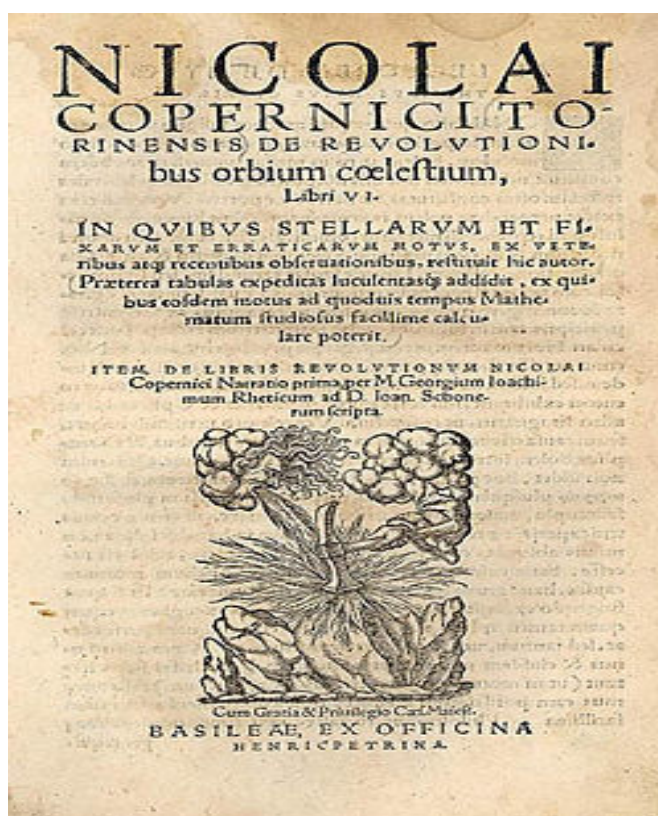


UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

MARIA JOSÉ DE FREITAS MENDES

POSSIBILIDADES DE EXPLORAÇÃO DA HISTÓRIA DA
CIÊNCIA NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE
MATEMÁTICA:

Mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico
De Revolutionibus Orbium Coelestium



NATAL
2010

MARIA JOSÉ DE FREITAS MENDES

POSSIBILIDADES DE EXPLORAÇÃO DA HISTÓRIA DA
CIÊNCIA NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA:

Mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico

De Revolutionibus Orbium Coelestium

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para obtenção do grau de Doutora em Educação.

Orientadora: Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey

NATAL
2010

Atividade 1 – O SURGIMENTO DA TRIGONOMETRIA

Objetivos:

- Apresentar as provas dos primeiros vestígios de uso da Trigonometria pelas civilizações egípcia e babilônica;
- Situar as civilizações que primeiro utilizaram a Trigonometria

Recursos didáticos:

- Fotos dos documentos que comprovam a utilização da Trigonometria pelo Egito e pela Babilônia;
- Mapas antigos dessas civilizações;
- Mapa do mundo atual.

Procedimentos:

1) Leia com atenção o texto a seguir:

Os primeiros indícios de surgimento da Trigonometria são encontrados no Egito e na Babilônia, região da Mesopotâmia às margens do rio Eufrates que correspondente hoje a uma parte do Iraque (sul da atual Bagdá), principalmente pela necessidade de resolver problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegações.

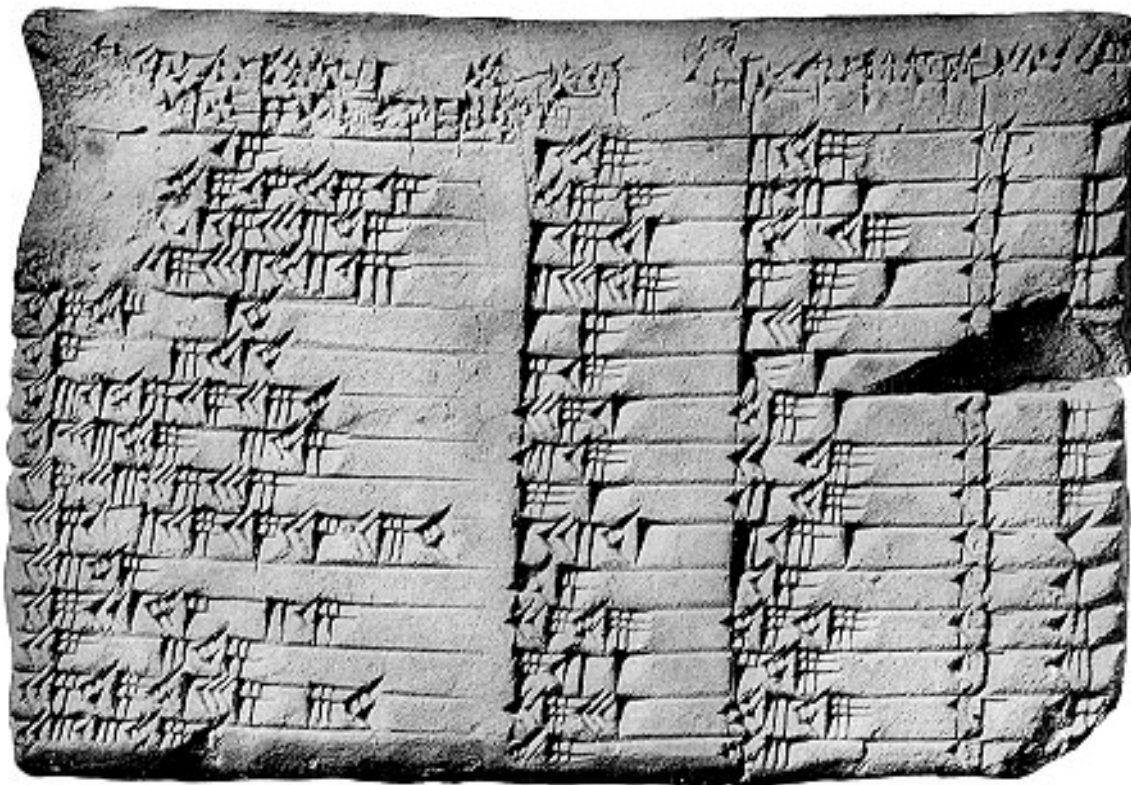
No Egito, a utilização da Trigonometria se deu a partir das medições das pirâmides, conforme vestígios encontrados no Papiro Rhind, e também da confecção do “relógio do sol” em 1500 a.C., que relaciona as horas do dia à sequência numérica associada ao comprimento da sombras projetadas por uma vara vertical.

