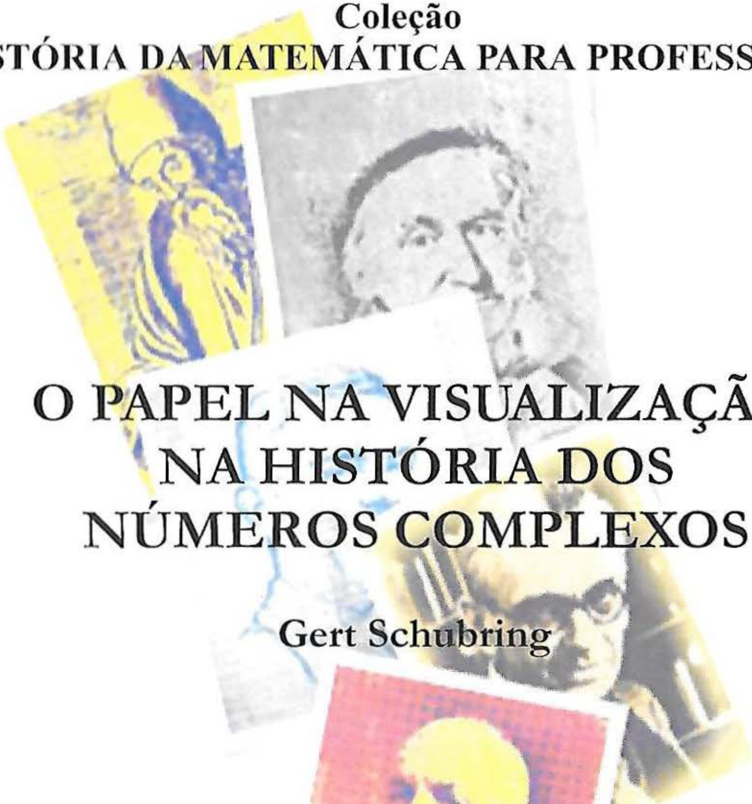
Coleção
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES



O PAPEL NA VISUALIZAÇÃO NA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Gert Schubring

Fábio Maia BERTATO
Itala Maria Loffredo D'OTTAVIANO
(Orgs.)

Sociedade Brasileira de
História da Matemática
SBHMat

COLEÇÃO

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

O PAPEL DA VISUALIZAÇÃO NA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Sociedade Brasileira de
História da Matemática

SBHMat

SOCIEDADE BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA
Caixa postal 1631
CEP 59.078-970
Campus Universitário - Natal - RN
sbhmat@ccet.ufrn.br

COLEÇÃO

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

O PAPEL DA VISUALIZAÇÃO NA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Gert Schubring

Março – 2013

COLEÇÃO HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

Título: O papel da visualização na história dos números complexos
Autores: Gert Schubring
Edição: SBHMat
Publicação: Março/2013
Organizadores: Fábio M. Bertato (UNICAMP); Itala M. L. D'Ottaviano (UNICAMP)
Apoio: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência – UNICAMP

Ficha Catalográfica elaborada pela biblioteca do CLE

Schubring, Gert
Sc78p O papel da visualização na historia dos números complexos / Gert Schubring. - Campinas : SBHMAT, 2013.
75p. - (Coleção História da matemática para professores)

ISBN 978-85-89097-64-2

1. Matemática-História. I. Titulo. II. Série.

CDD 19° 510.9

Apresentação

Com grande satisfação, apresentamos a publicação dos livros que compõem a *Coleção História da Matemática para Professores*, correspondentes aos Minicursos ministrados no *X Seminário Nacional de História da Matemática* (X SNHM). Tal coleção se deve à iniciativa da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), que tem organizado a publicação, em forma de livros, do material associado aos Minicursos oferecidos aos participantes dos Seminários Nacionais.

A Coleção, anteriormente denominada *Série Textos de História da Matemática*, surgiu no *IV Seminário Nacional de História da Matemática*, realizado em Natal – RN, em 2001.

Com o objetivo de enriquecer o desenvolvimento da pesquisa em História da Matemática no Brasil, bem como auxiliar na formação continuada dos professores e pesquisadores na área, a Coleção História da Matemática para Professores apresenta resultados de pesquisas científicas atuais, de forma didática e acessível a um público bastante amplo.

Os textos dos Minicursos que compõem a *Coleção*, produzidos para o X SNHM e que abrangem tópicos diversos da História da Matemática, são:

A MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA CENTRADA EM PROBLEMAS COM MOTIVAÇÃO NA HISTÓRIA.
Severino Barros de Melo

INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DE EULER PARA ACHAR NÚMEROS AMIGÁVEIS.
John Fossa & Sarah Leôncio

ANÁLISE MATEMÁTICA NO SÉCULO XIX.
Rosa Baroni & Silvio Otero-Garcia

UM PASSEIO HISTÓRICO PELO INÍCIO DA TEORIA DAS PROBABILIDADES.
Angelica Raiz Calabria & Mariana Feiteiro Cavalari

UMA HISTÓRIA CONCISA DA LÓGICA PARACONSISTENTE.
Evandro Luís Gomes & Itala Maria Loffredo D'Ottaviano

ALÉM DO MARQUÊS: A "REGRA DE L'HOSPITAL" NO CONTEXTO DA HISTÓRIA DA ANÁLISE.
Fernando Q. Gouvêa

O PAPEL DA VISUALIZAÇÃO NA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS.
Gert Schubring

Esperamos que tal material contribua ainda mais para o já crescente movimento de pesquisa na área de História da Matemática, bem como possibilite novos *insights* para o aprimoramento da prática científica e pedagógica de seus leitores.

Fábio Maia Bertato
Coordenador Local do X SNHM

Itala Maria Loffredo D'Ottaviano
Coordenadora Científica do X SNHM

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

Os números complexos constituem um conceito revelador para desenvolvimentos na história da matemática. Embora eles tenham se tornado conhecidos desde as pesquisas na álgebra de matemáticos italianos no século XVI, e embora eles tenham sido utilizados em seguida não somente na álgebra, mas também na análise, eles não foram aceitos como conceitos matemáticos legítimos durante vários séculos. Sua designação como números ou quantidades "imaginários" ou "impossíveis" documenta este papel ambíguo. Descartes representa uma voz característica para o século XVII:

> "les racines [...] ne sont toujours reelles; mais quelquefois seulement imaginaires; c'est à dire qu'on peut tousiours en imaginer autant que iay dit en chasque Equation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde a celles qu'on imagine" (Descartes 1637, 38).

E Euler, que utilizou números complexos no século seguinte de maneira extensa, comentou:

> "And since all numbers which it is possible to conceive are either greater or less than 0, or are 0 itself, it is evident that we cannot rank the square root of a negative number amongst possible numbers and we must there fore say that it is an impossible quantity. In this manner we are led to the idea of numbers which from their nature are impossible; and therefore they are usually called imaginary quantities, because they exist merely in our imagination [...]. But notwithstanding this, these numbers present themselves to the mind; they exist in our imagination, and we still have a sufficient idea of them" (Euler, Algebra 1770, §§ 143, 145; from the English translation 1840).

Foi por meio de abordagens de visualização, por conceitos de geometria que os números "imaginários" ganharam os direitos de "cidadania" na área da matemática – nas palavras de Gauß. Os textos aqui selecionados analisam e documentam este processo.

O primeiro texto, *Argand and the early Work on Graphical Representation: New Sources and Interpretations*, é a versão escrita da palestra com este mesmo título, ministrada no International Symposium sobre Caspar Wessel, organizado por Jesper Lützen na Royal Danish Academy of Sciences and Letters, de 11 a 15 de agosto de 1998. Nos Anais deste evento foi publicada sua versão revisada (ver a bibliografia).

O segundo texto, *A biografia de Argand – a historiografia e as fonts*, é a reprodução do texto publicado nos *Anais do 13º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia*, org.s Márcia Regina Barros da Silva, Thomás A. S. Haddad (São Paulo: EACH/USP). [Documento eletrônico. Modo de acesso ao texto: http://www.sbhc.org.br/], 1-9.

O terceiro texto é uma reprodução de uma página do texto de Karsten, analisado no primeiro texto desta coletânea, e serve como desafio para transcrever textos antigos alemães em fonte gótica.

O quarto texto é a primeira tradução do famoso artigo de Gauß de 1831 proclamando e explicando a aceitação dos números imaginários como números complexos, do alemão para o português.

O quinto texto apresenta um comentário e uma análise de Gerard Grimberg sobre este último de importância matemática e epistemológica. Neste texto e na tradução houve cooperação com Gert Schubring.

O sexto e último texto é uma tradução, também por Gerard Grimberg, de um documento importante de Bernhard Riemann sobre funções de uma grandeza variável complexa que documenta o uso pertinente da conceitualização de Gauß sobre números complexos

Capítulo 2

Argand and the early Work on Graphical Representation: New Sources and Interpretations

Evidently, at this Wessel Symposium, there is no need for further analysing in detail Wessel's conceptions. I need only to mention those of his basic concepts, which are necessary for establishing the connections with the ongoing discussion in the mathematical community at large.Wessel did not bother of the epistemological problems associated with the notion of negative quantities in the French discussion - rather, he extracted from it two basic notions and rearranged them: the notion of *être numérique* and the notion of *être spécifique* or *qualité* of a given quantity. Whereas these two notions had been treated as separate concepts in the French discussions of the 18th century, Wessel forged them together - renaming them as *segment de droites* and *direction de segment.* His innovative procedure was to enlarge the notion of direction. He considered the concept of simply opposed directions like positive and negative directions as quite common and envisaged to remain no longer restricted to directions within the same line but to enlarge it to directions in the entire plane and even in the sphere. As Wessel explains:

> "n'en bornons pas [...] l'usage aux segments de droite de même sense ou de sens opposé, mais étendons-en [...] à une infinité d'autres cas" (Wessel 1897, 3),

Starting from this approach, Wessel proposed, for instance, as one of his generalizations the *segment perpendiculaire.* My intention today is, as already mentioned, not to analyze the application of these generalizations but to discuss the point raised by Valentiner, one of the editors of the French version in 1897. Wessel expressed his astonishment about the innovations achieved by outsiders in these words:

> "il est étonnant qu' un homme puisse composer un ouvrage aussi remarquable que celui qui nous occupe, après avoir dépassé la cinquantaine, sans avoir jamais, ni avant ni après, produit aucune oeuvre scientifique" (Valentiner 1897, V).

Almost the same remark can be made about most of the inventors of the graphical representation of complex numbers before Gauß's publication of 1831. In fact, historiographers of mathematics use to wonder about the simultaneousness of these inventors around 1800 and about their common pattern to be marginal to the mathematical communities, to be non-professionals and amateurs.My intention today is to contribute to somewhat understand this mystery. Two authors who will provide some elements for enlightening the issue are Argand and Buée.

1 Argand

Argand, the author of the booklet:

Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques

uses to be identified as Jean Robert Argand, living from 1768 to 1822 and is reported to have been a bookkeeper in Paris (teneur de livres). As you will see, these few known data seem to be doubtful.Argand's text, allegedly published in 1806, did not remain unknown like Wessel's but became discussed since 1813/14 and Argand himself participated in the discussions. These debates took place publicly: in the

Annales de mathématiques pures et appliquées,

published by J. D. Gergonne at Montpellier, in the first journal specialised in mathematics. Yet, the public of this journal was a restricted one - the dominant Paris mathematicians did not participate in it.Analogously to Wessel, Argand begins with reflections on opposed quantities and uses the analogous conceptual differentiation of *rapport numérique* and *rapport de direction.* He goes on to ask if one can generalize these concepts to imaginary quantities, given that one cannot assign them a geometrical representation on one line as it is the case for two opposed, so-called positive and negative directions. Thus, he looks for a geometrical construction in the same plane. He proposes such a construction in the plane by interpreting the proportion

$$1 : x = x : -1$$

as yielding the mean proportional. By this approach, Argand transformed the proportion 1 : -1 = -1 : 1 - up until his time the touchstone for each approach to understand negative numbers - into the cornerstone for a new theory. Argand is therefore a nice illustration for Lakatos's model of conceptual development: former monsters become the definitory fundament for innovations. Having identified the notions of *grandeur absolue* and of *direction* to constitute his conceptual basis, he searches whether it should not be possible to combine them in such a way than one can assign a place to the imaginary quantities within the conceptual field of positive and negative quantities ("une place dans l'echelle des quantités positives ou negatives" (Argand 1874, 6).) His answer was to exploit the basic proportion in a geometric way:

> "En y réfléchissant, il a paru qu'on parviendrait à ce but si l'on pouvait trouver un genre de grandeurs auquel pût s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptée deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle, que la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci est à la direction négative" (ibid.).

In expanding this approach, Argand did not restrict himself to the perpendicular lines, to imaginary quantities hence, rather he constructed geometrically all directions in a given plane and achieved, thus, to construct complex numbers as well. Argand gave as general algebraic form for complex numbers:

$$\pm a \pm b\sqrt{-1} \text{ (ibid., 12)},$$

and showed by the following figure the corresponding lines with their direction:

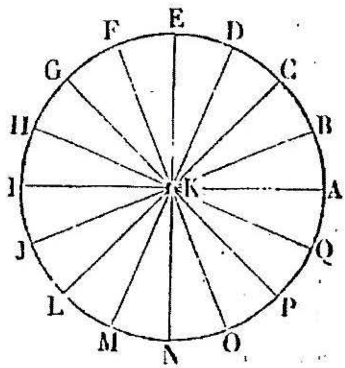


Figure 1: Argand 1874, 7

Leading mathematicians seemed - during this period - not to be really interested in these foundational efforts. A revealing example for this lack of interest is presented by Adrien Marie **Legendre** (1752-1833). As is well known, Argand's ideas attracted for the first time some public interest when Jacques Frédéric **Français** (1775-1833), an Alsatian mathematician, published in 1813 an article in Gergonne's *Annales* where he referred to the ideas of an unknown author:

> "Je dois [...] à la justice de déclarer que le fond de ces idées nouvelles ne m'appartient pas. Je l'ai trouvé dans une lettre de M. Legendre à feu mon frère [François Joseph Français, 1768-1810], dans laquelle ce grand géomètre lui fait part (comme d'une chose qui lui a été communiquée, et comme objet de pure curiosité) du fond de mes définitions 2^{e} et 3^{e}, de mon théorème I^{er}, du corollaire 3^{e} de mon théorème II^{e} [...]. Je désire que la publicité que je donne aux résultats auxquels je suis parvenu puisse déterminer le premier auteur de ces idées à se faire connaitre, et à mettre au jour le travail qu'il a fait lui-même sur ce sujet" (Français 1813a, 71).

As is well known, too, this appeal induced Argand to enter into the debate and to show that he was the author.I have been lucky enough to detect this letter from Legendre to Français the elder brother. It is a letter dated 2 November 1806; in its final part, Legendre reports to Français that an unknown person had addressed him with a *mémoire*. Legendre showed himself astonished about the quality of this paper and of the missing ambition of its author.

> "Il y a des gens qui cultivent les sciences avec assez du succès sans être connus et sans courir pour la renommée. Dernièrement j'ai vu un jeune homme qui m'a engagé à lire un travail qu'il avait fait sur les imaginaires; il ne m'expliquait pas très bien son objet, mais il me faisait entendre qu'il regardoit les quantités dites imaginaires comme aussi réelles que les autres, et qu'il les representait par des lignes. J'ai témoigné d'abord bien des doutes à l'auteur, cependant j'ai promis de lire son mémoire. J'y ai trouvé contre mon attente, des idées assez originales, fort bien présentées, appuyées de connaissances de calcul assez profondes, et enfin qui conduisent à des conséquences fort exactes telles que la plupart des formules de trigonométrie, le théorème de Cote, etc. Voici une esquisse de ce travail qui vous intéressera peut-être et qui vous fera juger du reste."

In fact, Legendre first explained Argand's approach for the geometric construction of imaginary and complex quantities and then went on to outline two of Argand's applications: - the trigonometric formulas like $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, - the so-called Cotes's theorem: $\cos na + \sqrt{-1}\sin na = (\cos a + \sqrt{-1}\sin a)^n$. Legendre declared himself not to be interested in this as a research subject but appealed to Français to further develop these ideas:

> "Je ne rend ici qu'une petite partie de ses idées, mais vous y suppléerez et peut-être vous trouverez comme moi qu'elles sont assez singulières pour mériter attention. Au reste je vous les abandonne simplement comme objet de curiosité et je ne me chargerois pas de les défendre."

