UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

MARTA MARIA MAURÍCIO MACENA

CONTRIBUIÇÕES DA INVESTIGAÇÃO EM SALA DE AULA PARA UMA APRENDIZAGEM DAS SECÇÕES CÔNICAS COM SIGNIFICADO

NATAL – RN

2007

MARTA MARIA MAURÍCIO MACENA

CONTRIBUIÇÕES DA INVESTIGAÇÃO EM SALA DE AULA PARA UMA APRENDIZAGEM DAS SECÇÕES CÔNICAS COM SIGNIFICADO

NATAL – RN

2007

Apêndice A: Questionário histórico (2004)

CEFET-PB
Disciplina: Matemática
Professora: Marta Maria Maurício Macena
Assunto: Secções Cônicas
Turma 3º C (11/2/2005)
Aluno(a): ____________________ Idade: ____
Aluno(a): ____________________ Idade: ____

1. Na Antiguidade, como o conhecimento científico era preservado e transmitido?

____
____
____

2. Comentem os benefícios gregos para a Matemática.

____
____
____

3. Citar algumas obras e autores que contribuíram para o desenvolvimento da Matemática.

____
____
____

4. De que forma foi iniciado o estudo sobre as secções cônicas?

____
____
____

5. Qual a definição de cone usada na atualidade? Quem a construiu e quando?

____
____
____

6. Que ocorrências contribuíram para o surgimento da Geometria Analítica?

____
____
____

7. Quais cientistas formalizaram a junção da geometria com a álgebra?

____
____
____

8. O que você entende por Geometria Analítica?

____
____
____

9. O que você entende por Secções Cônicas?

____
____
____

10. Dê exemplos do cotidiano sobre elipse, hipérbole ou parábola.

____
____
____

11. Comentem sobre usar um texto histórico na explanação de um conteúdo matemático.

____
____
____

Apêndice B: Atividades (2004)

CEFET-PB

Matemática (Marta Maria Maurício Macena)

3ª série (A, B e C)

Cônicas (24/2/2005)

Momentos na realização de uma investigação:[21]	
Exploração e formulação de questões.	▪ Reconhecer uma situação problemática ▪ Explorar a situação problema ▪ Formular questões
Conjecturas[22]	▪ Organizar dados ▪ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	▪ Realizar testes ▪ Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	▪ Justificar uma conjectura ▪ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Espera-se que ao final dessa investigação se saiba:

- as definições das secções cônicas - parábola, elipse e hipérbole
- identificar as características geométricas
- determinar as equações
- identificar e desenhar o gráfico, dada a respectiva equação
- distinguir uma secção cônica centrada de uma não centrada

René Descartes (França, 1596 – 1650) e Pierre Fermat (França, 1601 – 1665), são os dois principais responsáveis pela grande criação matemática, a geometria das coordenadas ou geometria analítica cuja idéia central é associar equações algébricas às curvas e superfícies. Segundo Descartes essa geometria tem por objetivo a explicação dos fenômenos da natureza.

Fermat partiu da obra dos geômetras gregos, principalmente Apolônio de Perga.

Descartes um dos fundadores da biologia moderna, físico de primeira e, só incidentalmente, matemático, chegou à matemática por três vias: a filosofia o estudo da natureza e o interesse pelos usos das ciências.

Exemplo de Cônicas

O Homem teve sempre necessidade de explicar os fenômenos que observava na natureza. Ao longo do tempo foi encontrando modelos para explicar o funcionamento do Sistema solar.

Os primeiros modelos de que há registro consideravam que as órbitas planetárias eram circulares. Assim mesmo começou por considerar Johannes Kepler, chegando à discordância entre os resultados teóricos e as observações do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, em que se apoiou.

Essa discordância veio a ser resolvida quando deduziu que as órbitas planetárias eram elípticas e publica em 1609 a sua descoberta de que a órbita de Marte em torno do Sol é uma elipse.

A partir daí as cônicas, objetos até então exclusivamente matemáticos, revelaram a sua estreita ligação com a natureza, em particular com as trajetória dos planetas no Sistema Solar.

Esta descoberta, associada aos estudos de Galileu, levou posteriormente (c. 1680) Isaac Newton a formular a sua lei da gravitação universal.

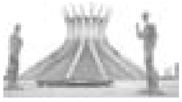
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/elipses.htm#Astronomia

A lei de Boyle-Mariotte (estudada nos compêndios de Física e Química), estabelece que sob temperatura constante, o volume ocupado por uma certa massa de gás, é inversamente proporcional a sua pressão.

Seja V o volume de um gás submetido a uma pressão P, a uma temperatura constante. A lei de Boyle-Mariotte, estabelece que $P.V$ = constante = k. A representação gráfica da equação $P.V = K$ (ou $X.Y = K$), do volume V em função da pressão P, de um gás submetido a uma temperatura constante, será uma hipérbole eqüilátera.

[21] João Pedro da Ponte, p. 21
[22] **Conjectura** → juízo ou opinião sem fundamento preciso; suposição, hipótese.

<u>Oscar Niemeyer (1907 - ?)</u>



A Catedral Metropolitana, ou Catedral de Brasília, um dos edifícios públicos desenhados pelo arquiteto Niemeyer nos anos 60 para a capital brasileira. Esta catedral foi construída entre os anos 1959 e 1980 e, tem na sua arquitetura técnicas e materiais modernistas misturados com as linhas curvas e a liberdade da forma, próprias do período barroco brasileiro.

A base do edifício é circular e tem cerca de 60 m de diâmetro, e o seu piso principal situa-se a 3 m do chão. O seu telhado de vidro fosco, que tem início ao nível do chão é suportado por 16 colunas (<u>arcos de hipérbole</u>) curvas, colunas estas, que vistas de fora do edifício, terminam no topo de forma pontiaguda, lembrando a imagem de uma coroa de espinhos. A parte mais estreita do edifício está a cerca de 31 m do chão, é circular e tem cerca de 12 m de diâmetro. Perto da entrada do edifício estão quatro enormes estátuas conhecidas pelos *Quatro Evangelhos*.

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/Niemeyer.htm

O Coliseu construído no ano 70 da nossa Era, inaugurado no ano 80 e, inicialmente, poderia sustentar no seu interior cerca de quarenta e cinco mil espectadores.

Foi construído em mármore, pedra travertina, ladrilho e tufo (pedra calcária com grandes poros). A sua planta elíptica mede dois eixos que se estendem aproximadamente de 190 m por 155 m.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Coliseu_de_Roma

Residência Melanie Farkas, arquiteto Rodrigo Lefèvre, 1971.

Esta residência se insere na produção do arquiteto Rodrigo Lefèvre, e é fruto de longa pesquisa sobre o uso de abóbadas parabólicas em concreto e blocos de barro, que durante os anos 60 foi muito utilizada por ele em programas residenciais.

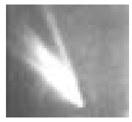
Corte da Residência Melanie Farkas, No corte observam-se as possibilidades de arranjo espacial proporcionado pela abóbada.

Desenho: Maurício Azenha Dias

Fonte: Revista Casa & Jardim, nº 284, 1978, p. 90

http://www.vitruvius.com.br/arquitextos/arq038/arq038_01.asp

Na astronomia, a descoberta do cometa Halley é paradigmática. Em 1704 Edmund Halley



estudou as órbitas de vários cometas, para as quais existiam dados. Concluiu que os cometas de 1682, 1607, 1531 e 1456 eram afinal um único cometa que descrevia uma órbita elíptica à volta do sol com um período de cerca de 76 anos. Fez a previsão correcta do seu retorno em 1758, o que fez com que o cometa ficasse conhecido pelo seu nome. Investigações recentes sugerem que os chineses tivessem registado este cometa em cerca de 240 a.C.

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/plano.htm#Elipses

<u>Atividade 1:</u>

1) Marque dois pontos no papel quadriculado e determine um conjunto de pontos que eqüidistam dos dois pontos. Como este lugar geométrico[23] é denominado?

2) Dados o ponto F e a reta r, no papel quadriculado, determinem o conjunto de pontos eqüidistantes da reta r e do ponto F. Que curva vocês obtiveram?

3) No exercício anterior, coloquem os eixos Ox e Oy de modo que o eixo Ox seja paralelo a reta r e passe pelo vértice; e o eixo Oy coincida com o eixo principal da curva. Considerem a equação da reta r como sendo y = -d. Dado um ponto P (x,y) pertencente a curva:

   a) Determinem a expressão algébrica da distância entre P e F.

   b) Determinem a expressão algébrica da distância entre P e r.

   c) Qual a propriedade do lugar geométrico do exercício dois desta atividade?

   d) Usando a propriedade, deduzir uma expressão algébrica.

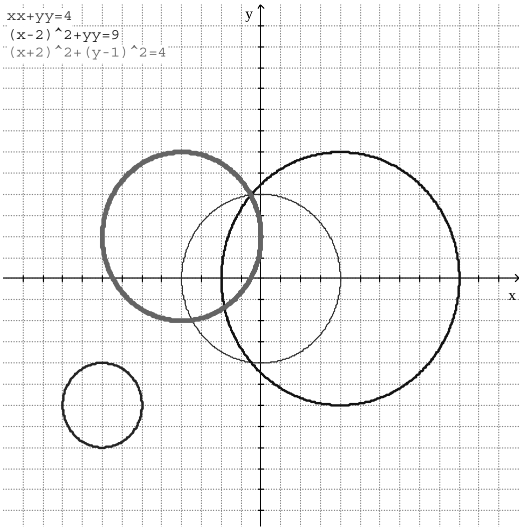
4) No papel quadriculado, determinem o conjunto de pontos P de modo que $d_{PF} = 2d_{Pr}$. Que curva vocês obtiveram?