O surgimento da Trigonometria na Babilônia está relacionado à confecção de calendários, épocas de plantio e estações do ano. Os babilônios deixaram, em sua escrita cuneiforme, textos matemáticos que testemunham a utilização da Trigonometria. O mais conhecido desses textos é o Plimpton 322, escrito aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C..

2) Você está convidado a fazer uma “viagem”, através das fotos apresentadas, pelos antigos documentos e mapas relacionados no texto.

3) Localize no mapa do mundo atual o Egito e a Babilônia, civilizações onde surgiram os primeiros indícios da Trigonometria.

PLIMPTON 322³⁷



O Plimpton 322 é um fragmento de um tablete cuja parte esquerda se perdeu, contém uma tabela com quatro colunas e 15 linhas e utiliza o sistema de numeração sexagesimal, ou seja, de base 60. Não estando totalmente legível, a parte restante foi restaurada por Neugebauer a partir de uma dada interpretação do texto. A interpretação aceita é que as três primeiras colunas do Plimpton 322 descrevem grandezas relacionadas a triângulos retângulos, essas grandezas se relacionam à medida de um cateto c , da hipotenusa h e à relação $\left(\frac{h}{c}\right)^2$. Esta relação, contida na coluna I, representa o que hoje conhecemos como o quadrado da secante de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.(MOREY,2001)

³⁷ O nome indica tratar-se da tabula da coleção G. A. Plimpton da Universidade de Colúmbia, catalogada sob o número 322.

PAPIRO RHIND³⁸



Papiro Rhind, Museu de Londres

Atividade 2 – O DESENVOLVIMENTO DA TRIGONOMETRIA

Objetivos:

- Apresentar elementos históricos sobre as antigas civilizações e consequente desenvolvimento da trigonometria;
- Apresentar os passos iniciais da tabela de cordas construída por Hiparco;

³⁸ O mais extenso documento egípcio de natureza matemática, copiado em 1650 a.C. pelo escriba Ahmes. Segundo esse escriba, o material provém de um protótipo do Reino do Meio, cerca de 2000 a 1800 a.C., e parte desse conhecimento possivelmente tenha provindo de Imhotep, o quase lendário arquiteto e médico do Faraó Zoser, que superintendeu a construção de sua pirâmide há cerca de 5000 anos. Em 1858 esse documento foi comprado, em uma cidade à beira do Nilo, pelo antiquário escocês Henry Rhind que lhe emprestou o nome. (BOYER, 1996)

- Propiciar espaço para que os alunos iniciem a construção de uma tabela trigonométrica.

Recursos didáticos:

- Mapas históricos;
- Apresentação oral de aspectos históricos sobre a civilização grega por meio de transparências ou slides.

Procedimentos:

- 1) Falemos um pouco sobre os aspectos históricos da civilização grega.
- 2) Agora leia com atenção o texto complementar.

Foi graças às necessidades da astronomia que se deu o desenvolvimento da Trigonometria.

As relações entre retas e círculos eram estudadas e aplicadas na Astronomia pelos matemáticos gregos, desde Hipócrates (470-410 a.C.) até Eratóstenes (276-194 a.C.).

Nesse período, mais precisamente entre 310 e 230 a.C., viveu o astrônomo Aristarco que deixou registros sobre o tamanho da Lua e do Sol, e também o cálculo das distâncias desses astros à Terra.

Para facilitar suas pesquisas astronômicas, os gregos desenvolveram técnicas numéricas para a medida de ângulos e produziram tabelas adequadas à prática de cálculo.

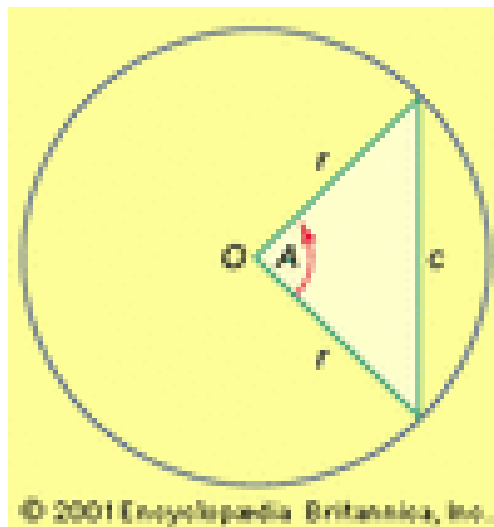
A construção da primeira tabela trigonométrica, que no século II a.C. deu início à trigonometria no sentido moderno, se deve a Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.). Hiparco tomou como base uma única função que relaciona cada arco da circunferência à sua respectiva corda.

A Hiparco também se atribui o uso sistemático do círculo em 360° .

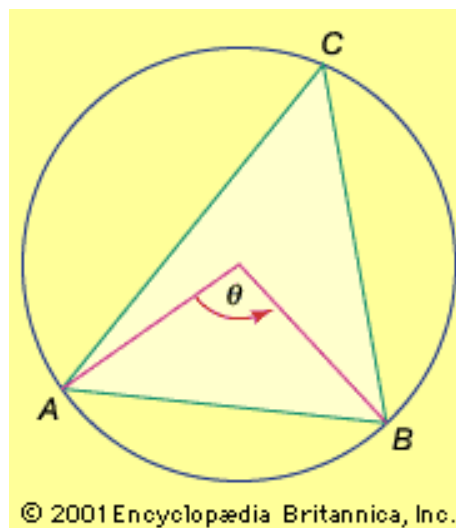
Menelau de Alexandria (c. de 100 a.C.), que também se dedicou em seus estudos astronômicos à Trigonometria, escreveu um tratado sobre cordas chamado “Cordas num círculo”. Tanto Menelau como Hiparco já teriam conhecimento da relação fundamental da Trigonometria, só que em termos de corda e não em função do ângulo.

