Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Sociais Aplicadas
Programa de Pós-Graduação em Educação

ENSINO DA MATEMÁTICA POR ATIVIDADES: UMA ALIANÇA ENTRE O CONSTRUTIVISMO E A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Iran Abreu Mendes

Natal – RN

2001

Ensino de Trigonometria

O módulo de ensino utilizado na experiência com os estudantes

O módulo de ensino utilizado na experiência com os estudantes

A seguir, apresentamos as atividades que compõem o referido módulo para a introdução à trigonometria plana básica na 1ª série do ensino médio. Esperamos que tanto o professor como os estudantes procurem explorar ao máximo as sugestões contidas nas atividades, pois as mesmas podem ser enriquecedoras durante o processo de aquisição do conhecimento matemático escolar. Acreditamos que através do referido módulo é possível estabelecermos uma conexão entre os aspectos cotidiano, escolar e científico da trigonometria e com isso contribuir para que os estudantes desenvolvam uma nova atitude diante da construção do seu conhecimento matemático. Todavia, é importante que tanto os professores quanto os estudantes, não se limitem a execução pura e simples do que está sendo proposto aqui, mas reflitam sobre cada fase vivenciada, bem como sobre cada resultado obtido. Daí sim será possível extrair conclusões ricas e essenciais a uma aprendizagem sólida e plena do tópico contido nas atividades.

Seqüência das atividades

1. Noções de ângulo
2. Explorando triângulos retângulos
3. Formulando o teorema de Pitágoras
4. Medindo altura de objetos pela sombra
5. Construindo e explorando o relógio de sol
6. Medindo altura dos objetos sem a utilização de sombras
7. Razões trigonométricas – das cordas ao triângulo retângulo
8. Construindo os valores de seno, cosseno e tangente de ângulos agudos
9. Construindo e explorando o trigonômetro
10. A razão Pi (π) entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro
11. Explorando o ciclo trigonométrico
12. Outras atividades complementares

Atividade N.º 01: Noções de ângulo

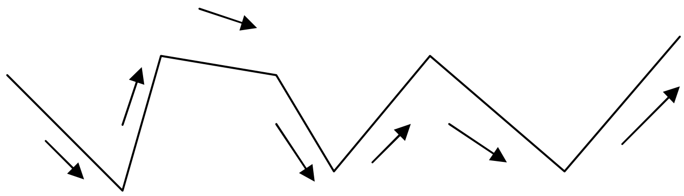
Objetivos:

- Desenvolver o conceito de ângulo;
- Exercitar a medição de ângulos;
- Diferenciar ângulos retos, agudos e obtusos.

⇒ Sugestão: Nessa atividade sugerimos que utilizem esquadros (ou régua) e transferidor

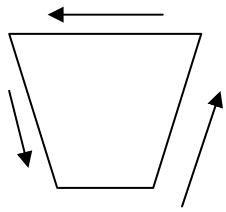
1. Observe a seqüência geométrica apresentada abaixo e diga quantas mudanças de direção ocorreram em cada caso?

a)

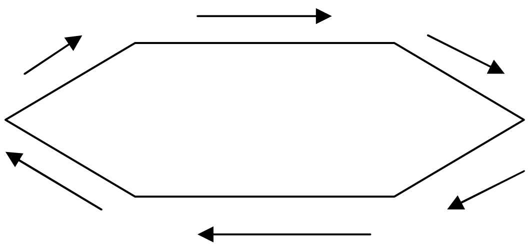


b)

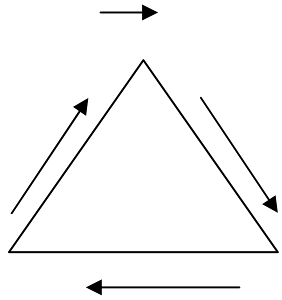
c)



d)



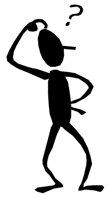
e)



A cada mudança de direção você pode notar que há uma nova forma de seguir o percurso. Esse movimento determina um ente matemático que chamamos ângulo. Afinal, o que é ângulo?

A palavra ângulo é costumeiramente usada na matemática e nas expressões lingüísticas da sociedade, como por exemplo: ângulo de visão, ângulo de posição, entre outras. Mas afinal, o que significa a palavra ângulo, para você? Vamos recorrer ao dicionário! De qualquer forma vejamos o seguinte: tente isolar dois segmentos consecutivos de qualquer uma das figuras apresentadas anteriormente. Quais as suas conclusões? Dê alguns exemplos de ângulos.

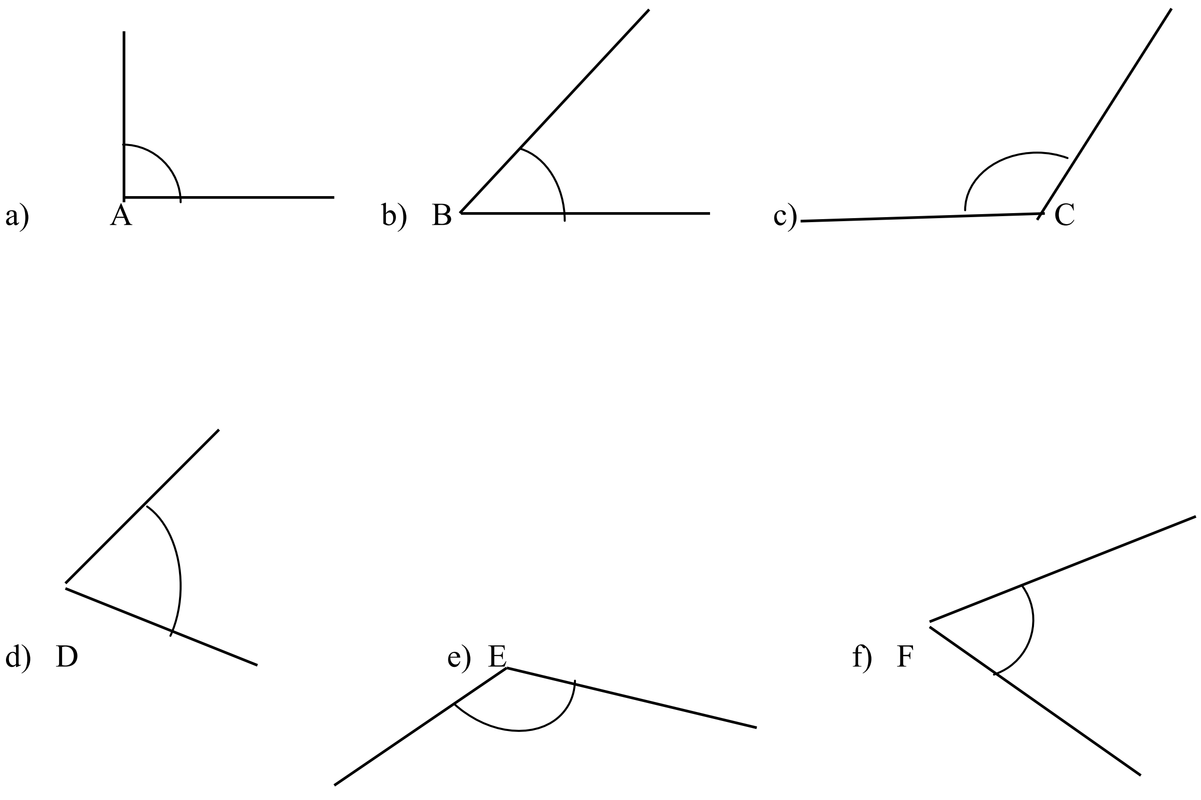
Agora que já conversamos um pouco a respeito do significado da palavra ângulo e você se posicionou com relação ao seu modo de conceber essa idéia, vamos agir um pouco mais na direção dos ângulos. Essa fase da atividade é muito simples, mas requer um pouco da sua atenção.

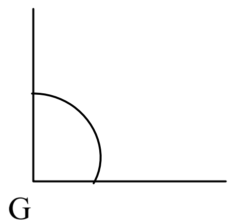


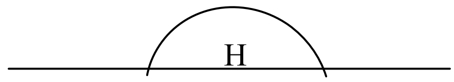
⇒ Eis o nosso primeiro desafio!

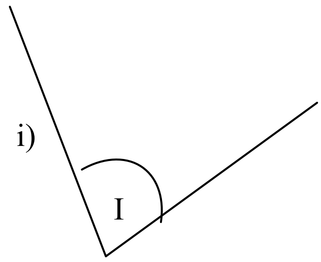
Diante de tudo que já falamos e discutimos, propomos que você, com auxílio do transferidor.

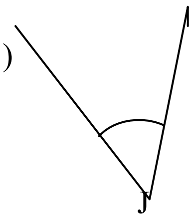
2. Determine a medida de cada um dos ângulos representados abaixo.

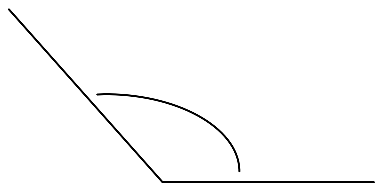


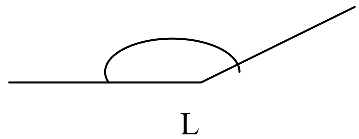
g) 

h) 

i) 

j) 

l) 

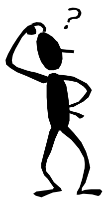
m) 

M

Você já deu seu ponto de vista acerca da noção de ângulo, exercitou a medição dos ângulos propostos anteriormente e discutiu as etapas já praticadas. Você já sabe que a comunicação matemática avança na direção da simbolização? Como podemos simbolizar esses ângulos? É importante que agora você tente esboçar graficamente um exemplo de um ângulo e sua simbolização. Vamos tentar!

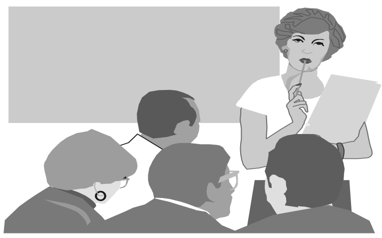
⇒ Uma idéia!

As medidas obtidas na questão nº 2 foram variadas? Agrupe os ângulos de acordo com o valor das medidas encontradas. (sugestão: Agrupe os ângulos em três grupos; os menores que 90º; os maiores que 90º; os iguais a 90º) através de uma tabela. A esses ângulos chamamos agudos, obtusos e retos.