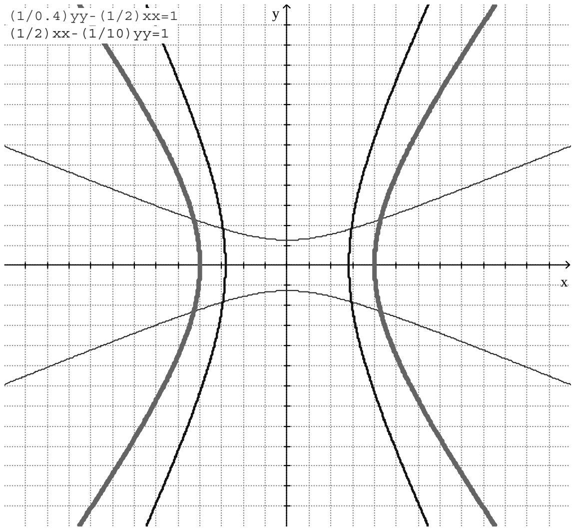
[23] Lugar geométrico dos pontos que têm uma determinada propriedade é o conjunto que contém todos esses pontos exclusivamente. (Dicionário de matemática – HEMUS)
Lugar geométrico de pontos é a figura cujos os pontos, e só eles, satisfazem a uma certa condição.
http://cinderella.lmc.fc.ul.pt/forum/msg/195/

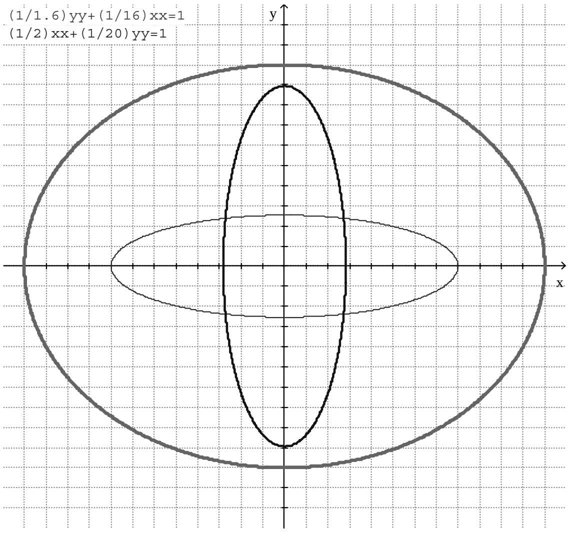
Apêndice C: Avaliação da turma A, turma B e turma C (2004)

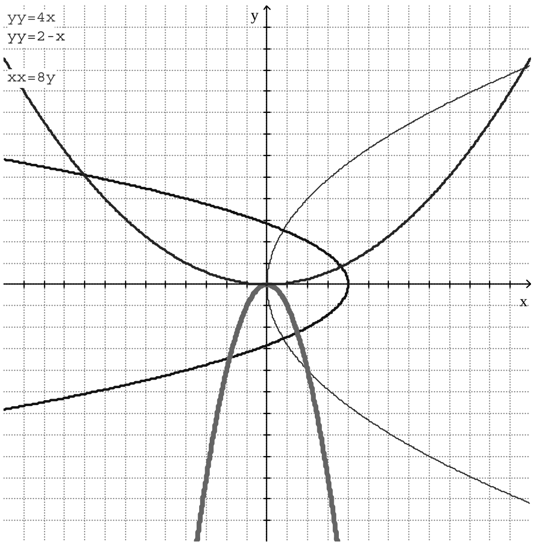
CEFET-PB (3ºA) – 10/3/2005
Dupla: ____

Em cada grupo de gráficos escreva a equação que está faltando e destaque cada elemento do mesmo.





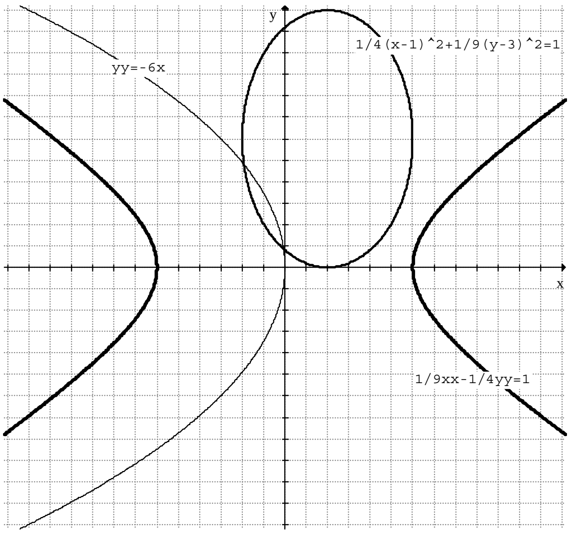




CEFET-PB (3ºB) – 11/3/2005
Matemática: Secções Cônicas

Dupla:______________________________________
____

Observe o conjunto de cônicas abaixo e determine o que se pede:

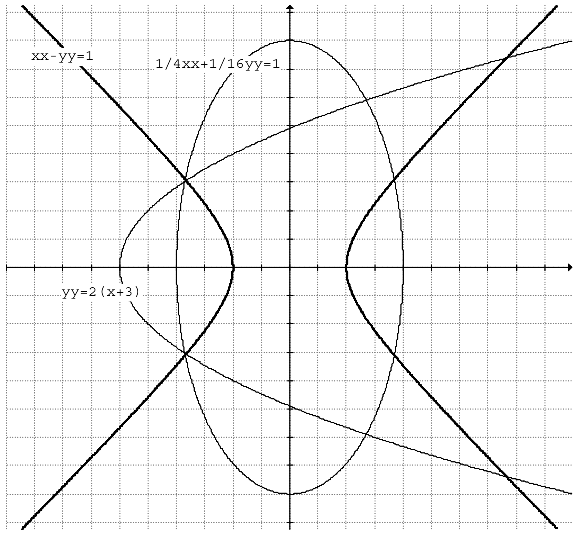


ELEMENTOS	Cônica:	Cônica:	Cônica: ....
Eq. reduzida			
Focos			
Vértices			
Dist.. Focal			
Eixos maior e menor			
Excentricidade			
Parâmetro			
Centro			
Diretriz			
Eixo real ou transverso			
Eixo imaginário			
Assíntotas			

CEFET-PB (3ºC) – 14/3/2005
Matemática: Secções Cônicas

Dupla:______________________________________
____

Observe o conjunto de cônicas abaixo e determine o que se pede:

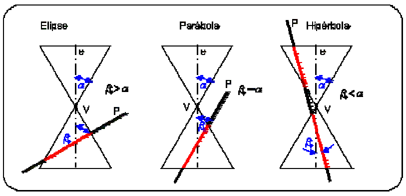


ELEMENTOS	Cônica:	Cônica:	Cônica: ....
Eq. reduzida			
Focos			
Vértices			
Dist. Focal			
Eixos maior e menor			
Excentricidade			
Parâmetro			
Centro			
Diretriz			
Eixo real ou transverso			
Eixo imaginário			
Assíntotas			

Apêndice D: Resumo cônicas (2004)

CEFET-PB – 11/3/2005

Nome:



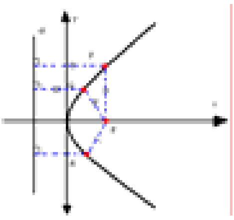
René Descartes (1596-1650) generalizou a utilização das cônicas e identificou-as como equações do 2º grau. Mas nem todas as equações do 2º grau representam cônicas.

As curvas definidas por equações do 2ºgrau em *x* e *y* do tipo:

a) $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ chamam-se cônicas.

b) $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ também pode definir uma reta, um ponto ou um cojunto vazio.

c) $ax^2+cy^2+dx+ey-f=0$ ($b=0$), definem cônicas com os eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados.



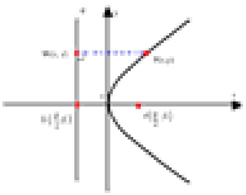
- *foco*: o ponto **F**
- *diretriz*: a reta **d**
- *vértice*: o ponto **V**
- *parâmetro*: **p**
- o vértice **V** e o foco **F** ficam numa mesma reta, o eixo de simetria.
- **V** é o ponto médio de $\overline{dF}$ = p, isto é, $\overline{dV} = \overline{VF} = \frac{p}{2}$
- *Equação*: parábola com vértice na origem, concavidade para a direita e eixo de simetria horizontal, a reta **d** tem equação $x = \frac{-p}{2}$ e na parábola temos:

  → $F\left(\frac{p}{2},0\right)$

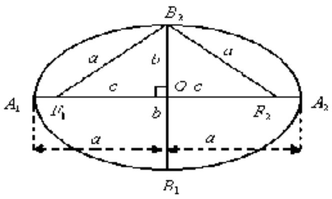
  → P(x, y)

  →obtemos então, a equação da parábola: $\boxed{y^2 = 2px}$

  → se considerarmos $\overline{dF}$ = 2p então, a equação da parábola fica $\boxed{y^2 = 4px}$