A maioria dos trabalhos de Hiparco e Menelau se perderam, mas os teoremas essenciais e as tabelas são preservados no *Almagesto* de Ptolomeu.

Representação da função corda utilizada por Hiparco na construção de sua tabela.



Para Hiparco, o lado de todo triângulo inscrito é a corda de um ângulo central.



3) Falemos um pouco sobre ângulo central e polígonos inscritos.

Atividade 3 – CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO

Objetivos:

- Ampliar noções e conceitos sobre os elementos geométricos;
- Desenvolver habilidade de manuseio de material de desenho;
- Estabelecer relações entre os elementos geométricos.

Recursos didáticos:

- Régua ou esquadro e compasso.

Procedimentos:

1) Trace circunferências e encontre procedimentos para dividi-las respectivamente, em 3, 4 e 6 partes iguais.

2) Após a divisão da circunferência, trace os polígonos regulares que ficam inscritos no círculo.

3) Relacione os lados desses polígonos com as cordas que eles representam.

4) Encontre, em função do raio do círculo, uma relação de comprimento das cordas dos arcos de:

a) 0° , 60° , 90° e 180° .

b) 120°

5) Você observou que 120° é arco suplementar de 60° ?

- Existe uma relação geométrica que nos permite determinar, a partir de uma corda conhecida, a corda de seu arco suplementar. Tente encontrar essa relação.

6) Agora vamos dividir a circunferência em 5 e 10 partes iguais e inscrever os polígonos correspondentes.

7) Relacione os lados desses polígonos que você inscreveu no círculo, com as cordas que eles representam.

CLAUDIO PTOLOMEU e NICOLAU COPÉRNICO: duas concepções do cosmo

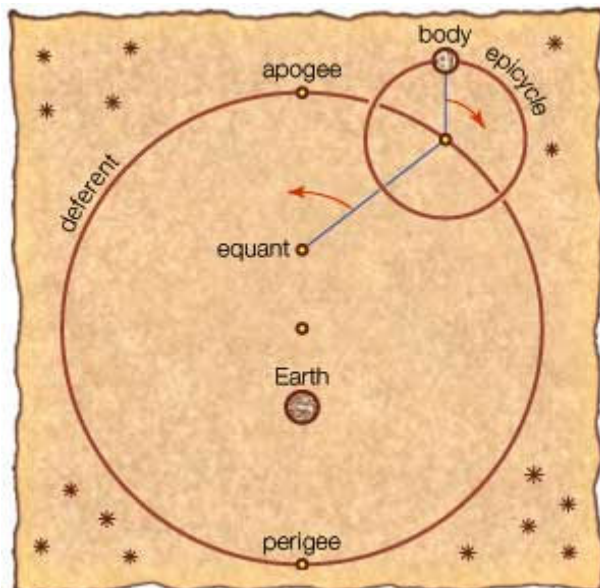
PTOLOMEU (c. séc. II)



COPÉRNICO (1473 – 1543)



O SISTEMA GEOCÊNTRICO



© 2002 Encyclopædia Britannica, Inc.

O SISTEMA HELIOCÊNTRICO



Durante séculos, acreditou-se que a Terra estava parada no centro do Universo e que os corpos celestes, inclusive o Sol, giravam em seu redor.

Esta teoria foi desenvolvida com detalhes por Claudio Ptolomeu, um egípcio de origem grega, astrônomo, matemático e geógrafo, que viveu em Alexandria durante o século II.

Sua obra mais importante, o *Almagesto*, propõe para o Universo, o modelo **geocêntrico**: a terra no centro do Universo, imóvel, depois vem a Lua que gira ao redor da Terra em um mês; depois Mercúrio, Vênus e o Sol, com todos os três completando suas revoluções ao redor da Terra em um ano; depois Marte, em dois anos; a seguir Júpiter, em doze e Saturno, em 30anos; fechando o conjunto do sistema, vêm as estrelas fixas, que fazem suas revoluções ao redor da Terra em um dia. No *Almagesto*, Ptolomeu apresenta uma tabela numérica que possibilita o cálculo das posições de planetas e outros corpos celestes.

Com uma teoria contrária à de Ptolomeu, o astrônomo polonês Nicolau Copérnico termina em 1530 seu livro “As Revoluções das Orbes Celestes”, cujo estudo mais importante é sua teoria de que a Terra tem uma rotação diária sobre seu próprio eixo e uma rotação anual em torno do Sol, que é fixo.

Na teoria de Copérnico, o **heliocentrismo**, o Universo se harmoniza: no centro está o Sol; depois vem Mercúrio, Vênus, Terra (considerada um simples planeta), Marte, Júpiter e Saturno; e por fim, as estrelas fias; todos girando em torno do Sol e a Lua girando em torno da Terra.

A teoria de Copérnico, de destronar a Terra do centro do Universo, causou profundo choque: desafiou o sistema inteiro de autoridade antiga, era oposta aos ensinamentos da Igreja Católica Romana, e requereu uma completa mudança na concepção filosófica do Universo. A prova disso é que o livro só foi publicado em 1543, ano de sua morte.

Em “As Revoluções das Orbes Terrestes” estão secções substanciais sobre trigonometria as quais foram desenvolvidas por Copérnico. Esses desenvolvimentos, que chama de: a extensão das cordas de um círculo, são demonstrações relacionadas com linhas retas e círculos, em “um método pelo qual os lados se possam deduzir dos ângulos e estes daqueles”.

Copérnico parte do consenso unânime dos matemáticos e divide o círculo em 360°, adota uma divisão do diâmetro em 200.000 unidades e constrói uma tabela na escala ascendente de 1/6°.