It seems that without his letter from Legendre to Français, Argand's paper would neither have been discussed by contemporary mathema-ticians nor would it ever have become publicly known. In fact, there is no proof that this paper was published in 1806. The only indication of this date is given by its printing on the title page but this is not decisive, for three reasons:

- The booklet has not been deposited at the *Dépot Legal* at Paris as prescribed by the law for published books, as my research at this office has shown.
- All my searches did not effect in identifying an original version in a French or a foreign library. All the copies in libraries are either the 1874 second

version published by Hoüel or later reprints. And the 1874 edition is made on the basis of a copy, which Argand had sent to Gergonne.

As I have learnt recently from Luigi Pepe, there is, however, at least a second copy of the first printing - it is in the property of Jean-Luc Verley (Paris), who - as a bibliophile mathematician - possesses an impressing collection of old books. Curiously enough, the inspection of this copy proved that it belonged to Gergonne, too!

- Legendre's letter gives a supplementary argument: Legendre wouldn't have communicated Argand's ideas to Français and invited him to pursue and further develop them if the paper would already have been published or if a publication would have been imminent. Moreover, according to the rules of the Paris *Institut*, only not yet published manuscripts were allowed to be fully reported upon in this Academy - so, if ever Argand should have wanted to have a chance for such a report, his paper had to remain a manuscript. In fact, Argand himself mentioned in 1813 that Legendre examined, in 1806, "mon manuscrit" (Argand 1813b, 133).

The only thing which one can say with certainty is that the paper was **printed** somewhere between 1806 and 1813, without an indication of the author; it was, however, only privately distributed and not **published**. Even in 1813, it did not attain the character of a real publication: The only known copies all belonged to Gergonne (see above). Although Argand had offered, in his 1813 paper in the *Annales*, to sell copies of his *Essai* (Argand 1813b, 133), apparently no other contemporary mathematician contacted Argand or ordered the booklet. Even Français, most interested in the text, did not address Argand and rather preferred to borrow a copy from Gergonne (cf. Français 1814b, 222). It was only due to Hankel's revival of interest in Argand's original paper (Hankel 1867, 82) that Hoüel became instigated to search for it and to reprint it.

Besides the extraordinary history of Argand's *mémoire*, his biography offers at least as many questions. In fact, Legendre's letter has caused me to question all the - actually, quite scarce - biographical information available on Argand. I began to wonder that Legendre calls the paper's author "un jeune homme". Legendre was 54 years old in 1806 and the Argand of the standard sources already 38 years old. Can one believe that Legendre would, at an age of 54 years, call a man of 38 years a "young man"? This is at least doubtful.

This the more, as Legendre's first phrase seems to imply that he rated Argand as capable of a scientific career if he would have been interested in it.

Almost all the available biographical information on Argand is due to Hoüel who undertook some research for his 1874 edition. All this information is based on Hoüels assumption that Argand originated from Geneva (Hoüel 1874, ix). Hoüel gave no justification for this claim, and one can only guess that he came to this assumption by induction: Ami Argand (1750-1803), an inventor active in physics and chemistry, known for the construction of a lamp, who had lived a certain time at Paris, was in fact born in Geneva. This hypothesis led Hoüel to address colleagues at Geneva and to ask them for biographical research. They came up with the information on birth date, first names and profession of a certain Jean-Robert Argand (ibid., xv-xvi). Although they added a cautionary remark about the identity ("C'est très probablement l'auteur du Mémoire de Mathématiques en question", ibid.), their information has been taken up to now as pure truth, in all related historical publications and in all biographical dictionaries. The article on Argand in the *Dictionary of Scientific Biography*, for instance, shows no hesitations or doubts and even reports that the "verification of the dates of his birth and death are given by H. Fehr in the *Intermédiaire des mathématiciens*" in 1902. An inspection of this source shows, however, that Fehr had started from the conviction of correctness of Hoüel's hypothesis and just checked in the "Archives de l'État de Genève" the death date of that Jean-Robert Argand born in Geneva.

Of which objective information about Argand do we dispose? Unfortunately, we have not even primary evidence of Argand's first name: his letters as printed by Gergonne only show his last name. Also the tables of Gergonne's Annales quote him only with his last name. The only objective information is his address in 1813 in Paris. Unfortunately again, caused by the fights of the *communards* in Paris 1870/71, the main part of the registers of the administration of Paris is lost and it is therefore impossible to infer from an address to the citizens living there, and the death registers are burnt, too. Since the historians of the nineteenth century have missed to do adequate biographical research, it will be quite complicated to obtain now better information. One can, at least, infer from Legendre's letter that Argand was unknown, in 1806, in the scientific community. Moreover, it is clear from his immediate reactions in 1813 and 1814 that he had easy and regular access to scientific journals. Apart from this we can only state - in terms rather of medieval history - that Argand "flourished" in 1806, 1813, and 1814.

It is useful to try a reconstruction of the events around Argand's *Éssai*. A fairly probable one is the following: In the autumn of 1806, Legendre was addressed by Argand who tried to outline the main results in his manuscript to him in a direct conversation. Legendre showed his scepticism about the approach and its applications. Upon leaving, Argand urged Legendre to read his manuscript. Legendre had not retained the name of this man and assumed that the manuscript would show the name of its author. When Argand had left, Legendre realized that the paper did indicate neither the address nor the name of the author. Upon reading the *Éssai*, Legendre remarked its quality; he waited for a new visit of its author, but he did not show up again. In order to end his own occupation with these conceptions he wrote that report to Français in the letter of 2 November 1806. Since Legendre firmly asked to not be bothered with discussions on this paper, neither the elder nor later the younger Français asked him about the paper or its author. On the other hand, Argand - apparently a shy man - abstained from publishing his paper, due to Legendre's uninterested and sceptical reaction. Only the quite indirect reception of his ideas via the brothers Français has induced Argand to organize a late printing where he succeeded that the date of its composition was put on the title page.

2 Adrien-Quentin Buée

The third author productive around the same period is Adrien-Quentin **Buée**, a French Catholic Priest - a "prètre refractaire" as the French called during the Revolution those priests who refused to give their oath on the Constitution. Buée flew in 1792 to England and returned to France in 1813.

His paper

Mémoire sur les quantités imaginaires

was read in 1805 at the Royal Society and was published in 1806.

Buée's paper is remarkable in its systematic evaluation of the foregoing French discussion on the nature of negative and imaginary quantities: he achieves to establish a conceptual connection between the two basic concepts of length or absolute value and of direction which had been separated so systematically in France over the 18th century.

Buée's achievements are likewise important for the conceptual development of the negative numbers and for the graphical representation of the complex members.

The important step in Buée's approach is that he clearly distinguishes between the two different meanings of the signs plus and minus: to be

- signs of operations, and
- signs of qualities of the quantities themselves:

> "Des Signes " + " et " - "
>
> Ces signes ont des significations opposées.Considérés comme signes d'opérations arithmétiques, " + " et " - " sont les signes, l'un de l'addition, l'autre de la soustraction.Considérés comme signes d'opérations géométriques, ils indiquent des directions opposées" (Buée 1806, 23).

Buée interpreted this sign of quality in geometrical terms, as *direction* , while he attributed *length* to an arithmetical meaning. His important step was not restricted, however, to this conceptual clarity of distinguishing between what he called *arithmetical operation* and *geometrical operation*, rather his decisive step was to propose to *unite* both operations:

> "Lors donc qu'on réunit ces deux opérations, on fait réellement une opération arithmético-géométrique",

Buée applied immediately his approach to the investigation of imaginary quantities and expanded hence the applicability of the novel arithmetico-geometrical operations:

> "Je mets en titre, Du signe $\sqrt{-1}$, et non De la quantité ou De l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$; parceque $\sqrt{-1}$ est un signe particulier joint à l'unité réelle 1, et non une quantité particulière. C'est un nouvel adjectif joint au substantif ordinaire 1, et non un nouveau substantif" (ibid., 27)."Ainsi $\sqrt{-1}$, est le signe de la PERPENDICULARITÉ, dont la propriété caractéristique est, que tous

> les points de la perpendiculaire sont également éloignés de points placés à égales distances, de part et d'autre de son pié. Le signe $\sqrt{-1}$, exprime tout cela, et il est le seul qui l'exprime" (ibid., 28).

This novel approach where the perpendicular direction is treated in a manner analogous to the two traditional opposed directions on a line, is well explained by Buée's following figure:

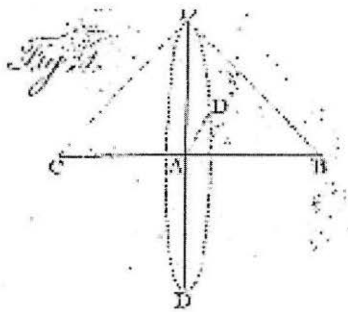


Figure 2 (Buée 1806, planche annexée)

Like Wessel and Argand, Buée was no professional mathematician. As a Catholic priest exiled in Britain, he used to publish political-religious tracts. Except his paper on the imaginaries, his sole other scientific paper is on physics. And like Valentiner did in the case of Wessel, one can wonder how an author of political-religious tracts could arrive at such a level of *clarté* regarding the foundations of mathematics.

In order to further complicate the matter one can add that there was even a fourth inventor, active in babout the same period: Henri-Dominique **Truel**.

His existence and activity is asserted by Cauchy, who attributed to him the priority of the discovery of the graphical representation. Truel who is not known otherwise was called "un savant modeste" by Cauchy who reported that Truel had found the greatest part of Buée's and Argand's results by 1786 but that he had concealed them in his manuscripts. Only by 1810, Truel communicated his research to a marine engineer Augustin Normand at Le Havre, and it seems that Cauchy learned via Normand - during his engineer's service at Cherbourg - of Truel's work and of graphical representation in particular (Cauchy 1847/1938, 175).

3 François Daviet de Foncenex

Fortunately enough, Buée has given us an indication as regards the source of his innovation. I have to avow that I remarked this hint quite late since this is a remark at the end of his paper; maybe other authors missed it entirely since it is mentioned nowhere in the literature. This indication is given as a "Postscriptum":

> "Since I wrote this mémoire, I read - in the first volume of the Turin Academy Transactions a paper by M. Foncenex with the title: Refléxions sur les Quantités Imaginaires where one finds the following paragraph" (Buée 1806, 83; my translation, G. S.).

He quoted this paragraph 6 completely. Due its importance for our investigation, I will quote it completely, too:

> "6. Si l'on réflechit sur la nature des racines imaginaires, qui comme on sait impliquent contradiction entre les données, on concevra évidemment qu'elles ne doivent point avoir de construction Géomètrique possible, puisqu'il n'est point de maniére de les considérer, qui lève la contradiction qui se trouve entres les données immuables par elles mêmes.Cependant pour conserver une certaine analogie avec les quantités négatives, un Auteur dont nous avons un cours d'algébre d'ailleurs fort estimable a prétendu les dévoir prendre sur une ligne perpendiculaire à celle où l'on les avoit supposé, si par exemple (pl. I. Fig. I) on devoit couper la ligne AB = 2a de façon que le rectangle des parties x × (2a-x), fut égal à quantité 2a2 on trouveroit $x = a \pm \sqrt{(-a^2)}$, pour trouver donc cette valeur de x, qu'on prenne sur la ligne AB, la partie AC = a partie réelle de la valeur de x, & sur la perpendiculaire ED les CE, CD aussi = a, on aura les points D, E qui resolvent le problême en ce que AD × DB, ou AE × EB = 2a2, mais puisque les points E, & D sont pris hors de la ligne AB, & qu'une infinité d'autres points pris de même, auroient aussi une propriété semblable, il est visible, que si cette construction ne nous induit pas en erreur, elle ne nous fait absolument rien connoître, c'est cependant là un des cas ou elle pourroit paroître plus spécieuse, car le plus souvent on ne voit absolument pas comment le point trouvé pourroit résoudre la question, quelques changemens qu'on se permit dans l'énoncé du problême.Les racines imaginaires n'admettent donc pas une construction géomètrique, & on ne peut en tirer aucun avantage dans la résolution des problèmes: on devroit par conséquent s'attacher à les écarter autant qu'il est possible des équations finales, puisque prises dans quel sens que

ce soit, elles ne peuvent pas résoudre la question, comme les racines négatives, dont toute la contradiction consiste dans leur maniére d'être à l' égard des positives" (Foncenex, 1759, 122-123).

Who was this Foncenex? François Daviet de Foncenex (1733/4 - 1799) was an officer, living at Turin, interested in the sciences and in engineering. He has published - besides the paper on imaginaries - several papers on physics and technology. He is said to have been a friend of Lagrange during Lagrange's stay at Turin and one even reports that Foncenex' 1759 paper expressed thoughts of Lagrange.

This 6th paragraph imposes at least three questions:

- an analysis of its mathematical meaning,

- the effects of this part of the paper,

- to identify the algebra textbook mentioned at the beginning of the 6th section.

As regards the analysis of the text, one should note before-hand that it is *not* mentioned in the historiographical literature - not even by Cajori who is the only one to extensively discuss other parts of the *mémoire*.

Looking concretely at the text, one must say that it is ambiguous and even contradictory. This character becomes only visible by considering the figure, which is printed in another part of the volume:

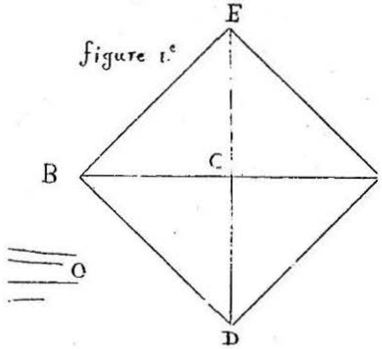


Fig. 4: Foncenex 1759, fig. 1: planche annexée

On the *one* hand, Foncenex clearly shows how one can construct geometrically the imaginary quantities, and visualizes this construction by the means of this figure. In fact, transforming the equation

$$x \times (2a\text{-}x) = 2a^2$$

immediately yields:

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - 2a^2} = a \pm ia\cdot$$

Foncenex assures that the construction does not lead to errors.

On the *other* hand there is the commenting text before and after the constructive part. This comment arises interdiction signs: "off limits!" For instance, in the introductory comment, Foncenex gives an epistemological argument:

> "Evidently, one understands that imaginary roots do not admit a possible geometric construction"

and in the concluding comment:

> "imaginary roots do not, **hence** , admit a geometrical construction, and one cannot infer any advantage in resolving problems by using them: one has therefore to pay careful attention to eliminate them, as fas as it is possible, from the **final** equations" (my emphasis, G. S.).

The mathematical legitimation, which Foncenex gave for his refutation is rather weak: He concedes that the construction is correct but argues that one learns nothing new from it. And he adds that one can construct an infinity of other points with analogous properties.

This analysis of the sixth section already leads to an at least partial answer to the second question: Among the readers of Foncenex' *mémoire*, there certainly were some who became more convinced by the force of the visualization of a geometrical construction and who did not let them become deterred by epistemological interdiction signs. It is probable that one finds, among such readers, in particular marginal figures who as self-tought persons might have been less "permeated" by the dominant epistemology than had been those who became professionally initialized to the mathematical norms.

And one has to know that the readers of Foncenex' *mémoire* were numerous: Foncenex had written this paper for investigating the divergence between d'Alembert and Euler about the admissiblility and the meaning of logarithms of negative quantities (cf. Youschkewitsch, Taton in: Euler 1980). I cannot enter here into a presentation of this yearlong controversy, which reveals highly illuminating epistemological dimensions of basic mathematical concepts and I should just mention that both ended their controversy only by exhaustion but without that one of them would have convinced the other one. This fact, that two famous mathematicans had not been able to reach a consensus about basic concepts, attracted the attention of a great number of people during the second half of the eighteenth and at the beginning of the nienteenth century who tried to develop an own solution. The problem seemed to be accessible by "common sens" and attracted, hence, in particular the interest of amateurs. Almost all persons who worked about the problem stumbled at Foncenex' *mémoire* and read it.

4 John Wallis

I can now pass to the third question: who is the author not named by Foncenex who published an highly estimated algebra textbook where it was proposed to construct imaginary roots on a perpendicular line?