⇒ Um desafio!

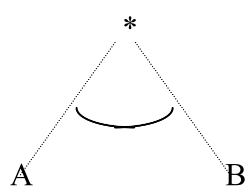
Já que você avançou mais uma etapa, que tal mais um desafio! Identifique na sala de aula e represente, objetos que geometricamente possam representar ângulos agudos, retos e obtusos. Sugerimos que você observe outros objetos fora de sua sala de aula, no percurso da escola para sua casa, na sua casa ou ainda em outros lugares que você conhece. Se for conveniente para você, desenhe esses objetos.



⇒ Um pouco dos ângulos na história

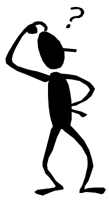
A palavra trigonometria é formada por três radicais gregos: *tri* (três), *gonos* (ângulos) e metrum (medir) e significa medidas do triângulo. Essas medidas, entretanto, requerem um conhecimento básico sobre ângulos de um triângulo e suas medidas. A necessidade de relacionar distâncias com ângulos levou astrônomos e topógrafos de diversos povos e períodos históricos, como os babilônios, gregos, árabes e hindus, a criarem a trigonometria.

Os gregos antigos concebiam a noção de ângulo, imaginando, por exemplo, duas pessoas apontando para uma mesma estrela, a partir de pontos diferentes da terra, cujas direções tinham um ponto em comum, a estrela. Com isso tentaram dar a exata idéia de ângulo, ou seja, cada pessoa apresentava uma orientação (direção), que tinha um ponto de convergência (a estrela), o vértice do ângulo.



Já os babilônios antigos (4000 - 3000 a. C.) utilizavam as noções de ângulos, nas construções ligadas a sua astronomia, a sua religiosidade, bem como ao calendário das estações e da época do plantio. Para isso usaram o seu sistema de numeração sexagesimal no qual dividiam uma circunferência em seis partes iguais usando o seu raio como medida padrão, seguindo-se de várias subdivisões até obter 360 partes (graus) geradas através das frações da medida do raio e talvez até, por influência do total de dias do ano (eles consideravam o ano com apenas 360 dias). Dessa prática surge também as idéias básicas para a criação das medidas de minuto e segundo, pois no referido sistema de contagem, as frações sexagesimais, após traduções do grego para o árabe e em seguida, para o latim, tornaram-se as partes *minutae primae* e partes *minutae secundae* das quais derivaram as palavras minuto e segundo.

O ângulo reto surgiu com a prática de medição dos antigos, quando mediam a altura de objetos, colocando uma vara em posição vertical em relação ao chão e comparavam as sombras projetadas, o que mais tarde tornou-se uma das idéias básicas da geometria apresentada por Euclides, quando suscitou a idéia de que duas retas que se cruzam formam ângulos iguais entre si e retos. Logo as retas que os formam são perpendiculares. Daí surgiram as noções de ângulos agudos e obtusos para os menores e maiores que o ângulo reto, considerando as noções de perpendicularismo.



⇒ Mais um desafio!

Você é capaz de dividir e subdividir a circunferência em 6 partes iguais e assim sucessivamente, tomando o raio como medida? Use o compasso ou o transferidor, pois eles lhe ajudarão a vencer esse desafio. Como você fez para subdividir a circunferência. Quantas subdivisões você alcançou? Apresente suas conclusões sobre esse desafio.

⇒ Concluindo mais uma etapa

Para concluir, solicitamos que você descreva, a sua maneira, tudo o que você viu e aprendeu durante a realização desta atividade, apontando os pontos que mais dificultaram o seu desenvolvimento e as suas dúvidas, caso elas existam.

Atividade n.º 02: Explorando triângulos retângulos

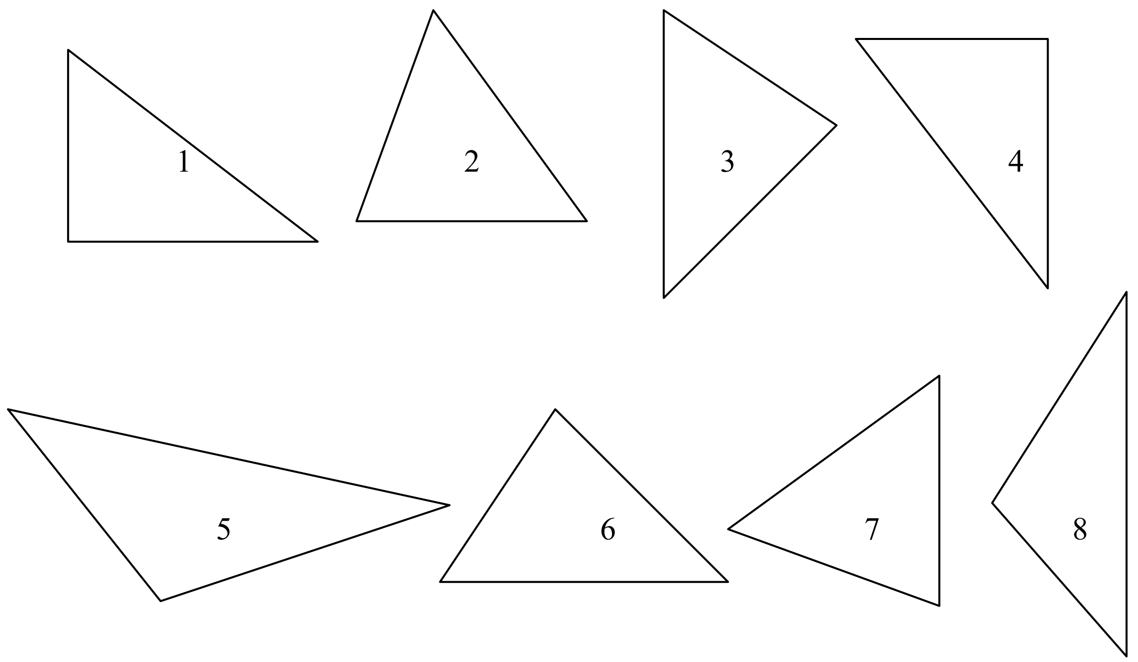
Objetivos:

- Conceituar semelhança entre dois triângulos;
- Relacionar dois ou mais triângulos semelhantes entre si;
- Aplicar as principais propriedades da relação de semelhança entre triângulos na determinação de uma proporção como igualdade entre duas razões de semelhança.

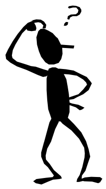
⇒ Sugestão: Nessa atividade sugerimos que utilizem régua ou esquadros, compasso e transferidor

⇒ Construções Práticas

1. Observe os triângulos abaixo e indique os pares que são visualmente semelhantes.

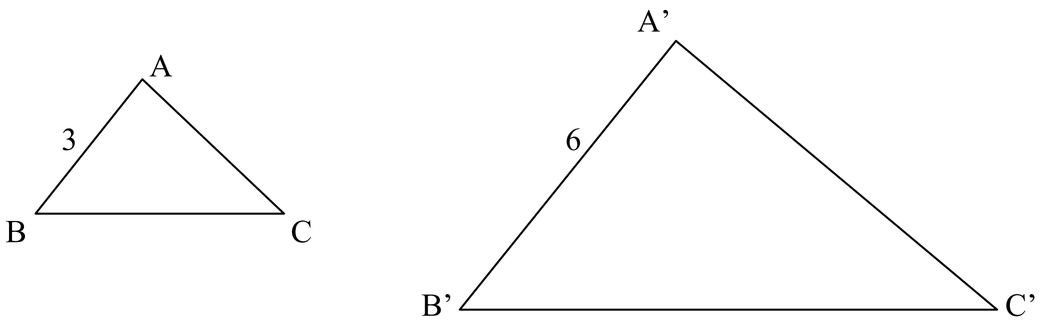


Como podemos comprovar matematicamente essa possível semelhança? Vamos tentar!



⇒ Outro desafio!

2. Observe com atenção os dois triângulos semelhantes abaixo. Neles estão assinaladas algumas de suas medidas. Lembrando que os lados correspondentes de triângulos semelhantes são proporcionais, complete:



a) BC =

b) B’C’ =

c) A’C’ =

d) A’B’ =

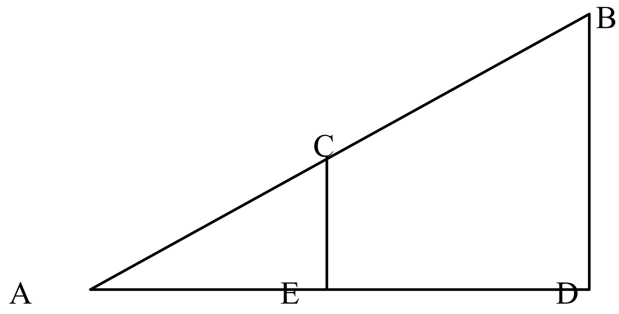
e) $\frac{B'C'}{BC} =$

f) $\frac{A'B'}{AB} =$

g) $\frac{A'C'}{AC} =$

3. Como você encontrou os resultados da questão anterior? O que caracterizou a semelhança entre os triângulos? Fale sobre outras conclusões obtidas até agora.

4. Observe os triângulos ABD e ACE da fig. abaixo e verifique se eles são semelhantes, justificando sua resposta.



⇒ Um pouco de semelhança na história dos triângulos

Os geômetras gregos elevaram a um altíssimo grau de perfeição, técnica e lógica, o estudo das proporções entre grandezas e, em particular, o confronto entre figuras semelhantes. Eles basearam em tal estudo, o cálculo não só de comprimentos como a altura das edificações (como as pirâmide egípcias), mas também das áreas de muitas figuras planas limitadas por retas. O grego Tales de Mileto (c. 640 – 549 a. C.) demonstrou que a relação existente entre os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes é sempre a mesma, independente do comprimento desses lados.

O estudo sobre semelhança foi organizado pelos gregos tão perfeitamente que ainda hoje se estuda em muitas escolas, da mesma maneira que se estudava na Grécia antiga. Era principalmente através de dois triângulos semelhantes que as antigas civilizações mostravam sua habilidade nos cálculos de grandes distâncias.