Desafio:

O texto anterior descreve ligeiramente as teorias sobre o Universo que marcaram a humanidade. Através desse texto e dos textos lidos nas atividades anteriores, você tem conhecimento da importância da trigonometria e do que levou os povos, antigos e modernos, à construção de uma tabela trigonométrica.

Agora convidamos você a construir uma tabela trigonométrica de senos. O esquema que utilizaremos mescla os estudos iniciais de Hiparco, Ptolomeu e Copérnico, utilizando como base, a função corda.

Atividade 4 – MEDINDO AS CORDAS**Objetivos:**

- Ampliar noções e conceitos sobre os elementos geométricos;
- Aplicar conceitos e construções trabalhadas anteriormente na construção de uma tabela trigonométrica.

Recursos didáticos:

- Régua ou esquadro, compasso e calculadora.
- Foto da tabela de Copérnico.

Procedimentos:

- A partir de agora, para facilitar os cálculos, vamos considerar o raio igual a uma unidade de medida.

1) Na atividade 3, você encontrou relações de comprimento para as cordas de 0° , 60° , 90° , 120° e 180° , agora, com o auxílio da calculadora, calcule as medidas dessas cordas, e coloque na tabela da página 31.

2) Utilizando ainda as construções efetuadas na atividade 3, vamos calcular o comprimento das cordas de:

a) 36° e 72°

b) 108° e 144°

3) Descreva os procedimentos geométricos que você utilizou para calcular as medidas dessas cordas?

4) Verifique, nos seus procedimentos, a aplicação da proposição 10 do Livro XIII dos Elementos de Euclides: “Os lados do hexágono, do decágono e do pentágono regulares, inscritos na mesma circunferência, definem um triângulo retângulo.”

Arco ou Ângulo Central α	Crd α	Sen α
0°		
18°		
30°		
36°		
45°		
54°		
60°		
72°		
90°		
108°		
120°		
144°		
180°		

Atividade 5 – RELACIONANDO CORDA E SENO

Objetivos:

- Estabelecer relações entre a função corda e a função seno.
- Propiciar espaço para que os alunos iniciem a construção de uma tabela trigonométrica.
- Propiciar o contato dos alunos com a tabela de Copérnico e consequente comparação com a tabela por ele construída.

Recursos didáticos:

- Régua ou esquadro, compasso e calculadora.
- Foto da tabela de Copérnico.

Procedimentos:

1) Construa uma circunferência qualquer, trace uma de suas cordas e relacione-a com o arco que ela representa.

2) Vamos agora traçar o diâmetro da circunferência e encontrar uma relação entre a medida da corda utilizada pelos antigos e a medida do seno que hoje utilizamos.

3) Utilizando a relação encontrada na questão anterior e as medidas das cordas que você encontrou na atividade 4, calcule os senos de alguns dos ângulos da tabela.

4) Agora você vai conhecer a tabela de Copérnico

a) Observe com atenção o que cada coluna dessa tabela representa. E descreva.

b) Compare os valores dos senos que você colocou na tabela com aqueles que estão na tabela de Copérnico.

- Você nota alguma diferença?

- Se respondeu sim, a que você atribui essa diferença?

Atividade 6 – DESCOBRINDO O SEGMENTO ÁUREO

Objetivos:

- Ampliar o conhecimento sobre razão áurea;
- Relacionar elementos e proposições geométricas ao segmento áureo.

Recursos didáticos:

- DVD educativo: “Número de Ouro” e “Espiral e Proporção Áurea”
- Texto: “Proporção áurea e curiosidades matemáticas”

1) Você vai assistir a um DVD sobre razão áurea. Fique atento para os detalhes apresentados.

2) Completando o que foi apresentado no DVD, leia atentamente o texto que se encontra no final desta atividade.

3) Você acaba de conhecer algumas curiosidades matemáticas sobre a Razão Áurea. Agora retorne à atividade 3, reveja a construção do decágono regular no círculo e verifique que nessa construção está presente a proposição 9 do Livro XIII dos Elementos de Euclides: “Os lados do hexágono e do decágono regular, inscritos num círculo, quando colocados no prolongamento um do outro, definem um segmento de reta dividido pelo ponto de união em média e extrema razão.”.

4) Em algum momento do texto, foi dito que um ponto P divide um segmento em média e extrema razão se o segmento maior é média proporcional ou geométrica entre o segmento todo e o segmento menor.

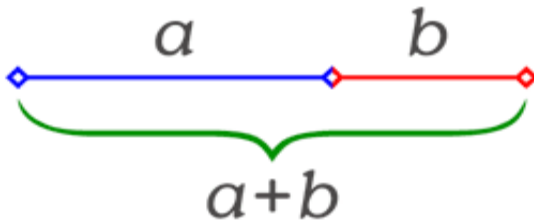
- Você lembra de ter ouvido falar, durante a sua formação, em média proporcional ou geométrica? Em que ocasião isso aconteceu?

- Lembremos algumas situações nas quais se aplica a média proporcional.

5) Você já sabe que existe uma razão áurea entre os lados do hexágono e do decágono regular inscritos num círculo, então, a razão entre as cordas que os lados desses polígonos representam também é uma razão áurea. Verifique agora a razão áurea entre essas cordas, utilizando as medidas que você encontrou na atividade 4 e a calculadora.

6) Faça alguns comentários sobre os conhecimentos, relacionados à matemática ou à cultura geral, que você adquiriu com a leitura do texto sobre razão áurea.

Proporção áurea e curiosidades matemáticas*



A **proporção áurea** ou **número de ouro** ou **número áureo** é uma [constante real algébrica irracional](#) denotada pela letra [grega](#) φ (*phi*) e com o valor [arredondado](#) a três casas decimais de 1,618. É um número que há muito tempo é empregado na [arte](#). Também é chamada de: **razão áurea**, **razão de ouro**, **divina proporção**, **proporção em extrema razão**, **divisão de extrema razão**.