Foncenex's paper made me assume that he had an author of his own time in mind. Consequently, I have consulted a great number of algebra textbooks of his time and of the entire first half of the eighteenth century; I consulted even general textbook series for mathematics since they contain parts on algebra, too. I detected, however, no author who had discussed or allowed such geometrical constructions. My subsequent evaluation of Robin Rider's bibliography of publications on algebra gave no better result (cf. Rider 1982).

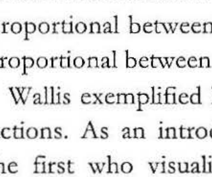
The only solution seems hence to be that Foncenex alluded to John Wallis's algebra treatise, published in 1685 in English and in 1693 in Latin, in a somewhat extended form. This first proposal for a geometric construction is relatively well known so that I will just recall the structurally important points.

On the one hand, Wallis denied there that quantities less than zero can exist. On the other hand, he added that such a supposition is nevertheless not useless and not absurd; in fact, Wallis continued to freely develop the operations with negative quantities (Wallis 1693, 286).

Using this conceptual basis, Wallis was the first to admit a geometrical construction of imaginary roots by interpreting them as mean proportionals: Firstly, he explained the well known fact that $\sqrt{bc}$ is the mean proportional between $+b$ and $+c$, and then he formally extended this interpretation to $\sqrt{bc}$ as mean proportional between $-b$ and $-c$. Eventually, he rather postulated than demonstrated that $\sqrt{-bc}$ can also have the signification of the mean proportional between $+b$ et $-c$. Likewise, he interpreted $\sqrt{-bc}$ as the mean proportional between -b and +c (ibid., 287).

Wallis exemplified his algebraic argumentation by several geometrical constructions. As an introduction to his examples, he even seems to have been the first who visualized the first quadrants of the plane with their respective signs, by a graphic (ibid.). Then, he showed how one can interpret trigonometric lines as the geometric construction of some imaginary quantity. For instance, he showed that - after having choosen lines *a* and *b* in a circle conveniently ($AB=+b$, $BC=+c$) - that the *tangens* can be represented as the mean proportional (ibid., 288):

idem fere conſpicietur, ſi, pro quadratis his ſive rectangulis, ſumantur mediæ proportionales ut horum planorum radices; quarum itaque novus orietur earundem ſitus, prout ſigna ſunt ſimilia aut diſſimilia.



Verbi gratia; Si prorſum ab A ſumatur $AB=+b$, & prorſum adhuc (in eadem recta) $BC=+c$; ſitque $AC\ (=AB+BC=+b+c)$ diameter circuli: erit ſinus rectus, ſeu media proportionalis, $BP=\sqrt{+bc}$.

Sin retrorſum ab A (adeoque cum contrario ſigno) ſumatur $-AB=-b$; &, à B prorſum, $BC=+c$; manente eadem circuli diametro $AC=-AB+BC=-b+c$: erit Tangens, ſeu media proportionalis, $BP=\sqrt{-bc}$.

Adeoque $\sqrt{+bc}$ ſignificabit Sinum rectum, & $\sqrt{-bc}$ Tangentem, ejuſdem (in eodem circulo) Arcus AP; ab eodem P puncto ad eandem AC diametrum, ſaltem productam. Ipſumque (ad centrum O) triangulum OBP rectangulum, quod prius erat rectangulum ad B, fiet (caſu poſteriori) rectangulum ad P.

Ponamus jam (majoris illuſtrationis gratia)

What was the effect of this textbook and in particular the impact of this method for interpretation? I could find no trace of a discussion or a reception by contemporaries of Wallis or of later authors of the first half of the eighteenth century. This silence is the more astonishing since Wallis had expressed this approach in an earlier letter. In a letter of 6 May 1673, addressed to John Collins (1625-1683), acting as secretary of the *Royal Society*, Wallis explained - at the occasion of discussing Cardan's rules for solving higher degree equations - his interpretation of imaginary roots as "mean proportionals". As he reported, he had earlier on had scruples as "too young an algebraist to innovate without example". But since he had become "more venturous" in the meantime, he "had several projects" for "designing geometrically" imaginary roots (Rigaud 1841, 578). It seems that Collins did not object against Wallis's argumentation.

It seems therefore that Wallis was the first one to propose a geometric construction of imaginary quantities but that he remained without an echo and an impact in his time and even later on. Foncenex's discussion means, hence, a new beginning of related reflections.

As concluding element, I will present you a rather unknown but highly instructive example of a direct impact of Foncenex's mémoire - giving a much more sophisticated geometric discussion as the ones discussed up to now.

5 Wenceslaus Karsten

It is a paper, again on the logarithms of negative quantities, by W.J.G. **Karsten** (1732-1787), mathematics professor at one of the smallest German universities, at Bützow, when he published its first version in 1768, and later professor at the second German university, at Halle, when he published its revised version, in 1786.

In this paper, Karsten, too, discussed the possibility and legitimacy of a geometrical construction of imaginary quantities. He asserted, firstly, that an algebraically impossible, i.e. imaginary or complex, quantity does not admit a geometrical construction. He continued nevertheless his reflection, by introducing the differentiation that - if an algebraically impossible quantity is given in the form $b\sqrt{-1}$ - one can construct the possible factor b geometrically. Karsten remarked that it would be sufficient to take in mind that the geometric quantity thus constructed is not identical with the searched quantity (Karsten 1786, 379).

He went on to give, as an example, a particular relation between a hyperbola and a circle. Karsten defined a symmetric hyperbola by the equation $x^2 - y^2 = 1$ and the circle by $x^2 + z^2 = 1$, with $y = z\sqrt{-1}$ (ibid., 380).

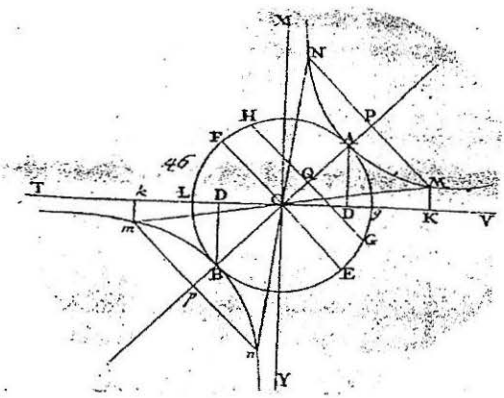


Figure 5: Fig. No. 46

In this case, all values x and y of the hyperbola between +1 and -1 are imaginary, and:

> "All ordinates of this cercle are imaginary ordinates of the hyperbola, since $z = my\sqrt{-1}$; but also vice-versa, all ordinates of the hyperbola are imaginary ordinates of the circle, since . As a consequence, the cercle is an imaginary part of the hyperbola, like the hyperbola is an imaginary part of the cercle." (Karsten 1786, 380-381; my translation, G. S.).

And Karsten - who was aware of the periodicity of the circle - has even shown that there are an infinity of such correspondences (ibid., 381 ff.).Resuming his discussion, Karsten asserted that the geometric design of an algebraic formula can never lead to consequences, which are different to those obtained by algebraic methods (ibid., 385). Remarkably Karsten had skipped by now the differentiation between 'possible' and 'impossible' algebraic terms.

Cajori who seems to have been the only one who has discussed Karsten's paper has commented in the following terms that he could see no reception:

> "It looks very much as if transactions of academies had been in some cases the safest places for the concealment of scientific articles from the scientific public" (Cajori 1913, 111).

One has to add that Cajori did not know that Karsten had organized a second printing of his paper in 1786, which has certainly not remained unnoticed.

Actually, one has not enough studied the impact of the enormous number of foundational reflections by mathematicians - who are not regarded as great mathematicians - on the evolution of the thinking of the greater mathematical community. The foundational work of marginal contributors has well prepared the passage from an epistemology favoring a geometrical relation to real-world existence to an epistemology favoring internal systemic coherence. It is quite paradoxically that this passage has paved its way by reinforcing the geometrical legitimation of abstract mathematical objects. Foncenex's proposal to admit imaginary quantities only as auxiliary means during the calculation process but not in the final solution provoked the eventual breakthrough of their general admission as algebraic concepts.

Bibliography

Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Paris 1806 (imprimé anonymement, réédité en 1874 par J. Hoüel).

Argand, "Recherches analitiques sur la construction des thermomètres métalliques en forme de montre", *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 1813/14, *4*, 29-42. [1813a]

Argand, "Éssai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques", *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 1813/14, *4*, 133-148. [1813b]

Adrien-Quentin Buée, "Mémoire sur les Quantités imaginaires", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. For the Year MDCCCVI.Part I, London 1806, 23-88.

Florian Cajori, "History of the exponential and logarithmic concepts", *American Mathematical Monthly*, 1913, *20*, 107-117.

Lazare Carnot, *Géométrie de Position*, Paris an XI (1803).

Augustin Louis Cauchy, "Mémoire sur les quantités géométriques" (1847), *Œuvres Complètes*, IIe Série, Tome XIV, Paris: Gauthier-Villars, 1938, 175-202.

Leonhard Euler, *Opera Omnia.* series Quarta A: Commercium Epistolicum. Volumen Quintum: *Commercium Epistolicum cum A. C. Clairaut, J. D'Alembert et J. L. Lagrange.* Ed. Adolf P. Youschkevitch et René Taton (Basel: Birkhäuser, 1980).

François Daviet de Foncenex, Refléxions sur les quantités imaginaires", *Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis*, 1759, Tomus Primus, 113-146.

François Daviet de Foncenex, "Éclaircissemens pour le Mémoire sur les quantités imaginaires inséré dans le premier Volume", *Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin* pour les Années 1760-1761 [Tome II], 337-344.

Bernard le Bovier de Fontenelle, *Elements de la Géométrie de l'Infini*, Paris 1727.

Jacques Frédéric Français, "Nouveaux principes de Géométrie de position, et interprétation des symboles imaginaires", *Annales de mathématiques pures et appliquées,* 1813/14, *4*, 61-72. [1813a]

Jacques Frédéric Français, "Lettre sur la théorie des quantités imaginaires", *Annales de mathématiques pures et appliquées,* 1813/14, *4*, 222-230. [1813b]

Carl Friedrich Gauß, "Theoriam Residuorum Biquadraticorum. Commentatio secunda", *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recientores*, 1832, *VII* = *Carl Friedrich Gauß Werke*, Band II (Göttingen 1863), 95-148.

Carl Friedrich Gauß, "Anzeige: Theoriam Residuorum Biquadraticorum. Commentatio secunda", *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 23. 4. 1831 = *Carl Friedrich Gauß Werke*, Band II (Göttingen 1863), 169-178.

Hermann Hankel, *Theorie der complexen Zahlensysteme, insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamiltonschen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung* (Leipzig: Voss, 1867).

Jules Hoüel, "Avertissement de l'editeur". In: Argand,1874, v-xix.

Wenceslaus J. G. Karsten, "Abhandlung von den Logarithmen verneinter Grössen", *Abhandlungen der Churfürstlich-baierischen Akademie der Wissenschaften* (München, 1768), 1-108.

Wenceslaus J. G. Karsten, "Von den Logarithmen der verneinten und unmöglichen Grössen", *Mathematische Abhandlungen, theils durch eine Preisfrage ..., theils durch andere neuere Untersuchungen veranlasst* (Halle: Renger, 1786), 285-390.

Herbert Pieper, *Die komplexen Zahlen. Theorie - Praxis - Geschichte* (Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1984).

Robin E. Rider, *A Bibliography of Early Modern Algebra.* Berkeley papers in History of Science, no. VII (Berkeley: University of California, 1982).

Stephen Jordan Rigaud, *Correspondence of scientific men of the seventeenth century.* Vol. II (Oxford, 1841).

Schubring, Gert: "Ruptures dans le statut des nombres négatifs", *petit x* (Grénoble), no. 12, 1986, 5-32.

H. Valentiner, "Première préface". In: Wessel 1897, iii-x.

John Wallis, *De Algebra Tractatus; Historicus et Practicus. Operum Mathematicorum Volumen alterum* (Oxford: Sheldon, 1693).

Wessel, Caspar: *Essai sur la représentation analytique de la direction.* Traduction du mémoire intitulé: *Om Directionens analytiske Betegning.* Préfaces de H. Valentiner et T.-N. Thiele, Copenhague 1897.

Capítulo 3

A biografia de Argand – a historiografia e as fontes

Resumo

Há um nome de grande importância na história dos números complexos: o Argand que contribui decisivamente para a aceitação de tais números como conceitos matemáticos legítimos; o que se dá por meio da representação geométrica destes números. A historiografia foi unânime sobre a identidade desta pessoa: foi confirmado tratar-se de Jean-Robert Argand, que viveu de 1768 até 1822, natural de Genebra. Como profissão, indica-se ter sido um contador ("bookkeeper"). Estas afirmações encontram-se repetidas em todos textos, principalmente devido à importância da sua obra para o conceito dos números complexos. Há uma única fonte para este relato tradicional. Foi o matemático francês Jules Hoüel que reeditou a obra de Argand, em 1874, e que, ao preparar esta publicação, mandou uma carta para colegas em Genebra pedindo que investigassem sobre uma pessoa de nome Argand, com um perfil que se adequasse ao do autor da obra. A base desta busca foi a sua convicção de que Argand deveria ser natural de Genebra – uma suposição sem justificativa. Na resposta ao seu pedido, estes dados foram providenciados, porém com reserva por cautela, falando sobre uma probabilidade. Não-obstante, toda a literatura subseqüente sobre Argand, divulgou as informações como verdades. Pesquisas recentes conseguiram detectar fontes que revelaram, no entanto, que nenhum destes pretendidos fatos ficam fundamentados. Esta pesquisa foi combinada com a investigação sobre o tipo de fonte, atribuída ao Argand, como livro publicado em 1806. O texto de Argand, sendo originalmente uma memória para ser entrega na Académie des Sciences de Paris, deveria ser um manuscrito. E isto levou a uma reflexão sobre as diferencas entre publicação e texto impresso. Argand não publicou seu mémoire como um livro, mas o fez imprimir, privadamente, para distribuição por ele mesmo, e mais tarde do que 1806. Além disto, a impressão foi anônima, sem indicação do autor. Dissertações enviadas em 1813 e 1814 para revistas sempre só indicam como autor "Argand", sem nenhuma outra indicação – nem mesmo a de um prenome. A pesquisa sobre esta fonte importante para o desenvolvimento da matemática leva a reflexões significativas sobre a metodologia de investigações biográficas e contextuais na história da matemática.

A historiografia tradicional

Praticamente em toda obra da história de matemática se fala de Argand, devido à sua apresentação dos números complexos como entidades geométricas, colocados como pontos no plano com o eixo horizontal construído como $i = \sqrt{-1}$, por sua vez entendido como rotação de 90 gráus. No entanto, também encontram-se em cada uma destas publicações informações biográficas bem semelhantes, e equivocadas. Exemplos importantes, por serem consultados e copiados enormemente, são os sites específicos de história da matemática, na internet.

Há um site extenso na internet, o site de biografias de matemáticos - o MacTutor, onde se lê como biografia de Argand:

> "**Jean-Robert Argand** was an accountant and bookkeeper in Paris who was only an amateur mathematician. Little is known of his background and education. We do know that his father was Jacques Argand and his mother Eves Canac. In addition to his date of birth, the date on which he was baptized is known - 22 July 1768.
> Among the few other facts known of his life is a little information about his children. His son was born in Paris and continued to live there, while his daughter, Jeanne-Françoise-Dorothée- Marie-Elizabeth Argand, married Félix Bousquet and they lived in Stuttgart. "

Já em um site em português coloca-se:

> "Matemático suíço. Em 1806, quando Argand possuía uma livraria em Paris, ele publicou uma interpretação geométrica dos números complexos como pontos num plano"

Tal afirmação – de que Argand possuía uma livraria, constitui um mal-entendido sobre a palavra inglesa „bookkeeper".

Ainda, há vários sites na internet com imagens deste „Jean-Robert Argand" – enquanto uma mesma imagem, em um outro site, é usada quando se refere ao físico inglês Robert Hooke (1635-1703)!

