTIER, R. **A História Cultural - entre práticas e representações**. DIFEL - Difusão Editorial Ltda, Lisboa, 1990.

CHESNEAUX, J. **Hacemos tabla rasa del passado?** 9ª edición, México : Siglo Veintiuno Editores, 1987.

COLL, C. As contribuições da psicologia para a educação: teoria genética e aprendizagem escolar. In: **Piaget e a Escola de Genebra**. Org. Luci Banks Leite. Colab. Ana Augusta de Medeiros. Cortez Editora. São Paulo, 1987.

DANTZIG, T. **Número, a Linguagem da Ciência**. Trad. por S.G. Paula, Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DEUS, J.D. **Ciência: curiosidade e maldição**. Lisboa : Gradiva, 1986.

DUCRET, J.J. **Jean Piaget Savant et philosophe**, vol I, Geneve, Paris : Libr. Droz, 1984.

DUBY, G. e LARDREAU, G. **Diálogos sobre a Nova História**. Publicações Dom Quixote, Lisboa, 1989, 1ª edição.

EKELAND, I. **O Cálculo e o Imprevisto**. São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora Ltda, 1987.

EVANS, P. **Motivação**. Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1976.

EVES, H.W. **An Introduction to the History of Mathematics**, fourth edition, U.S.A., 1976.

FAZENDA, I. **Metodologia da Pesquisa Educacional**. São Paulo: Cortez Editora, 1989.

FESTINGER, L. **Teoria da Dissonância Cognitiva**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1975.

FRAENKEL, A.A. Filosofia da Matemática. In: **A Filosofia no século XX**, 3ª edição, Lisboa: Fundaçao Calouste Gulbenkian, 1983, pp. 321-344.

FRANÇA, C.A.V. **Educação Consonante: Inferências educacionais da teoria da dissonância cognitiva**. São Paulo, EPU, 1987.

FREGE, G. Os Fundamentos da Matemática. In: **Os Pensadores**, Trad. por Luís Henrique dos Santos, São Paulo : Abril Cultural, 1983, pp. 187-276.

FRITZ, K.V. The Discovery of Incomensurability by Hippasus of Metapontum. In: **Annals of Mathematics**, vol. 46, nº 2, April, 1945.

GADAMER, H.G. e outros. **História e Historicidade**. Lisboa: Gradiva, 1988.

GERDES, P. **Sobre o Despertar do Pensamento Geométrico**. Tese doutoral, Universidade Eduardo Mondlane, 1987.

GERDES, P. **Etnomatemática: cultura, matemática, educação**. Maputo, Moçambique, Instituto Superior Pedagógico, 1991.

GERDES, P. **Pitágoras africano - um estudo em cultura e educação matemática**. Instituto Superior Pedagógico. Maputo, Moçambique, 1992.

GLASERSFELD, E. An Interpretation of Piaget's Constructivism. In: **Revue Internationale de Philosophie**, 36º Année, 143-143, 1982, Fasc. 4, pp. 612-635.

GLASERSFELD, E. Cognition, Construction of Knowlwdge, and Teaching. In: **Synthese**, 80:131-140, nº 1, July-1989.

GÓMEZ, D.S. El Educador y los Valores Sociales. In: **Revista Española de Pedagogia**, Ano XLV, nº 175, enero-marzo de 1987.

GRUENDER, D.C. Some Philosophical Reflection on Constructivism. In: **Proceedings of the First International Conference**, Florida : Dan. F. Hergt, 1989, pp. 170-176.

GUILLEN, M. **Pontes para o Infinito: o lado humano das Matemáticas**. Lisboa: Gradiva 1987.

GUILLINGS, Richard J. **Mathematics in the time of the pharaohs**. New York: Dover Publications Inc.

HEATH, T.L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**, 3 volumes, New York: Dover, 1956.

HEATH, T.L. **A History of Greek Mathematics**, vols I e II, New York: Dover, 1981.

HEINEMAN, F. Teoria do Conhecimento. In: **A Filosofia no Século XX**, 3ª edição, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1983.

HINTIKKA, J. e REMES, U. A Análise Geométrica Antiga e Lógica Moderna. In: **Cadernos de História e Filosofia da Ciências**, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Campinas, nº 4/1983, pp. 28-47.

HOCQUEGHEM, M.L. e outros. **Histoire des Mathematiques Pour Les Colleges**. 2ª edición, Paris : Editions CEDIC, 1980.

JAEGER, W. **Paidéia - a formação do homem grego**. São Paulo : Herder, s/d.

JONES, P.S. Irrationals or Incomensurables I: their discovery, and a "logical scandal". In: **The Mathematics Teacher**, February, 1956(a), pp. 123-127.

JONES, P.S. Irrationals or Incomensurables II: the Irrationality of 2 and aproximations to it. In: **The Mathematics Teacher**. March, 1956(b), 49:187-191.