⇒ Concluindo mais uma etapa

Que tal você descrever suas considerações sobre tudo o que foi apresentado nesta atividade! Aponte os pontos principais aprendidos, as suas dúvidas e dificuldades, caso existam.

Atividade n.º 03: Formulando o teorema de Pitágoras

Objetivos:

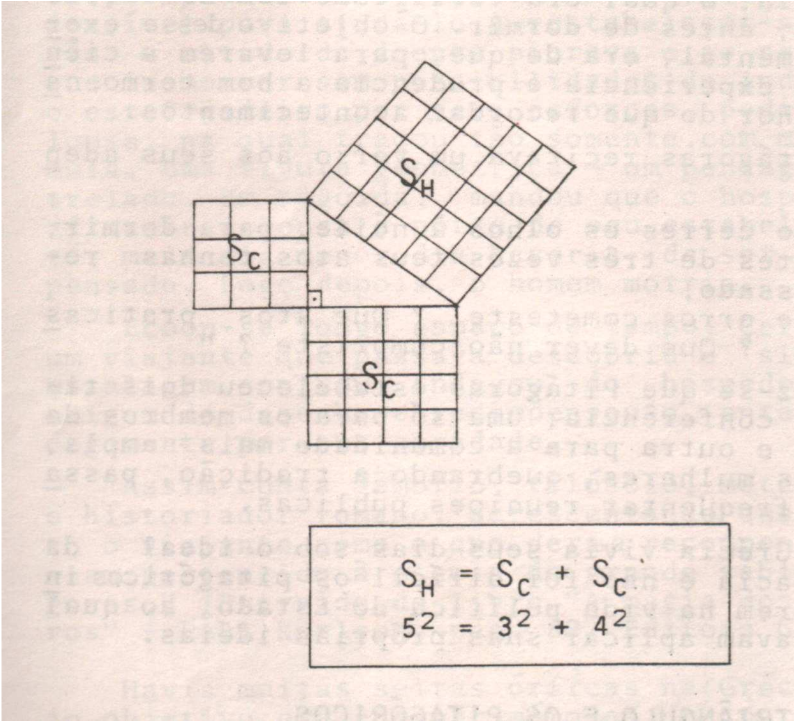
- Formular o teorema de Pitágoras a partir de informações históricas sobre sua construção;
- Demonstrar o teorema de Pitágoras por meio de alguns recursos existentes na geometria;
- Interpretar o teorema de Pitágoras e suas aplicações.

⇒ Sugestões: Para essa atividade sugerimos a utilização de régua, esquadros, compasso e transferidor

⇒ Um pouco de História

Os triângulos retângulos são fundamentais para a trigonometria plana e lembram imediatamente o nome de Pitágoras, pois atribui-se a ele um dos feitos mais importantes relacionados a esse tipo de triângulo - o teorema pitagórico. Além disso, acredita-se que ele tenha obtido estes conhecimentos com os agricultores egípcios, chamados esticadores de cordas, que demarcavam as margens do rio Nilo quando as águas baixavam, visando utilizá-las na agricultura.

Por volta de 2000 a. C., os egípcios já sabiam que um triângulo, cujos lados têm comprimentos 3, 4 e 5 unidades, é um triângulo retângulo. Podemos, então, observar a partir disso que $3^2 + 4^2 = 5^2$, mas que certamente os egípcios não sabiam como provar que o ângulo oposto ao lado de comprimento 5 é um ângulo reto, porém acreditavam nisso e usavam esse fato nos seus cálculos. Para os pitagóricos, entretanto, os resultados apresentados anteriormente significavam que ao considerarmos um triângulo de lados 3u, 4u e 5u e construirmos um quadrado sobre cada um dos lados, verificamos que a área do quadrado formado pelo lado maior (hipotenusa) será igual à soma das áreas dos quadrados formados pelos lados menores (catetos). (figura a seguir)

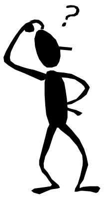


⇒ Construções Práticas

3.1. Vamos construir um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5cm, usando régua e compasso e tentar constatar esse fato. Meça cuidadosamente cada lado.

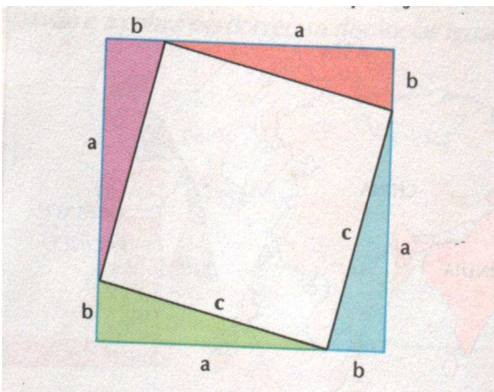
3.2. Construa, a partir dos lados do triângulo, um quadrado e determine a área de cada um dos quadrados. Considerando A_1 a área do quadrado formado pela hipotenusa e A_2 e A_3 as áreas dos quadrados formados pelos catetos, verifique se $A_1 = A_2 + A_3$ e escreva essa relação em função dos lados do triângulo retângulo. A partir disso o que você pode concluir?

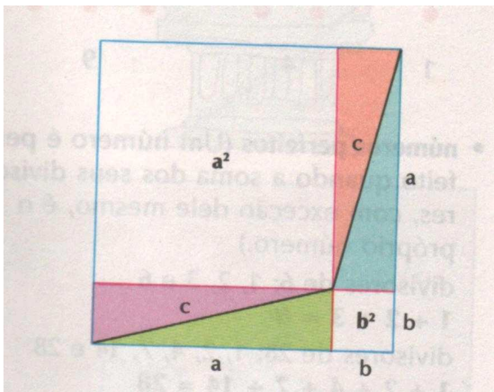
A demonstração do teorema pitagórico representada nas figuras abaixo, foi atribuída ao matemático hindu Bhaskara (c. 1150), que apresentou tal diagrama sem nenhuma explicação, pois segundo ele próprio, a álgebra forneceria a prova. Cabe-nos, portanto, tentar fazê-lo.



⇒ Um novo desafio!

3.3. Considere o quadrado a seguir. Se a, b e c representam os comprimentos dos segmentos, como indicado, qual é o comprimento de um lado do quadrado? Qual a área do quadrado branco (menor; interno), e qual a área do quadrado maior? Qual o tipo dos triângulos coloridos? Qual é a área de cada um? Explique por que a área do quadrado grande menos a área dos quatro triângulos coloridos é igual a área do quadrado branco(interno).





Atividade N.º 04: Medindo a altura de objetos pela sombra

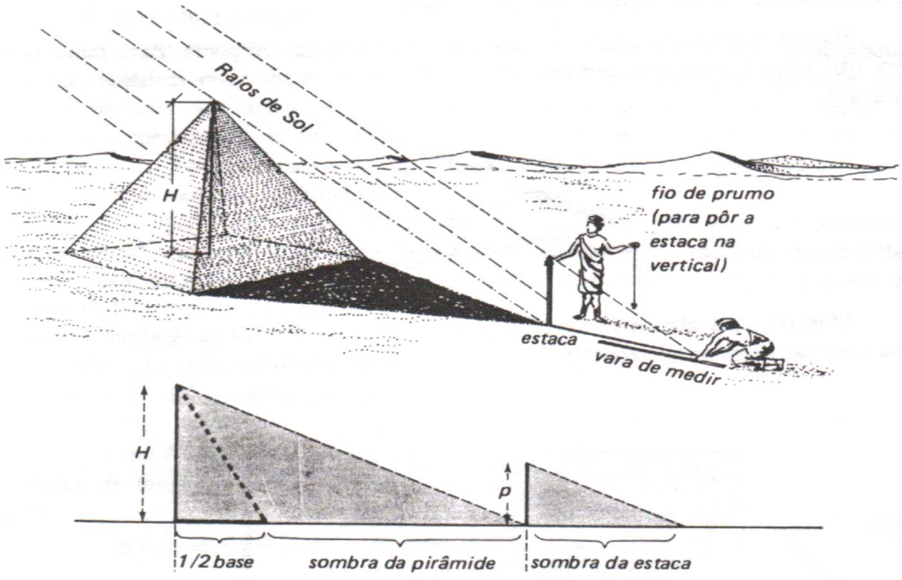
Objetivos:

- Determinar a razão de semelhança entre dois triângulos retângulos isósceles;
- Calcular o valor desconhecido de um dos lados de um triângulo retângulo a partir da comparação com outro triângulo retângulo semelhante;
- Representar geometricamente situações-problemas que envolvam semelhança entre triângulos retângulos;
- Representar no plano cartesiano as relações entre as medidas de sombras e as horas do dia

⇒ Sugestão: Nessa atividade você utilizará trena ou fita métrica, régua, transferidor e compasso

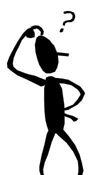
⇒ Mais um pouco de história sobre a semelhança de triângulos

Através da determinação da razão de semelhança entre triângulos retângulos, os Gregos efetivaram concretamente a medição da altura dos objetos a partir de sua sombra. Tal experiência tem sua prática narrada historicamente através de um dos feitos atribuídos a Tales de Mileto. Aproximadamente por volta de 600 a. C. ele se encontrava no Egito e foi abordado pelos escribas egípcios (estudiosos da época), para que, em nome do Faraó, calculasse a altura de uma pirâmide de base quadrangular. Apoiou-se a uma vara, esperou até o momento em que, em plena manhã, a sombra da vara, estando na vertical, tivesse comprimento igual ao da própria vara. Disse então a um deles: "*Vá, meça depressa a sombra pois o seu comprimento é igual a altura da pirâmide*". Desse modo, foi apresentado o processo matemático de medição da altura da pirâmide a partir de uma vara, duas sombras e uma idéia. Sabemos, entretanto, que à medida da sombra foi acrescentada metade da medida do comprimento da base pois como ela era muito grande, escondia uma parte da sombra da pirâmide.



