

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS
NATURAIS E MATEMÁTICA

ROBSON DE OLIVEIRA SANTOS

O USO PEDAGÓGICO DE UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA A
AQUISIÇÃO DE ALGUMAS IDÉIAS RELACIONADAS AO CONCEITO
DE NÚMEROS COMPLEXOS

NATAL - RN
2008

ROBSON DE OLIVEIRA SANTOS

**O USO PEDAGÓGICO DE UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA A AQUISIÇÃO
DE ALGUMAS IDÉIAS RELACIONADAS AO CONCEITO DE NÚMEROS
COMPLEXOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática sob a orientação do Professor Dr. John Andrew Fossa.

NATAL - RN
2008

Apêndice A

Seqüência didática

Nesse trabalho acreditamos que uma seqüência didática elaborada com motivações históricas onde o aluno possa interagir na construção do conhecimento e se utilizando de motivações e dúvidas semelhantes que acompanharam o desenvolvimento dos números complexos seja uma forma oportuna para se inserir esse conteúdo.

Atividade 00

Parte I

Leia atentamente os problemas abaixo e tente encontrar a (s) soluções para cada um deles.

- **1º Bloco de questões**

- a) Dividir 14 em duas partes tal que o produto delas seja 40. Quanto medirá cada uma dessas partes?
- b) Dividir 10 em duas partes tal que o produto delas seja 24. Quanto medirá cada uma dessas partes?
- c) Dividir 10 em duas partes tal que o produto delas seja 40. Quanto medirá cada uma dessas partes?

- **2º Bloco de questões**

- d) Qual a medida do lado de um quadrado cuja área mais 96 resulta 20 vezes o seu lado?
- e) Qual a medida do lado de um quadrado cuja área mais 100 resulta 20 vezes o seu lado?
- f) Qual a medida do lado de um quadrado cuja área mais 101 resulta 20 vezes o seu lado?

Parte II

Como você deve ter observado, existem blocos de problemas com situações bem parecidas. Houve algum(s) que você sentiu mais dificuldade em encontrar as soluções? Por quê?

Atividade 01

Retomemos a situação da letra c da atividade anterior e analise alguns aspectos desse problema:

- a) Escreva as raízes, na forma mais reduzida possível, que representam as soluções do problema descrito.

- b) Se somarmos ou multiplicamos essas raízes chegaremos à descrição do problema?

- c) Em sua opinião esse problema tem solução? Justifique com argumentos.

• UM POUCO DE HISTÓRIA

Por voltado século XV o matemático francês Nicolas Chuquet, conhecido pela sua obra *Triparty en la Science des Nombres*, ao resolver a equação quadrática $4 + x^2 = 3x$ (em simbologia moderna) obtém como *soluções*:

$$X = \frac{3}{4} \pm \sqrt{2 \cdot \frac{1}{4}} - 4 \text{ e afirma que esta raiz é impossível.}$$

O Primeiro matemático da história a considerar os números complexos com mais seriedade foi o italiano Gerolamo Cardano. Nascido em Pavia, foi um cientista a moda de seu tempo, matemático, filósofo, médico.

Em sua obra *Ars Magna* (Nuremberg, 1545), uma das obras-primas de toda a Renascença, Cardano utilizou-se de um problema semelhante e teve as

mesmas indagações que você provavelmente teve ao se deparar com raízes dessa forma. Ele dizia que esse problema é “manifestamente impossível, mas, mesmo assim vamos operar” e concluiu que as soluções encontradas eram “verdadeiramente sofisticadas e sua manipulação tão sutil quanto inútil”. Porém, ao contrário dos matemáticos que o precederam, ele não só não evita falar dos imaginários como cria exemplos *ad hoc* no capítulo XXXVII, que pressupõem a sua existência, pelo menos na *imaginação*.

Atividade 02

E você, como faria para operar e simplificar expressões do tipo abaixo especificadas? Justifique a sua maneira.

a) $2\sqrt{-1} + 5\sqrt{-1}$

b) $(1 + 3\sqrt{-1}) + (2 - 7\sqrt{-1})$

c) $(3 + 2\sqrt{-1})(4 - 2\sqrt{-1})$

• UM POUCO MAIS DE HISTÓRIA

Embora assumisse a existência dessas estranhas entidades, Cardano não sabia operar com elas.

Devemos observar que nesse estágio tudo é um jogo com símbolos porque não se sabe o que é $b\sqrt{-1}$ (seria o produto de um número real b por uma "coisa" que evidentemente não é um número real) e também não se sabe o que é $a + b\sqrt{-1}$ (soma de um número real com O QUÊ?). Essa era a situação no século XVI.

O problema só foi resolvido em 1550 com a obra *Álgebra* do matemático italiano Rafael Bombelli que também tinha estudado a obra de Cardano. A edição manuscrita dessa obra é de 1550, no entanto só foi publicada em 1572.