JONES, P.S. Irrationals or Incomensurables III: the Greek Solution. In: **The Mathematics Teacher**. April, 1956(c), pp. 282-288.

JONES, P.S. The History of Mathematics as a Teaching Tool. In: **Historical topics for the Mathematics Classroom**, Washington, D.C. : National Council of Teachers of Mathematics, 1969.

JONES, P.S. Recent discoveries in Babylonian Mathematics 1: zero, pi, and polygons. In: **The Mathematics Teacher**. v. 50, nº 3, pp. 162-65, 1957.

KIRK, G.S. e RAVEN, J.E. **Os Filósofos Pré-Socráticos**. 2º edição, Lisboa: Edição da Fundação Calouste Gulbenkian, 1982.

KNORR, W.R. **The Evolution of the Euclidean Elements: A study of the Theory of Incomensurable Magnitudes and its Significance for Early Greek Geometry**. Boston, USA : D. Reidel Publishing Company, 1975.

KOPNIN, P.V. **Fundamentos lógicos da ciência**. Editora Civilização Brasileira S.A., Rio de Janeiro, 1982.

KUHN, T.S. Notas sobre Lakatos. In: **Critica y Conocimiento**, Barcelona, Espanha : Ediciones Grijalbo S.A., 1975.

KUHN, T.S. **A Estrutura das Revoluções Científicas**. São Paulo : Editora Perspectica, 1982.

LAKATOS, I. **A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações**. Rio de Janeiro : Zahar Editores, 1978(a).

LAKATOS, I. **Matemática, Ciencia e Epistemología**. Madrid : Alianza Editorial S.A., 1978(b).

LAKATOS, I. e MUSGRAVE, A. **A Crítica e o Desenvolvimento do Conhecimento**. São Paulo: Editora Cultrix, 1979.

LAWLOR, R. **Sacred geometry - philosophy and practice**. Thames and Hudson Ltda, London, 1982.

LE GOFF, J. e NORA, P. **História: novos problemas**. 2ª edição, Rio de Janeiro; Francisco Alves, 1979.

LE GOFF, J. e NORA, P. **Para um novo conceito de Idade Média, Tempo, Trabalho e Cultura no Ocidente**. Lisboa : Editorial Estampa, 1980.

LE GOFF, J. e NORA, P. **Reflexões sobre a História**. Lisboa : Edições 70, 1986.

LE GOFF, J. e NORA, P. **A história nova**. São Paulo : Martins Fontes, 1990.

LEGRAND, L. **Psicologia aplicada à educação intelectual**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1974.

LEITE, L.B. (org.). **Piaget e a Escola de Genebra**. São Paulo : Cortez Editora, 1987.

LÉNINE, V.I. **Materialismo e Empiriocriticismo**. 2ª edição, Lisboa : Editorial Estampa, 1975.

LERBET, G. Actualité de Jean Piaget. **Revue Française e Pédagogie**, nº 92, juillet-août-septembre, 1990, pp. 5-14.

LERMAN, S. Constructivism, Mathematics and Mathematics Education. In: **Educational Studies in Mathematics**, 20:211-223, 1989.

LOSEE, J. Introducción Histórica a la Filosofía de la Ciencia. 4ª edição, Madrid, Espanha: Alianza Editorial S.A., 1985.

MALLOWAN, M.E.L. **Mesopotâmia e Irão**. Editorial Verbo, Lisboa, 1971.

MARIZOT, J. Platon et les mathématiques. In: **La rigueur et le Calcul, Documents Historiques et Epistemologiques**, Groupe Inter-Irem D'Epistemologie, Paris : Editions CEDIC, 1982, pp. 153-172.

MARROU, H. **História da Educação na Antiguidade**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 1973.

MASTERMAN, Margaret. A natureza do paradigma. In: **A crítica e o desenvolvimento do conhecimento**, org. Imre Lakatos e Alan Musgrave, São Paulo: Editora Cultrix, 1979, pp. 72-108.

MICHEL, P.H. As matemáticas. In: **História Geral das Ciências**, tomo I, 2º volume, capítulo II, org. René Taton, São Paulo : Difusão Européia do Livro, 1959.

MIGUEL, A. **Era uma vez... aquela matemática**. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1984.

MIGUEL, A.; FUNCIA, M.A.; MIORIM, M.A.; NACARATO, A.M. **Tópicos de ensino de Matemática**, 16 fascículos. Delta Xis Editora Ltda, Campinas, 1993.

MUGNY, G. **Psychologie sociale du développement cognitif**. 2ª édition, Peter Lang S.A., 1991, Paris.

PIAGET, J. **A Epistemologia Genética**. Editora Vozes, 2ª edição, 1973. Rio de Janeiro.

PIAGET, J. e outros. **La enseñanza de las matemáticas modernas**. Selección y prólogo de Jesús Hernândez, Madrid : Alianza Editorial, 1986.