Encontramos, assim, nos diversos sites, muitas outras afirmações equivocadas ou por vezes sem substanciação histórica. No entanto, no caso particular do site de MacTutor sobre como a obra de Argand tornou-se conhecida, a versão está mais próxima dos acontecimentos reais:

> "The way that Argand's work became known is rather complicated. Legendre was sent a copy of the work and he sent it to François Français although neither knew the identity of the author. After François Français's death in 1810 his brother Jacques Français worked on his papers and he discovered Argand's little book among them. In September 1813 Jacques Français published a work in which he gave a geometric representation of complex numbers, with interesting applications, based on Argand's ideas. Jacques Français might easily have claimed these ideas for himself, but he did quite the reverse. He ended his paper by saying that the idea was based on the work of an unknown mathematician and he asked that the mathematician should make himself known so that he might receive the credit for his ideas. The article by Jacques Français appeared in Gergonne's journal Annales de mathématiques [pures et appliquées] and Argand responded to Jacques Français's request by acknowledging that he was the author and submitting a slightly modified version of his original work with some new applications to the Annales de mathématiques."

Eu me conscientizei de problemas na historiografia tradicional quando me perguntaram, depois uma palestra sobre a representação geométrica dos números complexos, que provas haviam para sustentar os dados biográficos sobre "Jean-Robert" Argand. Olhando no livro de Argand, como re-editado em 1874 pelo matemático francês Jules Hoüel, constatei que ele, ao preparar esta publicação, havia enviado uma carta para colegas em Genebra pedindo que investigassem sobre uma pessoa de nome Argand, com um perfil que se adequasse ao do autor da obra (Hoüel 1874, ix). A base desta busca foi a sua convicção de que Argand deveria ser natural de Genebra – uma suposição sem justificativa. Pode-se somente advinhar a razão desta convicção: nos anos que se seguiram a 1790, houve uma pessoa chamada Argand bem conhecida em Paris, por um lado, como inventor de uma luminária técnica e por outro lado, pelas lutas empreendidas por ele para se fazer reconhecer sua prioridade na invenção. Este era Ami Argand (1750-1803), um inventor ativo em física e química, que morou muitos anos em Paris e que era de fato de origem de Genebra. Na resposta ao pedido de

Hoüel, tais dados foram providenciados; porém com certa reserva, por cautela, mencionando uma probabilidade:

> "C'est très probablement l'auteur du Mémoire de Mathématiques en question", ibid., xv-xvi.

Não-obstante, tais dados foram depois sempre citados como verdade, sem restrições, e houve apenas uma ocasião em que uma pessoa levantou dúvidas. Um leitor anônimo da revista *L'intermédiaire des Chercheurs et Curieux*, abreviando-se "T. de L:" observou, já no ano seguinte à publicação de Houel, em 1875, que se tem os dados biográficos deste Jean-Robert Argand, "mas que não tem certeza que ele seria de fato o autor do *L'Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires* [...]" (8e année, 1875, 424). Tal leitor recebeu duas respostas na revista: a primeira dizia que o autor de tal obra seria o Ami/Aimé Argand (mas que já falecera em 1803) e uma segunda simplesmente repetia as afirmações de Hoüel (9e année, 1876, 688 e 715). Tais fontes ficam mencionadas na fonte de biografias francesas: *Dictionnaire de Biographie Française*, tome III, 1939, 504.

E o artigo na fonte mais confiável, em geral, o *Dictionary of Scientific Biography,* não coloca nenhuma dúvida e até mesmo afirma que a "verification of the dates of his birth and death are given by H. Fehr in the *Intermédiaire des mathématiciens*" in 1902". Aí, refere-se a uma resposta de Henry Fehr, matemático e editor de revistas, morador de Genebra, a uma pergunta de Gustav Eneström, reconhecido historiador da matemática sueco, nesta mesma revista em 1900, observando que os dados da morte de Argand eram desconhecidos. Uma inspeção desta fonte revela que Fehr teve como ponto de partida a convicção de que a hipótese de Hoüel era correta, e havia confirmado somente o ano de morte deste Jean-Robert Argand nos *Archives de l'État de Genève.*

Minhas dúvidas confirmaram-se como certeza quando tive a sorte extraordinária e rara de encontrar aquela carta que Legendre mandou ao Français para o informar desta obra notável. De fato, contrariamente ao relato no MacTutor escrito por J. J. O'Connor e E. F. Robertson, tratava-se de uma carta, e não de um envio de um texto. Nesta carta, datada do 2 de novembro de 1806, Legendre relatou o encontro com o autor da obra:

> "Il y a des gens qui cultivent les sciences avec assez du succès sans être connus et sans courir pour la renommée. Dernièrement j'ai vu un jeune homme qui m'a engagé à lire un travail qu'il avait fait sur les imaginaires; il ne m'expliquait pas très bien son objet, mais il me faisait entendre qu'il regardoit les quantités dites imaginaires comme aussi réelles que les autres, et qu'il les representait par des lignes. J'ai témoigné d'abord bien des doutes à l'auteur, cependant j'ai promis de lire son mémoire. J'y ai trouvé contre mon attente, des idées assez originales, fort bien présentées, appuyées de connaissances de calcul assez profondes, et enfin qui conduisent à des conséquences fort exactes telles que la plupart des formules de trigonométrie, le théorème de Cote, etc. Voici une esquisse de ce travail qui vous intéressera peut-être et qui vous fera juger du reste" (apud Schubring 2001, 129).

De fato, Legendre primeiramente explicou a abordagem de Argand para a construção geométrica das quantidades imaginárias e complexas e depois continuou expondo as aplicações :

- as formulas trigonométricas como :

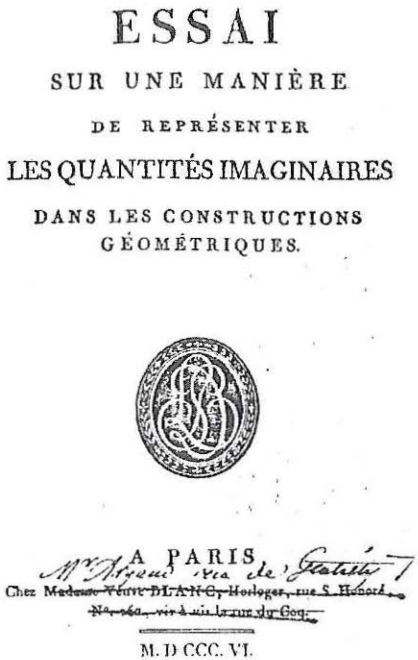
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b\ ,$$

- o teorema chamado de Cotes:

$$\cos na + \sqrt{-1}\sin na = (\cos a + \sqrt{-1}\sin a)^n\ .$$

Legendre declarou não estar interessado neste assunto como tema de pesquisa e então sugeriu ao Français a desenvolve-lo mais: ele o deixaria e o considerava ser apenas um objeto de curiosidade:

> "Je ne rend ici qu'une petite partie de ses idées, mais vous y suppléerez et peut-être vous trouverez comme moi qu'elles sont assez singulières pour mériter attention. Au reste je vous les abandonne simplement comme objet de curiosité et je ne me chargerois pas de les défendre." (ibid.,)



ESSAI

SUR UNE MANIÈRE

DE REPRÉSENTER

LES QUANTITÉS IMAGINAIRES

DANS LES CONSTRUCTIONS

GÉOMÉTRIQUES.

A PARIS,

M^r Argand rue de [illegible]

Chez ~~Madame Veuve BLANC, Horloger, rue S. Honoré, N° [illegible], vis-à-vis la rue du Coq.~~

M. DCCC. VI.

Fig. 1

Parece que, sem o conhecimento da carta de Legendre ao Français, a obra de Argand nunca teria sido discutido por matemáticos da época e nem mesmo o autor teria se tornado conhecido. De fato, não há nenhuma prova de que o texto de Argand tenha sido publicado em 1806, como se afirma sempre na literatura. Este ano fica indicado na capa da obra impressa, mas isto não constitui uma prova – por três razões:

- o livro não foi depositado no *Dépot Legal* em Paris, como prescrito pela lei: em minhas pesquisas nesta instituição, obtive como resultado que não fora feito o deposito.
- minhas pesquisas extensas em bibliotecas da França e de outros países mostram que nenhuma possui um exemplar de uma alegada versão original. Todos os exemplares em bibliotecas são daquela segunda edição de 1874, ou

reimpressões posteriores. E a edição de 1874 foi feita a partir do exemplar que Argand teve mandado para Gergonne.

- da carta de Legendre segue um argumento complementar: Legendre não teria comunicado os conceitos de Argand ao Français e o convidado a desenvolver mais estes conceitos se o texto já estivesse publicado ou se uma publicação estivesse em prelo. Além disto, segundo as regras do *Institut* – o nome da Academie de Paris naquela época – somente *mémoires* não ainda publicados eram aceitos para serem recebidos e relatados pelos acadêmicos. Então, se Argand desejasse que a obra dele fosse julgada pela Academia, a obra deveria estar como manuscrito. De fato, foi Argand mesmo que escreveu, em 1813, que Legendre teve examinado um "mon manuscrit" (Argand 1813b, 133).

O único fato que se pode afirmar com certeza é que o texto de Argand foi **impresso** em um certo momento entre 1806 e 1813, sem indicação de autor. Porém, o livro foi distribuído somente por meios privados, e então não propriamente **publicado**. Como Argand admitiu em 1813, ele distribuiu a versão impressa somente para um "très-petit nombre" (Argand 1813b, 133), provavelmente, para alguns amigos. Ele caracterizou a sua obra como sendo somente um „écrit" (ibid.). Mesmo em 1813, o livro não passou a ter o caráter de uma própria publicação: cópias conhecidas estiveram em posse de Gergonne. Em seu artigo de 1813 nos Annales de Gergonne, Argand havia proposto vender cópias do seu *Essai*; assim, na capa de rosto do exemplar enviado ao Gergonne, Argand havia riscado o endereço do distribuidor e substituído pelo próprio endereço, para facilitar encomendas com ele (ver fig. 1). No entanto, parece que nenhum outro matemático de Paris comprou o livro.

Mesmo Français, muito interessado na obra de Argand, não lhe pediu uma cópia mas ao invez pediu emprestado a Gergonne o seu exemplar (ver Français 1814b, 222). Foi somente graças ao Hermann Hankel que fez reviver o interesse na obra de Argand (Hankel 1867, 82), que Hoüel tornou-se instigado procurar o texto e obrigando-se o editar.

Além da história extraordinária do *mémoire* de Argand, a sua biografia por si oferece muitas questões. De fato, a carta de Legendre tem me trazido dúvidas sobre toda a informação biográfica sobre Argand. Um ponto de partida foi que Legendre o chamou ser "um homem jovem". Legendre teve em 1806 a idade de 54 anos e Argand teria, segundo a informação tradicional, 38 anos. Visto que esta diferença não era tão grande, Legendre, de 54 anos, teria falado de pessoa de 38 anos como sendo 'jovem'? Isto já fica duvidoso. Também a primeira frase de carta dá a entender que Legendre achou que o visitante seria capaz de uma carreira cientifica.

Que informações objetivas – "duras" – a gente dispõe? Infelizmente, não temos nem mesmo nenhuma evidencia sobre o primeiro nome de Argand. Todas as cartas que ele enviou ao Gergonne e que Gergonne publicou contém somente o apelido ou sobrenome "Argand" – e nada mais. O único fato "duro" que existe é o endereço dele em 1813 em Paris. Infelizmente de novo, devido às lutas dos *communards* em Paris de 1870/71, a maior parte dos registros administrativos da prefeitura de Paris ficou perdida e então não é mais possível levantar dados sobre os habitantes daquela época; assim como os registros das pessoas falecidas ficaram queimados, também. Como os historiadores do século XIX não se preocuparam em procurar as informações biográficas pertinentes, fica muito complicado obter ainda hoje alguns elementos reveladores. O que se pode deduzir da carta de Legendre, é que Argand em 1806 foi desconhecido na comunidade científica. Além disto, fica patente em seus artigos publicados nos *Annales* de Gergonne em 1813, 1814 e 1815 que ele teve aceso fácil e freqüente às revistas científicas importantes da época. Visto estas informações com tantas lacunas, podemos somente constatar – em termos do que a historiografia costuma utilizar somente para pessoas pouco conhecidas da Idade Media – que Argand "flourished" em 1806, 1813, 1814, 1815.

Vamos tentar, nestas bases, reconstruir o que aconteceu com Argand e o seu *mémoire*.

Parece ser bem provável da seguinte maneira: no outono de 1806, Legendre recebeu a visita de Argand, que tentou expor os resultados principais contidos no *mémoire* que ele queria depois submeter ao julgamento da Academia, mas que quiz antes saber a opinião de um dos acadêmicos, em uma conversa pessoal. Legendre mostrou-se cético sobre a abordagem de Argand bem como sobre as aplicações.

Ao se despedir, Argand demandou de Legendre a leitura do seu manuscrito. Legendre não havia anotado o nome do autor e achou que este ficasse no manuscrito. Depois da saída do visitante, Legendre reparou que o texto não continha nem o nome do autor nem o seu endereço. Decidindo-se por ler o manuscrito, ele se admirou da qualidade de sua exposição. Ele aguardou mais uma visita do autor, mas Argand, decepcionado, não voltou. A fim de tirar a leitura do *mémoire* da sua cabeça, Legendre escreveu em 2 de novembro um relato ao matemático da Alsácia, certo de que ele se interessaria por tais questões dos fundamentos. Como Legendre enfatizara em sua carta não querer se debruçar mais sobre tais conceitos, nem o François Jacques Français (1768 - 1810) nem o irmão mais jovem Jacques Frédéric (1775-1833), herdeiro dos seus papéis depois a morte, ousaram perguntar a Legendre o nome do autor ou sobre o próprio *mémoire, em si*. Por outro lado, Argand, aparentemente uma pessoa tímida, recusou publicar sua obra, devido à reação desinteressada e cética de Legendre. Somente depois da reação indireta sobre suas concepções pelos irmãos Français, Argand sentiu-se instigado em organizar e imprimir, tardiamente, o seu *mémoire*, onde ele decidiu colocar o ano da composição na capa de rosto.

Algumas hipóteses

Por fim, vale refletir sobre hipóteses referentes à biografia e à profissão de Argand.

Quanto à sua profissão, duas indicações, pelo menos, são reveladoras. A primeira é que o endereço colocado na imprensa original consta como a loja de um relojoeiro (veja figura 1). E a segunda fica patente em sua primeira publicação, o artigo (Argand 1813[a]) nos *Annales*, datado de fevereiro de 1813, e publicado alguns meses antes do primeiro de Français (Français 1813[a]), artigo que abriu o debate sobre os conceitos de Argand. Este artigo discute detalhes de produção técnica de instrumentos, em particular de termômetros portáveis. E estes termômetros revelam-se serem construídos em forma de relógios (ver figura 2)! Neste artigo, Argand mostra-se intimamente familiar com as publicações recentes. Por exemplo, ele cita a obra *Système du Monde* de Laplace e isto para censurar faltas características de homens práticos. Em sua conclusão, Argand argumenta contra o método de tentativa e erro de muitos profissionais que desta maneira desvalorizam também as obras dos mais capazes. Ele enfatiza uma orientação por princípios teóricos. A sua afirmação sobre ter conseguido melhores resultados práticos por meio desta orientação teórica sugere que Argand foi um técnico com formação científica substancial, e com emprego na industria relojoeira de Paris.

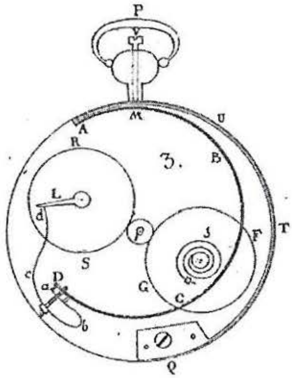


Fig. 2

Quanto aos dados de vida dele, chama atenção o fato de que, depois estes publicações relativamente contínuas no período entre os anos 1813 até 1815, nunca mais houve publicações de Argand. Visto que grande parte dos homens jovens foram recrutados pelas armadas de Napoleão, uma minha hipótese é que ele faleceu nas últimas batalhas de Napoleão em 1815, depois a volta da ilha Elba.

Bibliografia

Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Paris 1806 (imprimé anonymement, réédité en 1874 par J. Hoüel).