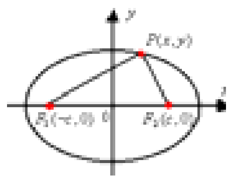


- *Definição:* $\overline{FP} = \overline{Pd}$

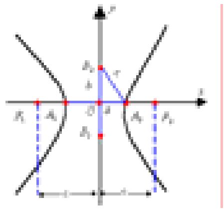


- *focos :* os pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$
- *centro*: o ponto **O**, que é o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$
- *vértices*: os pontos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$
- *eixo maior*: $\overline{A_1A_2}=2a$
- *eixo menor*: $\overline{B_1B_2} = 2b$
- *distância focal*: $\overline{F_1F_2} = 2c$
- *relação fundamental*: $a^2 = b^2 + c^2$
- *exentricidade*: $\boxed{e = \frac{c}{a}}$, como 2c < 2a então, c < a e 0 < e < 1.
- *Equação*: elipse com centro na origem e eixo maior horizontal

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



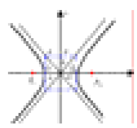
- *Definição:* $\overline{F_1P}+\overline{PF_2}=2a$



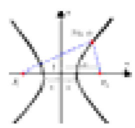
- *focos*: os pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$
- *vértices*: os pontos $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$
- *centro* da hipérbole: o ponto **O**, que é o ponto médio de $\overline{A_1A_2}$
- *distância focal*: $\overline{F_1F_2} = 2c$
- *eixo real*: $\overline{A_1A_2}=2a$ (na mesma direção dos focos)
- *eixo imaginário*: $\overline{B_1B_2} = 2b$ (b>0 tal que $a^2 + b^2 = c^2$)
- *Equação*: hipérbole com centro na origem e focos no eixo Oy

  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b} = 1$

- *Assíntotas*: $y = \pm\frac{b}{a}x$ (retas que contêm as diagonais do retângulo de lados 2a e 2b)



- *Definição:* $\left|\overline{F_1P}-\overline{PF_2}\right|=2a$



- Uma hipérbole é chamada eqüilátera quando as medidas dos semi-eixos real e imaginário são iguais:

Apêndice E: Questionário conclusivo (2004)

CEFET-PB

Marta Maria Maurício Macena (**15/3/2005)**

Turma: _______ Idade: ________

Nome (opcional): _________________________

Questionário após a avaliação da aprendizagem sobre as Secções Cônicas

Estimado(a) aluno(a) da 3ª série do CEFET-PB no ano letivo 2004, conto com a sua colaboração que é necessária para a realização dessa pesquisa.
Sou-lhe grata.

NA SUA OPINIÃO:

1. Qual a importância da história no estudo das Secções Cônicas?

2. Que contribuições trouxeram as atividades práticas de ensino para a aprendizagem das Secções Cônicas?

3. Como você relaciona a matemática aprendida sobre as Secções Cônicas com a realidade conhecida?

4. A matemática aprendida no estudo das Secções Cônicas contribuiu para desenvolver o espírito de curiosidade em relação a matemática do dia a dia? De que forma?

5. Quais os pontos mais negativos das aulas ministradas sobre as Secções Cônicas?

6. Quais os pontos mais positivos das aulas ministradas sobre as Secções Cônicas?

7. Quais as dificuldades enfrentadas durante as aulas sobre as Secções Cônicas?

8. Que modificações precisam ser feitas nessa metodologia de ensino para melhorar a aprendizagem sobre as Secções Cônicas?

Apêndice F: Atividade 1 (2005)

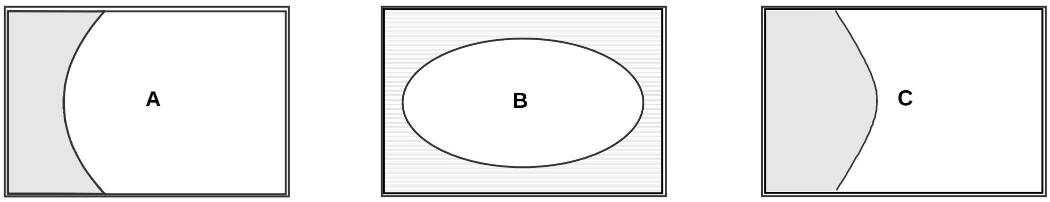
CEFET-PB
Professora: Marta Maria Maurício Macena
Matemática (secções cônicas) – Data: _____/_____/2006
Componentes da equipe: ____

Guia de atividades nº1 (com fotografias e gravações para registro).

1. No decorrer desta aula, cada equipe,
   a) jogará em 3 tipos de tabuleiros de bilhar (A, B ou C) – 25 minutos para cada tipo;
   b) elaborará e explicitará as possíveis estratégias de resolução (evitando a simples tentativa e erro);
   c) registrará as questões que surgirem relativas à atividade;
   d) testará as prováveis estratégias de jogar acertando o alvo;
   e) fará anotações de acordo com os resultados obtidos em cada jogada;
   f) construirá a regra para jogar acertando o alvo (escrevendo com destaque);

2. Numerem ordenadamente os tabuleiros a medida que a equipe for desenvolvendo as atividade.

(....) (....) (....)



3. A atividade para cada tabuleiro (A, B ou C) tem o mesmo enunciado:
   "Por tabela[24], retirar a bola fixa no ponto determinado".

4. Esperem o início da cronometragem.

5. Estratégias possíveis para o tabuleiro nº 1:

6. Questões referentes ao tabuleiro nº 1:

[24] Tabela → bordo interno da mesa de bilhar (Pequeno Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. R. Janeiro: Ed. Civilização Brasileira)

7. Preencham o quadro abaixo e, se necessário, usem folhas a mais.

Tabuleiro nº 1			
Quem jogou?	**Trajetória da bola**	**Resultado**	**Justificativa do resultado (tentativa ou já testando as tentativas acertadas)**
1 (..............)		( ) A ( ) E	
2 (..............)		( ) A ( ) E	
3 (..............)		( ) A ( ) E	

8. Registrar a regra determinada para o tabuleiro nº 1 (se já encontrou):

9. Estratégias possíveis para o tabuleiro nº 2:

10. Questões referentes ao tabuleiro nº 2:

11. Preencham o quadro abaixo e, se necessário, usem folhas a mais.

Tabuleiro nº 2			
Quem jogou?	**Trajetória da bola**	**Resultado**	**Justificativa do resultado (tentativa ou já testando as tentativas acertadas)**
1 (..............)		( ) A ( ) E	
2 (..............)		( ) A ( ) E	
2 (..............)		( ) A ( ) E	

12. Registrar a regra determinada para o tabuleiro nº 2 (se já encontrou):

13. Estratégias possíveis para o tabuleiro nº 3:

14. Questões referentes ao tabuleiro nº 3:

15. Preencham o quadro abaixo e, se necessário, <u>usem folhas a mais</u>.

Tabuleiro nº 3			
Quem jogou?	**Trajetória da bola**	**Resultado**	**Justificativa do resultado (tentativa ou já testando as tentativas acertadas)**
1 (..............)		( ) A ( ) E	
2 (..............)		( ) A ( ) E	
3 (..............)		( ) A ( ) E	

16. Registrar a regra determinada para o tabuleiro nº 3 (se já encontrou):

Apêndice G: Atividade 2 (2005)

CEFET-PB
Professora: Marta Maria Maurício Macena
Matemática (secções cônicas) – Data: _____/_____/2006
Componentes da equipe: ____

Guia de atividades nº2 (com fotografias e gravações para registro).

I No decorrer desta aula,

g) cada aluno, na sua equipe, discutirá a melhor maneira de traçar o **lugar geométrico**[25] desejado.
h) cada aluno, na sua equipe, traçará lugares geométricos em papel quadriculado.
i) cada equipe registrará as questões que surgirem relativas a atividade;
j) cada equipe construirá uma definição para os lugares geométricos encontrados.

II Traçando o **primeiro lugar geométrico**.

a) No papel quadriculado, marque dois pontos.
b) Fora da reta determinada por esses dois pontos, marque outro ponto.
c) Encontre a soma (S) das distâncias a partir desse último ponto marcado até os dois pontos iniciais.
d) Marque outros pontos tais que a soma das distâncias a partir de cada um desses até os dois pontos iniciais seja sempre S.
e) Verifique o lugar geométrico que começa a surgir.
f) Como pode ser denominado esse lugar geométrico?
g) Construa uma definição matemática para esse lugar geométrico.

Questões sobre o lugar geométrico 1

Definição 1

[25] **Lugar geométrico** dos pontos que têm uma determinada propriedade é o conjunto que contém todos esses pontos exclusivamente. (Dicionário de matemática – HEMUS)
Lugar geométrico de pontos é a figura cujos os pontos, e só eles, satisfazem a uma certa condição.http://cinderella.lmc.fc.ul.pt/forum/msg/195/
Um lugar geométrico é o trilho percorrido por um ponto [...]
http://wwmat.ptmat.fc.ul.pt/~jnsilva/Mestradinho3/Portugues/SpecialModes.html

III Traçando o **segundo lugar geométrico**.

a) No papel quadriculado, trace uma reta e marque um ponto fora dela.
b) Encontre o conjunto de pontos eqüidistantes da reta traçada e do ponto marcado.
c) Verifique o lugar geométrico que começa a surgir.
d) Como pode ser denominado esse lugar geométrico?
e) Construa uma definição matemática para esse lugar geométrico.

