UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

NANCI BARBOSA FERREIRA ARAÚJO

NÚMEROS COMPLEXOS:

UMA PROPOSTA DE MUDANÇA METODOLÓGICA PARA UMA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NO ENSINO MÉDIO

NATAL
2006

NANCI BARBOSA FERREIRA ARAÚJO

NÚMEROS COMPLEXOS:
UMA PROPOSTA DE MUDANÇA METODOLÓGICA PARA UMA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Orientadora: Profa. Dra. Marlúcia Oliveira de Santana Varela
Co-orientadora: Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey

NATAL
2006

APÊNDICE B - Questionamentos a respeito dos números complexos e suas aplicações

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE
DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL
DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE
PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _____________ - DATA: _____/_____/_______
ALUNO: _____________________________________ - Matrícula: ________________

QUESTIONAMENTOS A RESPEITO DOS NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES

ATIVIDADE 1

QUESTÃO 1

OBJETIVO: Verificar a reação dos alunos diante da tentativa de mudança da metodologia de ensino e conseguir informações dos participantes a respeito dos seus conhecimentos e de seus interesses relacionados ao assunto dos números complexos

a) O que você entende por número?

b) Você já ouviu falar em número complexo? Como você entende o que vem a ser números complexos?

c) Onde você acha que são aplicados os números complexos?

APÊNDICE C - Representação dos números complexos no plano cartesiano e problema histórico

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE
DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL
DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE
PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _______________ - DATA: _____/_____/______
ALUNOS: 1 ______________________________________ - Matrícula: _______________
2 ______________________________________ - Matrícula: _______________
3 ______________________________________ - Matrícula: _______________

<u>REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NO PLANO E PROBLEMA HISTÓRICO</u>

<u>ATIVIDADE 2</u>

<u>QUESTÃO 1</u>

OBJETIVO: Verificar como os alunos farão para representar os números complexos no plano

Represente graficamente os números dados abaixo:

a) 1

b) -3

c) $\sqrt{4^{-1}}$

d) $5\sqrt{-1}$

e) $2+\sqrt{-4}$

f) $(4;-1)$

<u>QUESTÃO 2</u>

OBJETIVO: Conseguir desenvolver o problema até chegar na raiz quadrada de um número negativo

Divida 10 em duas partes de modo que seu produto seja 40

APÊNDICE D - Evolução do conceito de números complexos

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE
DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL
DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE
PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _______________ - DATA: _____/_____/______
ALUNOS: 1 _______________________________________ - Matrícula: _______________
2 _______________________________________ - Matrícula: _______________
3 _______________________________________ - Matrícula: _______________

EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMEROS COMPLEXOS

ATIVIDADE 3

QUESTÃO 1

OBJETIVO: Entender que a formação de um conceito matemático pode demorar muito tempo a fim de ser bem compreendido e aceito

"Baseado na leitura da cronologia sobre a evolução do conceito dos números complexos, faça uma análise, dando sua opinião a respeito do que você entendeu".

APÊNDICE E - Potências da unidade imaginária

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE
DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL
DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE

PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _______________ - DATA: _____/_____/______

ALUNOS: 1 _______________________________________ - Matrícula: _______________

2 _______________________________________ - Matrícula: _______________

3 _______________________________________ - Matrícula: _______________

POTÊNCIAS DA UNIDADE IMAGINÁRIA

ATIVIDADE 4

QUESTÃO 1

OBJETIVO: Determinar o valor de qualquer potência de i e conseguir interpretar o conceito de quadrado mágico

Um quadrado mágico é um quadriculado com n^2 quadrados menores que contêm números de forma que a soma desses números em cada linha, em cada coluna e nas duas diagonais é a mesma.

Para responder às solicitações propostas, considere o número complexo $i=\sqrt{-1}$ e o quadrado abaixo:

i	i^2	i^3	i^4
i^5	i^6	i^7	i^8
i^9	i^{10}	i^{11}	i^{12}
i^{13}	i^{14}	i^{15}	i^{16}

a) Calcule: i^2, i^3, i^4, ..., i^{16}.

b) Verifique se o quadrado acima é mágico.

c) Calcule a soma de todos os números.