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,618033989$$

É frequente a sua utilização em [pinturas renascentistas](#), como as do mestre [Giotto](#). Este número está envolvido com a natureza do crescimento. *Phi* (não confundir com o número [Pi](#) (π), quociente da divisão do comprimento de uma circunferência pela medida do seu respectivo diâmetro), como é chamado o número de ouro, pode ser encontrado na proporção em conchas (o [nautilus](#), por exemplo), seres humanos (o tamanho das [falanges](#), [ossos dos dedos](#), por exemplo), até na relação dos machos e fêmeas de qualquer colméia do mundo, e em inúmeros outros exemplos que envolvem a ordem do crescimento.

Justamente por estar envolvido no [crescimento](#), este número se torna tão freqüente. E justamente por haver esta freqüência, o número de ouro ganhou um status de "quase mágico", sendo alvo de pesquisadores, artistas e escritores. Apesar deste *status*, o número de ouro é apenas o que é devido aos contextos em que está inserido: está envolvido em crescimentos biológicos, por exemplo. O fato de ser encontrado através de desenvolvimento matemático é que o torna fascinante.

* Texto adaptado, a partir dos sítios Matemática na veia: o X da questão e Wikipédia, a enciclopédia livre.

A arte egípcia

Os Egípcios consideravam o número de ouro sagrado, tendo uma importância extrema na sua religião, e chamavam-no não de número de ouro, mas sim de "**número sagrado**". Utilizavam-no para a construção de templos e sepulcros para os mortos, pois consideravam que caso isto não acontecesse, o templo poderia não agradar os Deuses ou a alma do falecido não conseguiria chegar ao seu destino. Além disso, os Egípcios consideravam-no muito agradável esteticamente, usando-o também no seu sistema de escrita e na decoração dos seus templos.

O **Papiro Rhind** mostra-nos os planos para a construção da Grande **Pirâmide de Gizé** (4700 a.C.), com proporções de acordo com o "**número sagrado**". Medidas recentes desta pirâmide mostram que os lados da pirâmide parecem ser **triângulos de ouro**.

Durante a maior parte da história do Egito, as proporções da figura humana foram relacionadas com a largura da palma da mão, e baseavam-se no "número sagrado".

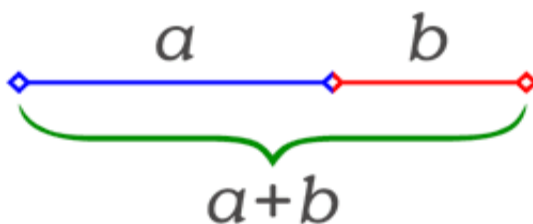
Os Egípcios usavam medidas estabelecidas pelas proporções do corpo humano devido ao fato de estas serem proporcionais, de acordo com a razão de ouro (0.618...), tornando as suas obras esteticamente mais agradáveis. Estas idéias foram utilizadas pelos construtores e artesãos, para estabelecer as malhas quadrangulares que usavam para as proporcionalidades do seu trabalho.

Os Hieróglifos

Muitos hieróglifos têm proporções baseadas no número de ouro. Os Egípcios utilizavam o número de ouro para que fosse mais fácil que todos conseguissem escrever de acordo com as mesmas proporções.

Cálculo do Número φ

Definição Algébrica



A **razão áurea** é definida algebricamente como

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi.$$

A [equação](#) da direita mostra que $a = b\varphi$, o que pode ser substituído na parte esquerda. Temos, assim

$$\frac{b\varphi + b}{b\varphi} = \frac{b\varphi}{b}.$$

Cancelando b em ambos os lados, temos

$$\frac{\varphi + 1}{\varphi} = \varphi.$$

Multiplicando ambos os lados por φ nos dá

$$\varphi + 1 = \varphi^2.$$

Finalmente, arrumando os termos da equação, encontramos

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0, \text{ que é uma } \text{equação quadrática} \text{ da forma}$$
$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ em que } a = 1, b = -1 \text{ e } c = -1.$$

Agora, basta resolver esta equação quadrática. Pela [Fórmula de Bháskara](#)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

A única solução positiva desta equação quadrática é

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618\,033\,989, \text{ que é o número } \varphi.$$

Origem do nome

Phi, tem este nome em homenagem ao arquiteto grego [Phidias](#), construtor do [Parthenon](#) e que utilizou o número de ouro em muitas de suas obras.

Proporção Áurea na Natureza

Por que esse número é tão apreciado por artistas, arquitetos, projetistas e músicos? Porque a proporção áurea, como o nome sugere, está presente na natureza, no corpo humano e no universo.

Este número, assim como outros, por exemplo o [Pi](#), estão presentes no mundo por uma razão [matemática](#) existente na natureza.

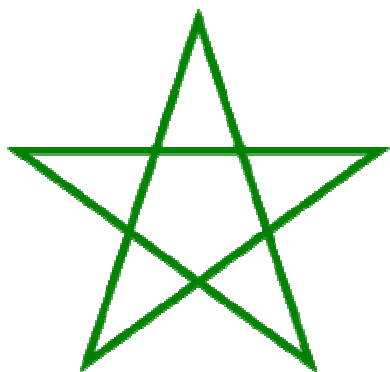
Essa seqüência aparece na natureza, no comportamento da refração da luz, dos átomos, do crescimento das plantas, nas espirais das galáxias, dos marfins de elefantes, nas ondas no oceano, furacões, etc.

Nas Figuras Geométricas

Decágono regular:

Um *decágono regular*, inscrito numa circunferência, tem os lados em relação dourada com o raio da circunferência. Um fato de conhecimento dos antigos geômetras era que a razão do raio do círculo de um decágono regular para um dos lados é a razão áurea.

Pentagrama:



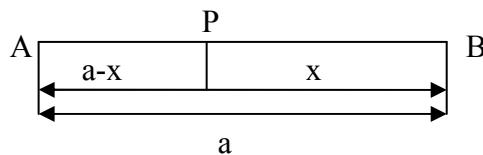
Um *pentagrama regular* é obtido traçando-se as diagonais de um [pentágono](#) regular. O pentágono menor, formado pelas interseções das diagonais, também está em proporção com o pentágono maior, de onde se originou o pentagrama. A razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado da razão áurea. A razão entre as medidas das áreas dos dois pentágonos é igual a quarta potência da razão áurea.