Questões sobre o lugar geométrico 2	
Definição 2	

IV Traçando o **terceiro lugar geométrico**.

a) No papel quadriculado, marque dois pontos.
b) Fora da reta determinada por esses dois pontos, marque outro ponto.
c) Encontre a diferença (D) das distâncias a partir desse último ponto marcado até os dois pontos iniciais.
d) Marque outros pontos tais que a diferença das distâncias a partir de cada um desses até os dois pontos iniciais seja sempre D.
e) Verifique o lugar geométrico que começa a surgir.
f) Como pode ser denominado esse lugar geométrico?
g) Construa uma definição matemática para esse lugar geométrico.

Questões sobre o lugar geométrico 3	
Definição 3	

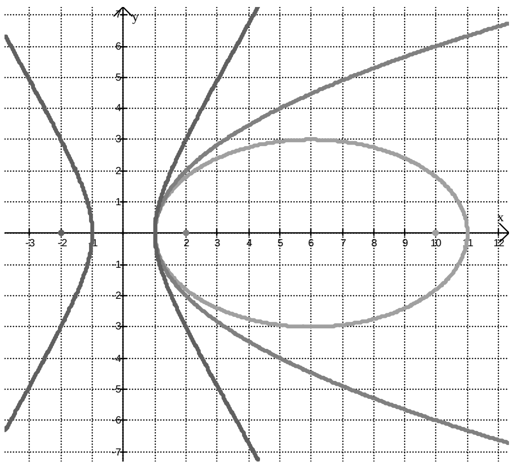
Apêndice H: Avaliação 1 (2005)

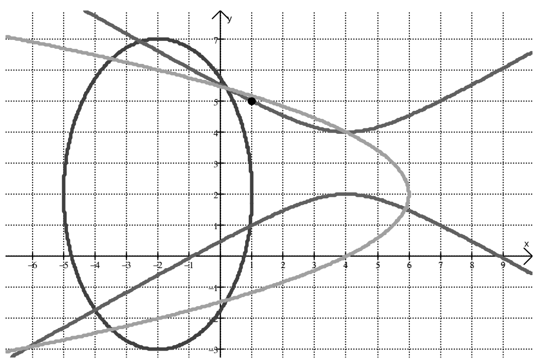
CEFET-PB
Professora: Marta Maria Maurício Macena
Matemática (secções cônicas) – ___/___/2006

Concordo que meu nome e/ou minha imagem, adquiridas nesse trabalho de pesquisa, possam ser expostos em trabalhos científicos.

Aluno(a)_____________________ Turma: ____

1. Para cada uma das cônicas representadas abaixo, determine os seus elementos principais e escreva a sua equação reduzida:





2. O que pode ter originado o estudo da geometria?

3. O que pode ter originado o estudo das *Secções Cônicas*?

4. Por que a denominação *Secções Cônicas* para o estudo que estamos fazendo no momento?

5. Onde estão as *Secções Cônicas* no cotidiano (passeio pelo CEFET/PB fotografando)?

6. Que personagens históricas estão ligadas ao estudo das *Secções Cônicas*?

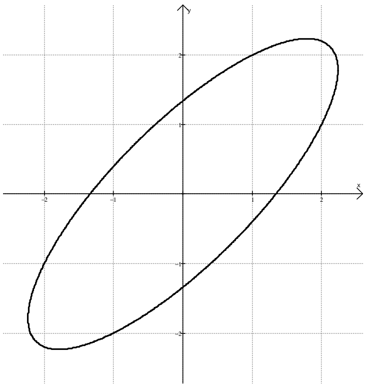
7. Comente sobre as atividades práticas de ensino para a aprendizagem das *Secções Cônicas*.

Apêndice I: Avaliação 2 (2005)

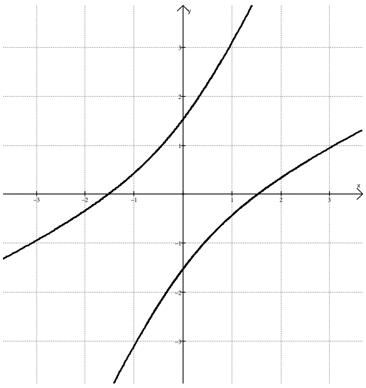
CEFET-PB
Matemática (secções cônicas) – Data: ____/____/2006
Nome completo: ______________________________ Matrícula: ___________ Turma: ________

Considerando um ponto genérico G(x, y) para cada curva abaixo representada, como também a definição de cada curva (Manoel Paiva, Ática: 1995, p 174, 199 e 227):

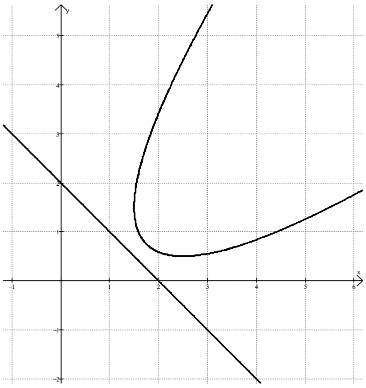
a) Obter uma equação da elipse de focos $F_1(-2, -2)$ e F_2 (2, 2), cujo eixo menor mede 2 unidades.



b) Obter uma equação da hipérbole de focos $F_1(-2, 2)$ e F_2 (2, -2), cujo eixo menor mede $2\sqrt{7}$ unidades.



c) Encontrar uma equação da parábola de focos F(2, 1), cuja diretriz é *r: x + y -2 = 0*.

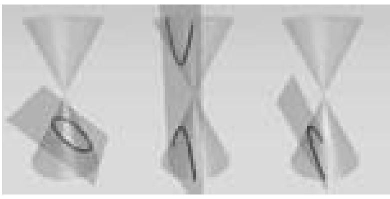


Anexo A: Apostila sobre cônicas

CEFET/PB
Coordenação de Ciências
Disciplina: Matemática
Prof[as]: Kalina, Rejane e Marta

Geometria Analítica: Cônicas

As cônicas (circunferência, elipse, parábola e hipérbole) possuem todas elas um aspecto singular, poder ser obtidas pela intersecção de um plano com uma superfície cônica. O plano secante deve ter uma inclinação escolhida convenientemente. Vejamos a figura a seguir.



As propriedades de reflexo geradas por cônicas (parabolóides, hiperbolóides e elipsóides) são usadas nos espelhos e antenas ou para criara condições acústicas especiais em auditórios, teatros, catedrais.

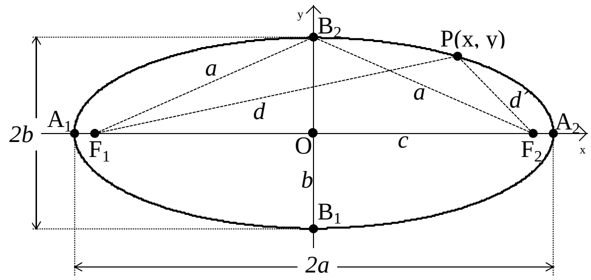
Devido as suas propriedades físicas e até estéticas, os arcos cônicos surgem em Engenharia e Arquitetura (pontes, cúpulas, torres e arcos).

Hoje em dia é muito comum vermos pequenas antenas parabólicas nos telhados e terraços, a fim de captar programas de televisão. A construção dessas antenas requer conhecimentos de geometria e análise.

Estudaremos a seguir as propriedades dessas cônicas.

Elipse

Elipse é o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante e maior que a distância entre os focos.



- Os pontos fixos F_1 e F_2 são os **focos** da elipse.
- O ponto ***O*** (ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$) é o **centro** da elipse.
- Os segmentos $\overline{PF_1} = d$ e $\overline{PF_2} = d'$ são chamados **raios vetores** do ponto P e sua soma é igual a $2a$, isto é, $d = d' = 2a$.
- A distância de F_1 a F_2 ($\overline{F_1F_2} = 2c$) chama-se **distância focal**.
- Os pontos A_1 e A_2 são chamados **vértices** da elipse.
- O segmento $\overline{A_1A_2} = 2a$ é o **eixo maior** da elipse.
- O segmento $\overline{B_1B_2} = 2a$ é o **eixo menor** da elipse.
- A razão $e = \frac{c}{a}$, em que $0<e<1$, é denominada **excentricidade** da elipse, que mede o seu maior ou menor achatamento. Quanto maior o valor de "**e**" mais achatada é a elipse.
- Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo F_2OB_2, temos que

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Equação reduzida da elipse

1º caso: Para $\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = 2a$, sendo $P(x, y)$ um ponto da elipse e $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ os seus focos, temos:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado e dividindo-os por 4, obtemos:

$$a.\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

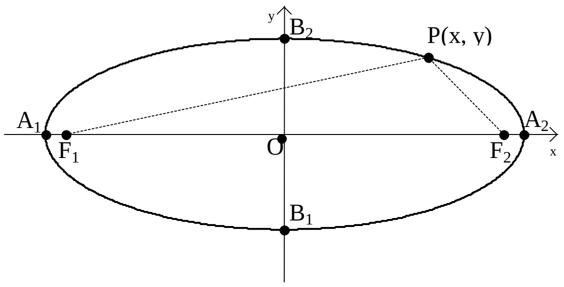
Elevando novamente os dois membros ao quadrado, mais alguns cálculos, encontramos:

$$x^2\,(a^2 - c^2) + a^2\,y^2 = a^2\,(a^2 - c^2)$$

Sendo $a^2 - c^2 = b^2$, temos $x^2\,b^2 + a^2\,y^2 = a^2\,b^2$. Dividindo esta equação por $a^2\,b^2$ obtemos:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Equação reduzida da elipse, centrada no (0, 0) e eixo maior contido no eixo das abscissas.