Argand, "Recherches analitiques sur la construction des thermomètres métalliques en forme de montre", *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 1813/14, *4*, 29-42. [1813a]

Argand, "Éssai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques", *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 1813/14, *4*, 133-148. [1813b]

J. J. O'Connor & E. F. Robertson, „Jean Robert Argand".http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Argand.html

Jacques Frédéric Français, "Nouveaux principes de Géométrie de position, et interprétation des symboles imaginaires", *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 1813/14, *4*, 61-72. [1813a]

Jacques Frédéric Français, "Lettre sur la théorie des quantités imaginaires", *Annales de mathématiques pures et appliquées,* 1813/14, *4*, 222-230. [1813b]

Hermann Hankel, *Theorie der complexen Zahlensysteme, insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamiltonschen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung* (Leipzig: Voss, 1867).

Jules Hoüel, "Avertissement de l'editeur". In: Argand, 1874, v-xix.

Gert Schubring, "Argand and the early work on graphical representation: New sources and interpretations", *Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers.* Proceedings of the Wessel Symposium at The Royal Danish Academy of Sciences and Letters, Copenhagen, August 11-15 1998: Invited Papers. Matematisk-fysiske Meddelelser 46:2, Jesper Lützen (ed.), (C. A. Reitzel: Copenhagen, 2001), 125-146.

Capítulo 4

Um desafio: texto original de Karsten

69. §.

Eine algebraisch unmögliche Grösse kann man eben darum nicht durch eine geometrische Construction darstellen, weil die Formul fodert, daß etwas geleistet werden soll, was wegen andrer Bedingungen, die mit in der vorgelegten Aufgabe liegen, nicht geleistet werden kann. Wenn aber die unmögliche algebraische Grösse unter einer Form, wie $b\sqrt{-1}$ vorgelegt ist, so kann man den möglichen Factor b geometrisch darstellen: genug wenn man bemerkt, daß die so dargestellte geometrische Grösse das noch nicht sey, was man suchte. Selbst $b\sqrt{-1}$ kann durch entgegen gesetzte geometrische Operationen wieder in ein mögliches b oder bb verwandelt werden, und hiernächst bey andern Constructionen als mögliche Grösse dienen. Für die Hyperbel hat man die bekannte Gleichung $yy =$

Capítulo 5

Carl Friedrich Gauß, Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio segunda.[1]

Tradução: Gerard Grimberg[2]

Um estudo apresentado, o dia 15 de abril pelo Conselheiro áulico ("Hofrath") Gauss da *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*: *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda*, é a continuação da memória já editada no sexto volume dos *Commentationes novae*, cuja uma resenha foi feita nessa altura em nosso Jornal do 11 de Abril de 1825. Esta continuação, embora esteja mais de duas vezes maior do que a primeira memória, não esgota ainda esta matéria muito rica, e devera estar completada por um terceiro estudo que virá como conclusão do tudo.

Apesar de que os conceitos de base deste primeiro estudo e o conteúdo da primeira memória pudessem ser supostamente conhecidos por todos os que têm feito um estudo de aritmética superior, pretendemos aqui em brevemente trazer á memória estes, sobretudo para o conforto dos amigos desta parte da matemática que não dispõem na mão este primeiro estudo. Em relação a um número qualquer p, chama-se a um outro número k um resíduo bi-quadrático, se existir números da forma $x^4 - k$, divisíveis por p; no caso contrário k é chamado não-resíduo bi-quadrático de p. Basta aqui restringir-se ao caso onde p é um número primo da forma $4n + 1$ e não divide k, e portanto todos os outros casos são, ou claros por si, ou podem ser reduzidos a estes. Para um tal valor *dado* de p, se distribuem todos os números não divisíveis por p em quatro classes, entre as quais a primeira é aquela dos resíduos biquadráticos, a segunda classe contém os não-resíduos biquadráticos

[1] Publicação primeira: Göttinger gelehrte Anzeigen, 23.4. 1831. Reproduzido em: Gauß, Werke, vol. II, 1863, pág. 169-178.

[2] Agradeço ao Professor Gert Schubring pelos conselhos e sugestões que me prodigou na finalização desta tradução.

que são resíduos quadráticos, e ficam nas duas outras os não-resíduos biquadráticos, sendo estes igualmente não-resíduos quadráticos. O princípio desta repartição vem do fato de que a cada vez, ou $k^n - 1$, ou $k^n + 1$, ou $k^n - f$, ou $k^n + f$, são divisíveis por p, com f denotando um número inteiro, tal que $ff + 1$ é divisível por p. Qualquer um, que conhece a terminologia elementar, vê por si-mesmo, como estas definições poderiam ser reajustadas nesta.

A teoria desta classificação encontra-se completamente desenvolvida na primeira memória, não apenas no que diz respeito ao caso bem elementar $k = -1$, mas também para aqueles, que requerem pesquisas auxiliares, os casos $k = \pm 2$. No início da presente memória serão agora acrescentados vários valores maiores de k: é preciso primeiro levar em consideração apenas os valores, que são os próprios números primos, e o sucesso mostra, que o resultado obtêm-se do modo mais simples, se toma-se valores positivos ou negativos, conforme forem de modo geral da forma $4m + 1$ ou $4m + 3$. A indução confere aqui imediatamente com a maior facilidade uma rica safra de teoremas, dos quais iremos aqui apenas mencionar alguns. A numeração das classes por 1, 2, 3, 4 será associada aos casos onde k^n é respectivamente congruente a $1, f, -1, -f$; ao mesmo tempo, o valor tomado por f será sempre aquele que torna $a + bf$ divisível por p, quando $aa + bb$ é a representação de p em soma de um quadrado par e de um quadrado ímpar. Assim por indução encontra-se que o número -3 pertença à uma das classes 1, 2, 3, 4, segundo respectivamente b, $a + b$, a, $a - b$ é divisível por 3; que o número 5 pertença à estas classes, segundo que b, $a - b$, a, $a + b$ é divisível por 5; que o número -7 cai na classe 1, se a ou b [é divisível por 7]; na classe 2 se $a - 2b$ ou $a - 3b$ [é divisível por 7]; na classe 3 se $a - b$ ou $a + b$ [é divisível por 7]; na classe 4, se $a + 2b$ ou $a + 3b$ é divisível por 7; teoremas semelhantes se encontram em relação aos números -11, $+13$, $+17$, -19, -23, etc. Tão fácil se deixam descobrir estes teoremas especiais por indução, quanto difícil parece encontrar para estas formas uma lei geral, mesmo se várias propriedades comunas aparecem facilmente aos olhos, e fica ainda mais difícil para todos esses teoremas ("Lehrsätze") encontrar a demonstração. As demonstrações da primeira memória que eram úteis para tratar os casos $+2$ e -2, não se aplicam mais aqui, e se tais outros métodos semelhantes, no que se referem à primeira e terceira classe, podiam servir para concluir, estes tornam-se inaptas para a fundamentação de demonstrações *completas*.

A partir daí entende-se facilmente de que se pode ingressar neste domínio rico da aritmética superior apenas por caminhos completamente novos. O autor tem na primeira memória dado uma indicação, que se exige para isso essencialmente uma extensão específica de todo o campo da aritmética, sem aliás ter esclarecido precisamente em que reside esta: a presente memória tem como alvo de por em luz este objeto.

Isso não é nada a não ser estender o campo da matemática superior até também os números imaginários, enquanto verdadeiro fundamento da teoria dos resíduos biquadráticos, o qual era aliás apenas consagrado aos números inteiros reais, e se deve conferir a esses a mesma e plena cidadania. Desde que se concebe isto, aparece esta teoria numa luz totalmente nova, e os seus resultados ganham a mais alta e surpreendente simplicidade.

Antes no entanto de poder desenvolver a teoria mesma dos resíduos biquadráticos neste domínio estendido dos números, devem participar à esta as doutrinas previas da aritmética superior, as quais eram até agora apenas estudadas em relação com os números reais. Poderemos aqui apenas expor algumas destas pesquisas anteriores. O autor considera cada grandeza $a + b\,i$, onde a e b significam duas grandezas reais, e i uma abreviação pois está escrita no lugar de $\sqrt{-1}$ como um número complexo, quando ao mesmo tempo a e b são números inteiros. As grandezas complexas assim não excluem as reais, mas compreendem entre si aquelas enquanto caso especial, para $b = 0$. Para uma aplicação mais cômoda, era necessário atribuir denominações particulares à formações de conceitos referindo-se às grandezas complexas, a qual tentará, todavia evitar aqui, nesta resenha.

Assim como temos na aritmética dos números reais apenas duas unidades, a positiva e a negativa, tem do mesmo modo na aritmética dos números complexos quatro unidades $+1, -1, +i, -i$. Chama-se composto a um número complexo inteiro, se é o produto de dois fatores inteiros diferentes das unidades; um número complexo que no entanto não admite tal decomposição é chamado número complexo primo. Assim é primo o número real 3, considerado também como número complexo, enquanto 5 como número complexo é composto $= (1 + 2\,i)(1 - 2\,i)$. Assim como na aritmética superior dos números reais, os números primos desempenham também um papel decisivo no campo estendido desta ciência.

Se um número complexo inteiro $a + b\,i$ é tomado por módulo, podem ser formados exatamente $aa + bb$ números complexos não congruentes entre si, dos quais um deve ser congruente a cada número complexo inteiro dado anteriormente, o que se pode chamar um sistema completo dos resíduos incongruentes. Os chamados resíduo mínimo e resíduo mínimo absoluto da aritmética dos números reais possuem também aqui o seu perfeito *analogon*. Assim por exemplo para o módulo $1 + 2i$ o sistema completa de resíduos mínimos é composto dos números 0, 1, i, -1 e $-i$. Quase todos os resultados das quatro primeiras secções das *Disquisitiones Arithmeticae* encontram também, com algumas modificações, o seu lugar na aritmética estendida. O celebro teorema de Fermat adota aqui a forma seguinte: se $a + b\,i$ é um número complexo primo, e k um número não divisível por este, então tem-se sempre $k^{aa+bb-1}$ para o módulo $a + b\,i$. Tudo especialmente digno de ser notado é aliás o fato de que o teorema fundamental dos resíduos quadráticos na aritmética dos números complexos tem aqui o seu correspondente perfeito apenas ainda mais simples: sejam com efeito dois números complexos primos $a + b\,i$, $A + B\,i$, tais que a e A são ímpares, e b e são pares, o primeiro é resíduo quadrático do segundo, se o segundo é resíduo quadrático do primeiro, caso contrário o primeiro é não-resíduo quadrático do segundo, se o segundo é não resíduo quadrático do primeiro.

No momento em que a memória passa dessas pesquisas preliminares relativas á teoria mesma dos resíduos biquadráticos, uma divisão em quatro classes dos números não divisíveis pelo módulo é logo determinada, em lugar da simples diferença entre os resíduos biquadráticos e não-resíduos biquadráticos. Se o módulo é com efeito um número complexo primo $a + bi$, onde é sempre suposto a ímpar e b par, sendo p a abreviação escrita no lugar de $aa+bb$, e k um número complexo não divisível2 por $a + bi$, então em todos os casos $k^{\frac{p-1}{2}}$ será congruente a um dos números1, -1, i, $-i$. E daí é justificada uma divisão em quatro classes de todos os números complexos não divisíveis por $a + b\,i$, as quais serão sucessivamente ordenadas entre os caráteres biquadráticos 0, 1, 2, 3. É claro que o caráter 0 corresponde aos resíduos biquadráticos, e os outros, aos não-resíduos biquadráticos do modo seguinte, o caráter 2 aos resíduos quadráticos, e os caráteres 1 e 3 respondem em compensação pelos não resíduos quadráticos.

Reconhece-se facilmente que trata-se de determinar sobretudo este caráter para tais valores de k, que são precisamente números complexos primos, e aqui a indução leva a resultados os mais simples.

Se pôe-se $k=1+ i$, mostrar-se-ia que o caráter deste número será em todos os casos $\equiv\frac{1}{8}(-a^2+2ab-3b^2+1)$ $(mod\ 4)$, e expressões semelhantes encontram-se para os casos $k = 1 - i$, $k = -1 + i$, $k = -1 - i$.

Quando pelo contrário $k = \alpha + \beta i$, sendo α ímpar e β par, deduz-se muito facilmente pela indução uma lei de reciprocidade completamente semelhante aquela do teorema fundamental dos resíduos quadráticos,a qual pode ser mais simplesmente expressa da forma seguinte:

Se $\alpha + \beta - 1$ assim como $a + b - 1$ são divisíveis por 4 (todos os outros podem ser reduzidos a este caso), e o caráter de $\alpha + \beta i$ em relação ao módulo $a + b\,i$ será denotado por λ, enquanto o caráter de $a+bi$ em relação a $\alpha+\beta i$ será denotado por l, então $\lambda = l$, quando ao mesmo tempo um dos números β, b, (ou ambos) é divisível por 4, caso contrário $\lambda = l \pm 2$, se nenhum dos números β, b é divisível por 4.

Estes teoremas contêm no fundo todo o essencial da teoria dos resíduos biquadráticos em si: porém tanto fácil era de descobri-lo por indução, quanto difícil é dar demonstrações rigorosas deles, em particular para o segundo, o teorema fundamental dos resíduos biquadráticos. Por causa da grande extensão com a qual esta presente memória já havia sida aumentada, o autor se encontrou obrigado em deixar para uma terça memória futura a exposição ("Darstellung") da demonstração deste último teorema, que há 20 anos está em sua possessão. Em compensação é comunicada na presente memória ainda a prova completa do primeiro teorema em questão para o número 1 + i (da qual dependem as dos outros para $k = 1 - i$, $k = -1 + i$, $k = -1 - i$), a qual já pode dar alguma noção da dificuldade do assunto.

Temos que acrescentar agora algumas observações gerais. A mudança dos resultados dos resíduos biquadráticos para o domínio dos números complexos pode parecer chocante e artificial a certa pessoa, a quem a natureza das grandezas imaginárias é pouco familiar, são portanto presos a respeito delas de falsas representações ("Vorstellungen"), e poderia ser levado a pensar que a pesquisa seria por assim dizer solta no ar e receberia uma posição incerta, e ficaria longe de uma clara visão ("Anschaulichkeit"). Nada seria mais infundado do que tal opinião. Pelo contrário a aritmética dos números complexos é suscetível da mais clara apreensão sensível ("anschaulichsten Versinnlichung"), e se o autor na sua exposição ("Darstellung") tem observado desta vez um tratamento aritmético puro, para tornar no entanto esta compreensão mais viva e, portanto, tem dado também para esta apreensão sensível altamente recomendada ("Versinnlichung") as indicações que serão suficientes para o leitor que pensa por si mesmo. Assim como os números inteiros absolutos são representados por uma serie de pontos ordenados à distancias iguais sobre uma reta, sobre a qual o ponto inicial representa 0, o seguinte o número 1, etc.; do mesmo modo com efeito é apenas preciso para a representação dos números negativos um prolongamento ilimitado da serie no lado oposto do ponto inicial; assim precisa-se para a representação dos números complexos inteiros apenas de acrescentar que esta serie é sensata se encontrar em um plano definido ilimitado, e paralelamente a esta dos dois lados, deve ser colocada uma quantidade ilimitada de series semelhantes a mesma distância uma da outra, tal que se apresenta a nós, no lugar de uma serie de pontos, um sistema de pontos que se deixam ordenar de dois modos de serie em serie, que serve à um recobrimento de plano inteiro por quadrados perfeitamente iguais. O ponto mais perto de 0 na primeira serie vizinha de um lado da serie que representa os números reais, corresponde então ao número i, assim como o ponto mais perto de 0 na serie vizinha do outro lado corresponde a $-i$, e assim em diante. Esta representação ("Darstellung") tornará possível o desempenho das operações aritméticas em relação `as grandezas complexas, a congruência, a formação de um sistema completo dos números não congruentes para um módulo dado, e assim em seguida, em breve, de uma apreensão sensível ("Versinnlichung") capaz de deixar nada a desejar.

De outro lado a verdadeira metafísica das grandezas imaginárias será posta numa luz nova e esclarecedora.