A *Álgebra* de Bombelli começa com material elementar e culmina com o estudo das equações cúbicas e quárticas. Ele foi o primeiro matemático a escrever as regras para a adição, a subtração e a multiplicação de números complexos.

Raízes quadradas de números negativos continuaram aparecendo nos séculos XVI, XVII, XVIII e não só no estudo de equações algébricas. O que mais perturbava os matemáticos era que essas raízes - na época, símbolos sem significado - manipuladas de acordo com as regras usuais da álgebra, forneciam resultados corretos que às vezes não podiam ser obtidos de outra maneira.

O mal estar que esses símbolos sem significado provocavam está refletido nos nomes que lhes foram atribuídos: números "sofísticos", "sem significado", "impossíveis", "fictícios", "místicos", "imaginários".

Foi uma publicação de Gauss, em 1831, que mudou totalmente esse quadro. O pensamento de Gauss consistia em olhar para os números a e b do símbolo $a + b\sqrt{-1}$, como coordenadas de um ponto em um plano cartesiano e, assim, associar a cada um desses símbolos um ponto P do plano e reciprocamente. Deu também uma interpretação geométrica, visível, para a adição, subtração e multiplicação dos símbolos.

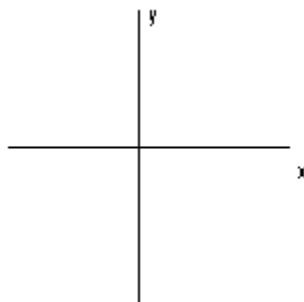
Atividade 03

Como já mencionamos, para Gauss e outros matemáticos cada ponto no plano é a representação geométrica de um número complexo. Dessa forma, marque no eixo de coordenadas segundo a representação Gaussiana os pontos descritos abaixo:

a) os pontos $5 - \sqrt{-16}$ e $5 + \sqrt{-16}$ (considere $\sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot (-1)$)

b) Represente cada ponto marcado como extremidades de um vetor que tem origem no centro do eixo de coordenadas e descubra que é o vetor soma resultante escrevendo em seguida as coordenadas de sua extremidade. (Se

possível reescreva essa coordenada na forma Gaussiana de número complexo)



c) Com base nos procedimentos feitos nessa atividade, generalize a soma algébrica de números complexos:

$$* (a + b\sqrt{-1}) + (b + c\sqrt{-1}) = ?$$

$$* (a + b\sqrt{-1}) - (b + c\sqrt{-1}) = ?$$

• UM POUCO MAIS DE HISTÓRIA

No ano de 1777 o matemático suíço Leonardo Euler era o primeiro a representar a raiz quadrada de -1 com o símbolo i . Tal simbologia foi adotada numa memória apresentada à Academia de S. Petersburgo (*De Formulis Differentiabus etc*) e só publicada postumamente em 1794. Mas como já dissemos, a operacionalidade aritmética desses números atribui-se ao matemático Rafael Bombelle onde em sua *Álgebra*, este denomina a $\sqrt{-1}$ de *mais de menos*:

[...] Este tipo de raiz quadrada tem operações aritméticas diferente dos outros e uma denominação diferente, porque quando o cubo da terça parte das coisas é maior que o quadrado da terça parte do número, o excesso não se pode chamar - lhe 'nem mais nem menos'. Mas vou chama-lhe 'mais de menos' quando for adicionado ($+\sqrt{-1}$) e quando for subtraído vou chama-lhe de 'menos de menos' ($-\sqrt{-1}$)[...]
(Rafael Bombelli citado por OLIVEIRA,2000, p.05)

Este também foi o responsável pela criação das regras fundamentais da multiplicação dos números complexos:

Mais vezes mais de menos , dá mais de menos.
 Menos vezes mais de menos, dá menos de menos.
 Mais vezes menos de menos, dá menos de menos.
 Menos vezes menos de menos, dá mais de menos.
 Mais de menos vezes mais de menos,dá menos.
 Mais de menos vezes menos de menos, dá mais.
 Menos de menos vezes menos de menos, dá mais.
 (Rafael Bombelli citado por OLIVEIRA,2000, p.05)

O que em linguagem moderna teríamos:

$$(+1).(+i) = +i$$

$$(-1).(+i) = -i$$

$$(+1).(-i) = -i$$

$$(-1).(-i) = +i$$

$$(+i).(+i) = -1$$

$$(+i).(-i) = +1$$

$$(-i).(-i) = -1$$

Atividade 04

Nos números complexos abaixo substitua a $\sqrt{-1}$ por i e opere a multiplicação segundo as regras delimitadas por Bombelle:

a) $(1 + 3\sqrt{-1}) + (2 - 7\sqrt{-1})$

b) $(3 - 2\sqrt{-1})(4 - 2\sqrt{-1})$