2º caso: Para $\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = 2a$, sendo $P(x, y)$ um ponto da elipse e $F_1\ (0, -c)$ e $F_2(0, c)$ os seus focos, temos:

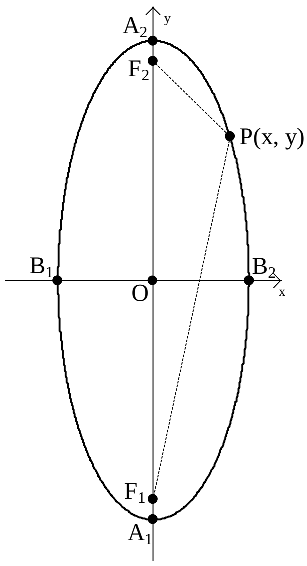
$$\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2+(y+c)^2} = 2a - \sqrt{y^x+(y-c)^2}$$

Efetuando os cálculos de forma análoga ao 1º caso, obtemos:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

Equação reduzida da elipse, centrada no (0, 0) e eixo maior contido no eixo das ordenadas.



Exercícios de fixação

1) Numa elipse, o eixo maior está contido no eixo x e seu comprimento é 16. Sabendo que a distância entre os focos é 10, determinar a equação da elipse.

Resp. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$

2) Determinar a equação da elipse de focos $F_1(0,\ 3)$ e $F_2(0,\ -3)$, sabendo que o comprimento do eixo menor é 2.

Resp. $x^2+\frac{y^2}{10}=1$

3) Determinar as coordenadas dos focos e dos vértices da elipse de equação $4x^2 + 25y^2 = 100$.

Resp. $F_1(\sqrt{21}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{21}, 0)$; $V_1(5, 0)$ e $V_2(-5, 0)$

4) Determinar a equação da elipse de vértices $V_1(0, 6)$ e $V_2(0, -6)$ e que passa pelo ponto P(3, 2).

Resp. $\frac{8x^2}{81}+\frac{y^2}{36}=1$

5) Determinar a equação da elipse de focos $F_1(3,\ 0)$ e $F_2(-3,\ 0)$, sabendo que o comprimento do eixo menor é 8.

Resp. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

6) Determine as medidas do eixo maior e do eixo menor da elipse de equação $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{81}=1$.

Resp. 24 e 18

7) O eixo maior de uma elipse de centro na origem está contido no eixo x. Sabendo que o comprimento do eixo menor é 6 e

a distância focal é 10, determine a equação da elipse.

Resp. $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{9}=1$

8) Determine a equação da elipse cujos focos são $F_1(1, 0)$ e $F_2(-1, 0)$ e que passa pelo ponto $P(2, 0)$.

Resp. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

9) Determine as coordenados dos vértices e as coordenadas dos focos da elipse de equação $16x^2 + 25y^2 = 400$.

Resp. $V_1(5, 0)$ e $V_2(-5, 0)$; $F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0)$

10) Determine a distância focal da elipse $2x^2 + y^2 = 2$.

Resp. 2

11) Determine o comprimento do eixo maior de uma elipse de focos $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$ e de excentricidade $e = \sqrt{3}/3$.

Resp. $8\sqrt{3}$

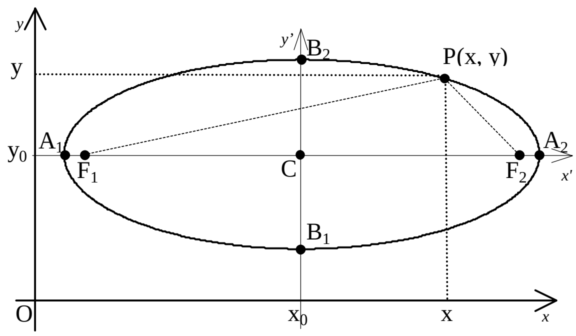
12) Determine a equação da elipse de excentricidade $e = 2/3$, sendo $a = 9$.

Resp. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{45}=1$

Eixos da elipse paralelos a x e y

Seja uma elipse de centro no ponto $C(x_0, y_0)$ e eixos paralelos aos eixos coordenados.

1º caso: eixo maior no eixo x' e eixo menor no eixo y':



Em relação ao sistema x'Cy', a equação da elipse é

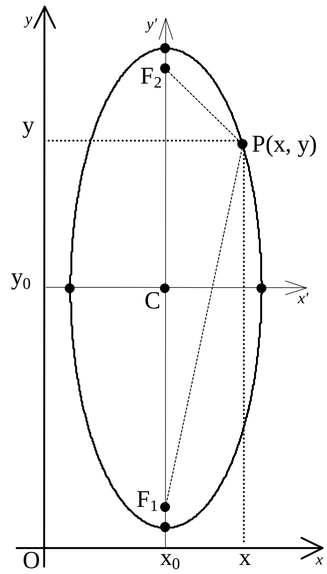
$$\boxed{\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1}$$

Em relação ao sistema xOy, a equação da elipse é

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

Neste caso, os focos são $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$ e os vértices são $V_1(x_0 - a, y_0)$ e $V_2(x_0 + a, y_0)$

2º caso: eixo maior no eixo y' e eixo menor no eixo x':



Em relação ao sistema x'Cy', temos

$$\boxed{\frac{(x')^2}{b^2}+\frac{(y')^2}{a^2}=1}$$

Em relação ao sistema xOy, temos

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1}$$

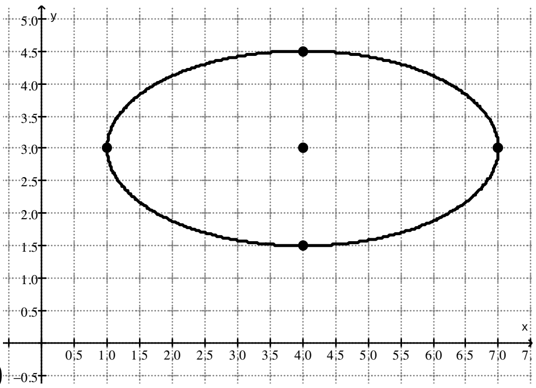
Neste caso, os focos são $F_1(x_0, y_0 - c)$ e $F_2(x_0, y_0 + c)$ e os vértices são $V_1(x_0, y_0 - a)$ e $V_2(x_0, y_0 + a)$

Exercícios de fixação

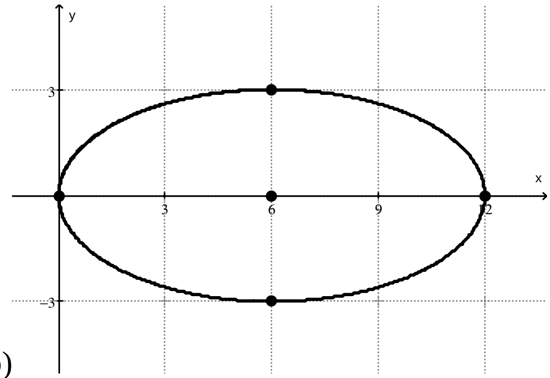
13) Determine o centro, os focos e as medidas dos semi-eixos da elipse $\frac{(x+2)^2}{100}+\frac{(y+1)^2}{36}=1$.

Resp. $O(-2, -1)$, $F_1(6, -1)$, $F_2(-10, -1)$ $a=10$ e $b=6$

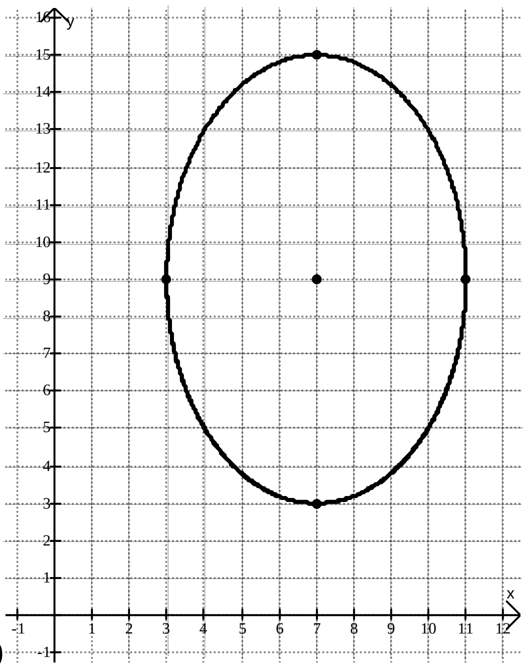
14) Ache a equação reduzida das seguintes elipses:



a)



b)



c)

Resp. a) $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{2{,}25}=1$ b) $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ c) $\frac{(x-7)^2}{16}+\frac{(y-9)^2}{36}=1$

15) Qual a equação da reta que passa pelos focos da elipse $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{6}=1$?

Resp. y – 1 = 0

16) Determinar a equação da elipse de eixo maior vertical, sabendo que as coordenadas do centro são (2, -7) e os semi-eixos valem a = 8 e b = 1.

Resp. $\frac{(x-2)^2}{1}+\frac{(y+7)^2}{64}=1$

17) A distância mínima do planeta Mercúrio ao Sol é de aproximadamente 28 milhões de milhas e a excentricidade da órbita é de 1/5. Calcule a distância máxima do planeta Mercúrio ao Sol.

Resp. 42 milhões de milhas

18) O eixo da elipse descrita pela Terra em sua órbita mede 186 milhões de milhas e sua excentricidade é de 1/62. Calcule as distâncias máximas e mínimas da Terra ao Sol.