Nossa aritmética geral, pela qual a geometria dos Antigos é de longe ultrapassada, é todo a obra do tempo novo. Na origem vindo do conceito dos números inteiros absolutos ela ampliou gradualmente o seu domínio; aos números inteiros são acrescentados os números quebrados (fracionários), aos racionais os irracionais, aos positivos os negativos, aos reais os números imaginários. Este avanço veio no início acontecendo a passos tímidos e circunspetos. Os primeiros algebristas já consideravam as raízes negativas das equações como falsas raízes, e essas eram também consideradas tais onde o problema no qual se referiam assim expresso indica que a natureza das grandezas procuradas não permitia nenhum oposto. Mas tão pouco se hesita admitir na Aritmética *universal* os números fracionários (quebrados), embora existissem muitas coisas enumeráveis pelas quais um número fracionário não tem sentido, tão pouco podem ser então recusados os mesmos direitos aos números negativos os dos positivos, sob o pretexto de que inumeráveis coisas não permitem nenhum oposto: a realidade dos números negativos é suficientemente justificada, já que eles encontram em inumeráveis outros casos um substrato adequado. Disso a gente está consciente para dizer a verdade há muito tempo: porém os imaginários opostos aos reais – apesar de ter sido considerado outrora, e de vez em quando ainda agora, de maneira indecorosa impossíveis – são ainda hoje menos aceitos do que apenas tolerado, e parecem mais como um jogo de signos de conteúdo vazio, ao qual se nega absolutamente qualquer substrato pensável, mas sem querer todavia desprezar o rico tributo, que este jogo de signos traz finalmente ao tesouro das relações das grandezas reais.

O autor tem abordado há muitos anos esta parte importante da matemática com um ponto de vista diferente, segundo o qual um objeto poderia ser atribuído às grandezas imaginárias tão bem quanto às negativas: mas faltou até agora uma ocasião de expressar este publicamente de maneira precisa, mesmo se o leitor atento reencontrasse facilmente os traços no escrito de 1799 sobre as equações, e no escrito do Premio sobre as transformações das superfícies. Os princípios fundamentais deste são indicados brevemente no presente estudo; eles consistem no que se segue.

Os números positivos e negativos podem apenas se aplicar lá onde o que está calculado tem um oposto, oposto que unido com ele deve ser pensado igual a uma aniquilação. A olhar de maneira precisa esta condição encontra-se só onde o que está calculado não são substâncias (objetos pensáveis para si), mas sim relações entre dois objetos considerados dois a dois. Postula-se aqui que esses objetos são de um modo determinado ordenado em uma serie, por exemplo, A, B, C, D..., e que a relação de A para B assim como a relação de B para C, etc. podem ser consideradas iguais. Aqui pertence ao conceito de oposição apenas a *permutação* dos termos da relação, tal que, a cada vez que a relação (ou a transição) de A para B vale +1, a relação de B para A deve ser representada por -1. Assim, na medida em que tal relação é ilimitada de ambos os lados, cada número real inteiro representa a relação de um termo qualquer tomado como origem a um termo determinado da serie.

Os objetos são, porém de tal modo, que eles podem ser ordenados, não em uma serie, embora ilimitada, mas ordenado apenas de serie a serie, ou o que é equivalente, formam uma variedade de duas dimensões; isso se combina então com as relações de uma serie à outra ou com as transições de uma para outra de uma maneira similar à transição de um membro de uma serie a outro membro da mesma, assim é preciso para a medida da transição de um membro do sistema a outro além das unidades precedentes +1 e -1 ainda duas outras também opostas entre si +*i* e -*i*. Obviamente deve-se ainda postular que todas às vezes a unidade *i* marca a transição de um membro dado de uma serie a outro membro *determinado* da serie imediatamente vizinha. Nesta maneira assim o sistema poderá ser ordenado segundo um modo duplo de series de series.

O matemático faz completamente abstração da natureza dos objetos e do conteúdo de suas relações; preocupa-se apenas com a contagem e a comparação das relações entre si: sobre este ponto autoriza-se, seguindo a identidade das propriedades conferida as relações +1 e -1, a analogia estabelecida, a estender esta aos todos os quatro elementos +1, -1,+*i* e -*i*.

Estas relações são entregue à visão ("Anschauung") apenas através de uma representação ("Darstellung") no espaço; e o caso o mais simples, onde não subsista nenhuma razão, para ordenar os símbolos dos objetos de maneira outro do que em quadrados, partilhando efetivamente um plano ilimitado dividido em quadrados por dois sistemas de linhas paralelas, umas interceptando as outras a ângulo reto, e associando os pontos de interseção aos símbolos. Assim cada ponto A tem aqui quatro vizinhos, e se denota-se (denotar: "bezeichnen") por +1 a relação de A para um ponto vizinho, a relação que deve ser designada por -1 é automaticamente determinada, além disso, enquanto se escolherá um dos dois outros para +*i*, se pode tomar por +*i* o ponto situado à *direita* ou à *esquerda*. Esta diferença entre direita e esquerda é *em si* completamente determinada, desde que foram completamente definidos (à vontade) os sentidos para frente e para trás *no* plano, assim como para acima e para baixo em relação aos dois lados do plano, ainda que possamos comunicar nossa intuição dessa distinção aos outros *apenas* através de uma indicação relativa às coisas presentes diante de nos[3]. Quando se tem, todavia decidido sobre este último ponto, se vê que isso depende ainda de nossa livre escolha, a qual das duas series se interceptando em um ponto queremos considerar enquanto serie principal, e qual direção nela queremos considerar como se referindo aos números positivos; vê-se alem disso que se queremos tomar por +1 a relação tratada antes como +i, devemos substituir necessariamente a relação designada antes para $+i$ para a designada por -1. Isto significa, na linguagem do Matemático, que $+i$ é grandeza media proporcional de +1 e -1 ou corresponde ao signo $\sqrt{-1}$; não dizemos de propósito a grandeza media proporcional, já que $-i$ possui evidentemente esta propriedade. Aqui está também perfeitamente justificado a possibilidade do bem-fundado de uma significação intuitiva de $\sqrt{-1}$ ·, e nada mais é necessário para admitir essas grandezas no domínio dos objetos da aritmética.

Temos pensado que esta breve exposição do momento essencial de uma nova teoria das chamadas grandezas imaginárias seria um serviço a prestar aos amigos da matemática. Se se considerou até agora este objeto com um ponto de vista errado e encontrou-se para isso uma escuridão cheia de segredos, é que se tem atribuído uma designação pouca decorosa a esta parte das grandezas. Se não se houvesse considerado +1, -1, $\sqrt{-1}$ como unidades positiva, negativa, imaginária (ou ainda impossíveis) unidades, mas como direta, inversa, lateral, não ficaria o discurso tão escuro. O autor tem se reservado de trabalhar mais completamente no futuro este assunto, o qual tem a dizer a verdade tratado na ocasião nesta presente memória, onde então se poderá encontrar também a resposta a questão de saber porque as relações entre as coisas, que exigem uma variedade de mais de duas dimensões, não

[3] Kant já tem feito as duas observações, mas não se entende como este filósofo sutil poderia pensar encontrar na primeira uma prova de sua opinião, que o espaço seria apenas uma forma de nossa intuição (*Anschauung*) externa, pois a segunda mostra tão claramente o contrário, que o espaço deve ter uma significação real independentemente do nosso modo de intuição.

podem ser ainda tratada na aritmética universal segundo outras espécies admissíveis de grandezas.

Capítulo 6

Gauss e os números complexos – um comentário[4]

Gerard E. Grimberg (IM-UFRJ)
(Preprint, 13-02-2013)

O texto que apresentamos aqui é uma "auto resenha" redigida por Gauss comentando a sua segunda memória sobre os resíduos biquadrático: *Theoria residuorum biquadraticum Commentatio segunda.* Esta "auto resenha" foi editada na revista *Anzeigen,* da sociedade de Göttingen, e se endereçava a um público mais amplo do que a comunidade matemática. Com efeito, esta revista reunia artigos de todos os domínios científicos. Isto pode explicar a apresentação da parte filosófica do conteúdo do comentário. Em seus escritos matemáticos, Gauss não se estendia sobre o significado das pesquisas que ele conduzia, não citava o histórico da questão e não apresentava a sua concepção sobre os objetos matemáticos que manipulava.

Este texto é, portanto, um dos raros escritos onde Gauss assume uma posição e explicita a sua própria concepção sobre a aritmética e, mais geralmente, sobre a matemática.

A "auto resenha" se divide em duas partes: a exposição dos resultados obtidos em sua memória, e umas considerações sobre o significado dos números complexos inteiros e sua relação com os pontos do plano. Nós pretendemos estudar estas duas partes e, em seguida, pretendemos comentar a recepção deste texto pela comunidade matemática.

[4] Muito obrigado ao Pr. G. Schubring pelas indicações e conselhos que foram pródigos durante a redação deste comentário sobre o texto de Gauss.

Apresentação por Gauss dos resultados em sua memória.

Toda esta "segunda memória" visa demonstrar o teorema da reciprocidade biquadrática. Em sua primeira memória, Gauss apresentou o desenvolvimento de técnicas da resolução para alguns casos particulares; mas essas técnicas não possibilitavam uma demonstração geral do teorema. Isso levou Gauss a elaborar uma extensão do domínio dos números inteiros ao dos números imaginários inteiros. Com efeito, Gauss observou que a aritmética dos números imaginários possuía as mesmas propriedades dos números inteiros que ele tinha demonstrado nos quatro primeiros capítulos das suas *Disquisitiones*... Este novo domínio possuía uma divisão que possibilitava uma definição de congruência de dois números complexos inteiros (a partir de então, Gauss começa a utilizar o termo números complexos ao invez de números imaginários). Gauss toma, por exemplo, como típico de propriedade comum, o teorema de Fermat bem como os teoremas dos resíduos quadráticos; e por fim enuncia o teorema dos resíduos biquadráticos. Nesta segunda memória, Gauss não demonstrava todos os casos do teorema, mas afirmava que uma "terceira memória" iria completar a demonstração. Esta terceira memória, no entanto, nunca foi editada. Sabemos pelo seu diario que este teorema ocupou Gauss de 1807 (ou seja, cinco anos depois da publicação das *Disquisitiones* até 1813 (Gauss, 1917, X-1 pp. 565 e sqq.).

Queremos ressaltar alguns pontos que mostram o que já aparecia nas *Disquisitiones*, ou seja, uma concepção da aritmética bem diferente da vigente na época. Para Gauss, o domínio dos números inteiros contém os números negativos. Sua teoria das congruências permitiu incluir estes números em tal domínio de uma maneira natural. A denominação que ele propõe - números complexos, ao invez de números imaginários - denota a preocupação de Gauss em acabar com a idéia da oposição entre números reais e imaginários. Encontrar as mesmas propriedades no domínio dos números inteiros e no dos números complexos provava a possibilidade de conceber os números imaginários como objetos matemáticos tão "reais" quantos os outros números. Já em 1799, na sua memória sobre a demonstração do chamado teorema fundamental da álgebra, ele havia observado:

> "Por quantidade imaginária, entendo sempre aqui uma quantidade expressa sob a forma $a+b\sqrt{-1}$ onde b é diferente de 0. Se as quantidades imaginárias ficam aceitas na análise (o que por várias razões me parece preferível a estas serem rejeitadas, desde que estejam estabelecidas com um fundamento suficientemente sólido), dever-se-ia poder considerá-las como tão possíveis quanto às quantidades reais; e nestes cálculos prefiro abranger ambas as quantidades reais e imaginárias sob a denominação comum de quantidades possíveis... Remeto a outra ocasião a justificativa dessas quantidades imaginárias sob a forma de uma exposição mais frutuosa desta matéria toda" (Gauss, 1799, W. III, p.6).

Assim, o argumento principal de Gauss em favor da realidade dos números imaginários já aparece claramente nesta memória. Para ele, os conceitos matemáticos são pertinentes desde que sejam possíveis, ou seja, não contraditórios. Este critério (a não contradição) fundamenta e justifica a existência e a realidade dos conceitos matemáticos; a concepção de Gauss se situa assim na tradição leibniziana, considerando o domínio da matemática como domínio das verdades necessárias regidas pelo princípio de não contradição, (cf. Leibniz Monadologia.)

As observações gerais de Gauss

A segunda parte da "auto resenha" é dedicada a demonstrar a necessidade dos números complexos, em sua relação com soluções de equações de resíduos biquadráticos.

O argumento principal de Gauss dirigiu aos que desconfiam da realidade dos números complexos consistiu em providenciar uma clara apreensão sensível (*anschaulichsten Versinnlichung*) destes números associando cada ponto de coordenadas inteiras a um número complexo inteiro. Não se trata nem de uma construção nem de uma fundamentação do conceito de número complexo inteiro, pois esta apreensão se constrói depois, visto "que o autor em sua exposição tem observado um tratamento aritmético puro". A intenção de Gauss é tornar mais viva a compreensão dos números complexos, e por meio desta visualização pretendia mostrar que os números complexos podem se inscrever na realidade sensível.

Para reforçar o argumento Gauss evoca a história da aritmética desde os "antigos". Observa que houve um movimento contínuo para, aos poucos, reconhecer os números fracionários, inteiros negativos, e, por fim, os números complexos. Assim, o próprio movimento da evolução da matemática envolve as diversas extensões que sofreu a noção de número. Os conceitos novos e as novas teorias justificam-se pela possibilidade de assim resolver problemas novos. A dinâmica da pesquisa modifica as relações entre a prática e a teoria.

Deste modo, o que justifica a possibilidade das extensões sucessivas da noção de números são as operações:

> "Os números positivos e negativos podem apenas aplicar-se onde o que está calculado tem um oposto, oposto que unido com ele deve ser pensado igual a uma aniquilação... o que está calculado não são substâncias (objetos pensáveis para si), mas sim, relações entre dois objetos considerados dois a dois.".

O importante nas operações é a relação que associa dois números e as propriedades desta relação. Considerado assim os números negativos aparecem necessários em relação à soma, os números quebrados em relação ao produto, números reais em relação em operações envolvendo polinômios.

Outro aspecto destacado por Gauss é a primazia das relações sobre objetos, na matemática. Observando que os pontos que se seguem entrem em relação verticalmente e horizontalmente por adição e subtração de uma unidade (1, -1, i, -i), os pontos demonstram assim a realidade de uma ordem determinada. Afirma Gauss: "A matemática faz completa abstração dos objetos e do conteúdo de suas relações, preocupa-se apenas com a contagem e a comparação das relações entre si." O que constitui a importância e a finalidade da correspondência entre os números complexos e os pontos do plano, portanto, reside no conjunto de propriedades das relações envolvendo números complexos de um lado e a representação que os associa aos pontos do plano de outro lado. Aumentar ou diminuir de uma unidade (1, -1, +*i*, -*i*) um número complexo permite obter um dos números vizinhos. Este aumento ou diminuição corresponde entre os pontos do plano ao mesmo tipo de relação com os pontos vizinhos. "Estas relações são entregues à visão (*Anschauung*) apenas através de uma representação (*Darstellung*) no espaço". As relações recebem assim uma representação geométrica, e nem os números complexos, nem os pontos.

Deste modo, nas observações de Gauss há uma progressão: a apreensão sensível (*Versinnlichung*) dos números complexos por via dos pontos do plano, a constatação por analogia (o termo é de Gauss), e a identidade das relações entre os números, por um lado, e entre os pontos, por outro lado. A representação geométrica dos números complexos se transforma em representação (*Darstellung*) das relações entre os mesmos.

O significado do verbete *Versinnlichung*.

O termo *Versinnlichung* utilizado por Gauss para denominar a sua representação envolvendo números complexos e pontos do plano é um termo raro de retórica. Com efeito, Kant na Crítica do Juízo, (Kant, I, § 59) torna claro a significação do termo: "Toda Hipotipose (*subjectio sub aspectum*) ou *Versinnlichung* é duplo: ou ela é esquemática... ou ela é simbólica...". Não pretendo analisar aqui a concepção de Kant da *Versinnlichung* que não é a mesma do que a de Gauss. O fato é que o termo *Versinnlichung* remete á hipotipose. Segundo Quintilien (9, 2, 40) a hipotipose é uma figura retórica de pensamento.

> "Quanto à figura que como diz Cícero coloca os próprios objetos diante de nossos olhos, emprega-se não para indicar que um fato aconteceu, mas para fazer ver como tem acontecido... Outros chamam a hipotipose (hypotyposis), isto é, uma representação tão viva dos objetos pela palavra que se acredita mais ver do que ouvir a narrativa".