Não havia segredo na façanha realizada por Tales, pois nada mais era do que um grande conhecimento de geometria. Isso é evidenciado quando ele procurou igualar a medida da sombra à medida da vara que fincou no solo para relacionar tudo com a pirâmide e sua sombra. Temos aí a presença de um triângulo retângulo isósceles, isto é, usando o conhecimento geométrico sobre semelhança de triângulos, Tales mostrou que a altura da pirâmide é igual a sombra mais a metade da base (a metade da base da pirâmide oculta uma parte da sua sombra), pois de acordo com a figura anterior observa-se que há um triângulo retângulo possível de representar essa situação, isto é: h é a altura da pirâmide e S é a sombra projetada que é representada por:

$$S = a/2 + s$$



⇒ Novo desafio

Para você compreender melhor as idéias suscitadas aqui, podemos desafiá-lo a realizar uma experiência similar àquela que Tales fez há mais de 2000 anos atrás. Vamos lá!

⇒ Construções Práticas

1. Escolha uma edificação, um objeto ou uma árvore para que seja possível executar as tarefas a seguir;

2. Selecione uma vara de madeira, de aproximadamente 110 cm e a coloque fincada verticalmente no solo. Sugerimos que a vara de madeira seja fincada 10 cm no solo ou então a vara poderá ter 100 cm se ficar apoiada em uma base de madeira;

3. Procure observar as medidas da sombra da vara e do objeto simultaneamente em diferentes horas do dia para que seja possível determinar a altura do objeto a partir das medições;

4. Anote os resultados obtidos durante as observações realizadas;

5. Represente geometricamente o fato ocorrido utilizando para isso triângulos retângulos ;

6. Construa um gráfico cartesiano representando as medidas efetuadas por você ao longo dos intervalos de tempo adotados para as medições;

Atividade nº. 05 - Construindo e explorando um relógio de sol

Objetivos:

- Construir e explorar um relógio de sol;
- Ampliar a compreensão relacional acerca da noção de proporcionalidade e semelhança de triângulos retângulos;
- Interpretar as noções de trigonometria envolvendo os estudos da cronologia do tempo.

⇒ Sugestão: Nessa atividade sugerimos o uso: uma placa de compensado, isopor ou similar (60x60)cm; uma haste de madeira (30cm); compasso; caneta hidrocor.

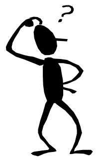
⇒ Os relógios de sol na história

Por muitos séculos, a humanidade valeu se da sombra de um objeto projetada pelo sol, a sombra do *gnomon* (do grego, o que indica) dos relógios de sol, para medir o tempo. Inicialmente, a medição devia basear-se na variação do comprimento própria sombra dos homens, que decrescia do amanhecer ao meio dia e crescia do meio dia até o entardecer, quando eles deveriam estar de volta à segurança de seus abrigos. Posteriormente criou-se os calendários, orientou-se por eles para a identificar as estações do ano, utilizando esse saber, na agricultura, que dependia dos fatores climáticos característicos dessas estações.

A divisão do dia em horas, minutos e segundos foi uma conseqüência natural da evolução das sociedades, para a marcação das práticas religiosas e atividades leigas. Sua origem é controvertida e remonta à Mesopotâmia, Babilônia ou Caldéia, há uns 4.000 anos, aproximadamente, mas há indícios de utilização dessas práticas também na China, onde as observações astronômicas se iniciaram na era do imperador Yao, no séc. XXIII a.C.

O primeiro relógio que se tem notícia - cerca de 5000 anos - foi o relógio do sol, o que leva a crer que o primeiro medidor de tempo, conhecido e realmente usado pelo homem, tenha sido um simples e rústico bastão fincado no solo, para posterior observação do movimento de sua sombra. Ao longo dos tempos, aperfeiçoou-se este e criou-se os Gnomons, constituídos por simples obeliscos de pedra que, posicionados em lugares amplos, recebiam a luz do sol, sem obstáculos e assim projetavam a sombra que, com o correr do dia, assinalava em marcos estrategicamente dispostos de forma circular, os períodos diurnos, ou seja, as horas que iam passando durante no dia.

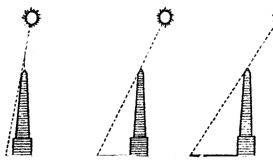
Por volta do século VIII a.C, no Egito os relógios de sol se apresentavam com um gnomon vertical e sobre a base uma escala de tempo diária com 6 divisões. Os obeliscos eram usados como relógios de sol. Dos Babilônios, que teriam desenvolvido a divisão sexagesimal do círculo em graus por volta de 300 a.C, a partir das casas zodiacais e dividindo-as em 30º cada (12 x 30 = 360º), os Gregos teriam adquirido o conhecimento do dia dividido em 12 partes de duração variável e estes, apesar de imaginarem a Terra como centro do sistema solar, tendo avançados conhecimentos do movimento do Sol e de geometria, desenvolveram tipos mais complexos. Também na América pré-colombiana, essas idéias foram utilizadas, principalmente pelos Maias, Astecas e Incas, na construção de observatórios astronômicos úteis na determinação de solstícios e equinócios.

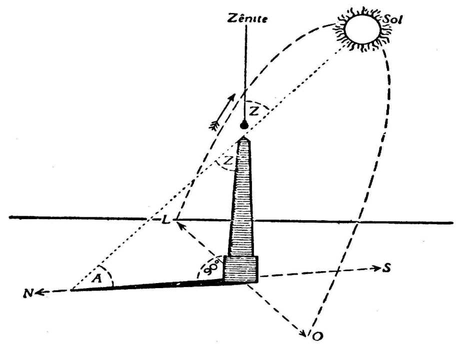


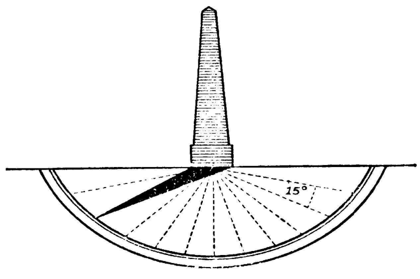
⇒ Outro desafio

Já conhecemos um pouco da história do relógio de sol. Que tal construirmos o nosso. Para isso é importante escolhermos um local onde haja incidência direta do sol na maior parte do dia, evitando a projeção de sombras de árvores e prédios. Em se tratando de um relógio de sol do tipo horizontal ou polar, é recomendável uma coluna ou pedestal para elevá-lo do chão e deixá-lo a uma altura confortável para a leitura. O pedestal ou coluna deverá ser assentado rigorosamente vertical sobre uma base de concreto. A superfície onde for instalado deve estar rigorosamente nivelada e a orientação deverá ser aquela em que o alinhamento do *gnomom* coincide com a direção norte/sul verdadeira.

A experiência mostra que, em lugares públicos, é prudente interpor algum tipo de obstáculo entre os observadores e os relógios de sol para evitar excessiva aproximação. Os do tipo vertical, geralmente instalados em paredes de prédios e a uma altura maior do que a utilizada para os horizontais, pois podem ser vistos de baixo, são em geral maiores e por isso visíveis a maior distância, e assim menos sujeitos a depredações o que os torna mais adequados aos locais públicos. Para sua melhor visualização e decisão, apresentamos algumas sugestões de relógios de sol, a seguir.

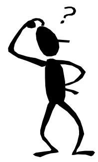






O RELÓGIO DO SOL OU OBELISCO.

⇒ É hora de pensar e responder!



1. Como você construiu o seu relógio de sol?

2. Quais as informações matemáticas necessárias para a construção do seu relógio?

3. Há alguma relação entre essa atividade e a atividade das sombras (atividade nº 4)? Quais?

4. Por que a sombra da varinha vai mudando de lugar?

5. O que acontece com o tamanho da sombra da varinha no decorrer das horas? Represente graficamente a sua observação.

6. Quais as relações entre o movimento da vara, a variação de seu tamanho e as horas do dia? É possível explicar matematicamente? Como?

7. O que acontece após o meio dia? Como fica a sombra da vara?

⇒ Concluindo mais uma etapa

Diante da experiência vivenciada, quais as suas conclusões sobre a atividade? Quais as dúvidas surgidas?

Atividade nº 06: Medindo altura dos objetos sem a utilização de sombras

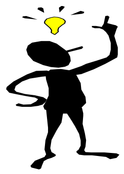
Objetivos:

- Relacionar ângulos e lados de dois ou mais Triângulos Retângulos semelhantes;
- Determinar a razão de semelhança entre dois ou mais Triângulos Retângulos;
- Determinar a altura de objetos a partir da semelhança entre dois Triângulos Retângulos.

⇒ Sugestão: Nessa atividade é necessário o uso de duas ripinhas, um parafuso, ou talvez um transferidor, um canudinho de plástico, um clips e material de desenho.

⇒ Um pouco de história

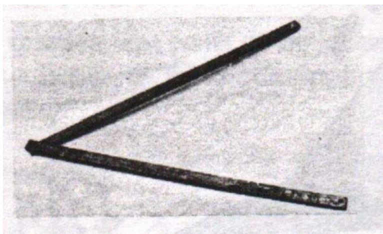
O episódio envolvendo Tales de Mileto e a medida da altura da pirâmide apresenta um ponto bastante importante: o encontro das duas grandes civilizações que influenciaram o desenvolvimento da geometria e consequentemente da trigonometria na antigüidade - os egípcios e gregos, cada um com seus costumes, problemas políticos, econômicos e sociais além de suas matemáticas próprias. Com o passar do tempo, a estratégia utilizada por Tales para medir a altura da pirâmide foi sendo aperfeiçoada em virtude das diferenças climáticas existentes em cada estação do ano naquelas regiões, além das inúmeras tentativas de outros geômetras que procuraram medir a altura de outros objetos, conseguindo com isso alcançar um nível cada vez mais refinado de medir altura dos diferentes objetos existentes ao seu redor. Imaginemos, por exemplo, o que faria um homem para medir a altura de um objeto em um dia nublado ou chuvoso. Qual seria a alternativa para solucionar tal problema? Em casos como esses surgiram algumas alternativas que provocaram o desenvolvimento de inúmeros mecanismos de medição que levaram o homem a estabelecer medidas para distâncias consideradas até então, inacessíveis. Nesse sentido, podemos lembrar a determinação do raio da terra, da distância terra-lua, o desenvolvimento da navegação entre outros fatos importantes para o desenvolvimento da humanidade.