PIAGET, J. **O Estruturalismo**. São Paulo : Difusão Européia do Livro, 1970.

PIAGET, J. **Recherches sur la contradiction - Les relations entre affirmations et négations**. Presses Universitaires de France, Paris, 1974.

PIAGET, J. **A Equilibração das Estruturas Cognitivas**. Rio de Janeiro : Zahar Editores, 1976.

PIAGET, J. **El Comportamiento, Motor de la Evolución**. Buenos Aires : Ediciones Nueva Visión, 1977.

PIAGET, J. **Les formes élémentaires de la dialectique**. Éditions Gallimard, 1980, Paris.

PIAGET, J. e GARCIA, R. **Psicogénesis e História de la Ciencia**. México : Ediciones Siglos Veintiuno Editores, 1982.

PLATÃO. **Mênon**. Trad. por Jorge Paleikat, Rio de Janeiro : Editora Tecnoprint S.A., s/d.

PLATÃO. **A República livro VII**. Trad. por Elza Moreira Marcelina, Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1989.

POIRIER, J. **História da Etnologia**. São Paulo : Editora Cultrix, 1981.

PONCE, A. **Educacion y Lucha de Clases**. Buenos Aires : Editorial Cartago, 1974.

PRICE, D.S. **A ciência desde a Babilônia**. São Paulo : Editora da Universidade de São Paulo, 1976.

RAYMOND, P. **A História e as Ciências**. Porto : Rés Editora Ltda, 1979.

ROBINSON, R. A Análise na Geometria Grega. In: **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciências, UNICAMP - Campinas, nº 4/1983, pp. 5-27.

RONAN, C.A. **História Ilustrada da Ciência**. Volumes I, II, III, IV. Círculo do Livro S.A. São Paulo. 1987.

ROSENFELD, L. Le Probléme Logique de la Définition des nombres Irrationnels. In: **Isis**, 9, 1927, 345-48.

ROSS, W. David. **Teoria de las Ideas de Platon**. 2ª edición, Madrid: Edicione Cátedra S.A., 1989.

ROWELL, J.A. Piagetian Epistemology: Equilibration and the Teching of Science. In: **Syntese**, 80:141-161, July, 1989.

RUSSELL, B. **Introdução à Filosofia Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 3ª edição, 1974.

SAGHER, Y. What Phythagoras could have done. In: **The American Mathematical Monthly**, vol. 95, nº 2, fev-1988.

SCHOLZ, H A axiomática dos antigos. In: **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP, Campinas - SP, 1 (1980) pp. 5-20.

SCHURÉ, E. **Os grandes iniciados - Pitágoras**. Martin Claret Editores, São Paulo, 1986.

SEBASTIÁ, J.M. El Constructivismo: um marco teórico problemático. In: **Enseñanza de las Ciencias**, vol. 7, nº 2, mayo, Barcelona, Espanha, 1989.

SEGURA, M.A.V. Reflexiones Acerca de dos Equivocos de la Epistemologia Pedagogica Contemporanea. In: **Revista Española de Pedagogía**, ano XXLVI, nº 180, mayo-agosto, 1988.

SEINDENBERG, A. The Origin of Mathematics. In: **Archive for History of Exact Sciences**, vol. 18, nº 4, 1978, pp. 301-342.

SZABÓ, A. The Transformation of Mathematics into Deductive Science and the Beginnings of its Foundation on Definitions and Axioms. In: **Scripta Mathematica**, vol. XXVII, nº 1, 1960 (parte 1) e **Scripta Mathematica**, vol. XXVII, nº 2, 113-139 (parte 2).

UPINSKY, A. **A Pervensão Matemática - o olho do poder**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

VÁSQUEZ, A. S. **Filosofia da Praxis**. Rio de Janeiro : Editora Paz e Terra, 1968.

VEGA, E.M. Epistemologia y Enseñanza de la Matemática. In: **Educación Matemática**, vol. 1, nº 2, agosto 1989, pp. 12-16.

VLASTOS, G. **O Universo de Platão**. Trad. do francês por Maria Luiza Monteiro Salles Coroa, Brasília : Editora Universidade de Brasília, 1987.

VUYK, R. **Panorámica y crítica de la epistemología genética de Piaget 1965-1980**, tomos I e II. Madrid : Alianza Editorial, 1984.

WALLON, H. **Psicologia e educação da infância**. Lisboa : Editorial Estampa. 1975

WARTOFSKY, M.W. Piaget's Genetic Epistemology and the Marxist Theory of Knowledge. In: **Revue Internationale de Philosophie**, 36e Année, 142-143, Fasc. 4, pp. 470-507.

WATHERHOUSE, W.C. Why Square Roots are Irrational. In: **The American Mathematical Monthly**, vol. 93, nº 3, março 1986.

WHEATLEY, G.H. Constructivist perspectives on science and mathematics learning. In: **Science Education**, 75(1):9-21, John Wiley & Sons, Inc., 1991.