Mas será que a *Versinnlichung* é meramente uma apresentação sensível dos números complexos? Há certamente esta significação uma vez que Gauss tenta convencer aqueles que pensam que as quantidades imaginárias são quantidades impossíveis com o argumento que não há por traz das mesmas nenhuma realidade. Mas a *Versinnlichung* acrescenta também conceitos novos pelo fato de envolver relações espaciais e números complexos. Esta se manifesta assim como um novo domínio de reflexão para o matemático. Gauss nos confia, aliás, que quem sabia ler, já poderia estar a par desta representação:

> "O autor tem abordado há muitos anos esta parte importante da matemática com um ponto de vista diferente, segundo o qual um objeto poderia ser atribuído às grandezas imaginárias tão bem quanto às negativas: mas faltou até agora uma ocasião de expressar isto publicamente de maneira precisa, mesmo se o leitor atento reencontrasse facilmente os traços no escrito de 1799 sobre as equações, e no escrito do Premio sobre as transformações das superfícies" (ver cap. 4).

Gauss sugere assim que esta concepção o acompanhou desde as suas primeiras pesquisas. A nova questão que está emergindo é determinar em que sentido esta nova visão dos números complexos participa da pesquisa do próprio Gauss.

A pesquisa de Gauss e a representação dos números complexos

Na memória de 1799, Gauss propõe uma demonstração do chamado teorema fundamental da álgebra. Considerando um polinômio $P(x+iy)$ da variável complexa, ele separa a parte real $Q(x,y)$ da parte imaginária $R(x,y)$ ou seja escreva: $P(x+iy) = Q(x,y) + iR(x,y)$. Se (x_0, y_0) é uma raiz do polinômio, valem ambas $Q(x_0, y_0) = 0$ e $R(x_0, y_0) = 0$. O problema se reduz a encontrar no plano a interseção das curvas de equações $Q(x_0, y_0) = 0$ e $R(x_0, y_0) = 0$.

Este raciocínio é claramente relacionado à correspondência entre os números complexos e os pontos e as curvas do plano.

Na memória do Premio de 1822, Gauss estuda como representar as partes de uma superfície dada sobre outra superfície de tal modo que a representação seja semelhante em partes infinitamente pequenas. Neste estudo, Gauss resolve equações diferenciais parciais envolvendo função de variável imaginária. Constata que para uma função do tipo $F(z) = A + Bz$ onde A e B são números complexos, o fator de semelhança é igual a $|B|$. Mas para outras transformações, a conservação da semelhança é apenas nas partes infinitesimais (isto é, para o caso de uma função holomorfa). Aí fica evidente que Gauss não apenas possuía a representação geométrica dos números complexos, mas também utilizava esta visão para entender as propriedades das transformações complexas que transformam uma superfície em outra.

As pesquisas relativas aos resíduos biquadráticos se inserem entre essas duas memórias, pois podemos ler no diario de Gauss em data do 15 de fevereiro 1807: "teoria dos resíduos cúbicos e quadráticos iniciado". Em 22-2-1807: "demonstração desta teoria por um método tão elegante que esta está quase perfeita e não deixa nada a desejar. Ao mesmo tempo resíduos e não resíduos biquadráticos estão perfeitamente elucidados". Em 24-2-1807: "teoremas acrescentando desdobramentos de um grande preço à teoria precedente obtidos por uma elegante demonstração...

Gauss deu prosseguimento às suas pesquisas, uma vez que escreve, em 23-10-1813: "O mesmo dia em que tivemos um filho, tive a felicidade de encontrar enfim o fundamento da teoria geral dos resíduos biquadráticos que tinha procurado durante sete anos com muitos esforços, mas sempre em vão".

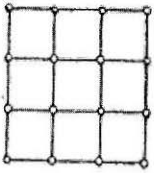
Enfim, em 9-7-1814, Gauss acrescenta:

> "Observação muito importante obtida por indução e relacionando de maneira muito elegante a teoria dos resíduos biquadráticos às funções lemniscáticas: Si a+bi é um número primo e se a-1+bi é divisível por 2+2i. o número de todas as soluções da congruência $1 = x^2 + y^2 + x^2y^2$ (mod. a+bi) inclusive $x = \infty$, $y = \pm i$, $x = \pm i$, $y = \infty$ está igual a $(a-1)^2 + b^2$ ".

Esta última observação mostra que a prática dos números complexos articulava a aritmética e o domínio das funções elípticas.

Um outro texto que mostra que a visão geométrica dos números complexos já acompanhava Gauss neste período onde escrevia o seu jornal é um manuscrito intitulado "Questões sobre a metafísica da matemática"(Gauss, X-1, pp. 396-397:

> "1. Qual é a condição fundamental para que uma associação de conceitos pudesse ser pensada como se aplicando as grandezas.



> 2. Tudo é muito simples, se se deixa de lado a divisibilidade ilimitada e se considerar apenas grandezas discretas. Por exemplo, os restos biquadráticos considerados como pontos, a transição portanto a relação enquanto grandezas, onde a significação de $a + bi - c - di$ está imediatamente clara".

Este tipo de observação está presente no texto de 1831 e confirma o fato que Gauss tinha esta visualização geométrica dos complexos bem antes de publicar o anuncio de 1831.

Temos ainda que mencionar a famosa carta de Gauss a Bessel de 1811 (Gauss W. B. X, p. 367) Onde Gauss explica a respeito de uma função da variável $x = a + bi$, em que se deve associar a este número x um ponto do plano cujas coordenadas são tomadas a partir de um eixo real e de um eixo imaginário. Esta visão acompanha assim os cálculos tais como o da integral de tal função. Esta observação mostra, aliás, que Gauss considera importante determinar o domínio sobre o qual a função esta definida, e a visualização geométrica deste domínio facilita os cálculos.

Podemos entender agora que a concepção de Gauss na sua representação geométrica dos números complexos é bem diferente das outras (Argand, 1806; Warren, 1828) que foram publicadas antes da de Gauss. Essas duas representações das grandezas imaginárias, de Argand e a de Warren, relacionam linhas orientadas às operações sobre as grandezas imaginárias, mas se restringem a abordar esta relação: enquanto a representação de Gauss é uma ferramenta efetiva que abrange todos os domínios relativos às grandezas imaginárias: aritmética, funções elípticas, funções da variável complexa, transformações de superfícies. Por um lado, se apresenta uma nova representação, por outro, um modelo efetivo sobre o qual se fundamentam a pesquisa e o desenvolvimento de teorias originais. A perspectiva de Gauss é, assim, bem mais rica, por permitir novos desdobramentos da teoria.

Gauss versus Kant

No texto de 1831, Gauss critica Kant explicitamente:

> "Esta diferença entre direita e esquerda é *em si* completamente determinada, desde que foram completamente definidos (à vontade) os sentidos para frente e para trás *no* plano, assim como para acima e para baixo em relação aos dois lados do plano, ainda que possamos comunicar nossa intuição dessa distinção aos outros *apenas* através de uma indicação relativa às coisas presentes diante de nós".

Gauss ainda acrescenta a nota a seguir:

> "Kant já tem feito as duas observações, mas não se entende como este filósofo sutil poderia pensar encontrar na primeira uma prova de sua opinião, que o espaço seria apenas uma forma de nossa intuição (*Anschauung*) externa, pois a segunda mostra tão claramente o contrário, que o espaço deve ter uma significação real independentemente do nosso modo de intuição" (ver cap. 4).

Esta observação de Gauss marca uma das diferenças essenciais que opõe a concepção kantiana do espaço à sua própria concepção. Com efeito, segundo Kant o espaço é uma forma *a priori* da intuição e a geometria é a prova desta concepção:

> "A geometria é uma ciência que determina sinteticamente e, no entanto, *a priori*, as propriedades do espaço. Qual deve ser, portanto, a representação do espaço para que tal conhecimento deste seja possível? Precisa que seja na origem uma intuição; pois de um simples conceito não se pode tirar proposição que ultrapassam o conceito como isso acontece, no entanto, na geometria (Introdução V). Mas esta intuição deve se encontrar em nos *a priori*, isto é, anteriormente a toda percepção de um objeto e, por conseqüente, ser intuição pura e não empírica" (Kant, CRP, exposição transcendental do espaço).

Já Gauss pensou o espaço e os seus postulados com uma realidade independentemente da razão e sujeitos a verificação experimental. Na carta do 8-11-1824 a Taurinus, observa Gauss:

> "posso resolver todo problema de geometria não euclidiana exceto a determinação de uma constante que não se deixa obter *a priori*. Maior é esta constante, mais se aproxima da geometria euclidiana, que corresponde a um valor infinito da constante... Se a geometria não euclidiana fosse a verdadeira e se esta constante fosse certa razão com as grandezas accessíveis a nossas medidas sobre a terra e no céu, poderíamos obtê-la *a posteriori*".

Ou seja, os postulados da geometria não dependem da intuição pura. Enquanto fundamentos das geometrias dependem unicamente do entendimento e dos conceitos definidos *a priori*, mas em relação ao real, ou seja, a sede dos fenômenos, torna-se necessário verificar qual é a classe de postulados adequada ao real.

Outro aspecto que separa Gauss de Kant é a relação que este filósofo instaura entre intuição (*Anschauung*), Entendimento (*Verstand*) e imaginação (*Einbildungskraft*). Se as coisas se apresentam à sensibilidade na sua infinita diversidade, como então aplicar os conceitos à intuição? Aí vem o papel da imaginação produzindo esquemas que possibilitem o entendimento realizar no conceito a síntese desta diversidade. Como o explica Kant:

> "Toda Hipotipose (*subjectio sub aspectum*) ou *Versinnlichung* é duplo: ou ela é esquemática quando a intuição que corresponde a um conceito do entendimento é dada *a priori* ou ela é simbólica quando a um conceito que apenas a razão pode pensar, nenhuma intuição sensível pode ser adequada, é submetida uma intuição que se acorda ao conceito apenas pela regra do

> procedimento, e não pela intuição mesma, portanto com a forma da reflexão e não com o conteúdo" (Kant, crítica do Juízo, id.).

Segundo Kant os conceitos algébricos seriam entregues à intuição por via de representações simbólicas, enquanto os conceitos de geometria seriam intuídos por via de esquemas. Este sistema pode dar conta da matemática separada em disciplinas (aritmética, álgebra, geometria, analise), mas não dá conta do movimento vivo da matemática do século XIX, pois neste são criadas várias novas conexões entre disciplinas que pareciam completamente separadas. Assim a *Versinnlichung* gaussiana dos números complexos é esquemática e simbólica e representa na realidade um novo domínio da pesquisa matemática onde os conceitos matemáticos não seguem o processo de produção descrito por Kant. Deste modo, uma transformação do tipo $F(z) = A + Bz$ está construída na intuição simbolicamente por via de uma regra, ou o fato de conservar os ângulos está entregue à intuição pelo domínio e contradomínio da transformação, ou seja, como expresso Kant, por via de esquematismo ? A geometria e a álgebra não têm assim um tipo específico de intuição própria, mas, sim, fusionam os seus métodos. Assim, o espaço e os conceitos matemáticos não se originam a partir da intuição, mas dos conceitos construídos diretamente pelo entendimento. A faculdade de tornar sensíveis estes conceitos é devida à relação dos conceitos com a realidade do espaço real, ou, apenas, definido. Gauss coloca ao final do seu texto a questão de saber "porque as relações entre coisas que demandam uma variedade de mais de duas dimensões não pode ser inda tratada na aritmética universal, segundo outras espécies admissíveis de grandeza". Esta questão (em parte resolvida por Hamilton) deixa entrever uma extensão tanto da noção de número quanto da noção de espaço.

Assim, a filosofia de Kant não pode dar conta da própria evolução da matemática no século XIX. A representação dos números complexos por Gauss mostra o divórcio que se manifesta entre a velha concepção da matemática e a nova que Gauss quer promover.

A recepção do texto Gauss

É interessante observar a impressionante sequência de artigos e de livros em língua alemão que se segue após este trabalho de Gauss. W. Matzca enumera e comenta dez publicações do período 1834-1847 (Matzca [1850], pp. 150-151). Se esses trabalhos não acrescentam elementos novos, possibilitaram pelo menos uma divulgação rápida da visualização geométrica dos números complexos (Flament 2003, pp. 272-273).

A fecundidade desta abordagem dos números complexos será ainda confirmada pelos trabalhos de Riemann. Nos *Princípios fundamentais para uma teoria geral da função da variável complexa* (Riemann 1851), Riemann considera, desde as primeiras páginas, as funções complexas como uma relação entre pontos de dois planos complexos e quase imediatamente como funções do plano no mesmo plano (p. 6). Todo o seu trabalho considera propriedades geométricas das funções; a diferencial de uma função complexa é vista como uma transformação linear conservando os ângulos; as transformações multiformes utilizam planos múltiplos conectados por ramificações. A obra finaliza com o problema de uma representação de uma superfície por outra com uma referência aos dois mais importantes trabalhos de Gauss sobre o assunto.

Riemann, aliás, situa o seu trabalho como uma continuidade da obra de Gauss. Na sua tese de *Habilitation* [livre docência] (Riemann [1854]), pode-se ler « exceto algumas breves indicações dadas por M. Gauss na sua segunda memória sobre os resíduos biquadráticos nas *Gelehrte Anzeigen de Goettingen* e na memória de *Jubilé*, e algumas pesquisas filosóficas de Herbart, não pude ser ajudado de algum trabalho anterior". A fonte de inspiração de Riemann fica assim ao final da "auto resenha" onde Gauss evoca uma extensão do plano complexo a variedades de dimensão superior.

Outro domínio que aparecem, nos anos que se seguem, é o estudo das propriedades das transformações geométricas planas por via dos números complexos. Siebeck parece ter sido o primeiro a desenvolver este tipo de estudo em um artigo *Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen* (citado por Cartan-Study, n. p. 364). Expõe as propriedades dos números complexos e apresenta algumas funções elementares como funções de semelhança com os números complexos. Talvez o exemplo mais significativo seja o estudo de algumas funções circulares (Siebeck [1858], pp. 243-244), onde Siebeck reencontra os resultados de Möbius [1855], ao qual se refere, explicitamente. Möbius havia estudado essas transformações por via sintética. Aí a análise complexa apropria-se o conteúdo.

Essas transformações circulares, aliás, desempenham um papel determinante na geometria projetiva (homografias) assim como o ressalta F. Klein, desde o *Programa de Erlangen* (Klein [1872], pp. 18-21) a respeito do que ele chama geometria dos raios vetores recíprocos (nome que era dada nessa época a este tipo de transformação). Estas transformações têm também um papel na construção dos modelos da geometria hiperbólica, como o mostrou Poincaré nas suas memórias sobre as funções fuchsianas (Gray-Walter [1997]).

Conclusão

O artigo de Gauss inaugura uma nova perspectiva ao propor a sua representação geométrica envolvendo os complexos. Mas esta nova perspectiva pode apenas ser entendida se considerarmos todos os trabalhos de Gauss que utilizam esta visão. Estes trabalhos fornecem a plena razão de ser desta representação e a sua rápida difusão e utilização pelos matemáticos alemães. A representação de Argand não teve tanto respaldo na pesquisa matemática. Deve-se também ao fato da ausência desta visão geométrica nos desenvolvimentos de Cauchy sobre a teoria das funções de variável complexa (Dalmenico-Dahan, 1997, pp. 30-32) que a teoria veio a se desenvolver, sobretudo na Alemanha a partir de Riemann. O mesmo fenômeno ocorre no que diz respeito a aritmética (Jacobi) ou a geometria das transformações planas (Clebsch, Klein). Com as suas pesquisas, Gauss deixou uma herança que a matemática alemã fez frutificar no decorrer do século XIX.

Referências

Argand [1806] *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Paris, 1806.

Cartan, E. et Study E. [1908], "les nombres complexes", *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, t. 1,vol. 1, fasc. 3. pp. 329-425.

Cauchy, A. L. [1847] « Mémoire sur les quantités géométriques », *Oeuvres Complètes* Gauthier-Villars. Série 2, Volume 14, pp. 175-202 Paris, 1882.