Resp. $d_{máx}$= 94,5 e $d_{mín}$=91,5

19) (PUC-SP) Um ponto P da elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ dista 2 de um dos focos. Qual a distância de P ao outro foco da elipse?

Resp. 4

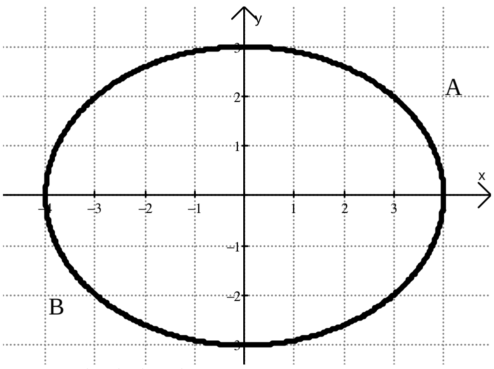
20) A equação de uma elipse é $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1$. Sabendo que a elipse passa pelos pontos A(2, 1) e B($\sqrt{2}$, 2) determine *p* e *q*.

Resp. $p=\frac{\sqrt{42}}{3}$ e $q=\sqrt{7}$

21) (UFPB-2000) Na figura abaixo está representada a elipse de equação $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ com focos F_1 e F_2 e os pontos A e B. Se d_{PQ} denota a distância entre os pontos P e Q, calcule $d_{AB}+d_{BF_2}+d_{F_2A}$.

Resp. 20

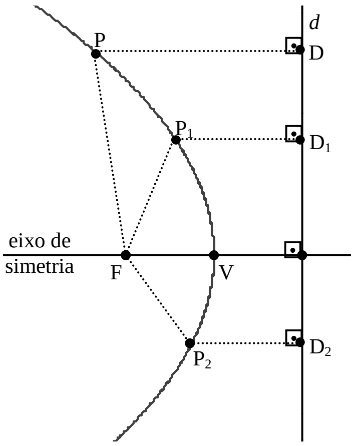
22) (UFPB-2002) A prefeitura de João Pessoa, pensando na urbanização da área em frente ao Shopping Sul, planeja construir uma praça em forma de elipse, conforme mostra a figura abaixo, além de duas lanchonetes localizadas nos pontos A e B das retas tangentes à elipse, paralelas à reta y = -x. Determine as coordenadas dos pontos onde ficarão as lanchonetes.



Resp. $A\left(\frac{16}{5},\frac{9}{5}\right), B\left(\frac{-16}{5},\frac{9}{5}\right)$

Parábola

Parábola é o conjunto dos pontos de um plano, eqüidistantes de um ponto fixo F (foco) e de uma reta *d* (diretriz), F $\notin$ *d*, isto é, $\overline{PF} = \overline{Pd}$.



$\overline{FP_1} = \overline{P_1D_1}$

$\overline{FP_2} = \overline{P_2D_2}$

Na figura, destacamos:

- *foco da parábola:* o ponto F
- *reta diretriz:* a reta *d*
- *eixo de simetria:* a reta que passa pelo foco F e é perpendicular a diretriz
- *vértice da parábola:* o ponto V, ponto médio do segmento $\overline{FD}$, isto é, $\overline{FV} = \overline{VD}$

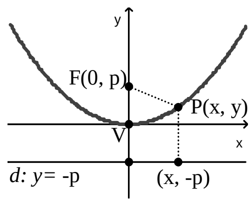
Equação reduzida da parábola

1º caso: Para vértice na origem e eixo de simetria sobre o eixo y, temos:

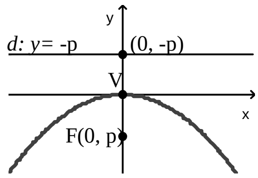
$$\overline{PF} = \overline{Pd} \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$$

Efetuando os cálculos, encontramos: $\boxed{x^2 = 4py}$ ou $\boxed{y = \frac{x^2}{4p}}$, que são equações reduzidas da parábola de foco *F(0, p)* e diretriz *y = -p.*

- se p>0, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

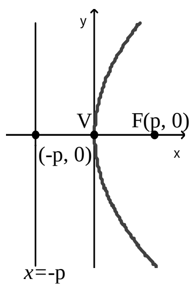


- se p<0, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

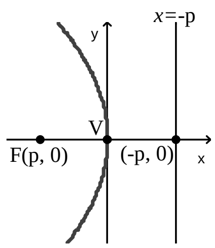


2º caso: Para vértice na origem e eixo de simetria sobre o eixo x, trocando *x* por *y* nas equações anteriores, temos: $\boxed{y^2 = 4px}$ ou $\boxed{x = \frac{y^2}{4p}}$, que são equações reduzidas da parábola de foco *F(p, 0)* e diretriz x = *-p.*

- se p>0, a parábola tem a concavidade voltada para a direita.



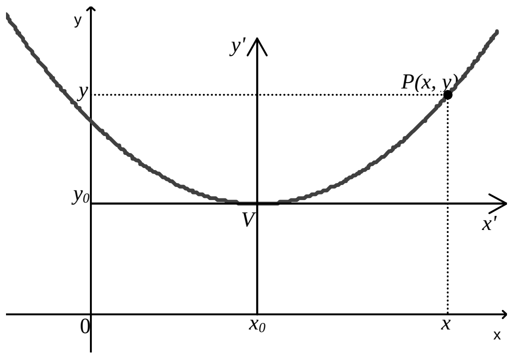
- se p<0, a parábola tem a concavidade voltada para a esquerda.



Equação da parábola com eixo de simetria paralelo a um dos eixos coordenados

Seja uma parábola de vértice V(x_0, y_0).

1º caso: o eixo da parábola paralelo ao eixo *y*.

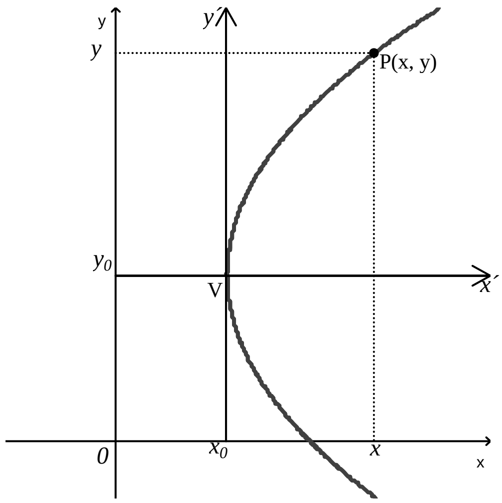


A equação dessa parábola é dada por

$$\boxed{(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)}$$

A equação da diretriz é dada por $y = y_0 - p$ e o foco tem coordenadas $F(x_0, y_0 + p)$.

<u>2º caso</u>: o eixo da parábola paralelo ao eixo x.



A equação dessa parábola é dada por

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)}$$

A equação da diretriz é dada por $x = yx_0 - p$ e o foco têm coordenadas $F(x_0 + p, y_0)$.

Exercícios de fixação

23) Uma parábola tem o foco F na intersecção das retas y = 0 e x = 8 e o vértice na origem dos eixos coordenados. Determine:

a) a equação da diretriz e

b) a equação dessa parábola.

Resp. $x = -8$ e $y^2 - 32x = 0$

24) Determinar a equação da parábola cujo vértice é a origem dos eixos coordenados, o eixo de simetria é o eixo *y* e passa pelo ponto P(-3, 7)

Resp. $x^2 = \frac{9y}{y}$

25) Dada a parábola de equação $y^2 = -20x$, pede-se:

a) as coordenadas do foco;

b) a equação da diretriz

c) o esboço do gráfico

Resp. a)F(-5, 0) b) x = 5

26) Determinar as coordenadas do vértice, as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola de equação $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$

Resp. V(3, 2), F(5, 2) e x = 1

27) Uma parábola tem foco F(2, 3) e diretriz dada pela reta x = - 4. Determine:

a) as coordenadas do vértice

b) a distância *p* do vértice ao foco

c) a equação dessa parábola.

Resp. a) V(-1, 3) b) p = 3 c) $(y - 3)^2 = 12(x + 1)$

28) Determinar as coordenadas do vértice $V(x_0, y_0)$, a distância p do vértice ao foco F(1, 4) cuja diretriz é a reta y + 2 = 0.

Resp. V(1, 1), p = 3 e $(x - 1)^2 = 12(y - 1)$

29) Determinar as coordenadas do vértice, as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola $x^2 + 2x + 4y - 15 = 0$.

Resp. V(-1, 4), F(-1, 3) e y = 5

30) Determinar a equação da parábola cujo eixo de simetria é vertical e que passa pelos pontos A(-3, 5), B(0, 4) e C(2, 0).

Resp. $x^2 - y - 4 = 0$

31) Uma parábola tem foco F(-1, 8) e diretriz dada pela equação y = 5. Determinar as coordenadas do vértice e a equação dessa parábola.

Resp. V(-1, 13/2) e $(x + 1)^2 = 6(y - 13/2)$

32) (Merck-SP) Determinar a equação da parábola de foco F(0, 1) e diretriz y + 1 = 0.

Resp. $x^2 = 4y$

33) (FGV-SP) Num sistema cartesiano ortogonal, determinar a equação do lugar geométrico dos pontos que eqüidistam do eixo OY e do ponto (4, 0).

Resp. $y^2 = 8(X - 2)$

34) Determinar a distância do vértice da parábola y = (x – 2)(x – 6) à reta $y = \frac{4}{3}x + 5$.