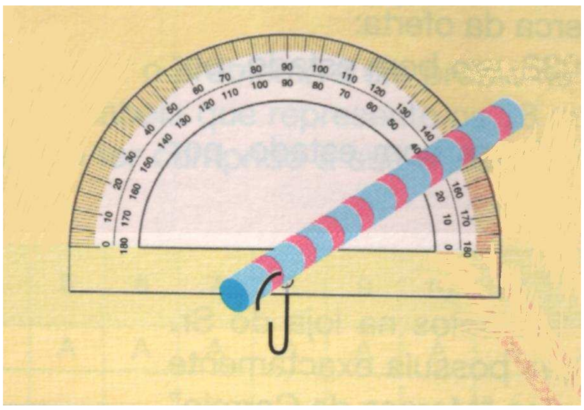
⇒Vejamos algumas saídas!

⇒ Construções Práticas

1. Construa inicialmente o instrumento para medir a altura dos objetos a partir de duas ripinhas e um parafuso tal como mostra a figura abaixo.



Outra opção bastante precisa é a construção de um dispositivo a partir de um transferidor, um canudinho e um clips pequeno, similar ao apresentado abaixo.



2. Em seguida escolha o objeto a ser medido e procure ficar aproximadamente a 4,0m do mesmo, de modo a observá-lo por inteiro;

3. Coloque o instrumento confeccionado na direção do objeto a ser medido, de modo que você possa ver o topo do objeto através do orifício do canudinho;

4. Observe e anote o ângulo marcado pelo canudinho do transferidor e represente geometricamente em uma folha de papel. Após a representação do triângulo observado, desenhe outro triângulo retângulo semelhante ao anterior e que tenha um ângulo agudo igual ao encontrado no instrumento usado por você;

5. Agora tente estabelecer uma proporção entre os dois triângulos semelhantes de modo a determinar a altura do objeto, isto é, a medida desejada inicialmente.

6. O que você observou? Quais os resultados encontrados durante a realização da atividade? O triângulo ABC desenhado por você pode ter lados maiores ou menores? Nesse caso a razão alteraria? Como se explica o fato?

Atividade N.º 07: Razões trigonométricas - das cordas ao triângulo retângulo

Objetivos:

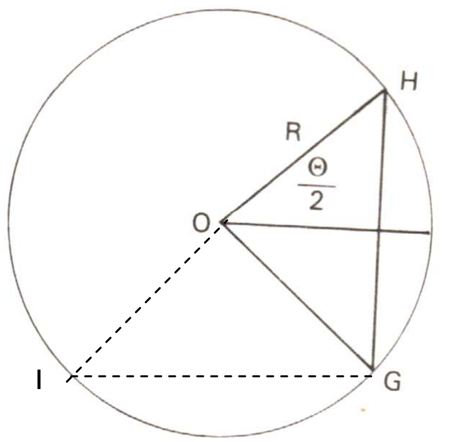
- Compreender o conceito de seno, cosseno e tangente de um ângulo como razões trigonométricas no triângulo retângulo;
- Determinar o seno, cosseno e tangente de um ângulo a partir da corda da circunferência;
- Representar graficamente o seno, cosseno e tangente de um ângulo a partir de uma razão entre dois lados de um triângulo retângulo.

⇒ Um pouco de história

Os antigos babilônios e egípcios conheciam e usavam alguns teoremas sobre razões entre os lados de triângulos semelhantes, mas não dominaram teoricamente o assunto. Já os gregos, iniciaram um processo de sistematização desse conhecimento, iniciando a elaboração da trigonometria.

Não se sabe bem quando penetrou na matemática o uso sistemático do círculo de 360º, mas parece dever-se em grande parte a Hiparco (c. 180-125 a. C.) através de sua tabela de cordas e cuja influência originou-se da astronomia babilônica construída a partir do sistema de numeração sexagesimal.

Os termos seno e cosseno surgiram a partir das necessidades de resolução de certos problemas inseridos no contexto da astronomia, através da função corda - reta que une os dois pontos extremos de um arco de circunferência - estudado por alguns gregos antes da era cristã (figura a seguir).



$$\frac{Crd\theta}{2R} = \frac{HG}{HI}$$

$$\frac{\frac{Crd\theta}{2}}{R} = \frac{HP}{HO} = Sen\frac{\theta}{2}$$ Logo

$$Sen\frac{\theta}{2} = \frac{Crd\theta}{2R}$$

O seno era chamado *Jya*, uma das várias grafias para a palavra corda em hindu e que os árabes transliteraram para *jyb,* mais que quando era lida incorretamente como *Jayb* - bolso, golfo seio - foi traduzida para o latim por Gerardo de Cremona (c. 1150) e tornou-se *Sinus*, isto é seno na nossa língua, mas somente por volta do século XVII introduz-se na Matemática o termo cosseno como o seno complementar de um ângulo - "*co-sinus*", isto é, cosseno.

⇒ Que tal experimentarmos na prática?!

2.1. Observe a figura anterior e determine a medida da corda AB e do raio r (AO);

2.2. Determine a razão entre a medida de AB e a medida do diâmetro;

2.3. Determine a razão entre a metade da metade de AB (AP)e a medida do raio r (AO)

2.4. Determine outras razões existentes entre os segmentos representados na figura construída por você (tente, por exemplo, entre OP e r; AP e OP entre outras;

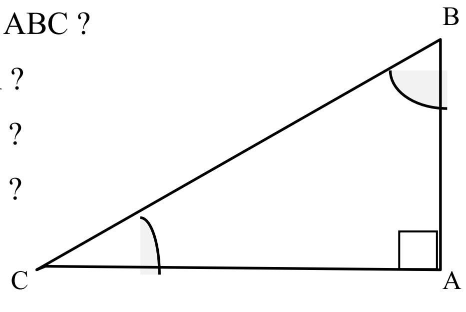
2.5. Considerando que as relações construídas por você sempre envolveram Triângulos Retângulos, vamos retomar essa relações, procurando isolar o triângulo da circunferência, isto é, através da figura a seguir:

quais as medidas dos ângulos internos do triângulo ABC ?

quais as medidas dos lados que formam o ângulo A ?

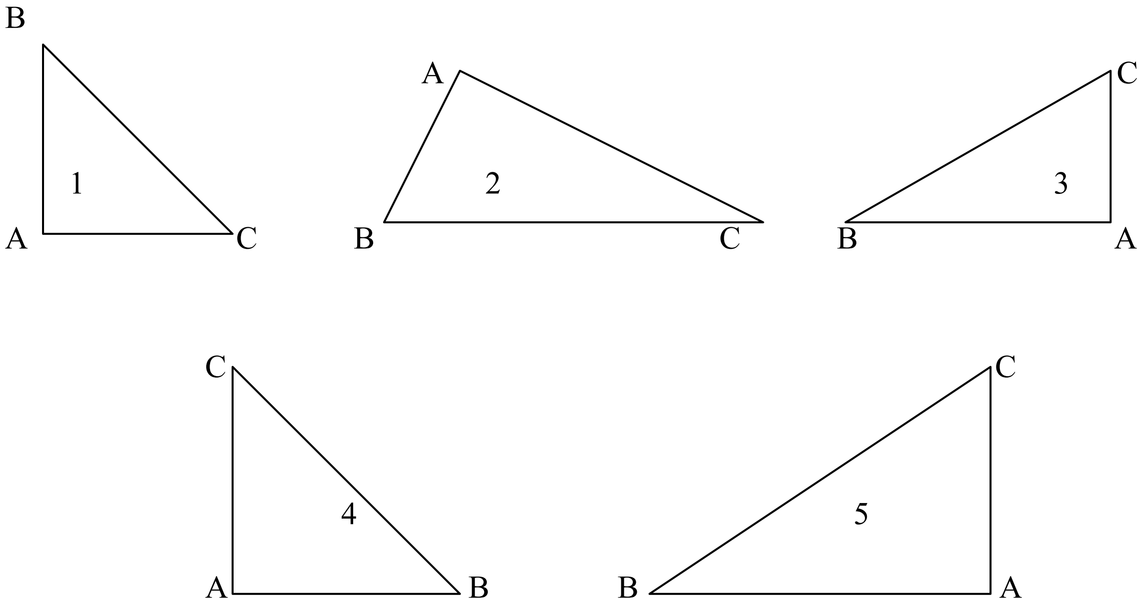
quais as medidas dos lados que formam o ângulo B ?

quais as medidas dos lados que formam o ângulo C ?



Observe que os ângulos B e C são agudos, somam entre si 90º e ambos têm um lado em comum: a hipotenusa. Percebemos também que AB é o lado oposto ao ângulo C e adjacente ao ângulo B. O mesmo ocorre com o lado AC, que é oposto ao ângulo B e adjacente ao ângulo C.

2.6. Com uma régua, determine as medidas dos lados a, b e c nos triângulos seguintes e complete a tabela dada:



Triângulo	a (cm)	b (cm)	c (cm)	b / a	c / a	b / c
1						
2						
3						
4						
5						

2.7. Escolha um dos triângulos da questão anterior e escreva a expressão matemática das razões b/a, c/a e b/c, tomando como referência os catetos, os ângulos agudos e a hipotenusa de tal triângulo.

2.8. Baseado nas informações históricas apresentadas anteriormente que nome você daria a cada uma dessas razões?

2.9. A partir das respostas dadas anteriormente, como você representaria matematicamente os valores de b e c em função das razões definidas no item 2.7?

2.10. A partir das informações obtidas em 2.8 e 2.9 escreva o teorema de Pitágoras em função das razões trigonométricas determinadas por você. Faça um comentário a respeito dos resultados obtidos. O que você concluiu?

Atividade n.º 08: Construindo os valores de seno, cosseno, tangente e cotangente de ângulos agudos

Objetivos:

- Determinar os valores do seno, do cosseno, da tangente e da cotangente de um ângulo agudo;
- Representar no sistema de coordenadas cartesianas, o seno, o cosseno, a tangente e a cotangente de ângulos agudos;
- Relacionar os valores do seno e do cosseno de um ângulo ao valor do raio unitário representado no circulo trigonométrico.

⇒ Um pouco de história

A construção de tábuas trigonométricas com valores correspondentes ao seno, cosseno, tangente e cotangente de um ângulo ou arco de circunferência, tem suposta origem na matemática babilônica, através dos valores relativos aos calendários elaborados. Se destacam a partir das medidas e valorações dos comprimentos de cordas e de documentos sobre astronomia presentes na obra de Hiparco. Foram incorporados posteriormente ao principal trabalho de Ptolomeu, “O Almagesto”, contribuindo assim com a apresentação dos elementos básicos da determinação numérica das chamadas razões trigonométricas, a partir de triângulos retângulos determinados pelas cordas da circunferência.