Dahan Dalmenico, Amy [1997] « L'étoile « imaginaire » a-t-elle immuablement brillé ? Le nombre complexe et ses différentes interprétations dans l'oeuvre de Cauchy ». in *Le nombre, une hydre à n visages*, Dominique Flament (ed.), Ed. de La Maison des sciences de l'Homme Paris.

Flament, D. [2003] *Histoire des nombres complexes*, CNRS editions Paris 2003.

Gauss, C. F. [1831a] « Theoria residuorum biquadraticorum », Werke II, p. 93-148.

Gauss, C. F. [1831b] „Selbstanzeige von Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda », *Goettingen gelehrte Anzeigen*, 23 de abril de 1831, Werke vol. II, p. 169-178.

Gauss, C.F. *Werke*, Band I-XII. herausgegeben von der (Königlichen) Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1863-1929.

Gray, Jeremy & Walter Scott A. [1997], "Introduction to Poincaré's Three Supplements" in *Three Supplements on Fuchsian Functions by Henri Poincaré,* Jeremy J. Gray and Scott A.Walter ed., Berlin 1997, pp. 1–25.

Kant, I. [1787], *Kritik der reinen Vernunft*, zweite Auflage in Gesammelte Schriften (Akademie-Ausgabe), Band III.

Kant, I. [1788], *Kritik der Urteilskraft*, in Gesammelte Schriften (Akademie-Ausgabe), Band XX.

Klein, F. [1871] Erlanger Programm, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, in Gesammelte mathematische Abhandlungen, B. 1, Berlin 1921, pp-460-497.

Matzca, Wilhelm [1850], *Versuch einer Richtigen Lehre von der Realitaet der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra oder einer Grundlehre von der Ablenkung algebrischer Grössenbeziehungen*, Prag 1850.

Möbius, A [1855] „Die Theorie der Kreisverwandschaft in rein geometrischer Darstellung", Leipzig 1855, in Möbius *G.W.* B. II. Leipzig 1886, pp. 243-341.

Riemann, B. [1851] « Principes généraux pour une théorie générale des fonctions d'une variable complexe » in Bertrand Riemann, *Oeuvres mathématiques*, trad. L. Laugel Paris 1898 pp. 1-60.

Riemann, B. [1851] „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse." In Bernhard Riemann's gesammelte *Matematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, 1876 pp. 3-47.

Riemann, B. [1854] „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen." in Bernhard Riemann's gesammelte *Matematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, 1876 pp. 254-269.

Siebeck, P. [1858] „Ueber die Graphische Darstellung imaginär Funktionen" in *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Berlin; 1826, pp. 221 – 253.

Warren, J. [1828], *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities*. Cambridge, 1828.

Capítulo 7

Princípios fundamentais para uma teoria geral das funções de uma grandeza variável complexa

Bernhard Riemann

Seleção, traduzido por Gerard E. Grimberg a partir do texto alemão, Bernhard Riemann's gesammelte Matematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass, 1876 pp. 3-9.

I.

Caso se denota por z uma grandeza variável que pode tomar sucessivamente todos os valores reais possíveis, então quando a cada uma destes valores corresponde um valor único da grandeza determinada w, diz-se que w é função de z e, enquanto z percorre de uma maneira contínua todos os valores entre dois valores fixos, enquanto w varia igualmente de uma maneira contínua, diz-se que esta função w é contínua neste intervalo.

Esta definição não estipula nenhuma lei entre os valores isolados da função, está claro, pois desde que se dispõe desta função em um intervalo determinado, o modo do seu prolongamento fora deste intervalo fica completamente arbitrário.

A maneira como a grandeza w depende de z pode estar dada por uma lei matemática, de tal modo que por operações de cálculo determinadas, poder-se-ia de cada valor de z, deduzir o valor correspondente de w.

A possibilidade de ser determinadas para todos os valores de z inclusos em um intervalo dado pela mesma lei de dependência era outrora atribuída apenas às funções de certa classe (functiones continuae na terminologia de Euler); mas pesquisas modernas evidenciaram que existem expressões analíticas para as quais toda função contínua pode ser representada em um intervalo dado.

Está, portanto, indiferente definir a dependência da grandeza w da grandeza z como dada arbitrariamente ou a partir de umas operações de cálculo determinadas. As duas definições são equivalentes devido aos teoremas que acabamos evocando.

Mas é diferente quando a variabilidade da grandeza z não se limita aos valores reais e que se admite também valores complexos da forma x+yi (onde $i=\sqrt{-1}$).

Sejam x+yi e x+yi+dx+dyi dois valores da grandeza *z* que diferem infinitamente pouco entre si e aos quais correspondem os valores u+vi e u+vi+du+dvi da grandeza *w*.

Ora, quando a dependência da grandeza w de z está tomada arbitrariamente, a razão $\frac{du+dvi}{dx+dyi}$ irá variar, de uma maneira geral entre os valores dx e dy, pois se pôe-se $dx+dyi=\varepsilon e^{\varphi i}$, temos

$$\frac{du+dvi}{dx+dyi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]\frac{dx-dyi}{dx+dyi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]e^{-2\varphi i}$$

Mas, de qualquer maneira que w pudesse ser determinada como função de *z* por uma combinação de operações elementares do cálculo, o valor da derivada $\frac{dw}{dz}$ será sempre independente do valor particular da diferencial *dz*[5].

É, portanto evidente que por esta via não se pode expressar uma dependência qualquer da grandeza complexa w da grandeza complexa *z*.

Este caráter, que acabamos indicando, comum a todas as funções que podem ser determinadas de uma maneira qualquer pelas operações de cálculo, será tomado por nós como base na pesquisa seguinte, onde iremos considerar tal função independentemente de sua expressão. Agora então sem demonstrar a legitimidade geral e suficiente para uma dependência exprimível pelas operações de cálculo, tomaremos como ponto de partida a definição seguinte:

Uma grandeza variável complexa w é dita uma função de outra variável complexa z quando ele varia com ela de tal sorte que o valor da derivada $\frac{dw}{dz}$ é independente da diferencial *dz*.

[5] Esta afirmação é evidentemente justificada em todos os casos onde se pode tirar da expressão de w em z, com as regras de diferenciação, uma expressão de $\frac{dw}{dz}$ em z; quanto à legitimidade rigorosa e geral, não nos preocuparemos por enquanto.

II.

A grandeza z e igualmente a grandeza w serão consideradas como grandezas variáveis que podem tomar todo valor complexo.

A concepção de tal variabilidade, que é relativa a um domínio conexo de duas dimensões é essencialmente facilitada si se apóia na intuição geométrica.

Imaginemos cada valor x+yi da grandeza z representada por um ponto O do plano A, cujas coordenadas retangulares são x e y, e cada valor u+vi da grandeza w por um ponto Q do plano B, cujas coordenadas retangulares são u e v. Toda relação de dependência da grandeza w de z será representada então como uma relação de dependência da posição do ponto Q daquela do ponto O. Quando a cada valor de z corresponde um valor determinado de w, variando de uma maneira contínua com z, em outros termos u e v são funções contínuas de x e y, então a todo ponto do plano A corresponde um ponto do plano B, a toda linha, de uma maneira geral, uma linha, a toda porção conexa da superfície uma porção de superfície igualmente conexa. Por consequente, poder-se-ia figurar-se esta dependência da grandeza w de z como uma representação do plano A no plano B.

III.

Se trata agora de procurar qual propriedade possui esta representação quando w é uma função da grandeza complexa z, isto é, quando $\frac{dw}{dz}$ é independente de dz.

Designaremos por o um ponto determinado do plano A na vizinhança de O, e sua imagem no plano B por q, e em seguida por x+yi+dx+dyi, e por u+vi+du+dvi os valores das grandezas z e w nestes pontos. Então dx, dy, du, dv, podem ser considerados como as coordenadas retangulares dos pontos o e q relativamente aos pontos O e Q tomados como origem; e se põe-se $dx + dyi = \varepsilon e^{\varphi i}$ e $du + dvi = \eta e^{\psi i}$, as grandezas $\varepsilon, \varphi, \eta, \psi$ serão as coordenadas polares destes pontos relativamente a estas mesmas origens. Sejam agora o' e o'' duas posições qualquer determinadas do ponto o, infinitamente vizinhos do ponto O, e atribuímos às designações respectivas que correspondem a elas as mesmas letras que precedentemente, mas acentuadas; tem-se por hipótese, $\frac{du'+dv'i}{dx'+dy'i}=\frac{du''+dv''i}{dx''+dy''i}$ e então $\frac{du'+dv'i}{du''+dv''i}=\frac{\eta'}{\eta''}e^{(\psi'-\psi'')i}=\frac{dx'+dy'i}{dx''+dy''i}=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}e^{(\varphi'-\varphi'')i}$ e daí $\frac{\eta'}{\eta''}=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ e

$\psi'-\psi''=\varphi'-\varphi''$,

isto é, que nos triângulos o'Oo", q'Qq", os ângulos o'Oo", q'Qq" são iguais e estão entre lados proporcionais.

Por conseqüente, entre dois triângulos infinitesimais que se correspondem, há semelhança e está igualmente o caso em geral entre as partes menores do plano A e sua representação no plano B.

Esta proposição sofre uma exceção apenas nos casos particulares em que os acréscimos correspondentes das grandezas z e w não estariam entre si em uma razão finita, hipótese que em nossa dedução desta razão é tacitamente excluída[6]

IV.

Se coloca-se $\frac{du+dvi}{dx+dyi}$ sob a forma $\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}i\right)dx+\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}i\right)dyi}{dx+dyi}$, é evidente que esta expressão para dois pares de valores qualqueres de dx e dy tera o mesmo valor na única condição que $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$.

Essas condições são por conseqüente necessárias e suficientes para que $w=u+vi$ seja uma função de $z=x+dy$.

Para os termos separados desta função, destas condições deduz-se as seguintes: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ que formam a base para o estudo das propriedades que dizem respeito a um dos termos de tal função considerado separadamente. Faremos seguir a demonstração das mais importantes destas propriedades por um estudo mais aprofundado da função completa; mas antes para tornar mais accessível o terreno destas pesquisas,

---

[6] Sobre este assunta consultar: *Resolução geral do problema: representar as partes de uma superfície dada de tal sorte que a representação seja semelhante á original em todas mais pequenas partes* por C.-F. Gauss (Memória premiado em resposta à questão colocada pela Sociadade Real das Ciências de Copenhagen em 1822). (Astronomische Abhandlugen, herausgegeben von Schumacher, Drittes Heft, Altona, 1825).

examinaremos e estabeleceremos alguns pontos pertencendo a domínios mais gerais.

V.

Nas considerações que seguem, nos limitaremos à variabilidade das grandezas *x*, *y* a um domínio finito, e, como lugar do ponto O, nos iremos considerar não o plano A, mas uma superfície T que recobre este plano.

Escolhamos este modo de representação onde não há nada chocante a falar de superfícies superpostas, a fim de puder permitir que o lugar O pudesse recobrir várias vezes a mesma parte do plano; mas em tal caso, suporemos que as porções de superfície superpostas não se aplica ao longo de uma linha, de tal sorte que não acontece que a superfície seja dobrada, nem parcelada em partes superpostas.

O número de partes de superfície superpostas em cada região do plano está então completamente determinado quando se dá o contorno em forma e direção (isto é, segundo o exterior e o interior do dito contorno); o curso destas partes pode ainda estar, todavia figurado de diferentes maneiras.

Com efeito, se nos traçamos sobre o plano uma linha qualquer *l* que seciona a região do plano recoberto pela superfície, o número de partes de superfícies superpostas varia apenas quando da travessia do contorno, e, isso, de tal sorte que, esta travessia sendo do exterior para o interior, este número varia de +1, e no caso contrário, de -1; por conseqüente este número está em todo lugar determinado. Seguindo ao longo das bordas desta linha, cada parte de superfície limítrofe segue o seu curso de uma maneira perfeitamente determinada, enquanto a linha não encontra o contorno, pois uma indeterminação apenas pode acontecer em um ponto isolado, isto, é, por consequente, seja em um ponto da linha mesma, seja a uma distância finita desta linha.

Nos podemos falar, portanto, limitando nossas considerações a uma parte da linha l seguindo o seu curso no interior da superfície e a faixas de superfície suficientemente pequenas situadas dos dois lados desta linha, de porções de superfície limítrofes *determinadas*, cujo número é o mesmo de cada lado da linha l e que denotaremos, após ter atribuído certa direção a esta linha, à esquerda por $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e a direta $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Cada porção de superfície a se ligara a uma das porções da superfície a'; em geral, esta será a mesma porção de superfície ao longo da linha l, no entanto, esta parte poderia em certos pontos particulares da linha *l* não ser a mesma. Suponhamos, com efeito, que acima de tal ponto ó (isto é um ponto situado sobre o curso anterior de l) as porções $a_1, a_2, \dots, a_n$ se juntam successivamente na ordem escrita às porções de superfície $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$, mas que abaixo de ó, estejam às porções de superfície $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots, a_n$ que se juntam a $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$, os indícios $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sendo diferentes de 1, 2, ...,n apenas pela ordem; isto dado, um ponto que em cima de ó passa de a_1 em a'_1, quando em baixo de ó ele volta sobre o lado esquerdo, irá passar sobre a porção de superfície a_{α_1}, e quando descreve um circuito em torno de ó de esquerda a direitao indicio da porção de superfície sobre o qual se encontra tomara sucessivamente os valores 1, α_1, α_{α_1},...,μ, α_μ, ...

Nesta sequência enquanto o termo 1 não se encontra de novo, todos os termos são necessariamente diferentes, pois um termo intermediário α_μ é necessariamente precedido de μ, e na ordem de sucessão por todos os termos antecedentes até 1. Mas quando após certo número de termos, *m*, por exemplo, número inferior evidentemente a *n*, o termo 1 reaparece, os outros termos então devem voltar na mesma ordem. O ponto móvel em torno de ó volta então depois m circuitos sobre a mesma porção de superfície e sua marcha é limitada a *m* das partes de superfícies superpostas que se reúnem em um ponto único sobre ó. Este ponto chamá-lo-emos o ponto de ramificação de ordem m-1 da superfície T. Aplicando este procedimento as *n* - *m* partes de superfície restantes, estas, quando o seu curso respectivos não são isolados, se distribuem em sistemas de $m_1, m_2, \dots$ porções de superfícies, neste caso no ponto ó estão igualmente situados pontos de ramificação de ordem respectivas $m_1 - 1, m_2 - 1, \dots$

Quando a forma e a direção do contorno de T, assim como a posição de seus pontos de ramificação são dadas, T está, seja perfeitamente determinada, ou seja, limitada a um número finito de figurações distintas; este último ponto resulta do fato que esses dados podem ser relativos a porções diferentes de superfície superpostas.

Uma grandeza variável, que de um modo geral, isto é, sem excluir a exceção feita em linhas ou pontos isolados[7], tomara em todo ponto O da superfície T um valor determinado variando de maneira contínua com a posição deste ponto, pode ser evidentemente considerado como uma função de *x*, *y*, e em todo parte onde será questão de função de *x*, *y*, adotaremos esta definição.

Antes de passar ao estudo de tais funções, vamos introduzir, entretanto alguns esclarecimentos relativos à conexão de uma superfície. Limitaremos-nos o nosso exame a umas superfícies que não parcelados ao longo de uma linha.

[...]

[7] Esta restrição não se apresenta pelo efeito mesmo da definição de uma função, mas é necessária para que o cálculo infinitesimal pudesse se aplicar. Uma função que é descontinua em todos os pontos de uma superfície, como por exemplo uma função que para x e y comensuráveis, tomaria por valor 1, e em todas outras partes o valor 2, não pode ser submetido a uma diferenciação, nem a uma integração; não se pode de maneira alguma aplicar a tal função o cálculo infinitesimal. A limitação arbitrariamente feita a respeito da superfície T se justificará mais acima (art. XV).

ISBN 978-85-89097-64-2

Sociedade Brasileira de
História da Matemática
SBHMat

Caixa postal 1631
CEP 59.078-970 Natal- RN - Brasil
Sbhmat@ccet.ufrn.br

Apoio

UNICAMP

CENTRO DE LÓGICA, EPISTEMOLOGIA
E HISTÓRIA DA CIÊNCIA - UNICAMP

Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência
UNICAMP
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 251
CEP 13083-859
Campinas - SP - Brasil
www.cle.unicamp.br