Resp. $\frac{43}{5}$

35) (Fatec-SP) As retas por x = 4 e y + x = 3 se interceptam no ponto A. Calcular a distância do ponto A ao vértice da parábola definida por y = x^2 – 2x – 3.

Resp. $3\sqrt{2}$

36) Determinar a equação da reta que passa pela origem e pelo vértice da parábola de equação y = $-x^2$ + 4x – 3

Resp. $y = \frac{x}{2}$

37) (PUC-SP) Determinar as coordenadas do vértice da parábola $2x^2$ + 4x +3y – 4 = 0.

Resp. V(-1, 2)

38) Calcular os valores de *b* para os quais a parábola y = x^2 + *b*x tem um único ponto em comum com a reta y = x – 1.

Resp. $b_1 = 3$ e $b_2 = -1$

39) (São Carlos-SP) Determinar as declividades das retas tangentes à parábola y = x^2 e que passam pelo ponto P(0, -2).

Resp. $m = \pm 2\sqrt{2}$

40) Determine as equações das parábolas que verificam as seguintes condições:

a) Foco (6, 0) e diretriz x = -6

b) Foco (0,-4) e diretriz x = 4

Resp. $y^2 = 24x$ e $x^2 = -16y$

41) Uma parábola tem como foco o ponto F(4, 2) e para diretriz, a reta de equação x = -6. Determine:

a) O vértice dessa parábola

b) A sua equação

Resp. V(-1, 2)

42) Considere a parábola de equação $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.

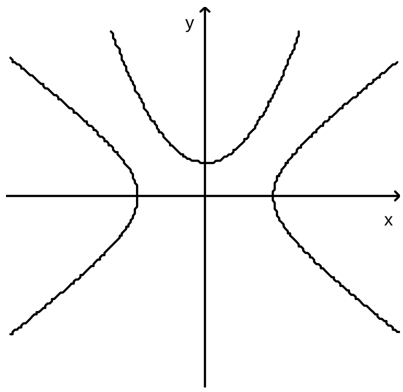
a) Calcule as coordenadas do vértice e do foco.

b) Faça um esboço do gráfico dessa parábola.

Resp. V(1, -4) e F(3, -4)

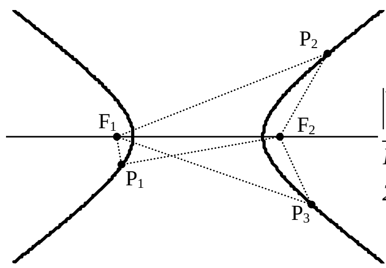
43) (UFPB-20032) Maria, empolgada com suas realizações, resolveu construir na praça principal (esboço abaixo) uma cobertura de forma triangular, com vértices em colunas verticais, erguidas exatamente nos focos das cônicas $4y - x^2 - 8 = 0$ e $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$. Sabendo que a região a ser coberta é plano e horizontal, calcule a área dessa região.

Resp. 15



Hipérbole

Hipérbole é o conjunto dos pontos de um plano, cuja diferença a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) desse plano é uma constante positiva e menor que a distância entre os focos.

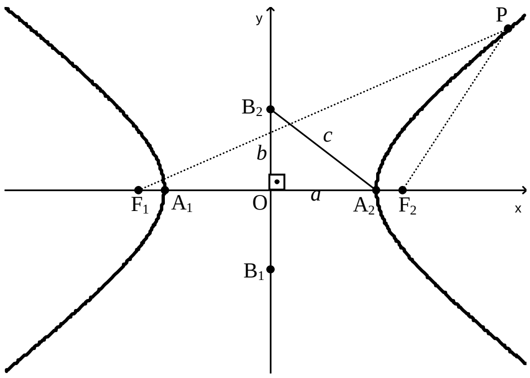


$$\left|\overline{P_1F_1} - \overline{P_1F_2}\right| = 2a$$

$$\overline{F_1F_2} = 2c$$

$$2a < 2c$$

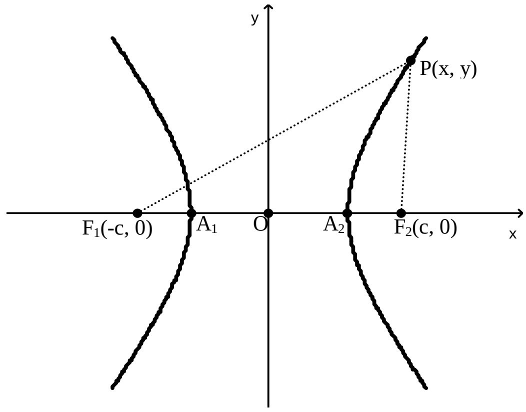
Na hipérbole abaixo destacamos:



- Os pontos fixos F_1 e F_2 são os **focos** da hipérbole.
- O ponto O, ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, é o **centro** da hipérbole.
- A distância de F_1 a F_2 ($\overline{F_1F_2}$ = 2c) chama-se **distância focal**.
- Os pontos A_1 e A_2 são chamados vértices da hipérbole.
- O segmento $\overline{A_1A_2}$ = 2a é o **eixo real** ou **transverso** da hipérbole.
- O segmento $\overline{B_1B_2}$ = 2b é o **eixo imaginário** ou **conjugado** da hipérbole.
- A razão $e = \frac{c}{a}$, em que e>1, pois a<c é denominada **excentricidade** da hipérbole.
- Usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo B_1OA_2, temos $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$.

Equações da hipérbole

1º caso: Centro na origem e eixo real sobre o eixo x, temos:



Para um ponto P(x, y) da hipérbole, temos:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$$

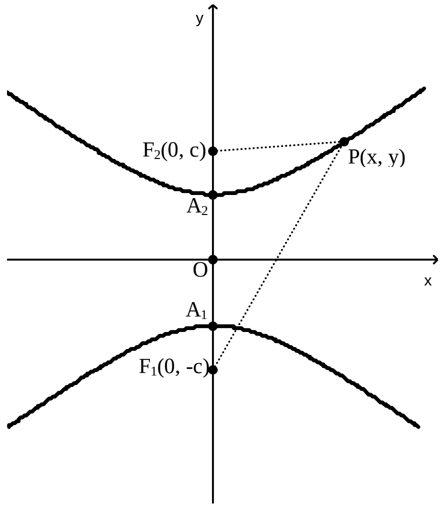
$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado e efetuando todos os cálculos necessários, temos:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

2º caso: Centro na origem e eixo real sobre o eixo y, temos:

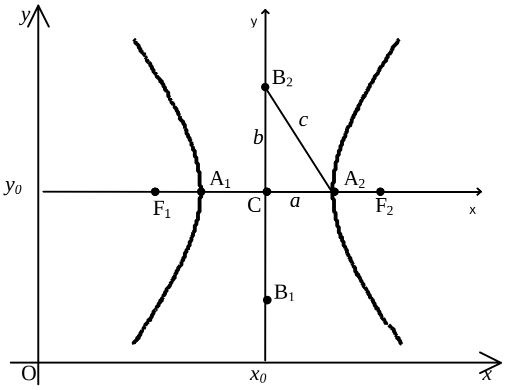


Procedendo do mesmo modo, obtemos a equação:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Equações da hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados

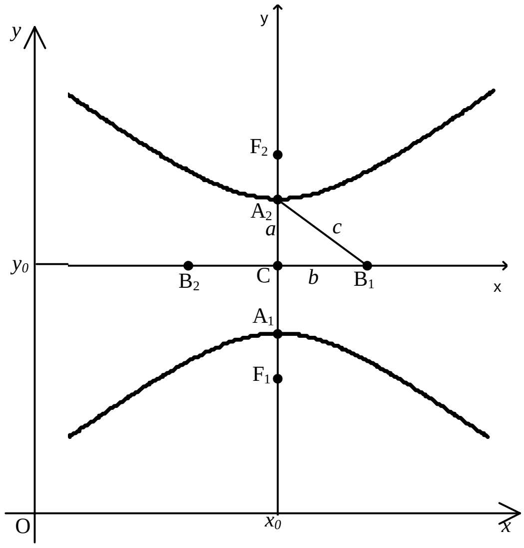
1º caso: Centro no ponto C(x_0, y_0) e eixo real paralelo ao eixo x, temos:



Neste caso, a equação da hipérbole é dada por:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

2º caso: Centro no ponto C(x_0, y_0) e eixo real paralelo ao eixo y, temos:



Neste caso, a equação da hipérbole é dada por:

$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1}$$

Exercícios de fixação

44) Determinar a equação da hipérbole de focos $F_1(5, 0)$ e $F_2(-5, 0)$ e de vértices $V_1(3, 0)$ e $V_2(-3, 0)$

Resp. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

45) Determinar a equação da hipérbole de focos $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$, sabendo que o eixo real mede 6 unidades.

Resp. $\frac{y}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

46) Determinar a medida do eixo real, do eixo imaginário e a distância focal da hipérbole de equação $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Resp. 2a = 8, 2b = 6 e 2c =10

47) Achar a equação da hipérbole de centro (4, -2) e eixo real paralelo ao eixo x, sabendo que 2a = 10 e 2b = 4.

Resp. $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

48) Achar as coordenadas do centro, do vértice e do foco da hipérbole $y^2 - x^2 + 2y - 2x - 1 = 0$.

Resp. $F_1(-1, -1+\sqrt{2})$ e $F_2(-1, -1-\sqrt{2})$; $V_1(-1, 0)$ e $V_2(-1, -2)$

49) Determinar a equação da hipérbole de focos $F_1(0, 6)$ e $F_2(0, -6)$, sabendo que o eixo imaginário tem 8 unidade de comprimento.