APÊNDICE F - Operações com números complexos na forma algébrica

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE
DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL
DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE

PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _______________ - DATA: _____/_____/______

ALUNOS: 1 ______________________________________ - Matrícula: _______________

2 ______________________________________ - Matrícula: _______________

3 ______________________________________ - Matrícula: _______________

OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA ALGÉBRICA

ATIVIDADE 5

QUESTÃO 1

OBJETIVO: Trabalhar as operações básicas e adquirir habilidade para trabalhar seus pré-requisitos

Efetue:

a) $2\sqrt{-1}+5\sqrt{-1}$

b) $\left(1+3\sqrt{-1}\right)-\left(2-7\sqrt{-1}\right)$

c) $\left(3+2\sqrt{-1}\right)\cdot\left(4-2\sqrt{-1}\right)$

d) $\left(3-2\sqrt{-1}\right)\div\left(-2+\sqrt{-1}\right)$

e) $\left(2+5\sqrt{-1}\right)^3$

f) $\dfrac{(1+i)^{103}}{(1-i)^{100}}$

QUESTÃO 2

OBJETIVO: Distinguir conjugado de inverso, além de revisar as operações básicas

Resolva as questões abaixo:

a) Determine o inverso do número $Z=(2;1)$

b) Dada a equação: $\dfrac{Z}{3+i}-\dfrac{Z-3}{i}=0$, encontre o conjugado de Z

APÊNDICE G - Parte real e parte imaginária de um número complexo

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE
DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL
DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE
PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _______________ - DATA: _____/_____/______
ALUNOS: 1 ______________________________________ - Matrícula: _______________
2 ______________________________________ - Matrícula: _______________
3 ______________________________________ - Matrícula: _______________

PARTE REAL E PARTE IMAGINÁRIA DE UM NÚMERO COMPLEXO

ATIVIDADE 6

QUESTÃO 1

OBJETIVO: Distinguir a parte imaginária de um número complexo na forma $a+bi$, além de revisar as operações básicas

Determine o real x para que o número complexo abaixo seja imaginário puro. $Z=(13i-6)+(2x+i)\cdot(3-2xi)$.

QUESTÃO 2

OBJETIVO: Distinguir a parte real de um número complexo na forma $a+bi$, além de revisar as operações básicas

Sabendo que k é um número real e que a parte imaginária do número complexo $Z=(2+i)\cdot(k+2i)^{-1}$ é zero. Calcule o valor de k .

APÊNDICE H - Módulo e argumento de um número complexo

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE
DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL
DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE
PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: ______________ - DATA: _____/_____/______
ALUNOS: 1 ____________________________________ - Matrícula: ______________
2 ____________________________________ - Matrícula: ______________
3 ____________________________________ - Matrícula: ______________

MÓDULO E ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO

ATIVIDADE 7

QUESTÃO 1

OBJETIVO: Trabalhar os conhecimentos do aluno previamente aprendidos como: as operações básicas, potências de i, forma algébrica e substituição dos elementos de Z na fórmula do módulo $\sqrt{a^2+b^2}$

Calcular o valor de k de modo que o módulo do número complexo $Z=(1+i)\cdot(k+2i)$ seja igual a 4.

QUESTÃO 2

OBJETIVO: Trabalhar raciocínio do aluno, além dos conhecimentos aprendidos anteriormente como: conhecimento de trigonometria (ângulos notáveis, ciclo trigonométrico, noções de seno e cosseno), propriedades e simplificações de radicais, redução ao primeiro quadrante e módulo

Determine o argumento do número complexo $Z=\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i$

APÊNDICE I - Problemas geométricos de números complexos do tipo aberto

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE
DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL
DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE
PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _______________ - DATA: _____/_____/______
ALUNOS: 1 ______________________________________ - Matrícula: _______________
2 ______________________________________ - Matrícula: _______________
3 ______________________________________ - Matrícula: _______________

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DE NÚMEROS COMPLEXOS DO TIPO ABERTO

ATIVIDADE 8

QUESTÃO 1

OBJETIVO: Mostrar que a representação da soma de dois números complexos é um vetor, e que podemos encontrar sua solução através de mais de um caminho de resolução.