Chamando os vértices de um pentagrama de A, B, C, D e E, o triângulo isósceles formado por A, C e D tem seus lados em relação dourada com a base, e o triângulo isósceles A, B e C tem sua base em relação dourada com os lados.

Quando [Pitágoras](#) descobriu que as proporções no pentagrama eram a proporção áurea, tornou este símbolo estrelado como a representação da [Irmandade Pitagórica](#). Este era um dos motivos que levava Pitágoras a dizer que "tudo é número", ou seja, que a [natureza](#) segue padrões matemáticos.

Seção áurea:

Euclides de Alexandria descreveu esta seção em sua proposição "*dividir um segmento de reta em média e extrema razão*". Diz-se que o ponto P divide um segmento em média e extrema razão, **se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo**, ou seja, se o segmento maior é média proporcional (ou geométrica) entre o segmento todo e o menor dos segmentos.



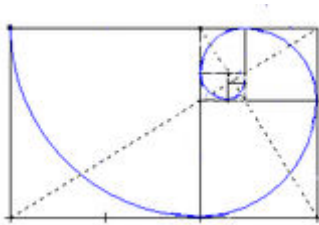
Logo temos $(a-x) / x = x / a$

Segmento áureo:

Também chamado de **segmento de ouro** e **número de ouro**. É obtido quando se faz uma **seção áurea** num segmento AB.

Retângulo áureo:

É o retângulo que tem os seus lados a e b na razão áurea $a/b = \varphi = 1,618034$, portanto, o lado menor (b) é o segmento áureo do lado maior (a). Trata-se do retângulo que reflete, inclusive, as proporções do [Parténon](#).



Os [Egípcios](#) fizeram o mesmo com as [pirâmides](#). Por exemplo, cada bloco da pirâmide era 1,618 vezes maior que o bloco do nível a cima. As câmaras no interior das pirâmides também seguiam essa proporção, de forma que os comprimentos das salas são 1,618 vezes maior que as larguras.

Triângulo áureo:

É um triângulo isósceles ABC com ângulos da base de 72° e ângulo do ápice de 36°

Nos Vegetais

- Semente de [girassol](#) – A proporção em que aumenta o diâmetro das espirais sementes de um girassol é a razão áurea.
- *Achillea ptarmica* – Razão do crescimento de seus galhos.
- Folhas das Árvores – A proporção em que se diminuem as folhas de uma árvore à medida que subimos de altura.

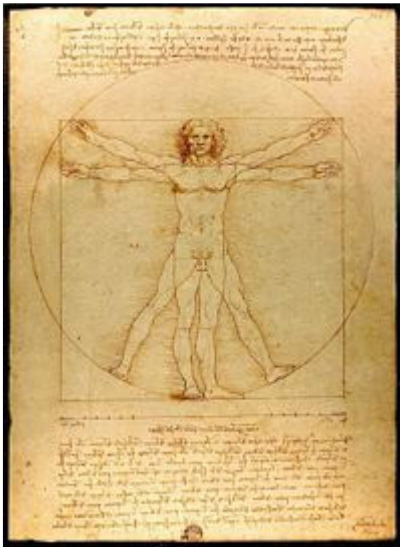
Nos Animais

- *População de Abelhas* – A proporção entre abelhas fêmeas e machos em qualquer colméia.
- *Concha do Caramujo Nautilus* – A proporção em que cresce o raio do interior da concha desta espécie de [caramujo](#). Este [molusco](#) bombeia gás para dentro de sua concha repleta de câmaras pra poder regular a profundidade de sua flutuação.
- Outros – *phi* estão também nas escamas de peixes, presas de elefantes, crescimento de plantas.

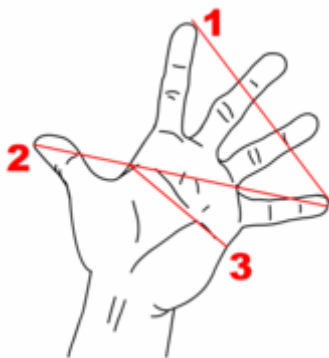
No Corpo Humano

- A altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão.
- A altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça.
- A medida da cintura até a cabeça e o tamanho do tórax.
- A medida do ombro à ponta do dedo e a medida do cotovelo à ponta do dedo.
- O tamanho dos dedos e a medida da dobra central até a ponta.
- A medida da dobra central até a ponta dividido e da segunda dobra até a ponta.
- A medida do seu quadril ao chão e a medida do seu joelho até ao chão.

Essas proporções anatômicas foram bem representadas pelo "[Homem Vitruviano](#)", obra de [Leonardo Da Vinci](#).



O [Homem Vitruviano](#), de [Leonardo da Vinci](#). As idéias de proporção e simetria aplicadas à concepção da beleza humana



Proporções áureas em uma [mão](#)

O [Homem Vitruviano](#) é um desenho famoso que acompanhava as notas que **Leonardo da Vinci** fez ao redor do ano 1490 num dos seus diários. Descreve uma figura masculina desnuda separadamente e simultaneamente em duas posições sobrepostas com os braços inscritos num círculo e num quadrado. A cabeça é calculada como sendo um oitavo da altura total. Às vezes, o desenho e o texto são chamados de **Cânone das Proporções**.

O desenho atualmente faz parte da coleção/coleção da Gallerie dell'Accademia (**Galeria da Academia**) em Veneza, Itália.