Resp. $\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1$

50) Numa hipérbole a distância focal é 16 e o comprimento do eixo real é 12. Determine a equação da hipérbole, sabendo que os focos pertencem ao eixo das abscissas.

Resp. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1$

51) Determinar a equação da hipérbole de focos $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$, e vértices $V_1(0, 1)$ e $V_2(0, -1)$

Resp. $y^2-\frac{x^2}{15}=1$

52) Os focos de uma hipérbole são $F_1(4, 0)$ e $F_2(-4, 0)$ e o eixo conjugado tem $2\sqrt{3}$ de comprimento. Determine a equação da hipérbole.

Resp. $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{3}=1$

53) Os focos de uma hipérbole são $F_1(\sqrt{13}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{13}, 0)$ e passa pelo ponto P(1, 0). Determine a equação da hipérbole.

Resp. $x^2 - \frac{y^2}{12} = 1$

54) Determine as coordenadas dos focos, dos vértices e a excentricidade da hipérbole de equação $4x^2 - 25y^2 = 100$.

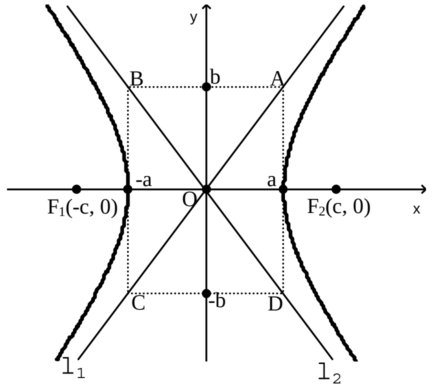
Resp. $F_1(\sqrt{29}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{29}, 0)$; $V_1(5, 0)$ e $V_2(-5, 0)$; $e = \frac{\sqrt{29}}{5}$

55) Determine a equação da hipérbole de focos $F_1(5, 0)$ e $F_2(-5, 0)$ e de excentricidade $e = 5/3$.

Resp. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Assíntotas da hipérbole

Na hipérbole da figura a seguir temos um retângulo ABCD cujos lados medem 2a e 2b.



As retas e l_2, que contém as diagonais desse triângulo de lados 2a e 2b, são chamadas de *assíntotas da hipérbole*.

As equações das assíntotas são:

- Eixo real horizontal e centro O(0, 0): assíntotas passam pela origem e têm equações

$$(l_1)\ y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad (l_2)\ y = \frac{-b}{a}x$$

- Eixo real vertical e centro O(0, 0): assíntotas passam pela origem e têm equações

$$(l_1)\ y = \frac{a}{b}x \quad \text{e} \quad (l_2)\ y = \frac{-a}{b}x$$

- Eixo real horizontal e centro $C(x_0, y_0)$: assíntotas têm equações

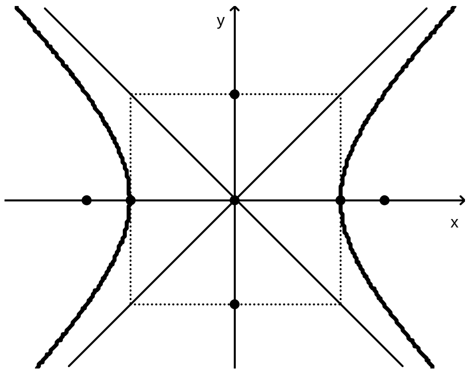
(l_1) $(y - y_0) = \frac{b}{a}(x - x_0)$ e (l_2) $(y - y_0) = \frac{-b}{a}(x - x_0)$

- Eixo real vertical e centro $C(x_0, y_0)$: assíntotas têm equações

(l_1) $(y - y_0) = \frac{a}{b}(x - x_0)$ e (l_2) $(y - y_0) = \frac{-a}{b}(x - x_0)$

Hipérbole eqüilátera

Uma hipérbole é chamada eqüilátera quando os semi-eixos, real e imaginários são iguais. Ou seja, quando a = b, conforme figura a seguir.



Exercícios de fixação

56) Determine a excentricidade e a equação das assíntotas da hipérbole $4x^2 - y^2 = 16$

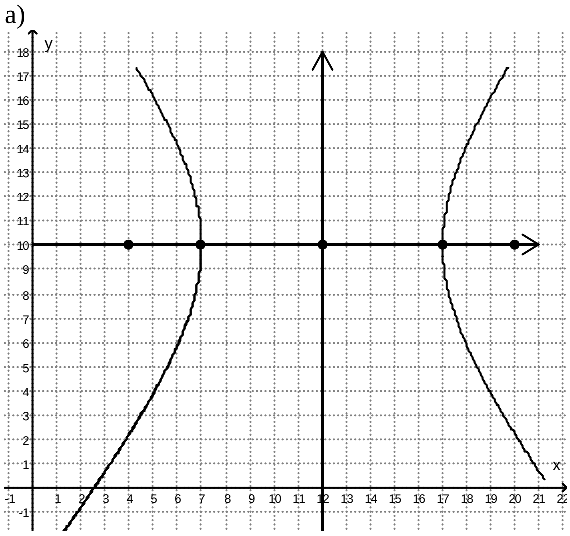
Resp. $e = \sqrt{5}$ e $y = \pm 2x$

57) Determinar a excentricidade, as assíntotas e a equação da hipérbole de eixo real horizontal medindo 10, centro na origem e foco $F_1(-7, 0)$

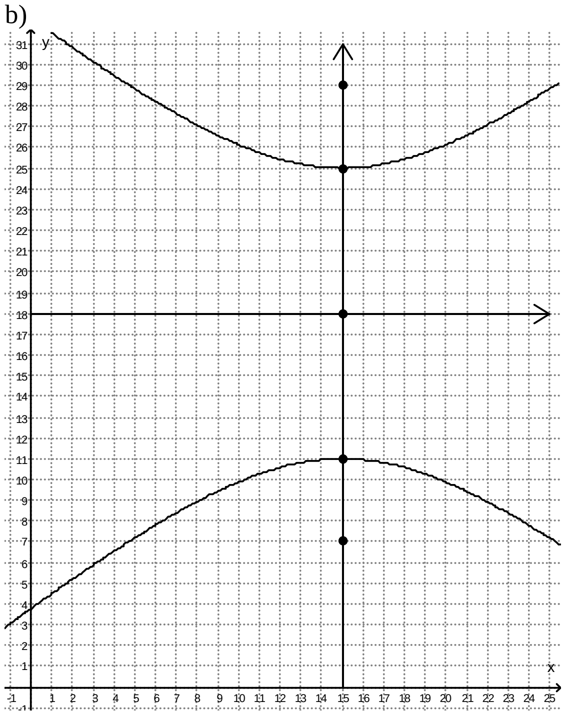
Resp. $e = \frac{7}{5}$; $y = \pm \frac{2\sqrt{6}}{5}x$; $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$

58) Determine a equação de cada hipérbole representa a seguir.

a)



b)



Resp. a) $\frac{(x-12)^2}{25}-\frac{(y-10)^2}{39}=1$ b) $\frac{(y-18)^2}{49}-\frac{(x-15)^2}{72}=1$

59) Dada a hipérbole $5x^2 - 4y^2 - 20x - 8y - 108 = 0$, determinar:

a) o centro

b) o eixo real

c) os vértices

d) o eixo imaginário

e) os focos

f) o gráfico da hipérbole

Resp. a)(2, -10) b)4 c) $V_1(0, -1)$ e $V_2(4, -1)$ d) $2\sqrt{5}$ e) $F_1(-1, -1)$ e $F_2(5, -1)$

60) Determine as equações das assíntotas das seguintes hipérboles.

a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{64}=1$

c) $4x^2-8y^2=1$

Resp. a) $y=\pm\frac{3x}{4}$ b) $y=\pm\frac{8x}{7}$ c) $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

61) Seja a hipérbole de equação $4y^2 - x^2 = 16$. Determine a equação da circunferência cujo centro coincide com o centro da hipérbole e que passa pelos focos da hipérbole.

Resp. $x^2 + y^2 = 20$

62) (UFPB) Qual a distância focal na hipérbole $18x^2 - 7y^2 - 36x - 108 = 0$?

Resp. 10

63) Ache a equação da hipérbole de centro (-3, 4) e eixo real paralelo ao eixo y, nos seguintes casos:

a) 2a = 20 e 2b = 26

b) 2b = 6 e 2c = 12

Resp. a) $\frac{(x-12)^2}{25}-\frac{(y-10)^2}{39}=1$ b) $\frac{(y-18)^2}{49}-\frac{(x-15)^2}{72}=1$

64) Calcule a área do triângulo cujos vértices são a origem e as intersecções da hipérbole $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{2}=1$ com a parábola $y = x^2$.

Resp. $x^2 + y^2 = 20$

BIBLIOGRAFIA:

GIOBVANNI, José Ruy e BONJORNO, José Roberto. Matemática: uma nova abordagem, vol. 3, ed. 2. FTD, São Paulo, 2001.

KIYUKAWA, Rokusaburo e SMOLE, Kátia Cristina Stocco. Matemática, vol. 3. Saraiva, São Paulo, 1999.

GENTIL, Marcondes e GRECO, Sérgio. Matemática para o 2º grau, vol. 3: geometria analítica, números complexos, polinômios, limites, derivadas e integrais. Ática, São Paulo, 1996.