Efetuar geometricamente a adição dos números complexos: $Z_1 = 1 + 2i$ e $Z_2 = 4 + i$.

QUESTÃO 2

OBJETIVO: Trabalhar raciocínio geométrico do aluno e mostrar que existe alguns tipos de problemas que admite mais de uma solução

$ABCD$ é um quadrado. Se $A(1;2)$ e $B(2;5)$, determine as coordenadas de C e D.

APÊNDICE J - Potenciação e radiciação de números complexos

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE
DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL
DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE
PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: ______________ - DATA: _____/_____/______
ALUNOS: 1 ____________________________________ - Matrícula: ______________
2 ____________________________________ - Matrícula: ______________
3 ____________________________________ - Matrícula: ______________

<u>POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS</u>

<u>ATIVIDADE 9</u>

<u>QUESTÃO 1</u>

OBJETIVO: Trabalhar com a primeira fórmula de De Moivre

Dado o número complexo $Z = 1 + \sqrt{3}\, i$, calcule o valor de Z^9

Dado: $Z^n = |Z|^n \left[\cos(nq) + i \cdot sen(nq)\right]$

<u>QUESTÃO 2</u>

OBJETIVO: Trabalhar com a segunda fórmula de De Moivre

Determine as raízes cúbicas de 8 e interprete geometricamente .

Dado: $w_k = \sqrt[n]{|Z|}\left(\cos\frac{q + 2kp}{n} + i \cdot sen\frac{q + 2kp}{n} \right)$

APÊNDICE K - Avaliação proposta aos alunos sobre as atividades

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE
DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL
DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE
PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _______________ - DATA: _____/_____/______
ALUNOS: _____________________________________ - Matrícula: _______________

AVALIAÇÃO PROPOSTA AOS ALUNOS SOBRE AS ATIVIDADES

AVALIAÇÃO

"Caro aluno, a presente avaliação tem por objetivo, colher algumas informações a respeito do processo ensino aprendizagem dos números complexos realizado através das atividades seqüenciadas. A sua sinceridade será de grande importância para o trabalho que estamos desenvolvendo. Desde já agradecemos sua colaboração. Caso aceite o roteiro, expresse sua opinião em relação à forma de apresentação do conteúdo, a organização, a quantidade de atividades, a qualidade das questões selecionadas, a aprendizagem, o tempo proposto e etc."

APÊNDICE L - Tabela 4: Cronologia da evolução dos números complexos

ANO	LUGAR	NOME	CONTRIBUIÇÕES
75 d.C. (século I)	Grécia	Herón	Aparece o primeiro registro de um radical com número negativo na Estereometria de Herón.
275 d.C. (século III)	Grécia	Diophanto	Aparecem Equações de terceiro grau com raiz quadrada de números negativos na Arithmética de Diophanto.
850 d.C. (século IX)	Índia	Mahavira	Afirma que: "... como na natureza das coisas um negativo não é um quadrado, ele não tem, portanto, raiz quadrada".
(século XII)	Índia	Bhaskara	Escreve que: "O quadrado de um afirmativo é afirmativo e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado".
1484	França	Nicolas Chuquet	Faz observações sobre "soluções impossíveis" num manuscrito não publicado.
1494	Itália	Luca Paccioli	Escreve na sua summa de arithmética, geométrica, proportioni et proportionalista a equação $x^2 + c = bx$ e diz que é solúvel se $\frac{1}{4}b^2 \geq c$.
1545	Itália	Cardano	Propôs o problema: "Divida 10 em duas partes de modo que seu produto seja 40". Ele próprio deu o resultado: $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$ e escreveu no Ars Magna que essas expressões chamadas raízes sofísticas são "tão sutis quanto inúteis".
1560	Itália	Raphael Bombelli	Teve a idéia de operar com expressões que envolviam raízes quadradas de números negativos.
1572	Itália	Raphael Bombelli	Publicou seu tratado de Álgebra em três volumes. Foi o primeiro a operar e criar regras para os números complexos. Considerou a equação $x^3=15x+4$ e ao encontrar uma raiz dessa equação diz: "... A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova ..."
1629	França	Albert Girard	Introduziu o símbolo $\sqrt{-1}$.
1673	Inglaterra	John Wallis	Publicou um tratado: "Álgebra" que discute a impossibilidade da existência de quantidades imaginárias e compara essa questão com a da existência de quantidades negativas.
1702	Alemanha	Leibniz	Trabalhou com os números na forma $a+b\sqrt{-1}$, mesmo intrigado por achar que $\sqrt{-1}$ não tinha sentido, mas, sempre obtinha resultados corretos.
1714	Inglaterra	Roger Cotes	Obteve um importante resultado, relacionado com a obtenção de raízes n-ésimas da unidade, como: $\log_e(\cos q + i\cdot \text{sen}\, q) = iq$. Isso poderia ter levado à "relação de Euler": $\cos q + i\cdot \text{sen}\, q = e^{iq}$ que, implica a "fórmula De Moivre": $(\cos q + i\cdot \text{sen}\, q)^n = \cos nq + i\cdot \text{sen}\, nq$, o que resolveria o problema de achar raízes.
1722	França	Abraham de Moivre	Utilizando fatos que já havia publicado em 1707, ele obteve um resultado que implicou a fórmula que leva seu nome embora tenha se limitado a casos particulares e nunca tenha enunciado ou demonstrado a fórmula geral.