Sabemos que atualmente os livros apresentam tábuas trigonométricas. Todavia, queremos desafiá-lo a construir a sua tabela de valores e comparar os resultados obtidos, com aqueles já existentes.

⇒ Construções Práticas

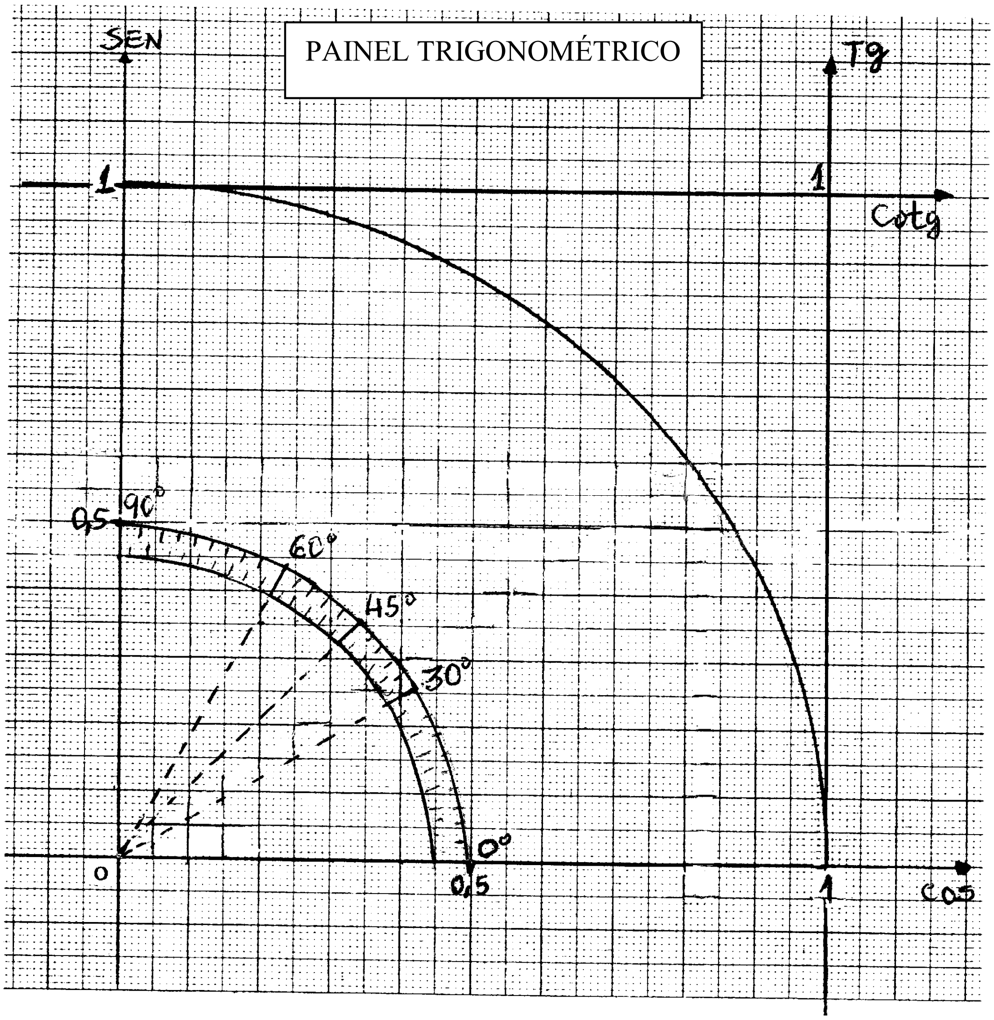
1. A partir do painel trigonométrico (figura a seguir), localize no mesmo, alguns ângulos agudos e determine os valores de seno, cosseno, tangente e cotangente, visando construir sua tábua trigonométrica. É importante determinar os valores trigonométricos para os arcos fundamentais (0º, 30º, 45º, 60º e 90º) em virtude da maior utilização dos mesmos na resolução de problemas da física, química, engenharia, *etc*. Isso não impede, porém, que sejam determinados os valores das razões trigonométricas para outros ângulos ou arcos;

2. Para você determinar os valores de seno, cosseno, tangente e cotangente de um ângulo agudo utilizando o painel trigonométrico, deve colocar a régua na origem do sistema de eixos do referido painel, até alcançar o ângulo (arco) desejado e interceptar o eixo referente a razão que deseja determinar;

3. Determine em seguida os valores desejados e construa uma tabela, comparando os valores obtidos, com os existentes nos livros didáticos. O que foi observado nas duas tabelas? Comente.

4. O que representam esses valores determinados por você, em relação ao raio unitário do circulo trigonométrico? Qual a relação de crescimento e decrescimento desses valores em relação ao ângulo (arco) que se deseja determinar?

PAINEL TRIGONOMÉTRICO

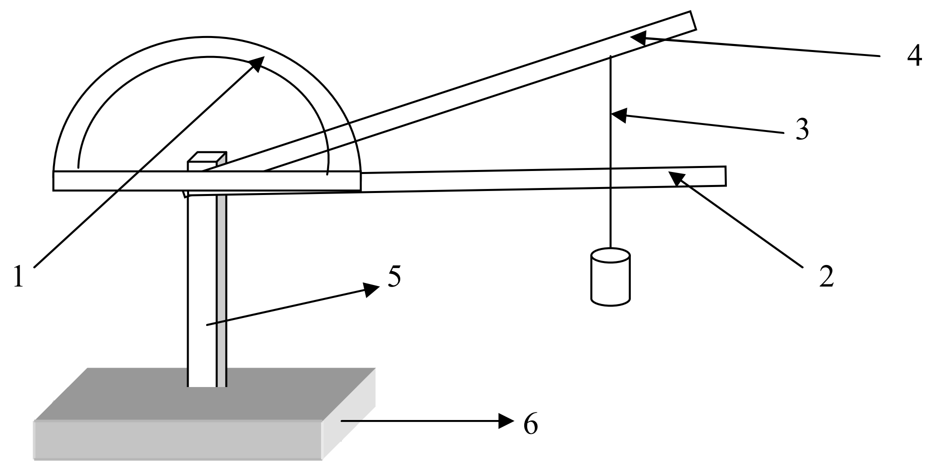


Atividade N.º 09: Construindo e explorando o trigonômetro

Objetivos:

- Determinar experimentalmente os valores das razões trigonométricas para os ângulos agudos de um triângulo retângulo;
- Estabelecer uma relação de complementaridade entre os ângulos agudos de um triângulo retângulo;
- Representar geometricamente e numericamente as razões trigonométricas em um triângulo retângulo.

⇒ Sugestões: Nessa atividade sugerimos a confecção e utilização do trigonômetro (figura abaixo) e uma régua.



1. Transferidor
2. Régua milimetrada plástica
3. Fio com massa presa à ponta (fio de prumo)
4. régua móvel de madeira, com divisões proporcionais e com pequenos furos nessas divisões, para prender o fio de prumo
5. Haste de madeira para sustentação
6. Base de madeira para apoio

Com base na figura anterior sugerimos que você construa o eu trigonômetro. Que tal operacionalizar com esse instrumento e aprendermos mais um pouco de trigonometria?!

⇒ Procedimentos operacionais

1. Movimente a peça 4, de modo que a linha central coincida com a linha dos ângulos a serem tabelados;

2. Leia diretamente as medidas na régua e na peça 4;

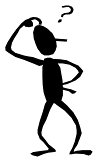
3. Meça, com uma régua, cada vez que você movimentar a peça 4, o comprimento do barbante até a interseção com a régua;

4. Calcule os valores do seno, cosseno, tangente, cotangente e preencha a tabela seguinte.

Ângulo (grau)	***Razões trigonométricas***			
	Seno	***Cosseno***	***Tangente***	***Cotangente***
0º				
30º				
45º				
60º				
90º				

5. Compare os resultados da sua tabela com os de uma tabela oficial presente em livros de matemática. O que você percebeu?

6. Há alguma(s) relação(ões) com a atividade anterior? Qual(is)?



⇒ Outro desafio

7. É possível ampliar essa experiência para os ângulos maiores que 90º (obtusos), considerando que o transferidor usado mede até 180º? Como podemos fazer isso? Vamos tentar!

Atividade N.º 10: A razão Pi (π) entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro

Objetivos:

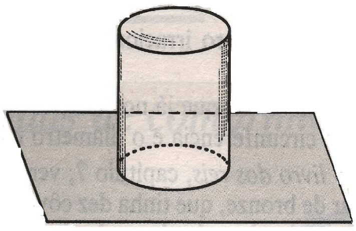
- compreender o número Pi (π), como uma aproximação da razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro;
- determinar experimentalmente essa relação e a representação matemática do Pi (π), como

$$\pi = \frac{C}{2R}.$$

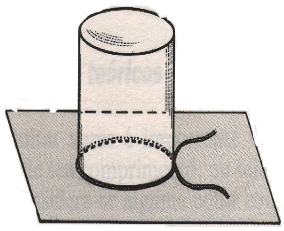
⇒ Sugestões: Nessa atividade sugerimos a utilização de régua, várias latas de formato cilíndrico de diferentes medidas de diâmetros e um pedaço de barbante.

⇒ Procedimentos operacionais

1. Pegue uma lata cilíndrica qualquer e coloque-a sobre o papel, numa superfície plana, conforme mostra a figura abaixo.



2. Corte um pedaço de barbante e contorne a base da lata, marcando as posições, no cordão, que correspondem a uma volta completa na lata, conforme mostra a figura abaixo.



3. Estique o barbante sobre a régua e determine o comprimento da circunferência da base da lata.

4. Repita o procedimento para as outras quatro latas.

5. Com a régua, determine o diâmetro de cada lata e, a seguir, preencha a tabela a seguir.

Lata	Comprimento	Diâmetro	$\frac{\text{Comprimento}}{\text{diâmetro}}$
1			
2			
3			
4			
5			

6. Analisando a razão entre o comprimento e o diâmetro de cada lata, o que você conclui?

7. Qual é o valor do encontrado, expresso em números decimais?

⇒ Um pouco de história sobre o número PI (π)

Durante o estudo da Matemática ou de outras ciências (Física, Química, Estatística *etc*.) tanto em nível elementar como em nível elevado, surgem cálculos envolvendo o número irracional π, como por exemplo, no cálculo do comprimento da circunferência ($C = 2\pi R$). Por isso, é essencial que se compreenda de onde provém esse número e como determiná-lo de modo simples e prático.