O **Homem Vitruviano** é baseado numa famosa passagem do arquiteto/arquiteto romano **Marcus Vitruvius Pollio** na sua série de dez livros intitulados de **De Architectura**, um tratado de arquitetura em que, no terceiro livro, ele descreve as proporções do corpo humano:

"Os 4 dedos fazem uma palma e 4 palmas fazem 1 pé, 6 palmas fazem um cúbito; 4 cúbitos fazem a altura de um homem. 4 cúbitos fazem um passo e 24 palmas fazem um homem. Se abrir as pernas até termos descido 1/14 de altura e abirmos os braços até os dedos estarem ao nível do topo da cabeça então o centro dos membros abertos será no umbigo. O espaço entre as pernas abertas será um triângulo equilátero. O comprimento dos braços abertos de um homem é igual à sua altura. Desde as raízes dos cabelos até ao fundo do queixo é um décimo da altura do homem; desde o fundo do queixo até ao topo da cabeça é um oitavo da altura do homem; desde o topo do peito até ao topo da cabeça é um sexto da altura do homem; desde o topo do peito até às raízes do cabelo é um sétimo da altura do homem; desde os mamilos até ao topo da cabeça é um quarto da altura do homem. A maior largura dos ombros contém em si própria a quarta parte do homem. Desde o cotovelo até à ponta dos dedos é um quinto da altura do homem e desde o cotovelo até ao ângulo da axila é um oitavo da altura do homem. A mão inteira será um décimo da altura do homem. O início dos órgãos genitais marca o centro do homem. O pé é um sétimo do homem. Da sola do pé até debaixo do joelho é um quarto da altura do homem. Desde debaixo do joelho até o início dos órgãos genitais é um quarto do homem. A distância entre o fundo do queixo e o nariz e entre as raízes dos cabelos e as sobrancelhas é a mesma e é, como a orelha, um terço da cara".

[Aplicações](#)

O homem sempre tentou alcançar a perfeição, seja nas pinturas, nos projetos arquitetônicos e até mesmo na [música](#).

[Na Arte](#)

A proporção áurea foi muito usada na arte, em obras como [O Nascimento de Vênus](#), quadro de [Botticelli](#), em que [Afrodite](#) está na proporção áurea. Esta proporção estaria ali aplicada pelo motivo do autor representar a perfeição da beleza. Em O Sacramento da Última Ceia de Salvador Dalí, as dimensões do quadro (aproximadamente 270 cm × 167 cm) estão numa Razão Áurea entre si. Na [história da arte](#) renascentista a perfeição da beleza em quadros foi bastante explorada com base nesta constante. Vários pintores e escultores lançaram mão das possibilidades que a proporção os dava de retratar a realidade com mais perfeição.

A Mona Lisa de Leonardo da Vinci utiliza o número áureo nas relações entre seu tronco e cabeça, e também entre os elementos do rosto.

Na Literatura

- Na [literatura](#) o número de ouro encontra sua aplicação mais notável no [poema épico grego Iliada](#), de [Homero](#), que narra os acontecimentos dos últimos dias da [Guerra de Tróia](#). Quem o ler notará que a proporção entre as estrofes maiores e as menores dá um número próximo ao 1,618, o número de ouro.
- [Luís de Camões](#) na sua obra [Os Lusíadas](#), colocou a chegada à Índia no ponto que divide a obra na razão de ouro.
- [Virgílio](#) em sua obra [Eneida](#), construiu a razão áurea com as estrofes maiores e menores.

Na Música

O número de ouro está presente nas famosas sinfonias [Sinfonia nº 5](#) e a [Sinfonia nº 9](#) de [Ludwig van Beethoven](#) e em outras diversas obras. Outro fato interessante registrado na Revista Batera, em um artigo sobre o baterista de [jazz Max Roach](#) é que em seus solos curtos aparece tal número, se considerarmos as relações que aparecem entre tempos de bumbo e caixa.

No Cinema

O diretor russo [Sergei Eisenstein](#) se utilizou do número φ no filme [O Encouraçado Potemkin](#) para marcar os inícios de cenas importantes da trama, medindo a razão pelo tamanho das fitas de película.

Nos Objetos Atuais

Atualmente essa proporção ainda é muito usada. Ao padronizar internacionalmente algumas medidas usadas em nosso dia-a-dia, os projetistas procuraram "respeitar" a proporção divina. A razão entre o comprimento e a largura de um Cartão de Crédito, alguns livros, Jornal, uma foto revelada, entre outros.

Nos Efeitos

Algumas das correntes místicas acreditam que objetos cujas dimensões sejam relacionadas a Phi, harmonizam-se com a [glândula pineal](#) (pequena [glândula endócrina](#) localizada perto do centro do [cérebro](#), entre os dois [hemisférios](#)), o que provocaria ou estimularia uma sensação de beleza e harmonia no ser humano.

Atividade7 – CONTINUANDO A MEDIR AS CORDAS

Objetivos:

- Ampliar os conhecimentos sobre a geometria suas proposições e teoremas;
- Conhecer o caminho percorrido na construção de uma tabela trigonométrica;
- Estabelecer comparações entre as relações utilizadas na construção das tabelas de cordas com as fórmulas utilizadas atualmente no estudo da trigonometria.

Recursos didáticos:

- Régua ou esquadro, compasso e calculadora.

Procedimentos:

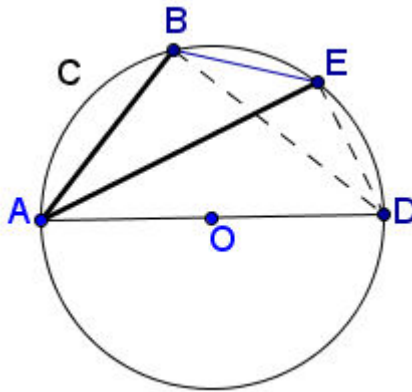
1) Observe que ainda temos na tabela alguns espaços vazios, quer dizer, alguns arcos cuja medida, de corda e/ou do seno, não foi calculada. As medidas dessas cordas foram determinadas, tanto por Ptolomeu como por Copérnico, a partir da aplicação de um teorema, chamado Teorema de Ptolomeu, enunciado da seguinte maneira: “Em um quadrilátero inscrito num círculo, a soma dos produtos de dois lados opostos é igual ao produto das diagonais”, que permitiu encontrar relação de medida da corda diferença de dois arcos, metade de um arco e soma de dois arcos.