1730	França	Abraham de Moivre	Desenvolveu a fórmula: $(\cos q + i \cdot \mathrm{sen} q)^n = \cos nq + i \cdot \mathrm{sen} nq$, que relaciona as funções trigonométricas com os números complexos.
1740	Suíça	Leonhard Euler	Ele afirma que $y = 2 \cdot \cos q$ e $y = e^{ix} + e^{-ix}$ são soluções da mesma equação diferencial, portanto, deviam ser iguais.
1747	França	Jean Le R. d'Alembert	Publicou "Refléxions sur la cause générale desvents", em que afirmou que toda expressão construída algebricamente a partir de um número complexo é da forma $a + b\sqrt{-1}$.
1748	Suíça	Leonhard Euler	Usou o símbolo i pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$, identificou o número complexo $(a, 0)$ com o número real **a** e redescobriu o resultado de Cotes, demonstrando a fórmula De Moivre e estendendo sua validade para todo expoente n real.
1799	Noruega	Caspar Wessel	Dá interpretações para os números complexos na forma $a+bi$ e formula uma representação geométrica para as operações com números complexos.
1806	Suíça	Jean-Robert Argand	Também dá interpretações para os números da forma $a+bi$ e para as operações com complexos, aplicando seus resultados à demonstração de teoremas de álgebra, geometria e trigonometria.
1815	Alemanha	Carl Friederich Gauss	Teve a brilhante idéia de substituir $a+b\sqrt{-1}$ por um par ordenado de números reais (a, b), possibilitando, a partir daí, a visualização no plano cartesiano dos números "sofísticos", "sem sentido" ou "imaginários" e assim tornou a interpretação geométrica dos números complexos amplamente aceita.
1821	França	Agustin Cauchy	Introduziu os termos "conjugado" e "módulo".
1822	Alemanha	Carl Friederich Gauss	Introduziu o nome "número complexo".
1833	Irlanda	Willian Rowan Hamilton	Desenvolveu a formalização completa dos números complexos como pares ordenados e de números reais.
1841	Alemanha	Weierstrss	Introduziu a notação $\lvert Z \rvert$ para módulo de números complexos.
1847	França	Agustin Cauchy	Deu um outro tipo de formalização aos números complexos.

APÊNDICE M - Lista de exercícios sobre números complexos

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE
DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL
DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE
PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: ______________ - DATA: _____/_____/______

LISTA DE EXERCÍCIOS SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS

1) Resolva as equações em C

a) $x^2 + 25 = 0$ b) $x^2 + 2x + 2 = 0$ c) $x^2 - 2x + 2 = 0$ d) $2x^2 - 6x + 7 = 0$