O número pi representa uma aproximação da razão entre a medida do comprimento da circunferência e a medida do seu diâmetro. Pode ser representado também pela razão entre a área de um círculo e a área do quadrado gerado pela medida do seu raio. De modo semelhante, pi (π) aparece como uma razão relacionada com certas áreas de superfícies e volumes em geometria espacial. Fórmulas para a elipse e outras curvas também contém o número “pi” (π). Mas o uso do “pi” (π) não se restringe de modo algum a situações geométricas. Aparece em vários ramos da matemática como a teoria dos números, a estatística entre outros.

O desenvolvimento gradual da compreensão desse conceito pode ser acompanhado desde os mais antigos registros históricos da matemática até o presente. Um dos problemas geométricos mais antigos do homem era achar um quadrado de área igual à de um dado círculo (o problema famoso da quadratura do círculo). O problema 41 do papiro de Rhind (c. 1650 a. C.), apresenta o seguinte: “Exemplo de resolução de um recipiente circular de diâmetro 9 e altura 10. Você deve subtrair um nono de 9, ou seja 1; diferença 8. Multiplique 8 oito vezes, resultado 64. Você deve multiplicar 64 dez vezes, vindo a ter 640”. Generalizando-se este problema, encontrava-se a área da base circular como o quadrado de 8/9 do diâmetro.

Devemos a Arquimedes um método interessante de calcular um valor aproximado de π. Muito antes de Arquimedes, os matemáticos já sabiam que o comprimento da circunferência é igual a *um número um pouco maior que 3 vezes o diâmetro da circunferência*. Desde a antiguidade, foram muitos os matemáticos que se dedicaram a calcular o valor exato desse número *um pouco maior que 3*, que hoje conhecemos como “pi” e indicamos pela letra grega π. Não devemos esquecer, também, o interesse que o matemático grego tinha pelas circunferências. Nada mais natural, para um construtor de rodas. Ele sabia, por exemplo, como calcular a área de um círculo. Podemos pensar num círculo como sendo formado por infinitas circunferências concêntricas e de raios cada vez menores.

$\Rightarrow$ Outras situações matemáticas envolvendo o π.

8. Vamos traçar e dividir uma circunferência de raio qualquer, em seis partes iguais, usando como unidade de medida dessa divisão, o seu raio, cujo valor eqüivale um radiano (1rd).

9. Quantos radianos há na circunferência subdividida?

10. Considerando que a medida de 1rd corresponde ao raio da circunferência, vamos comparar o seu comprimento, com o número de subdivisões encontradas. Quantos graus correspondem a 1rd?

11. A partir desse momento é possível estabelecer uma relação entre os arcos e ângulos centrais da circunferência trigonométrica? Vamos tentar fazer!

Atividade n.º 11: Explorando o ciclo trigonométrico

Objetivos:

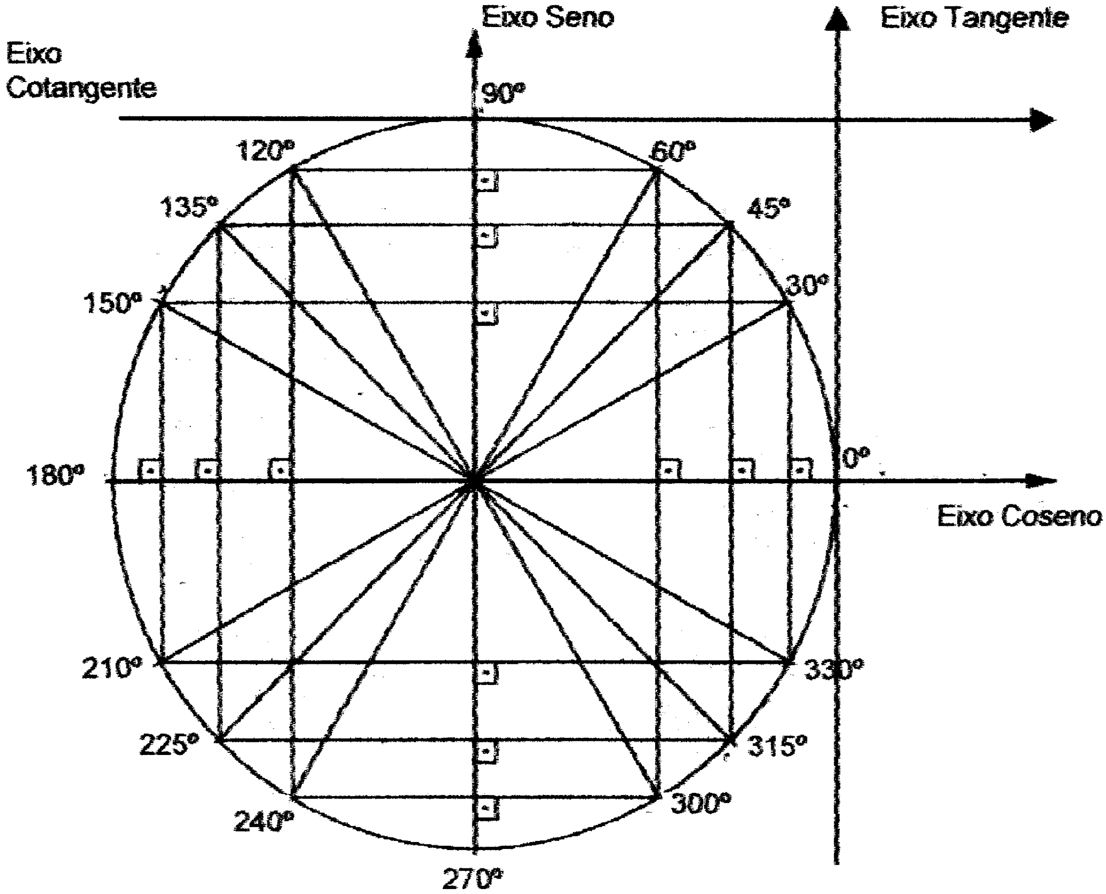
- Obter valores para o seno, cosseno, tangente e cotangente de um arco (ângulo) a partir da exploração do ciclo trigonométrico;
- Relacionar os valores trigonométricos encontrados no 1º quadrante com os demais quadrantes do ciclo trigonométrico;
- Interpretar os valores encontrados no ciclo trigonométrico e suas variações para cada quadrante.

⇒ Um pouco de História

A divisão do círculo em 360º deve-se ao fato de que para os babilônios era muito fácil dividir o círculo em seis partes iguais e cada uma delas eqüivalia ao 60 na base deles. Desse modo, o círculo passava a ter 360º, sem contar que esse valor sofria também da influência de ano ter 360 dias segundo as concepções babilônicas da época. Esses dados foram se difundindo através das relações de comércio entre os gregos, árabes, hindus e posteriormente por toda a Europa até tomar a forma conhecida atualmente.

Após algum tempo, introduziu-se também a medida dos arcos em radianos, onde o ciclo completo apresenta a medida de 2π (360º) e os outros arcos são representados por frações dessa medida e que se referem a partes da circunferência, isto é, arcos do ciclo trigonométrico tais como apresentamos no círculo trigonométrico da página seguinte:

PAINEL TRIGONOMÉTRICO



⇒ Construções Práticas

Para obtermos os valores de seno, cosseno e tangente, procederemos como na atividade nº.8, procurando fazer a leitura dos valores da maneira mais precisa possível. Para iniciar essa exploração, construa o ciclo trigonométrico (fig. anterior) para que possa tentar responder as interrogações propostas a seguir. É necessário também que sejam preenchidos todos os valores correspondentes aos principais arcos, em graus e radianos apresentados no quadro seguinte.

Graus	0º	30º	45º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
Radianos	0							π						2π

1. Você preencheu o quadro anterior com os valores correspondentes em radianos, a cada arco apresentado em graus. Explique como você procedeu para encontrar os valores.

2. O que significa o seno de 30º; cosseno de 45º; tangente de 45º; etc...;

3. Você pode determinar o seno de 0º; o cosseno de 0º ? Como você explica o valor encontrado para sen 0º e cos 0º ?

4. Você consegue apontar alguma relação entre os valores de seno, cosseno e tangente encontrados no 1º quadrante e os demais quadrantes ? Quais ?

5. Quais as observações encontradas por você ao longo da exploração do ciclo trigonométrico? Tente representá-las geométrica e algebricamente.

6. Quais os correspondentes em radianos para os arcos fundamentais do ciclo trigonométrico (30º, 45º, 60º, 90º, 120º, 150º, 180º, 225º, 270º, 315º e 360º)? Construa uma tabela com esses valores.

7. Tente mostrar as relações existentes entre os ângulos agudos do 1º quadrante e ou obtusos correspondentes, nos outros quadrantes. Utilize para isso a representação dos arcos em função da medida π do arco metade do círculo.

8. Quais os arcos que apresentam os mesmos valores para seno, para o cosseno e para a tangente? Como você explica esse fato?

9. O que ocorre com os valores encontrados para seno, cosseno e tangente no primeiro quadrante, quando comparados aos arcos correspondentes (côngruos) nos outros quadrantes? Explique.

Outras atividades complementares

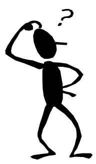
Objetivos:

- Articular as representações mental e a simbólica das noções matemáticas aprendidas durante as outras atividades;
- Interpretar as aplicações da trigonometria ligadas a problemas históricos e às situações atuais;
- Verificar as conexões entre a geometria, o cálculo, a trigonometria, as funções , *etc*;
- Exercitar a interpretação e resolução de problemas envolvendo as razões trigonométricas aprendidas;
- Vivenciar experiências de investigação de situações da realidade que estejam relacionadas às razões trigonométricas.

⇒ Sugestões: utilização de atividades investigatórias, através de projetos de investigação e resolução de problemas práticos ligados a trigonometria.