- Você conhecia este teorema?

- Alguma vez, em sua vida de estudante, você teve oportunidade de utilizar este teorema? Em que circunstâncias?

2) Aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero ABED da figura abaixo, sendo conhecidas $AB = \text{crd}(2\alpha)$, $AE = \text{crd}(2\beta)$ e AD , diâmetro da circunferência C igual a 2, encontramos a relação para a corda BE, diferença dos dois arcos:

$$\text{crd}(2\beta - 2\alpha) = \frac{\text{crd}(2\beta) \cdot \text{crd}(180^\circ - 2\alpha) - \text{crd}(2\alpha) \cdot \text{crd}(180^\circ - 2\beta)}{2}$$



- Que novas medidas de cordas e ângulos podem agora entrar na tabela ?

- Compare esta relação com o seno da diferença de dois arcos.

3) Também aplicando o teorema de Ptolomeu e noções geométricas, chega-se à relação que dá a medida da corda da metade de um arco e da soma de dois arcos, que são respectivamente:

$$\text{crd } \alpha = \sqrt{2 - \text{crd}(180^\circ - 2\alpha)} \quad \text{e}$$

$$\text{crd}[180^\circ - (2\alpha + 2\beta)] = \frac{\text{crd}(180^\circ - 2\alpha) \cdot \text{crd}(180^\circ - 2\beta) - \text{crd}(2\beta) \cdot \text{crd}(2\alpha)}{2}$$

- E agora, quais novos ângulos podem entrar na tabela?

- Compare estas relações com as fórmulas do seno da metade do arco e o cosseno da soma de dois arcos.

Atividade 8– CALCULANDO A MEDIDA DA CORDA DO ARCO DE 1°

Objetivos:

- Conhecer os passos finais percorridos por Copérnico na construção de uma tabela trigonométrica;
- Ampliar os conhecimentos sobre a construção de uma tabela trigonométrica;
- Responder de maneira coerente a questão inicialmente proposta sobre o seno de 1°.

Recursos didáticos:

- Transparências e retroprojektor.

Procedimentos:

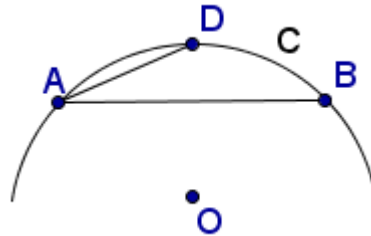
1) A partir das medidas das cordas de 72° e de 60°, Copérnico encontra a medida das cordas de 12°, 6°, 3°, 1 ½° e 3/4°. E apresenta o problema

Problema:

Enunciado original - Um arco é sempre maior do que a corda por si subtendida, porque uma linha reta é a linha mais curta entre dois pontos. Mas esta desigualdade tende para a igualdade quando se passa das seções maiores de um círculo para as mais pequenas. Assim, finalmente, quando a corda tocar o círculo, unem-se numa só linha reta e a curva.

Reelaboração do enunciado em linguagem moderna: A medida de um arco é sempre maior do que a medida da corda que o subtende, porque uma linha reta é a menor distância entre dois pontos. Mas, quanto menor a medida do arco de um círculo, mais a sua medida se aproxima da medida da corda que a ele corresponde. Assim, quando a corda toca o círculo (é tangente ao círculo) a reta e a curva são uma só linha.

Copérnico exemplifica: Seja $C(O, r)$; $\forall A \in C, AO = r$



- Se considerarmos AB: arco 3° e AD: arco $1\frac{1}{2}^\circ \Rightarrow \text{crd AB} = 5235$ unidades e $\text{crd AD} = 2618$ unidades, vemos que $\text{arco AB} = 2 \cdot \text{arco AD}$, mas $\text{crd AB} < 2 \cdot \text{crd AD}$;
- Mas se AB: arco $1\frac{1}{2}^\circ$ e AD: arco $\frac{3}{4}^\circ \Rightarrow \text{crd AB} = 2618$ unidades e $\text{crd AD} = 1309$ unidades. Temos $\text{arco AB} = 2 \cdot \text{arco AD}$, mas $\text{crd AB} = 2 \cdot \text{crd AD}$.
- E se AB: arco $\frac{3}{4}^\circ$ e AD: arco $\frac{3}{8}^\circ \Rightarrow \text{crd AB} = 1309$ unidades e $\text{crd AD} = 654,5$ unidades, ou seja, $\text{arco AB} = 2 \cdot \text{arco AD}$ e $\text{crd AB} = 2 \cdot \text{crd AD}$

A desigualdade desaparece, é como se a curva e a reta fossem uma única linha. Copérnico então conclui que as cordas dos arcos frações de 1° estão em proporção com as 1309 unidades da corda do arco de $\frac{3}{4}^\circ$.

Dessa forma encontra

- $\text{crd } \frac{1}{4}^\circ = \frac{\text{crd } \frac{3}{4}^\circ}{3} = \frac{1309}{3} = 436,333\dots \Rightarrow \text{crd } \frac{1}{4}^\circ \cong 436,25$;
- $\text{crd } 1^\circ = 1745,2971$, considerando $1^\circ = \frac{3}{4}^\circ + \frac{1}{4}^\circ$;

Fazendo $2^\circ = (3^\circ - 1^\circ)$, podemos calcular a $\text{crd } 2^\circ = 3489,6024$ que nos permitirá encontrar o $\text{sen } 1^\circ = 1744,8012$, que Copérnico aproxima para 1745, e encontrar a resposta para nossa questão inicial: **Qual o seno de 1° ?**

Durante várias semanas você participou do desenvolvimento de atividades nas quais lhe foram, historicamente, apresentados os caminhos que levaram Nicolau Copérnico à construção de sua tabela trigonométrica.

Agora gostaríamos que você fizesse uma avaliação dessas atividades relatando os conhecimentos, matemáticos ou não, que você adquiriu com essa participação. Destaque também a contribuição dessas atividades na sua formação como professor de matemática.

Obrigada,
Maria José