2) Obtenha x e y para que o número complexo $Z = (x+6) - (y^2 - 16)i$ seja:

a) um número real b) um número imaginário

3) Determine os números reais m e n tais que $(n+m) + (m-n)i = 4 + 2i$

4) Determine o valor de:

a) i^{81} b) i^{1533} c) $(-i)^{16}$ d) $3i^{15} - i^{24}$

e) $16i^5 + 5i^{10} - (3i)^3$ f) $(1-2i)^5$

5) Dados dois números complexos $Z_1 = 2 + 3i$ e $Z_2 = 1 - 5i$, determine o que se pede:

a) $Z_1 + Z_2$ b) $Z_2 - Z_1$ c) $Z_1 + \overline{Z_2}$ d) $\overline{Z_2} - \overline{Z_1}$

e) $Z_1 - \overline{Z}_2 + \overline{Z_1}$ f) $\overline{Z_2^2} + Z_1^2 - 3i$

6) Dados dois números complexos $Z_1 = 3 - 5i$ e $Z_2 = -2 + 4i$, determine o que se pede:

a) $Z_1 \cdot Z_2$ b) $Z_2 \cdot \overline{Z_1}$ c) $\overline{Z_2} \cdot Z_1$ d) $\overline{Z_1} \cdot Z_2^2$

e) $(Z_1 + Z_2) \cdot \overline{Z_1}$ f) $\left(\overline{Z} - Z_2\right) \cdot Z_2$

7) Dados dois números complexos $Z_1 = 3 - 5i$ e $Z_2 = 1 - 5i$, determine o que se pede:

a) $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ b) $\dfrac{Z_2}{Z_1}$ c) $\dfrac{1}{\overline{Z_1}}$ d) $\dfrac{Z_1 \cdot \overline{Z_1}}{Z_2}$

e) $\dfrac{\overline{Z_2} \cdot Z_1}{\overline{Z_1}}$ f) $\dfrac{\overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}}{Z_1}$

8) Dado: $Z = 78p - 18i + 48qi - 208$, ache os valores reais de p e q de modo que $Z = 0$

9) Determine o real x para que $Z = (13i - 6) + (2x + i)\cdot(3 - 2xi)$ seja:

a) Imaginário puro b) Real

10) Determine o real x, para que:

a) $Z = \dfrac{(x+4)+ix}{(x+4)-i}$ seja um número real b) $Z = \dfrac{(2x+3)-ix}{1+ix}$ seja imaginário puro

11) Sendo $Z = 1 - i$, calcule o valor de $Z^3 + Z^2 + Z$

12) Calcule o valor de $i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{100} + i^{101}$

13) Efetue: $\dfrac{(1+i)^{103}}{(1-i)^{100}}$

14) Represente o número complexo $Z = (2 - i)\cdot(2i - 3)$ no plano de Argand-Gauss

15) Obter a forma trigonométrica dos números complexos:

a) $Z = (2,\ -2)$ b) $Z = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i$ c) $Z = -4i$ d) $Z = 2\sqrt{2} + i$

16) Determine p para que o módulo do número complexo $Z = (p + 2i)\cdot(1 + i)$ seja igual a 4.

17) Obtenha o número complexo Z de modo que:

a) $Z(2-i) - 4 + 5i = 6 - 2i$ b) $2Z + 3\bar{z} = 4 - i$ c) $\dfrac{z}{1-i} + \dfrac{z+2}{1+i} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2}i$

18) Encontre a forma algébrica dos números abaixo:

a) $Z = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\dfrac{7p}{4} + i\cdot\operatorname{sen}\dfrac{7p}{4}\right)$ b) $Z = 4\left(\cos\dfrac{35p}{6} + i\cdot\operatorname{sen}\dfrac{35p}{6}\right)$

19) Calcule as potências:

a) $(1-i)^{12}$ b) $(1+\sqrt{3})^5$ c) $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^6$ d) $\left(\dfrac{-1-i}{i}\right)^{10}$

20) Dados os números complexos $Z = 6\cdot\left(\cos\dfrac{5p}{6} + i\cdot\operatorname{sen}\dfrac{5p}{6}\right)$ e $W = 3\cdot\left(\cos\dfrac{p}{4} + i\cdot\operatorname{sen}\dfrac{p}{4}\right)$,

calcule:

a) $Z\cdot W$ b) Z^2 c) W^3 d) $\sqrt{W}$

e) $\sqrt[3]{Z}$ f) $\dfrac{Z}{W}$ g) $\dfrac{W}{Z}$