⇒ Procedimentos operacionais

Nessas atividades complementares devem ser exploradas situações-problema que levem os estudantes a relacionarem os aspectos cotidiano, escolar e científico da trigonometria. Nesse sentido, é possível trabalhar com atividades investigatórias tais como são apresentadas a seguir.



⇒ Vamos aos novos desafios?![1]

1. Descubra com o calcular a largura de um rio sem molhar os pés.

O que acha da idéia de dizer a um amigo que você consegue calcular a altura de uma árvore ou de um poste sem subir para medir? Será que ele acreditaria? Isso é

[1] Todas as atividades propostas nestes desafios foram adaptadas da revista “Superamigo”, editada pela Casa publicadora brasileira, ano 3 nº. 06, publicada em dezembro de 1996.

possível. E você pode também medir um rio sem atravessá-lo. Ë só por a *Mão na Massa* e ver como.

Mas, logicamente, você não vai aprender essas técnicas só pra impressionar alguém, não é mesmo? Então, para que mais serve isso?

Quando exércitos do passado, como o do Império Romano e o de Napoleão, chegavam a um rio ou *canyon,* tinham que derrubar árvores para servirem de pontes. Eles necessitavam saber com precisão razoável a altura da árvore e a largura do espaço a ser cruzado.

Qualquer pessoa que precise derrubar uma árvore deve saber sua altura, para ficar em local seguro quando ela cair. Ou então você, que curte a natureza, excursiona pela mata, faz acampamento rústico, ou gosta de aventurar-se por caminhos inexplorados, algum dia precisará usar essas técnicas.

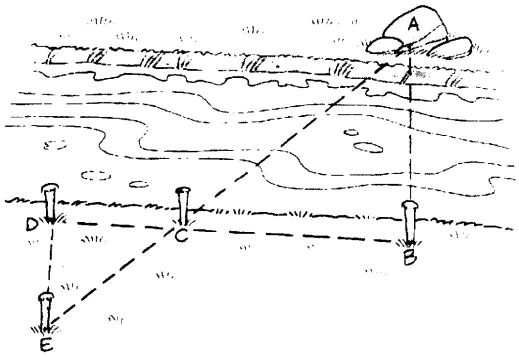
Bem, vamos lá. Primeiro, aprenda a teoria. Depois, vá a um parque ou outro espaço amplo e treine, com a ajuda de alguém. Será útil levar uma trena ou metro e uma calculadora, para checar as medidas com exatidão.

1.1. Medindo a largura de um rio

a) Método dos passos

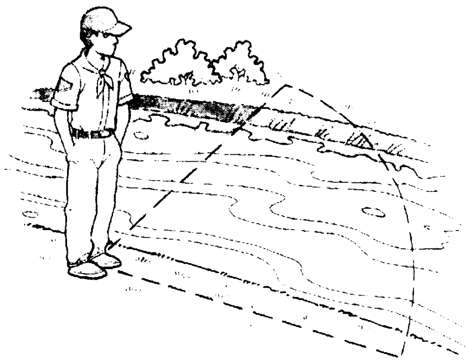
Escolha uma rocha, árvore ou arbusto do outro lado do rio como ponto de referência (A). Finque três estacas desse lado do rio nos pontos B, C e D, formando um ângulo reto 90º com A e B, sendo que C e D devem ter a metade da distância de B e C. Por exemplo, caminhe 30 passos a partir da estaca B e coloque a estaca C. Continue caminhando mais 15 passos em linha reta e crave a estaca D. Caminhe para longe do rio em ângulo reto 90º com as linhas B e D, olhando para o ponto A. Quando você estiver alinhado com A e C, pare e coloque a estaca E. Agora é só medir as distâncias D e E, e você terá a metade da largura do rio.

Obs.: Se você puder utilizar um metro em lugar de passos, terá uma medida mais exata.



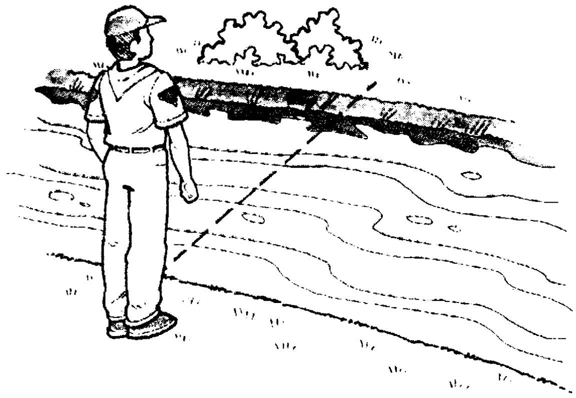
b) Método de Napoleão

Este é um método menos exato, porém muito mais simples. Se você o utilizar cuidadosamente, poderá obter o mesmo resultado, com a vantagem de não necessitar de muito espaço para além da margem do rio como no método anterior. Coloque-se em posição de sentido exatamente de frente para a outra margem do rio, tendo um chapéu ou boné na cabeça. Olhe firmemente para a outra margem, movendo a cabeça lentamente para baixo ou para cima até que a ponta da aba do chapéu ou boné pareça "tocar" a outra margem.



Agora vire-se para a direita como se seguisse o comando "direita volver", para "transferir" para sua margem a distância encontrada. Mas, atenção, para que a "transferência" seja o mais exata possível, você não poderá mover a cabeça para baixo ou para cima quando virar. Se fez o movimento corretamente, a distância entre você e o ponto onde a aba do chapéu ou boné parece tocar o chão é a largura do rio. Fácil, não é mesmo?

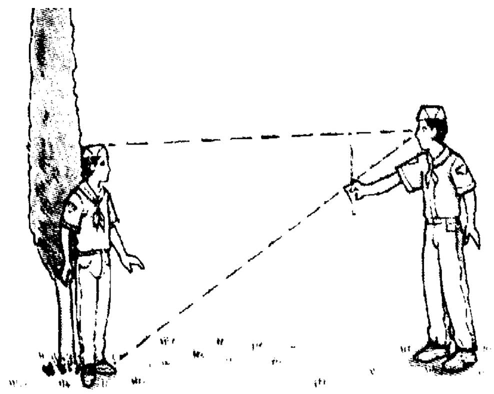
Obs.: Se você não tem chapéu ou boné, coloque a mão aberta na testa acima dos olhos, como se fosse uma aba, e o resultado poderá ser o mesmo.



2. Medindo uma árvore

2.1. Com o método da caneta

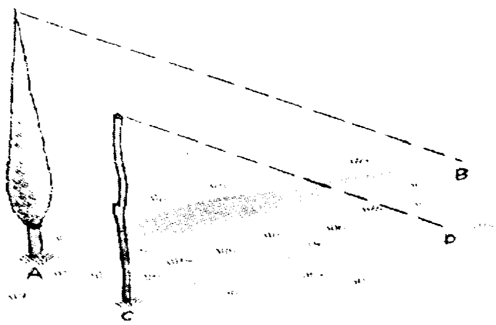
Marque na árvore sua própria altura. Afaste-se dela alguns passos. Pegue uma caneta ou uma varinha qualquer e coloque-a na posição vertical em frente a você em direção à árvore com o braço esticado. Este é o seu padrão de medida. Veja quantas vezes ele pode ser "transferido" na árvore, do pé até o topo. Multiplique este número pela sua altura. O resultado é a altura da árvore.



Obs.: Se você não souber sua altura, utilize uma vara com comprimento conhecido para fazer a marca na árvore que deseja medir.

2.2. Método da água barrenta

Corte um pedaço de madeira da altura do chão até seus olhos. Coloque uma pequena bacia com água barrenta no chão entre você e a árvore, usando o pedaço de madeira como medida entre seu pé e a bacia. Em posição de "sentido". afaste-se da árvore de frente para ela, mantendo essa distância entre você e a bacia. checando o reflexo da árvore na água ate enxergar seu topo refletido nela. A distância encontrada entre a bacia e o pé da árvore é igual à altura da árvore.



Obs.: Uma variação deste método é utilizar o mesmo pedaço de madeira, mas deitando-se no chão, de modo que seu corpo forme uma linha reta até o tronco (B). Peça a alguém que coloque o pé da estaca (E) junto a seu pé na direção da árvore e levante-a na posição vertical. Feche um dos olhos e tente ver alinhadas a ponta da estaca (D) e a ponta da árvore (A).

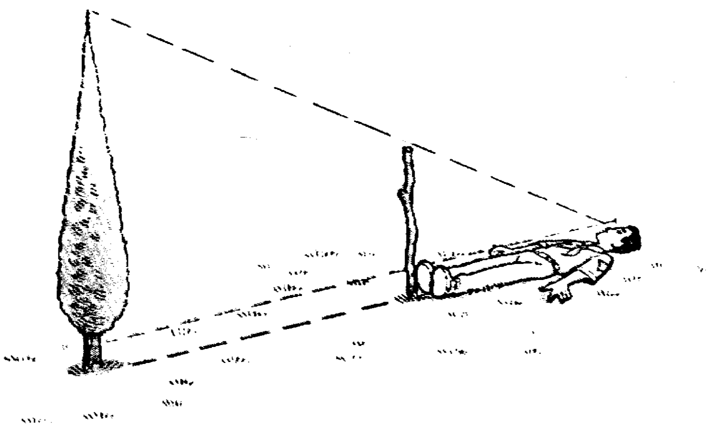
Afaste-se ou aproxime-se mais da árvore nessa posição até que o alinhamento seja conseguido. A distância entre seus olhos quando deitado (C) e o pé da árvore (B) será a altura certa. A fórmula é simples: quando DE = EC e ADC estão em linha reta, então:

$$AB = BC.$$

2.3. Método da sombra

Meça o comprimento da sombra de uma vara ou estaca (CD), de altura conhecida (CE). Então, meça o comprimento da sombra da árvore (AB). Divida AB por CD e multiplique o resultado pela altura da vara ou estaca para conseguir a altura da árvore.

É isso aí! Se você ler com cuidado, olhando atentamente os desenhos, não tenho dúvidas de que já no próximo fim de semana será incrível quando você deixar o pessoal impressionado com sua performance. Mas fique esperto. Não confie na sorte de principiante. Treine primeiro.



Nota: Lembre-se que por princípio ecológico, lutamos para preservar as árvores. Além disso, a derrubada de árvores obedece a uma legislação rigorosa.